

Posudek vedoucího na diplomovou práci Bc. Lenky Slavíkové

Luboš Pick

Jedním z nejdůležitějších úkolů teorie prostorů funkcí je nalezení nutných a postačujících podmínek pro kompaktní vnoření mezi dvěma prostory funkcí. Pro aplikace například k nacházení řešení parciálních diferenciálních rovnic či v harmonické analýze nebo matematické fyzice se nejčastěji jedná o vnoření prostorů Sobolevova typu (tedy prostorů, jejichž norma obvykle měří jisté vlastnosti gradientu) do prostorů integrovatelných nebo diferencovatelných funkcí.

Část problémů z této oblasti je takzvané isoperimetrické povahy. To znamená, že lze odvozovat spojitá vnoření Sobolevových prostorů z isoperimetrických nerovností pro dané prostory s mírou, na nichž jsou zkoumané funkce definovány. Pro některé konkrétní situace platí i opačná implikace. Důležité speciální případy takové situace představují jednak rozličné třídy oblastí v eukleidovském prostoru a jednak pravděpodobnostní prostory se součinnou mírou, jejichž základním etalonem je eukleidovský prostor opatřený Gaussovou mírou. Největším tradičním nedostatkem těchto výsledků je to, že platí výhradně pro první řád Sobolevových vnoření. Donedávna nebyl znám způsob, jak přenést vztah mezi isoperimetrickou nerovností a nerovností Sobolevovou na nerovnosti řádu vyššího než jedna. Tento problém byl sice nedávno vyřešen pomocí jistých iteračních metod, ovšem pouze pro vnoření spojitě (nikoli kompaktní).

Diplomantka dostala na začátku dvouletého období, po které práce vznikala, úkol charakterizovat odpovídajícím způsobem kompaktní vnoření. Tento úkol splnila beze zbytku a s velkou rezervou (tj. dokázala mnohem více, než zadání diplomového úkolu předpokládalo). Zadání bylo poněkud náročné až riskantní v tom smyslu, že výše zmíněná iterační metoda a s ní spojené výsledky vznikaly souběžně s tvorbou diplomové práce. Navíc byl iterační přístup během zmíněné doby několikrát významně modifikován. Diplomantka si však s touto netriviální situací poradila bravurně a nakonec dosáhla velkého množství hlubokých výsledků.

V diplomové práci slečny Lenky Slavíkové je podána obecná postačující podmínka pro kompaktní vnoření Sobolevova prostoru vybudovaného nad obecným prostorem s normou invariantní vůči nerostoucímu přerovnání libovolného řádu do jiného prostoru s normou invariantní vůči nerostoucímu přerovnání za předpokladu, že pro příslušný prostor s mírou, na němž jsou funkce definovány, platí isoperimetrická nerovnost. V nejdůležitějších konkrétních případech (Johnovy oblasti, Maz'ovy oblasti, pravděpodobnostní prostory) autorka dokázala, že tato postačující podmínka je zároveň nutná, jde tedy o charakterizaci. Slečna Slavíková zcela samostatně vyvinula novou účinnou metodu umožňující posoudit kompaktní Sobolevovo vnoření na základě odpovídajících poznatků pro vnoření spojitě. Důsledkem je ucelený soubor poznatků zahrnující velké množství konkrétních škál prostorů funkcí, které nepochybně najdou široké uplatnění v aplikacích.

Výsledky slečny Slavíkové jsou na studentku magisterského studia zcela mimořádné. Autorka ve své práci prokázala neobyčejnou tvůrčí invenci a vysokou matematickou kultivovanost. Odvodila velké množství hlubokých nových poznatků a své výsledky pečlivě a přehledně sepsala. Práce je napsána anglicky, a to na velice vysoké jazykové úrovni. Bezpochyby se jedná o výsledky publikovatelné ve velmi kvalitním mezinárodním matematickém časopise.

Na závěr bych rád vyzdvihl i to, že autorka pracovala po celý čas zcela samostatně a zadaný úkol vyřešila metodami, které sama odvodila, přičemž částečně využila i výsledků ze svého vlastního staršího článku, jenž byl mezitím přijat k publikaci do mezinárodního časopisu se slušným impaktním faktorem.

Diplomová práce slečny Slavíkové si zaslouží skutečně vysoké ocenění.

V Praze 23. května 2012

Luboš Pick