

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diplomová práce

Hra NIM – netradiční prostředí v učení se matematice
Game NIM – Non-traditional Environment in Learning of Mathematics

Vedoucí práce:

PhDr. Jana Kratochvílová, Ph.D.

2006

Vypracovala:

Miroslava Lebedová

Učitelství pro 1. st. ZŠ

Prezenční studium

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne 17. 3. 2006

Velmi děkuji PhDr. Janě Kratochvílové, Ph. D. za konzultace a cenné připomínky, které mi pomohly práci zkvalitnit.

RESUMÉ

Ve stěžejní části této práce jsem hledala vítězné strategie různých tipů hry NIM. Soustředila jsem se hlavně na vlastní proces jejich objevování, v jehož důsledku vznikl obecný vzorec pro konkrétní tip hry NIM. Jeho platnost jsem ještě následně ověřovala. Celý proces je doprovázen sebereflexí.

Mým dalším cílem bylo zjistit, zda je hra svou náročností vhodná pro žáky 1. stupně základní školy. Proto jsem si na základě svých osobních zkušeností se hrou zvolila jeden druh NIMu a ten odehrála s několika dvojicemi žáků 5. ročníků ZŠ. Pozorovala jsem, jak žáci hledali strategii hry, a zapisovala jejich výpovědi. Vybrané předexperiment a experiment jsem následně analyzovala.

SUMMARY

In the main part of my thesis I looked for winning strategy of different types of the game NIM. I focused on my own process which led to discovery of a general formula of concrete type of NIM. After that its validity was proved. The whole process was accompanied by self-reflection.

The following aim of thesis was to find out if NIM is an appropriate game for pupils of primary schools. Therefore on the basis of my own experiences I chose one type of NIM and I used it for experiments with pupils (aged 10-11). I observed pairs of pupils looking for winning strategy and I made notes of their reactions. Then deep analysis of one pre-experiment and one experiment followed.

OBSAH:

1. ÚVOD	6
2. MATEMATICKÉ PROSTŘEDÍ	8
2.1 Pravidla	8
2.2 Slovníček	9
3. DENÍK	10
3.1 NIM *	12
3.2 NIM	18
3.3 DVOUHROMÁDKOVÝ NIM	25
3.3.1 S neomezeným počtem odebraných kamenů	25
3.3.2 S omezeným počtem odebraných kamenů.....	27
3.4 NIM EXTRA	30
3.5 NÁVRAT K NIMU*	40
3.6 NIM * SPECIÁL	42
3.7 NÁVRAT K NIMU EXTRA	52
3.8 NÁVRAT K NIMU * SPECIÁL	61
4. EXPERIMENTY	77
4.1 PŘEDEXPERIMENTY	77
4.1.1 Příprava	77
4.1.2 Realizace	77
4.1.3 Průběh	79
4.1.4 Zhodnocení	93
4.2 EXPERIMENTY.....	94
4.2.1 Scénář	94
4.2.2 Realizace.....	94
4.2.3 Průběhy	95
4.2.4 Zhodnocení	101
5. ZÁVĚR	102
LITERATURA	
PŘÍLOHY	

1. ÚVOD

Při volbě předmětu, z něhož budu psát diplomovou práci, mě mezi prvními oslovila matematika. Patří totiž k mým oblíbeným, a to po téměř celý čas školní docházky.

Už v posledním ročníku mateřské školy jsem prý byla počítáním a učením tolik nadšená, že jsem neustále zasahovala do domácí přípravy mé sestry Jany, která tou dobou navštěvovala třetí ročník základní školy. Můj elán pro počítání mi vydržel i po přestupu na základní školu. Byla jsem nejrychlejším počtářem a vyžadovala i úlohy navíc. Na druhém stupni jsem se každoročně účastnila matematických olympiád i soutěží Klokán a Kovboj. Na Střední pedagogické škole (dále SPgŠ) v Čáslavi se můj postoj k matematice trochu změnil - zhoršil. Ne proto, že by mi matematické úlohy činily potíže, ale kvůli paní učitelce, jež kladla stejné nároky jak na gymnazisty, tak i na nás, studenty SPgŠ. Je totiž zřejmé, že jsme v tomto souboji nemohli uspět pro zcela odlišné specializace obou sloučených škol. Matematika se pro nás stala postrachem. Sice mi na vysvědčení nikdy nehrozila horší známka než dvojka, ale obav jsem měla vždy mnoho.

Po příchodu na vysokou školu mě (i tři bývalé spolužačky ze SPgŠ) čekal vstupní test z matematiky. Asi nebylo náhodou, že jsme v něm ani jedna neuspěla – byly jsme totiž blokovány stereotypním způsobem uvažování, k němuž nám dopomohla středoškolská vyučující. Proto jsme se zapsaly do výběrového semináře z matematiky, kde nás navrátily k tomu, co se nazývá zdravé a svobodné myšlení. Tam jsem ztratila pocit strachu a test na konci semestru napsala dokonce na 91 %. Od té doby nemám s matematikou potíže, dokonce si i dobrovolně počítám ve svém volném čase. Způsobuje to hlavně nadšení, které na mě vyzařuje ze všech učitelů matematiky, s nimiž se zde na fakultě setkávám. Jejich nadšení elán pro práci mě velmi povzbuzuje. Asi i

proto jsem si v nabídce kurzů a seminářů vybrala modul prohloubené matematiky, navštívila jsem i hodiny matematiky s profesorem z Anglie. Od letního semestru 2. ročníku se v českém týmu účastním mezinárodního projektu COSIMA, spolu se skupinami z Anglie a Německa. Jeho náplní bylo nejdříve řešení netradičních úloh, nyní se podrobně zabýváme úlohami, které rozvíjejí mentální schopnost klasifikovat. Doufám, že toto získané nadšení pro matematiku předám jednou svým žákům.

S úlohami NIM jsem se seznámila již v předmětu Úvod do studia matematiky, i když jsem si to tehdy neuvědomovala, jelikož nám hra nebyla představena jako NIM, ale jako jedna ze zajímavých úloh. Při souboji s vyučující jsme kvůli neznalosti strategie nikdy nevyhráli. Hluběji jsem se NIMem zabývala v předmětu Didaktika matematiky I. Řešili jsme tam jednohromádkový NIM s 10 kameny na hromadě, kdy se v jednotlivých hrách směly vzít maximálně 2 kameny, postupně 3, i 4 kameny při jednom tahu. Nejdříve jsme hráli se svými spolužáky a následně celá skupina shrnula své poznatky. Vítězství v těchto prvotních pokusech her NIM byla spíše náhodná, založená na manipulativní činnosti (nevím přesně, zda jsme hrály se sirkami, tužkami, či jiným materiálem). Já i moje soupeřka jsme si však uvědomovaly, že nejhorším je stanoviště 3 kamenů, neboť z něho nelze nikdy vyhrát. Najít strategie pro hru NIM 1 až 5, 1 až 6 až 1 až n odebraných kamenů a pro hru NIM* bylo výzvou vyučující. Hra mě tolik nadchla, že jsem se ke vzorci pro hru 1- n dopracovala ještě téhož odpoledne. Potěšilo mě, že moje předpokládané závěry byly správné, i to, že jsem v závěrečné semestrální prověrce dostala za hru NIM, jež se tam vyskytovala, plný počet bodů. Pravidla hry NIM podrobněji vysvětlím v další kapitole. Tento úspěch byl zároveň rozhodujícím a motivujícím při volbě tématu diplomové práce.

Proto jsem se sama rozhodla pátrat po dalších strategiích hry NIM a sledovat, jak si s tímto úkolem poradí žáci 1. stupně základní školy.

2. MATEMATICKÉ PROSTŘEDÍ

NIM je matematická hra. Její název pochází z německého slova „nimm“, což znamená „ber“. (Hejný, Gatial, Hecht, 1982; s. 7). Vítězství lze dosáhnout náhodnou hrou, ale lepší a zaručenější je to pomocí správné strategie, tedy návodu, jak ve hře zvítězit.

Hra NIM rozvíjí početní dovednosti (výpočet krizových pozic) a schopnost taktického uvažování. Při znalosti taktiky také upevňuje představy o násobcích konkrétních čísel, které tvoří krizové pozice. Rozvíjí se i představa o pořadí čísla jako člena posloupnosti.

Při rozlišování jednotlivých her NIM použijí značení podle knihy Hejného (1982, s. 11). Budu-li hrát já, bude uvedeno označení J. V případě Protihráčových tahů budu používat písmeno P.

2.1 PRAVIDLA

HRA NIM

Na hromadě je určitý počet kamenů (n). Dva hráči berou střídavě kameny z hromady, vždy musí vzít minimálně jeden kámen, maximální počet je stanoven konkrétní hrou (k). Vyhrává ten, kdo hromadu dobere (vezme poslední kámen). (Hejný, Gatial, Hecht., 1982, s. 7). Tento typ hry značíme NIM I ($n;k$).

HRA NIM*

Na hromadě je určitý počet kamenů. Dva hráči berou střídavě kameny z hromady, vždy musí vzít minimálně jeden kámen, maximální počet je stanoven konkrétní hrou. Prohrává ten, kdo hromadu dobere - vezme poslední kámen (rozdíl proti hře NIM). Tento typ hry značíme NIM* I ($n;k$).

DVOUHROMÁDKOVÝ NIM

Jsou dány dvě hromady kamenů (m a n). Na každé z nich je libovolný počet kamenů. Hráč na tahu bere z jedné z hromad libovolný nenulový počet kamenů (k). Vyhrává ten, kdo sebere poslední kámen. (Hejný, 1982, s. 9).

Označujeme ho jako NIM II ($m, n; k$).

NIM* SPECIÁL

Na hromadě je určitý počet kamenů. Dva hráči berou střídavě kameny z hromady, vždy je dána specifická nabídka počtu odebíraných kamenů (např. počty a, b, c, d, \dots). Prohrává ten, kdo dobere hromadu - vezme poslední kámen.

Označím ho jako NIM *S ($n; a, b, c, d, \dots$).

NIM EXTRA

Na hromadě je n kamenů. Hrají se hry NIM I ($n; 2$), NIM I ($n; 3$), ... a NIM I ($n; k$), $k = n-1$. Ale vítězem je ten, kdo dobírá sudý počet kamenů, který je předem stanoven. Dodatečně upraveno: Např. NIM EXTRA - abych hru prozkoumala, budu hrát s 5 kameny tyto hry: NIM I(5;2) a vítězem je ten, komu zbydou a) 2 kameny , b) 4 kameny. Dále budu hrát NIM I (5;3) a vítězem je ten, komu zbydou a) 2 kameny, b) 4 kameny. Potom odehrají NIM I(5;4), vítězí ten, komu zbydou a) 2 kameny, b) 4 kameny. ¹

2.2 Slovníček

Náhodná hra - hra, uskutečněná bez taktického přemýšlení. Vítězství v ní je založeno na náhodě.

Krizová pozice - ta, z níž kdokoliv začne, prohraje, zná -li soupeř strategii.
(dále KP)

Výchozí pozice - počet kamenů na hromadě před uskutečněním tahu.
(dále VP)

¹ Dále budu u všech typů NIMů většinou používat označení, v němž bude vynechané „NIM“. Tedy místo NIM I(5;3) zapíši pouze *I (5;3).

3. DENÍK

Již zmiňovaný seminář (11. 3. 2004) se mi stal motivací pro další hledání strategií. Hra mě zaujala o to více, když jsem si uvědomila, že byla hrána i v televizní soutěži Pevnost Boyard. Soutěžící v jedné z místností pevnosti měli za úkol obehrát soupeře - obyvatele Boyardu. Vzpomínám si, že místo kamenů tam používali kuličky, které byly umístěny v důlcích krabičky, ta měla tvar obdélníku. Byla to hra NIM($n;3$), jelikož se směly odebírat maximálně 3 kameny. Myslím, že v této disciplíně nebyl soutěžící nikdy úspěšný, souboj nevyhrál. Bylo to nejen tím, že pravděpodobně neznal strategii, ale byl i časově omezen v přemýšlení (když z místnosti nevyšel do stanoveného limitu, zůstal v ní uvězněn).

Proto jsem v listopadu 2004 požádala Dr. Kratochvílovou, zda bych mohla pod jejím vedením psát diplomovou práci na téma NIM. O několik dní později mi zadala první úlohy k řešení a doporučila literaturu.

V této části přepisuji své poznatky, které jsem získala při řešení odlišných zadání úloh NIM. Mohlo by se zdát, že je to zbytečné, že by stačilo pouze přiložit původní poznámky. Z vlastní zkušenosti ale vím, že ani já sama mnohdy na první pohled nerozpoznám, co jsem tehdy konkrétním vzorcem zamýšlela, i když jsem jeho autorem. Musím nad tím chvíli přemýšlet, abych svou ideu znovu pochopila. Mnohdy ji i zdokonalím. Proto jsem původní nápady z poznámek na papíru doplnila o komentář, který situaci zpřehlední. Zápisky jsou sestavovány chronologicky tak, v jakém pořadí jsem úlohy řešila.

Někdy se mi stávalo, že jsem byla ovlivněna ještě předchozí hrou, kde se odebíral menší počet kamenů než ve hře následující. Proto jsem chybovala a konkrétní zápas nevyhrála (někdy jsem si to uvědomila brzy po tahu, takže

tento omyl mohl být dodatečně napraven a v mých poznámkách způsobil pouhé přepsání počtu kamenů). Ze zkušenosti s hrou NIM hranou dětmi vím, že se tato chyba objevovala i u nich. Je to asi častější problém, jež je důsledkem změny pravidel a objevuje se hlavně u prvních her s novými pokyny.

Zvolila jsem různé druhy písma. Tímto písmem (Times New Roman) popisuji činnosti, např. zadání úlohy, čas a místo jejího řešení, čili konstatování. Tímto typem písma (Century Gothic) vyjadřuji své tehdejší myšlenky a nálady při řešení NIMu. *Sebereflexe, které vznikly téměř ihned po objevení komentovaných jevů, odlišuji kurzívou písma Time New Roman. A sebereflexe, jež tvořím v době sepisování, tedy v časovém odstupu od řešení úloh, jsou psány tučnou kurzívou písma Times New Roman.*

3.1. NIM*

11. 3. 2004

Toho dne jsem se odpoledne v autobuse pustila do řešení úloh NIM*I. Toto je přepis mých zápisků (viz rám. 1, 2 a 3), ve kterých, stejně jako v těch dalších, jsem označovala protihráče písmenem O (on). Ale v přepisu pro větší přehlednost používám písmeno P (Protihráč), aby nemohlo dojít k záměně písmena O s číslicí 0. Písmeno J symbolizuje mé tahy (J jako já).

NIM* I(n;2)

* I (3;2): -->{J;2}--> 1 -->{P;1}--> 0 ...vyhraji
! *I (4;2): -->{P;2}--> 2 -->{J;1}--> 1 -->{P;1}--> 0 ...vyhraji
*I (5;2): -->{J;1}--> 4 -->{P;2}-->2 -->{J;1}--> 1 --{P;1}--> 0
* I (6;2): -->{J;2}--> 4 -//-
! *I (7;2): -->{P;2}--> 5 --{J;1}--> 4
*I (8;2): -->{J;1}--> 7
*I (9;2): -->{J;2}--> 7
! *I(10;2):-->{P;2}--> 8 -->{J;1}--> 7
VP 11, 12 začnu já
<u>! NIM* I(n;2) =4, 7, 10, 13, ...</u>
! *I(13;2):-->{P;2}--> 11 -->{J;1}-->10

Rám.1

NIM*I(n;3)

* I(4;3): -->{J;3}--> 1 -->{P;1}--> 0 ... vyhraji
! *I (5;3): -->{P;3}--> 2 -->{J;1}--> 1 -->{P;1}--> 0
*I (6;3): -->{J;1}--> 5
* I(7;3): -->{J;2}-- 5
* I (8;3): -->{J;3}--> 5
! *I (9;3): -->{P;3}--> 6-->{J;1}--> 5
*I10, 11, 12 kamenů .. začínám já
! *I(13;3) .. začíná P
<u>! NIM* I(n;3) = 5, 9, 13, ...</u>

Rám. 2

Hned po vlastních pokusech (viz výše) jsem sepsala sebereflektivní poznámky z řešitelského procesu:

*Při hraní her NIM*I mi nejdříve činilo problémy to, že se musím snažit o úplný opak než ve hře NIM - že musím kameny odebírat tak, aby po mém tahu zbyl na hromadě pouze jeden kámen. Při znázorňování soupeřových tahů na krizových pozicích operuji s nejvyšším možným počtem kamenů, jaký lze v dané hře odebrat (to znamená, že u NIM*I(n;2) jsou to dva kameny, u NIM*I(n;3) jsou to kameny tři). Dobře ale vím, že by zde bylo správné i dosazení čísel menších, to znamená minimálních počtů možných odebraných kamenů. Když totiž Protihráč² vezme nejvyšší možný počet kamenů, Já vezmu nejmenší možný počet, a tím ho díky znalosti vítězné strategie dovedu na další (menší) KP.*

Poznámka

*Až při sepisování práce 7. 2. 2006 jsem výše uvedenou myšlenku přeformulovala následujícím způsobem: Výše popsanou situaci lze pojmenovat jako doplněk. Konkrétně např. v NIMu*I(10;2), např. začíná Protihráč a vezme 2. Pak hraji Já a vezmu 1 kámen, a tím to doberu do nejbližší krizové pozice 7 kamenů (to je doplněk - Protihráč vzal maximum, Já minimum možných kamenů). Protihráč mohl ovšem vzít (z počtu 10 kamenů) 1 kámen, tudíž Já beru 2 kameny (opět doplněk) a on má tedy před sebou krizových 7 kamenů. Tento jev doplňkovosti je uskutečňován vždy na základě Protihráčova tahu. Obecně platí, že hraje-li se NIM *I n, v obou posledních tazích bude odebráno n+1 kamenů.*

Podle KP her NIM* I(n;2) a NIM* I(n;3) by se KP pro NIM *I n vyjádřila jako n+2. Pokusila jsem se tuto hypotézu ověřit u hry NIM* I(n;4).

² Slova „Protihráč“ a „Já“ záměrně píši s velkým počátečním písmenem pro uvědomění si zkratk P a J.

NIM*I(n;4)

*I (5;4): -->{J;4}--> 1 -->{P;1}--> 0 ... vyhrají
! *I (6;4): -->{P;1}--> 5 -->{J;4}--> 1 -->{P;1}--> 0
*I (7;4): -->{J;1}--> 6
*I (8;4): -->{J;2}--> 6
*I (9;4): -->{J;3}--> 6
*I (10;4): -->{J;4}--> 6
! *I (11;4): -->{P;4}--> 7 -->{J;1}--> 6
*I (12;4): -->{J;1}--> 11
VP 13, 14, 15 : chci začít
! *I (16;4): začíná P
! NIM*I (n;4) = 6, 11, 16, ...

Rám. 3

Potvrdila jsem si předpoklad o určení KP. Zjistila jsem ale, že vzorec je platný pouze pro první KP, nikoli pro ty následující, které se z něho nedozvím. Proto je třeba ho nějak upravit.

U NIM*I (n;3) je prvním krizovým místem VP 5 kamenů. S tím souvisí zmiňovaný vzorec. Další nebezpečí je na VP 9 a 13 kamenů. Možná by šlo je zapsat nějakým společným vzorcem, Já však považuji za výhodnější od jejich počtu odečíst první KP, tedy 5. Získám tak čísla 4 a 8. To jsou násobky čísla 4, které je číslo o jedna větší, než je číslo, uváděné v názvu hry NIM* I(n;3).

Nyní uvádím vzorec, jež považuji za platný pro všechny KP hry NIM*I.

$$KP \text{ NIM}^*I \ n = (n+2) + (n+1) \cdot t \quad (1)$$

NIM*I n znamená, že můžu vzorec použít pro jakoukoliv hru NIM*I. Za písmenem „n“ se skrývá konkrétní číselné označení hry, toto stejné číslo dosadíme i na všechna zbylá místa, kde se písmeno „n“ vyskytuje. První

závorka - $(n+2)$ - vyjadřuje první KP. $(n+1)$ je označení NIM*I zvětšené o jednu. A „r“ symbolizuje násobek $(n+1)$.

Použiji tento vzorec ve hrách NIM*I s většími počty kamenů, abych zjistila, zda je správně sestavený.

$$\begin{aligned} \text{KP NIM*I}(n;5) &= (5+2) = \underline{7} \\ &= (5+2)+(5+1).1 = 7+6 = \underline{13} \\ &= (5+2)+(5+1).2 = 7+12 = \underline{19} \\ &= (5+2)+(5+1).3 = 7+18 = \underline{25} \\ &= (5+2)+(5+1).4 = 7+24 = \underline{31} \\ &= \dots \end{aligned}$$

NIM*I $(n;5)$ - vyzkouším hru $(13;5)$. Tuto VP považuji za KP, proto nechci začínat. Začne tedy Protihráč.

NIM*I $(13;5)$:-->{P;5}-->8-->{J;1}-->7-->{P;5}-->2-->{J;1}-->1>{P;1}-->0.....prohrál

Zde se mi platnost vzorce potvrdila, ověřím ji však raději ještě u NIMu*I $(n;6)$.

$$\begin{aligned} \text{KP NIM*I}(n;6) &= (6+2) = \underline{8} \\ &= (6+2)+(6+1).1 = 8+6 = \underline{14} \\ &= (6+2)+(6+1).2 = 8+12 = \underline{20} \\ &= (6+2)+(6+1).3 = 8+18 = \underline{26} \\ &= (6+2)+(6+1).4 = 8+24 = \underline{32} \end{aligned}$$

Nevychází mi to!! Následující KP by se u NIMu*I $(n;6)$ totiž měla zvýšit o 7 kamenů proti té předchozí, ne jenom o 6! Začnu prozkoumávat KP NIMu*I $(n;6)$ znovu. Bojím se, že se mi neúspěch potvrdí.

Chyba, která způsobila moji velkou pochybnost o správnosti vzorce, vznikla početní nepozorností - ve druhé závorce jsem zapoměla přičíst 1 a násobila jsem pouze první člen závorky číslem za závorkou. Při počítání jsem

si nejdříve myslela, že zapisovat tyto postupy počítání je zbytečné. V zápětí jsem si však uvědomila, že je to doklad mých myšlenkových postupů i ukázka toho, jak se snadno zmýlím.

Mám radost- chybu jsem našla a hned ji opravila:

$$\begin{aligned} \underline{KP\ NIM^*I(n;6)} &= (6+2)+(6+1).1= 8+7 = \underline{15} \\ &= (6+2)+(6+1).2= 8+14= \underline{22} \\ &= (6+2)+(6+1).3= 8+21= \underline{29} \\ &= (6+2)+(6+1).4= 8+28= \underline{36} \end{aligned}$$

Zde budu hrát například s 22 kameny. Opět předpokládám, že je to KP, nechci hrát první.

NIM* I(22;6): -->{P;6}--> 16 -->{J;1}-->15-->{P;6}--> 9-->{J;1}-->8-->
{P;6}--> 2 -->{J;1}--> 1 -->{P;1}--> 0 ..hromadu dobírá, prohrál

Vzorec by měl být správný.

V těchto pokusech jsem ověřila, že výše uvedený vzorec (1) pro KP her NIM* I je správný a platný. Jak ale v průběhu hry zjistím, že se jedná o KP? Tím, že postup otočím.

Např.: Hraji NIM* I(62;7). Vzpomenu na vzorec

$KP\ NIM^* I\ n = (n+2) + (n+1).t$

Dosadím do první závorky: $(n+2) = 7+2 = 9$

Nyní od původních 62 kamenů odečtu 9, zbyde mi 53. Nyní vydělím číslo 53 číslem $(n+1)$, tedy 8. Podíl není dělitelný osmi, proto se nejedná o KP. Ve hře chci začínat, abych tak mohla dostat Protihráče na nejbližší nebezpečné místo.

Tím je: $(7+2) + (7+1) .t = \underline{9 + 8.t}$

Za t dosadím číslo 6, jelikož 7 je příliš velké (při celkovém součtu bych získala větší číslo než 62).

$$9 + 8.6 = 9 + 48 = \underline{57}$$

Hra NIM* I(62;7) bude vypadat takto:-->{J;5}-->57-->{P;7}-->50-->{J;1}-->
49-->{P;7}-->42-->{J;1}-->41-->{P;7}-->34-->{J;1}-->33-->{P;7}-->26-->
{J;1}-->25-->{P;7}-->18-->{J;1}-->17-->{P;7}-->10-->{J;1}-->9-->{P;7}-->
2 -->{J;1}-->1-->{P;1}--> 0 .. hromadu dobírá, prohrál

Počet odebíraných kamenů jsem vždy volila tak, aby Protihráč musel začínat z KP. To mi zaručilo přehled nad hrou a následné vítězství. Tyto pozice jsou zvýrazněny podtržením.

3.2 NIM

15. 3. 2005

Večer jsem se rozhodla zahrát si NIM $I(n;k)$ znovu, abych si připomněla jeho strategii i KP. Záměrně jsem nevyhledala již zpracované poznatky v sešitě, abych si celým procesem objevování, i když již ovlivněna vzpomínkami na možné krizové cesty, prošla od začátku. NIM $I(n;2)$ a $I(n;3)$ (viz příloha I).

NIM $I(n;2)$ беру max. 2 kameny $I(3;2): \rightarrow \{J;1\} \rightarrow 2$...Protihráč (vyhraje) $\rightarrow \{J;2\} \rightarrow 1$...Protihráč ³ ! $I(4;2): \rightarrow \{J;1\} \rightarrow 3 \rightarrow \{P; 1 \text{ až } 2\}$ ⁴ \rightarrow Já $\rightarrow \{J;2\} \rightarrow 2$..Protihráč

Rám. 4

Zjistila jsem to, že z počtu 3 kamenů vyhraji jedině tehdy, když začne Protihráč. Byla jsem z toho však tolik zmatená, že jsem i 4 kameny považovala za KP a napsala k ní vykřičník. Tak jsem označovala a ve svých zápiscích stále označuji KP.

Práce mě nebaví. V každém kroku řešení se dlouho ujišťuji, že je správné. Proto další hledání končí. Řešení odkládám na jindy.

18. 3. 2005

K řešení úlohy se vracím v 7:20 ráno v autobuse. Opět ale nepronikám do podstaty hry a po 20 minutách tužku i papír odkládám a NIMem se nezabývám. Od soustředění se na NIM I mě ještě odvádí výhled do krajiny, a proto jedině, co vyřeším, je uvedeno v rámečku 5.

³ Poslední jmenovaný je vítězem hry.

⁴ Tam, kde je uveden počet odebíraných kamenů $laž k$ (zde v závorce 1 až 2 kameny), můžu vzít jakýkoliv počet z této předložené nabídky, aniž by to ovlivnilo moji strategii i výhru.

I (5;2):-->{J;2}--> 3 -->{P;1 až 2}--> ..Já
 : -->{J;1} --> 4 -->{P;1}--> 3 -->{J;1 až 2} ..Protihráč
 I (6;2): -->{J;1}--> 5-->{P;1}--> 4 -->{J;1}--> 3 -->{P;1 až 2} ..Já
⁵ -->{P;2}--> 3 -->{J;1 až 2}--> Protihráč
 : -->{P;1}--> 5 -->{J;2}--> 3 -->{P;1 až 2}--> 2(1) ..Já
 : -->{P;2}--> 4 -->{J;1}--> 3 -->{P;1 až 2}--> 2(1) ..Já

Musím na násobek 3, abych vyhrála?
 Musí protihráč začínat tam, kde je počet kamenů roven násobku 3, abych vyhrála?

Rám. 5

To, že ani v závěru této etapy netuším, jak situaci řešit, dokládá připsaná otázka. Ve výše uvedených zápiscích jsem mohla jasně poznat, že 6 kamenů je krizových, a proto z nich nechci začínat. První dvě hry s počátečními 6 kameny na hromadě jsou toho důkazem. Sice jsem v té první z nich vyhrála, to bylo ale náhodou a mohla bych to zdůvodnit soupeřovou neznalostí strategie - to, co měl udělat pro vítězství, udělal až ve druhé hře - z pozice 5 neodebral pouze 1, ale 2 kameny, a tím mě zahnal na KP.

Nějaký hlas, uvnitř mě, však neustále pobízí moje myšlení k objevení cesty, a proto týž den ve 12:00 (taktéž v autobuse) pokračuji v řešení (rám. 6). Kromě otázky, kterou jsem si položila ráno, mě tížila ještě jedna: „Musí tam, kde je počet kamenů roven násobku 3, začínat Protihráč, abych vyhrála?“

I (7;2): -->{J;1}--> 6 -->{P;1}--> 5-->{J;2}--> 3 -->{P;1 až 2} ..Já
 6 -->{P;2}--> 4 -->{J;1}--> 3 -->{P;1 až 2}..Já
 6 -->{P;2}--> 4 -->{J;2}--> 2.. Protihráč
 I (8;2): -->{J;2}--> 6 -->{P;1}--> 5 -->{J;2}--> 3 -->{P;1 až 2}--> ..Já
 -->{P;2}--> 4 -->{J;1}--> 3 -->{P; 1 až 2}--> ..Já

Rám. 6

⁵ Je - li v prepiscích v rámečku vynechané místo, za kterým pokračuje nástin průběhu hry, znamená to, že toto prázdné místo je totožné se stejně dlouhým úsekem, který je o řádek výše ve hře předchozí.

$I(9;2): \rightarrow \{P;1\} \rightarrow 8 \rightarrow \{J;2\} \rightarrow 6 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 2\} \rightarrow 5 \text{ až } 4 \rightarrow \{J;1 \text{ až } 2\} \rightarrow$
 $3 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 2\} \rightarrow \dots \text{Já}$
 $: \rightarrow \{P;2\} \rightarrow 7 \rightarrow \{J;1\} \rightarrow 6 \rightarrow \{P;2\} \rightarrow \dots \{J;1\} \rightarrow 3 \dots \text{Já}$

Musím dojít na každý násobek = + (+ znamená výhru). Počet kamenů po mém tahu by měl být shodný s násobky 3, jinak by to byla náhodná výhra (moje) - já potřebuji dorovnat do násobku určitého čísla, abych vyhrála- strategie.

Rám. 7

V poslední hře NIMu $I(7;2)$ - rám. 6 - jsem si stále ještě neuvědomovala, že svými tahy musím Protihráče dostat na VP 3 kamenů. Byť jsem v prvních dvou situacích vždy hrála tak, abych dostala Protihráče na KP, ve třetí situaci se tomu nedělo. Opět jsem prověřovala, co by se stalo, kdybych netáhla tak, abych Protihráče dostala do KP. To ukazuje na to, že se můj generický model (viz HEJNÝ, M., KRATOCHVÍLOVÁ, J.) KP NIM $I(n;2)$ ještě utváří. Díky této třetí hře jsem si uvědomila, že když Protihráče dostanu na počet násobků 3, vyhraji. Ve hře NIM $(8;2)$ a NIM $(9;2)$ jsem již vědomě přivedla Protihráče do KP. Sice jsem si ještě naznačila dvě možnosti Protihráčova odebrání kamenů, ale vždy následoval můj správný tah, vedoucí Protihráče do KP. Po těchto dvou posledních hrách mi poznámky (a hlavně zapsaná věta) dokazují, že generický model KP pro NIM $(n;2)$ je utvořen.

Více jsem již NIM $(n;2)$ neřešila a pokračovala hraním NIM $(n;3)$.

NIM $I(n;3)$

NIM $I(n;3)$ - беру 1 až 3 kamenů (kamenů max+ 1)

$I(4;3): \rightarrow \{J;1 \text{ až } 3\} \rightarrow$ Protihráč

$: \rightarrow \{P;1 \text{ až } 3\} \rightarrow$ Já

k max= max. možnost (počet) kamenů k odebrání

Rám.8

Do závorky (rá.8) jsem uvedla pravděpodobný postup na získání hodnot krizových pozic. Domnívala jsem se, že u NIMu $I(n;3)$ budou KP násobky $(3+1)$ a zapisovala to jako (kamenů $max+1$). Ve spodní části papíru jsem ještě vysvětlila můj zápis, že „ $k max$ “ znamená maximální počet kamenů k odebrání. Oba pokusy zápasů mě upevnily v přesvědčení o KP - kdokoliv z ní začne, zaručeně prohraje. Vše jsem si ověřila následnou hrou $(5;3)$ a potvrdila si, že pro NIM $I(n;3)$ je první krizovou pozicí VP 4.

I (5;3): -->{J;1}--> 4 -->{P;1 až 3}--> Já

: -->{J;2}--> 3 Protihráč

I (6;3): -->{J;2}--> 4 -->{P;1 až 3}--> Já

I (7;3): -->{J;3}--> 4 Já

I (8;3): -->{P;2}--> 6 -->{J;2}--> 4 -->{P;1 až 3}--> Já

: -->{J;1}--> 7 -->{P;1}--> 6 -->{J;2}--> 4 -->{P;1 až 3} --> Já

: -->{J;1}--> 7 -->{P;3}--> 4 -->{J;1 až 3}--> Protihráč

VP 9, 10, 11 : -->{J;1-3}--> 8

I(12;3): začne P

Při počtu kamenů $t.(k max+1)$ by pro jistotu mé výhry měl začínat hrát soupeř.

(4, 8, 12, ...) - je - li $k max=3$

Rám.9

Vítězství ve druhé hře $I(8;3)$ by bylo náhodou - není totiž jisté, že by Protihráč odebral pouze 1 kámen z počtu 7. Pokud by znal strategii, a nebo náhodou, odebral by 3 kameny a Já bych musela začínat z KP 4 kamenů, tím bych prohrála. To dokládá třetí hra s 8 kameny. Od hry $I(9;3)$ je zřejmé, že počty kamenů na KP mi byly jasné. Byly to násobky 4, což jsem ještě těmito slovy neformulovala. Je vidět, že se mojemyslení posunovalo z fáze izolovaných modelů (HEJNÝ, M., KRATOCHVÍLOVÁ, J.) do fáze generických modelů. A právě generický model KP NIM $I(n;3)$ se v tuto chvíli dotvářel.

Věta v ráme 9 dokládá, že jsem si uvědomovala, jaké počty kamenů budou na KP.

Původně jsem obecný vzorec pro KP zapsala jako (2). Trojku nad vzorec jsem psala pro ujištění se o významu mého k max. Jen jsem ji napsala, zjistila jsem, že tam nemá být, jelikož se jednalo o obecný vzorec. Proto jsem ji škrtnla. Tím vznikl vzorec nový pro KP jakéhokoliv NIMu I (3).

$$\boxed{\overset{3}{KP = (k \max + 1) \cdot t}} \quad (2) \quad \boxed{KP = (k \max + 1) \cdot t} \quad (3)$$

Po napsání vzorce jsem se opět vrátila k řešení NIMu I ($n;4$), abych si ověřila správnost vzorce. Poukazuje to na moji nejistotu, ačkoli je vzorec správný. Tvorbou generického modelu totiž byla ukončena poté, co jsem si uvědomila, že 3 u obecného vzorce nemá smysl. Nicméně existence 3 mi dávala jistotu o správnosti vzorce.

Následovala hra NIM I($n;4$) - (viz příloha II), chybně jsem ji však označila jako NIM($n;5$).

NIM I($n;4$)

<p>NIM 5 (beru 1-4) I (5;4): -->{J;1}--> 4 Protihráč -->{P;1 až 4}--> Já I (6;4): -->{J;1}--> 5 -->{P;1 až 4}--> Já I (7;4): -->{J;2}--> 5 -->{P;1 až 4}--> Já I (8;4): -->{J;3}--> 5 I (9;4): -->{J;4}--> 5 I (10;4):-->{P;1 až 4}--> 9 až 6 -->{J;4 až 1 }--> 5</p>
--

Rám. 10

Myšlenkou KP jsem byla tolik ovlivněná z NIMu I ($n;3$), že jsem 5 jako KP následné hry přenesla i do jejího názvu. Definitivně jsem si potvrdila, že vzorec pro získání KP je správný. Všechny tyto pozice jsem zvýrazňovala (i zde v textu - tučně), abych si uvědomila jejich důležitost.

Dvouhodinovou cestu autobusem jsem zakončila zápisem: Pozice výhry pro mě je ta, jež je nebezpečná pro soupeře.

I když jsem vzorec pro KP (3) považovala za správný, chybělo mi ještě jeho ověření pro NIMy I s vyššími počátečními počty kamenů na hromadě i vyšším maximálním počtem odebíraných kamenů. Tato nejistota vznikla proto, že jsem si byla vědoma, že výsledky řešení budou uveřejněny v diplomové práci, která mi způsobuje obavy ze správnosti prezentovaných matematických výsledků. Z toho důvodu jsem ještě téhož večera (18. 3. 2005) doma pokračovala v počítání úloh (dále jen Ú) NIM. Smysl přepisování t místo n vysvětluji na straně 36.

Ú: NIM I(30;6)

- nebezpečná (krizová) pozice - $(k \max + 1) \cdot t = 7 \cdot t$

- nejbližší KP = $7 \cdot 4 = 28$

- začnu $\rightarrow \{J;2\} \rightarrow 28 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 6\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;6 \text{ až } 1\} \rightarrow 21 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 6\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;6 \text{ až } 1\} \rightarrow 14 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 6\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;6 \text{ až } 1\} \rightarrow 7 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 6\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;6 \text{ až } 1\} \rightarrow \text{Já}$

Rám. 11

Po každém vlastním tahu jsem potřebovala, aby P začínal hrát z VP, která byla násobkem sedmi. Toho jsem docílila tím, že jsem nezačínala.

Ú: NIM I(43;8)

KP = $8 + 1 = 9 \cdot t$

$\rightarrow \{J;6\} \rightarrow 36 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 8\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;8 \text{ až } 1\} \rightarrow 27 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 8\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;8 \text{ až } 1\} \rightarrow 18 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 8\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;8 \text{ až } 1\} \rightarrow 9 \rightarrow \{P;1 \text{ až } 8\} \rightarrow \dots \rightarrow \{J;8 \text{ až } 1\} \rightarrow \text{Já}$

Rám.12

Při přepisování úlohy (rá.12) jsem si všimla, že jsem se hned v prvním tahu hry dopustila početní chyby. 43-36 totiž není 6 (což jsem uvedla jako počet odebraných kamenů), ale 7. Výsledek ani strategii to však neovlivnilo, jelikož se nejednalo o hru manipulativní, ale početní. Při

⁶ Výskyt závorky s počtem odebraných kamenů, dvou šípek a další závorky mezi dvěma KP vyjadřuje již zmiňovaný doplněk, na jehož základě musí protihráč vždy začínat hrát z KP. Počet kamenů, na který reaguji já, je vyjádřen dvěma tečkami. Je to pro mě VP.

zjišťování hodnot KP jsem využívala znalosti o získání KP, zde násobků 9. Proto mi zmíněná chyba nezpůsobila potíže v dalším řešitelském postupu. Dalo by se také říci, že jsem se spoléhala na správnost hodnoty KP, a tím tehdy výše popsaná chyba neupoutala mou pozornost. Vlastně to ani chyba nebyla, raději bych to nazvala přepisem. Díky tomu, že jsem energii soustředila na KP (proces jejich tvoření mi byl jasný), dopustila jsem se přepisu počtu odebraných kamenů.

<p>Ú: NIM I(98;10) KP= 10+1= <u>11</u>, <u>11.t#</u> -->{J;10}-->88-->{P; }--> .. -->{J; }-->77-->{P; }--> .. -->{J; }-->66-->{P; } --> .. -->{J; }-->55-->{P; }--> .. -->{J; }-->44-->{P; }--> .. -->{J; }-->33--> {P; }--> .. -->{J; }-->22-->{P; }--> ..-->{J; }-->11-->{P; }--> .. -->{J; }-->Já</p>
--

Rám. 13

Hru jsem začínala Já, jelikož VP 98 nebyla KP. U výše nastíněné úlohy (rám. 13) jsem již nevypisovala možný odebraný počet kamenů jednotlivých tahů (proto vynechané místo na postu odebraných kamenů). Věděla jsem totiž, že součet kamenů po Protihráčově i moji hře musí být 11. Tento vynechávaný počet kamenů budu používat i v dalších zápisech.

To, že v zápisech neuvádím konkrétní počty odebraných kamenů (jako tomu bylo dříve), dokazuje dotváření mého generického modelu.

<p>Ú: NIM I(181;16) KP= 16+1= <u>17</u>, <u>17.t#</u> -->{J;11}-->170-->{P; }--> .. -->{J; }-->153-->{P; }--> .. -->{J; }-->136--> {P; }--> ..-->{J; }-->119-->{P; }--> .. -->{J; }-->102-->{P; }--> .. -->{J; }--> 85-->{P; }--> ..-->{J; }-->68-->{P; }--> .. -->{J; }-->51-->{P; }--> .. -->{J; } -->34-->{P; }--> .. -->{J; }-->17-->{P; }--> ..-->{J; }--> Já</p>

Rám. 14

Po těchto ověřováních jsem skutečně přesvědčena, že vzorec (3) pro NIM platí. Zde jsem měla jistotu o správnosti vzorce. Generický model byl dotvořen.

Rám. 11-14 viz příloha II.

3.3 DVOUHROMÁDKOVÝ NIM

3.3.1 S neomezeným počtem odebraných kamenů

1. 4. 2005

Objevování vítězné strategie jsem začala s dvěma hromadami (12,12;t). Opět jsem pracovala v autobuse, v odpoledních hodinách. V této hře jsem neměla určený maximální odběr kamenů, pouze to, že při jednom tahu smím brát kameny pouze z jedné hromady. A také to, že kdo dobere obě hromady, vyhrává. (viz příloha III).

- a) NIM II(12, 12; ?):-->{ J;10}-->(12,2)-->{P;8}-->(4,2)-->{J;2}-->(2,2)-->{P;1}-->(1,2)-->{J;1}-->(1,1)-->{P;1}-->(0,1)-->{J;1}-->(0,0)...vyhraji
- b) NIM II(12, 12; ?): -->{J;10}--> (12,2) -->{P;10}--> (2,2) -->{J;1}-->(2,1)-->{P;1}-->(1,1) -->{J;1}--> (1,0) -->{P;1}--> (0,0) ..prohrála jsem
- c) NIM II(12, 12; ?): -->{J;10}--> (12,2) -->{P;10}--> (2,2) -->{J;1}-->(2,1)-->{P;2}--> (0,1) -->{J;1}--> (0,0) ... vyhrála jsem

Kdo chce vyhrát, musí ve své hře dorovnat počet obou hromad na shodný. Toto je výhodnější pro hráče, který nezačíná (pokud zná strategii). Pokud ale protihráč strategii nezná a nechce začínat, není třeba se bát - začnu já (i když to není výhodné) a v nestřeženém okamžiku srovnám počet obou hromad na stejné číslo a vyhrají.“

Rám. 15

V těchto třech pokusných hrách jsem dvakrát vyhrála a jednou prohrála. Hledala jsem příčinu mojí prohry ve druhém zápase. Hra b) ukazuje, jak by zápas probíhal, kdybych začínala a zároveň Protihráč znal vítěznou strategii - vždy dorovná na stejný počet a Já už nemám šanci to změnit. Ve hře c) však Protihráč strategii nezná a hned za podtrženým místem odebírá z hromady 2 kameny, čímž způsobil vlastní prohru (nezbyl po něm

stejný počet kamenů na obou hromadách).

V žádném z případů se ale nejednalo o hry se strategií, byly to hry náhodné. Strategii jsem nepoužívala ani tam, kde jsem vyhrála. Díky analýze hledání příčin svého neúspěchu jsem objevila strategii celé hry.

Nyní budu hrát NIM II(12,15;k). Je to situace odlišná od té předchozí (rá. 15), protože počet kamenů (rá. 16) na obou hromadách je odlišný .

<p>NIM II(12, 15; ?):-->{P;8}-->(12,7)-->{J;5}-->(7,7)-->{P;3}-->(4,7)-->{J;3}-->(4,4)-->{P;3}-->(4,1)-->{J;3}-->(1,1)-->{P;1}-->(0,1)-->{J;1}-->(0,0)-vyhraji</p> <p>NIM II(12,15;?): -->{J;3}-->(12,12)-->{P;11}-->(1,12)-->{J;11}-->(1,1)-->{P;1}-->(0,1)-->{J;1}-->(0,0) .. vyhrají</p>

Rám. 16

Není-li na hromadě stejný počet kamenů a chci-li vyhrát, měla bych začít, abych přebytek na jedné hromadě ubrala, a tím bylo po mém tahu na obou stejně. Pak je na tahu soupeř, já pak už jenom dorovávám do stejného počtu na obou hromadách.

NP= KRITICKÁ

NP= ta, kde na jedné z hromad je 0 kamenů - zbyly po mé hře, tím prohrají (upraveno až po dopsání celé myšlenky). Lépe - NP - hlavně (1,1) - odeberu- li z ní x kamenů, zde 1, soupeř vyhraje.“

První zápas v rám. 16 byl strategicky nesprávný proto, že jsem nezačínala (nejednalo se o KP). A také tím, že Protihráč v prvním tahu odebral 8 kamenů místo 3, kterými by mě dostal na KP (12,12). Druhou hru jsem již hrála strategicky - začala jsem a dostala Protihráče na (12,12;?) a následně na každou další KP.

Obecně je KP pro NIM II ta, kde je shodný počet kamenů na obou hromadách, proto z tohoto počtu začínat nechci.

Toto ověřuji v NIM II (7, 5;?)

-->{J; }-->(5, 5)-->{P; }-->(?, ?)-->{J; }--> ... dorovná- na (1,1)-->{P; }
-na (x,x)
 --> (,) -->{J; }--> (0, 0) Já

Rám. 17

Začala jsem a dorovnála na stejný počet na obou hromadách. Otazníky v závorkách znamenají, že nezáleží na tom, kolik Protihráč odebere kamenů při jednotlivých hrách. Důležité je to, že já dorovná na (x, x), v závěru hry na (1,1). Proto by byl možná lepší zápis: dorovná- na (x,x)

-na(1,1)

Generický model se dotvořil a já jsem hrála strategicky. Jelikož jsem již strategii nehledala, ale ověřovala výskyt KP, zestručnila jsem zápis a místo konkrétního počtu odebraných kamenů psala prázdné závorky.

3.3.2 S omezeným počtem odebraných kamenů

- (viz příloha III)

NIM II (7, 5; 3)
 :-->{J; }-->(4,5)-->{P; }-->(4,2) -->{J; }-->(3,2)-->{P; }-->(2,2)-->{J; }-->
 (0,2)-->{P; }-->(0;0) ..Protihráč
 :
 -->(4,2)-->{J; }-->(2,2)-->{P; }-->(1,2)-->{J; }-->
 (1,1)-->{P; }-->(0,1)-->{J; }--> (0,0) Já
 Mám dorovnat při 1. tahu? -->Vyhraji? ano
 --{J; }--> (5,5) --{P; }--> (,) --{J; }--> (x,x) --{P; }--> -->{J; }--> Já (0,0)

Rám. 18

První hru II (7, 5; 3) bych označila za náhodnou, a dokonce riskantní, neboť kdyby soupeř využil můj první tah ve svůj prospěch, mohl mě ihned

dostat na KP (4,4). Pokračoval však také riskantně - nesrovnal počet obou hromad a odebral kameny pouze z jedné hromady. Následně jsem ani já nevyužila jeho nestrategického postupu a sama tak rozhodla o vlastní prohře - odebrala jsem na (3,2). Jako lepší hodnotím své tahy ve druhé hře - dostávám soupeře na KP, ovšem ne hned při prvním tahu, a proto opět riskuji prohru. Za nejlepší odehraný zápas II (7,5;3) považuji ten třetí. Zde hned v samém počátku dostávám soupeře na KP a vyhrávám. Vidím tím, že taktizovat se musí již od prvního tahu.

S odstupem času jsem si uvědomila, jak je mi jasné, když nepostupuji strategicky. Objevila jsem generický model pro hry s odlišnými počty kamenů na hromadách. Je zajímavé, že jsem v rám. 16 nevyužila dřívějších zkušeností s dvouhromádkovým NIMem. Tehdy jsem totiž neviděla souvislost mezi dvouhromádkovým NIMem se stejným počtem kamenů a tím, kde je na jedné hromadě více kamenů než na druhé.

3.4 NIM EXTRA

4. 10. 2005

V 8:43 jsem v autobuse řešila úlohu tohoto typu (viz příloha IV).

Tomu, že se odebírají z hromady 1-2, 1-3, ... kameny, rozumím. Není mi ale jasný zápis odebraných kamenů v podobě $(k = n-1)$. To by totiž znamenalo, že když po mém odběru zbyde na hromadě sudý počet kamenů, vyhrává. Proto bych vždy chtěla začínat a odebírat tolik kamenů, aby na hromadě zbyl ihned sudý počet kamenů / $(n; k)$, $k = n-1$, $n > 1$, $k > 1$. Takto se mi hra zdála nezajímavá. Proto jsem si pravidla osvojila vlastním způsobem: Na hromadě je určitý počet kamenů, smí se odebírat 1 až 2 kameny, vyhrává ten, komu zbydou 2 kameny $(n; 2; V2)$. V dalším typu vyhrává ten, komu zbydou 4 kameny $(n; 2; V4)$. Až objevím obecný vzorec pro $(n; 2; Vn)$, kde Vn je sudé číslo, budu pokračovat ve hrách NIM, kde smím odebrat maximálně 3 kameny: $(n; 3; V2)$ až $(n; 3; Vn)$. Vn je opět sudé číslo.

Jednalo se o hru $(20; 2; V2)$ - rám. 19

začnu-->{J;1}-->19-->{P;2}-->17-->{J;2}-->15-->{P;1}-->14-->{J;2}-->12--> {P;2}-->10-->{J;2}-->8-->{P;2}-->6-->{J;2}-->4-->{P;1}-->3-->{J;1}-->2 Já -->{P;2}--> 2 Protihráč 6-->{J;1}-->5-->{J;1}-->4-->{P;2}--> 2 P -->{J;2}-->3-->{P;1}--> 2 P
--

Rám. 19

Na hromadě jsem měla zbytečně vysoký počet kamenů, který mi znesnadňoval hledání strategie. A navíc- z toho počtu jsem stejně většinou odebírala 2 kameny, abych se co nejdříve dostala na nižší VP. Teprve tam jsem nad hrou začínala přemýšlet.

Musí z VP 6 začít Protihráč? Je 6 nebezpečná pro mě?

(6;2;V2): -->{J;1}--> 5 -->{P;1}--> 4 -->{J;2}--> 2 Já
 -->{P;2}--> 3 -->{J;1}--> 2 Já
 -->{J;2}--> 4 -->{P;2}--> 2 Protihráč

Rám. 20

Jsou to stejné výpočty od VP 6 jako v první hře toho typu (20;2;V2) (v rám.19), ale liší se v tom, kdo vyhraje. Někde je chyba.

Tu jsem našla ve značení - v první hře rám. 19 jsem chybně z VP 6 nechala hrát sebe (J) dvakrát po sobě místo toho, aby hrál Protihráč, který byl v tu chvíli na tahu. Tím vyhrál druhý hráč než to mělo správně být. Na tento omyl jsem přišla díky opětovné kontrole strategie z VP 6 kamenů. Proto jsem ihned opravila průběh první hry (rám. 21).

(20;2;V2):-->{J;1}-->19-->{P;2}-->17-->{J;2}-->15-->{P;1}-->14-->{J;2}-->
 12-->{P;2}-->10-->{J;2}-->8-->{P;2}-->6-->{J;2}-->4-->{P;1}-->3-->{J;1}-->2J
 -->{P;2}--> 2 Protihráč
 6-->{J;1}-->5-->{P;1}-->4-->{J;2}-->2J
 -->{P;2}-->3-->{J;1}-->2J

Rám. 21

A bude pro Protihráče VP 5 nebezpečná - aby z ní začal?

(5;2;V2):-->{P;1}-->4-->{J;2}-->2 Já {5;2;V2}:-->{J;1}-->4-->{P;2}-->2 P
 -->{P;2}-->3-->{J;1}-->2 Já -->{J;2}-->3-->{P;1}-->2P

VP 5 je krizová

xx ← ← Protihráč --> výhra P
 xx Já → ↑

Rám. 22

Ze zápisu umístění 4 kamenů (rám. 22) při odebírání maximálně 2 kamenů vidím, že jsem dobíráním hromady a jeho vlivem na výhru byla zmatená, což způsobilo, že jsem náhle považovala za vítěze toho, na koho zbyl potřebný počet kamenů k vítězství po soupeřově tahu. To je avšak v rozporu s tím, co jsem považovala za vítězné v předchozí části objevování strategie pro tento typ hry. Nejdříve jsem totiž Já odebrala 2 kameny ze 4.

Vyhrál tak Protihráč, neboť na něho zbyly 2 kameny. Správně jsem ale vyhrát měla Já, protože 2 kameny zbyly po mém tahu, a proto patřily mně.

6. 10. 2005

Vracím se k řešení v 9:32 v metru (příloha IV a V).

Hned v začátku přemýšlení jsem dokončila a poznamenala si myšlenku ze

4. 10. 2005 - rám. 23

(5;2;V2) je krizovou pro toho, kdo z ní začíná.

Rám. 23

Pokračovala jsem objevováním KP pro další čísla.

Je VP 4 krizová?

(4;2;V2): $\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 3\rightarrow\{P;1\}\rightarrow 2 P$ (4;2;V2): $\rightarrow\{P;1\}\rightarrow 3\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 2Já$
 $\rightarrow\{J;2\}\rightarrow 2 J$ $\rightarrow\{P;2\}\rightarrow 2P$

Rám. 24

- z VP 4 vyhraji pokud z ní začnu a vezmu 2
- z VP 4 prohrají, pokud z ní začne Protihráč a vezme 2 kameny
- VP 3 je nebezpečná pro mě, začne-li z ní P a vezme 1
- VP 3 je nebezpečná pro P, začnu-li z ní já a vezmu 1

(6;2;V2): $\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 5\rightarrow\{P;1\}\rightarrow 4\rightarrow\{J;2\}\rightarrow 2 Já$
 $\rightarrow\{P;2\}\rightarrow 3\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 2 Já$

Rám. 25

Rám. 25: 6 kamenů: nesmí po Já zůstat 4, proto začnu a musím vzít 1.

(7;2;V2): $\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 6\rightarrow\{P;1\}\rightarrow 5\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 4\rightarrow\{P;2\}\rightarrow 2 P$
 $\rightarrow\{J;2\}\rightarrow 5\rightarrow\{P;1\}\rightarrow 4\rightarrow\{J;2\}\rightarrow 2 Já$

Abych vyhrála, musím protihráče dostat na VP 5= musím začít a vzít 2.

(7;2;V2): $\rightarrow\{J;2\}\rightarrow 5\rightarrow\{P;1\}\rightarrow 4\rightarrow\{J;2\}\rightarrow 2 Já$
 $\rightarrow\{P;2\}\rightarrow 3\rightarrow\{J;1\}\rightarrow 2 Já$

Rám. 26

Dostat Protihráče na VP 5 znamená, že opět využívám znalosti o KP, z nichž nechci začínat.

(8;2;V2): -->{J;1}--> 7 -->{P;2}--> 5 (krize)
 -->{J;2}--> 6 -->{P;1}--> 5 -->{J;1}--> 4 -->{P;2}--> 2 P
 => z 8 musí začít Protihráč

Rám. 27

Jelikož jsem nebyla schopná jakýmkoliv tahem jako hru začínající hráč vyhrát, považovala jsem VP (8;2;V2) za KP. K tomuto závěru jsem dospěla asi v 9:54 hodin.

(9;2;V2): -->{J;1}--> 8 -->{P; }--> -->{J; }--> 5 -->{P; }--> 2 Já
 (10;2;V2): -->{J;2}--> 8 -->{P; }--> -->{J; }--> 5 -->{P; }--> 2 Já

Rám. 28

KP pro tuto hru se opakuje v závislosti na 3 kamenech: 5, (5+3)=8, .. Předpokládám, že další KP je 11, proto odehrají zápas tak, že začne Protihráč a Já bych měla vyhrát.

(11;2;V2):-->{P; }-->-->{J; }-->8-->{P; }-->-->{J; }-->5-->{P; }-->-->(J; }-->2J

Rám. 29

V rám. 29 se mi domněnka potvrdila.

KP při hře (n;2;V2) jsou: 5, 8, 11, 14? ,...

Rám.30

Ještě téhož odpoledne(15:45 - 16:05) jsem ověřovala, zda je KP i (14;2;V2).

Pokračovala jsem ve hře z rána s VP 12, 13 a 14 kameny (rám. 31).

(12;2;V2):-->{J;1}-->11-->{P; }-->-->{J; }-->8-->{P; }-->-->{J; }-->5-->
 {P; }-->-->{J; }--> 2Já
 (13;2;V2):-->{J;2}-->11-->{P; }-->-->{J; }-->8-->{P; }-->-->{J; }-->5-->
 {P; }-->-->{J; }--> 2Já
 !(14;2;V2):-->{P; }-->-->{J; }-->11-->{P; }-->-->{J; }-->8-->{P; }-->-->
 {J; }--> 5-->{P; }-->-->{J; }--> 2 Já

Rám. 31

VP (14;2;V2) je skutečně KP. V následně jsem vyvodila vzorec pro získání KP pro NIM($n;2;V2$) jako (4)

$$\text{KP NIM}(n;2;V2) = (n \cdot 3) - 1 \quad (4)$$

Počítala jsem i ve večerních hodinách (20:15- 20:42) - hru NIM (20;2; V4).

(20;2;V4): -->{J;2}-->18-->{P;2}-->16-->{J;2}-->14-->{P;2}-->12-->
 {J;2}-->10-->{P;2}-->8: -->{J;1}-->7-->{P;1}-->6-->{J;2}--> 4 Já
 -->{P;2}-->5-->{J;1}--> 4 Já

Rám. 32

I zde - v rám. 32 - jsem začínala se zbytečně vysokým počtem kamenů na hromadě.

Je VP 7 KP? Kdo z ní začne, prohraje? Vyzkouším to nejdříve na menších VP, než je 7.

(5;2;V4): -->{J;1}--> 4 Já
 (6;2;V4): -->{J;2}--> 4 Já
 (7;2;V4): -->{P; }--> -->{J; }--> 4 Já

Rám. 33

7 je skutečně KP. Jak to bude dál?

(8;2;V4): -->{J;1}--> 7 -->{P; }--> -->{J; }--> 4 Já
 (9;2;V4): -->{J;2}--> 7 -->{P; }--> -->{J; }--> 4 Já
 -->{P;2}--> 7 4 P x
 -->{P;1}--> 8 -->{J;1}--> 7.....4 Já -ale nevýhodné- nesměl by
 znát strategii- kdyby ji znal, dostal by mě na nejbližší KP, což je 7.

Rám. 34

Nejvýhodnější hrou (9;2;V4) (viz rám. 34) byl první zápas- Protihráč musel začínat z KP. Druhý zápas jsem prohrála, a proto ho označila proškrtnutím (x), abych ho nebrala v úvahu a dále se jím nezabývala.

!(10;2;V4): -->{P; }--> -->{J; }--> 7 -->{P; }--> --{J; }--> 4 Já
 (11;2;V4): -->{J;1}-->10-->{P; }-->-->{J; }-->7-->{P; }-->-->{J; }--> 4 Já
 (12;2;V4): -->{J;2}-->10-->{P; }-->-->{J; }-->7-->{P; }-->-->{J; }--> 4 Já
 ! (13;2;V4): -->{P; }-->-->{J; }-->10-->{P; }-->-->{J; }-->7-->{P; }-->-->
 {J; }--> 4 Já
 KP pro V 4, beru 1- 2 : 7, 10, 13, 16?, 19?, .. je V^* a(pořadí KP+1) - (1 až 4)

Rám. 35

Pokračovala jsem v hledání strategie (viz rám. 35).

7. 10. 2005

(příloha V)

(V) (4*2)- 1=7	(4*11)- 1=43
(4*3)- 2=10	(4*12)- 2=46 -10
(4*4)- 3=13 -1	(4*13)- 3=49
/(4*4)- 0=16/	(4*14)- 4=52
<u>(4*5)- 4=16</u>	_____
(4*5)- 1=19	(4*14)- 1=55
(4*6)- 2=22 -4	(4*15)- 2=58
(4*7)- 3=25	(4*16)- 3=61 -13
(4*8)- 4=28	(4*17)- 4=64
_____	_____
(4*8)- 1=31	(4*17)- 1=67
(4*9)- 2=34 -7	... -16
(4*10)- 3=37	...
(4*11)- 4=40	...
_____	_____
1) Při pořadí 5, 8, 11, 14, 17, ... = KP+ 1 : nutno- 4	
2) Jinak vždy 4 členy po sobě následující: rozdíl pořadí- x= hodnota KP x ... odečtená hodnota, max. 4 (1 až 4)	
3) u pořadí 5, 8, 11, 14, 17, ... nutno použít 2x : -4 a -1	

Rám. 36

Počítám od 6:55 do 7:26 v metru.

Nyní (10. 2. 2006) ⁷ mi trvá dlouhý čas, než pochopím význam závěrů z rám.36. Pro větší přehlednost komentáře jsem tehdejší poznámky rozdělila do 3 skupin.

1) Ze zkoumání tohoto zápisu získávám poznatek, že abych našla hodnoty KP, které jsou na 5., 8., 11., 14., ... pořadí - tedy jsou o 1 pořadí nižší než je číslo pořadí tvořeného jakýmkoliv násobkem 3 - musím po vynásobení tohoto konkrétního pořadí KP - již zvětšeného o 1 - s vítězným počtem kamenů(V) (zde V4) odečítat 4 kameny proto, abych získala povědomí o počtu kamenů na KP. V těchto případech ale musím odečítat i 1 kámen,

⁷ Jelikož uvádím komentář již zde, narušuji deníkovou stavbu práce. Kdybych ho však umístila na jeho správné místo, zhoršilo by to čtenářskou orientaci v textu.

čehož jsem si 7. 10. 2005 nevšímla. To, že je pořadí zvětšené o 1, znamená, že i když je daná KP ve skutečnosti např. první KP, já ji zde kvůli vysledovaným souvislostem přejmenovala na KP druhou v pořadí.

2) V tomto bodu je vyjádřeno to, co jsem psala již dříve - hodnoty KP se zvyšují a zároveň s tím se cyklicky opakuje odečítaná hodnota od 1 do 4. (Je-li opakující se hodnota od 1 do 4, musí se opakovat po čtyřech následujících členech.)

3) Nejdříve nerozumím, proč jsem do rám. 36 zapsala 2x. V zápětí mi dochází, že x je použito jako symbol pro krát -> že tato vypsaná pořadí používám dvakrát - nejdříve u nich odečtu 1, potom odečtu i 4.

Ještě bych měla vysvětlit význam velkých čísel na pravé straně každého sloupce - těmi jsem sledovala narůstající posloupnost - např. každé pořadí čísla pod oddělovací čarou v rám. 36 je o 3 větší než pořadí čísla pod předchozí oddělovací čarou. Nyní tato čísla za důležitá nepovažuji.

Pokračovala jsem NIMem ($n;2; V6$)

(20;2;V6): -->{J;2}-->18-->{P;2}-->16-->{J;2}-->14-->{P;2}-->12-->
 {J;2}-->10-->{P;1}-->9 -->{J;1}-->8 -->{P;2}-->6 P
 -->{J;2}-->7 -->{P;1}-->6 P

Rám. 37

Je VP 9 krizová?

Z prvního zápasu (20;2;V6) bych považovala VP 9 kamenů za krizovou, ale raději to ověřím znovu.

(9;2;V6): -->{J;1}-->8 -->{P;2}-->6P KP
 -->{J;2}-->7 -->{P;1}-->6P KP
 (10;2;V6): -->{J;1}-->9 -->{P;2}-->7 -->{J;1}-->6 Já
 (11;2;V6): -->{J;2}-->9 -->{P;2}-->7 -->{J;1}-->6 Já

Rám. 38

(9;2;V6) je skutečně KP, kdo z ní začne, prohraje.

Jelikož je povolen odběr 1 až 2 kamenů, předpokládám další KP na VP o 3 kameny vyšší, než byla ta minulá. Byla to VP 9, proto z (12;2;V6) nechám hrát Protihráče.

(12;2;V6): -->{P; }-->-->{J; }-->9-->{P; }-->-->{J; }--> 6 Já .. KP
 (15;2;V6):-->{P; }-->-->{J; }-->12-->{P; }-->-->{J; }-->9-->{P; }-->-->{J; }-->6 Já KP

KP pro (n;2;V6): 9, 12, 15, 18, ... = # t* 3

Rám.39

Uvažuji, co znamená n. Je to vlastně jakékoliv číslo, které vyjadřuje libovolný počet kamenů na hromadě. V tomto zápise ale navíc vyjadřuje i to, že KP je každý násobek čísla 3. Přemýšlela jsem, zda má toto označení něco společného s počtem n kamenů na hromadě, které se uvádí v úlohách NIM. A protože nemá, raději bych dosadila jiné písmeno, třeba t. Mohlo by se totiž snadno zaměnit s n, které používám třeba pro vyjádření KP NIMu $n = n+1$...tam má totiž n přesnou hodnotu podle typu NIMu a není symbolem široké nabídky čísel, jež mohu doplnit.

Z tohoto důvodu přepisuji n, vyjadřující náhodné číslo za t i v předchozích zápisech.

7. 10. 2005

Počítala jsem v autobuse od 16:20 do 17:05. Sepisovala jsem KP NIMu (n;2;V2), (n;2;V4) a (n;2;V6), které jsem objevila počítáním. První KP NIMu (n;2;V8) jsem hledala (rám. 40) podle posloupnosti prvních KP (n;2;V<8), (příloha VI).

(20;2;V8):--{J;2}-->18-->{P;2}-->16-->{J;2}-->14-->{P;2}-->12-->{J; }-->
 nedopsáno
 hypotéza: KP u V8= 11 /oproti 1. členům V2, V4 a V6= + 2 (=5, 7, 9, ..11)/

Rám.40

Hrála jsem (rám. 40) s příliš vysokým počtem kamenů (VP 20), následně jsem to upravila a hrála pouze s množstvím nižším (rám. 41). Postupně jsem od (12;2;V8) na hromadu přidávala po 1 kameni. Odhadovala jsem, že se nejedná o KP, proto jsem začínala.

(12;2;V8): -->{J;1}--> 11 -->{P;1}--> 10 -->{J;2}--> 8 Já
 -->{P;2}--> 9 -->{J;1}--> 8 Já
 (13;2;V8): -->{J;2}--> 11 -->{P; }--> -->{J; }--> 8 Já
 (14;2;V8): -->{P; }--> -->{J; }--> 11 -->{P; }--> -->{J; }--> 8 Já .. KP
 (15;2;V8): -->{J;1}-->14-->{P; }--> -->{J; }-->11-->{P; }--> -->{J; }--> 8 Já
 (16;2;V8): -->{J;2}-->14-->{P; }--> -->{J; }-->11-->{P; }--> -->{J; }--> 8 Já
 (17;2;V8): -->{P; }-->-->{J; }-->14-->{P; }-->-->{J; }-->11-->{P; }-->-->{J; }--> 8 Já ... KP

Rám. 41

V rám. 41 jsem ověřila, že(11;2;V8) je KP. Následně jsem podle prvních KP ($(n;2;V \leq 8)$) odvodila i první KP u ($(n;2;V10)$), ($(n;2;V12)$). Další KP jsem získávala opakovaným přičítáním trojky k číslu n za V .

KP V2: 5, 8, 11, 14, ...
 KP V4: 7, 10, 13, 16, ...
 KP V6: 9, 12, 15, 18, ...
 KP V8: 11, 14, 17, 20, ...
 KP V10: 13, 16, 19, 22, ...
 KP V12: 15, 18, 21, 24, ...
 KP V14: 17, 20, 23, 26, ...
 KP V16: 19, 22, 25, 28, ...
 KP V18: 21, 24, 27, 30, ...
 KP V20: 23, 26, 29, 32, 35, ...
 KP V22: 25, 28, 31, 34, 37, ...
 KP V24: 27, 30, 33, 36, 39, ...
 KP V26: 29, 32, 35, 38, 41, ...
 KP V28: 31, 34, 37, 40, 43, ...

Rám.42

Pozorovala jsem vztahy mezi čísly (rám. 42):

- rozdíl mezi 1. KP u ($(n;2;V2)$) a 1. KP u ($(n;2;V4)$) je o 2, stejně tak, jako u každých 1. KP sousedních V

- 1. a 3. KP (a dále každá lichá KP) má lichou hodnotu, 2. a 4. KP (a dále každá sudá KP) má sudou hodnotu. Tento jev způsobila přičítaná trojka, tedy počet kamenů, o který se zvýší počet kamenů

z konkrétní KP vzhledem nejbližší další KP ve stejném typu hry.

$V_n = 2$. KP $V_n - 6$. tzn.	1. KP $V_n = 3$. KP $V_n - 6$
• $V_{24} = 30 (= 2 \cdot \text{KP}) - 6$,	$23 (V_{20}) = 23 (V_{14})$
<u>zároveň i V_{24}: 2. KP V_{18} je 24</u>	$13 (V_{10}) = 13 (V_4)$
• V_{10} : 2. KP V_4 je 10	$27 (V_{24}) = 27 (V_{18})$
• V_{20} : 2. KP V_{14} je 20	
<u>$V_n = 4$. KP $V_n - 12$</u>	
$V_{28} = 28 (V_{16})$	$V_{20} = 20 (V_8)$
	$V_{18} = 18 (V_6)$

Rám. 43

Z výše uvedených souvislostí jsem se pokusila vyvodit obecný vzorec (5) pro jakoukoli KP NIMu ($n; 2; V_n$)

$$\text{KP}(n; 2; V_n) = (k - V_n) : 3 \quad (5)$$

(5) znamená: k je celkový počet kamenů, od něho odečtu určené vítězné množství kamenů V_n . Je-li zbytek dělitelný 3 (protože beru 1 až 2), je to KP a nechci z ní začínat.

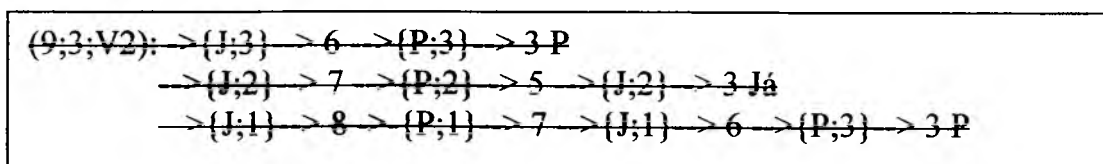
Vzorec je ještě nutné verifikovat tak, že do něho dosadím (viz rám. 44).

k	V_n	rozdíl	je/3	je KP?	začne	skutečnost
35	20	15	ano	ano	Protihráč	je KP
21	8	13	není	není	Já	není KP
39	22	17	není	není	Já	není KP
48	24	24	ano	ano	Protihráč	je KP
22	10	12	ano	ano	Protihráč	je KP

Rám.44

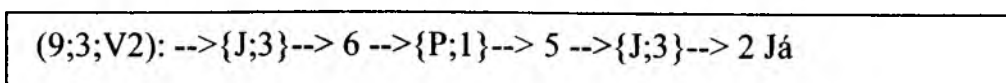
Vzorec (5) je platný.

Toho odpoledne jsem se ještě zajímala o řešení NIMu $(n;3;V2)$ a pokračovala v tom, že hráč vyhrává v tu chvíli, co z hromady odebere kameny a hned po jeho tahu zůstává na hromadě vítězný počet kamenů - rám. 45.



Rám. 45

Uvědomuji si, že výsledky (které jsou nyní v rám. 45) jsou špatné, protože vítězným počtem jsou kameny 2, ne 3, proto je přeškrťávám.



Rám. 46

V rám. 46 jsem se snažila napravit chybu z rám. 45, ale brzy jsem usnula.

10. 10. 2005

Na malou chvíli se k úloze vracím odpoledne (viz příloha VI). To proto, abych zapsala dosud neověřený vzorec (6) na získání KP pro NIM $(n;3;Vn)$.

$KP=(k-Vn):4$

(6)

3.5 NÁVRAT K NIMU *

14. 2. 2006

Na dnešní konzultaci mi Dr. Kratochvílová zadala úlohu, abych zjistila, zda je počet kamenů 1250 KP pro různé NIMy*. Řeším ji tentýž den v čase 17:05 - 17:30 doma s oporou o již vypracované poznámky (viz příloha VII).

$$\text{KP NIM}^*n = (n+2) + (n+1) * t$$

$$\text{NIM}^*(n;2): 1250 = (2+2) + (2+1) * t$$

$$1250 = 4 + 3k$$

$$1246/3 = k$$

$$415,33 = k$$

Není dělitelné 3 = není to KP pro NIM*2.

$$\text{NIM}^*(n;3): 1250 = (3+2) + (3+1) * t$$

$$1250 = 5 + 4k$$

$$1245/4 = k$$

$$311,25 = k$$

1250 není KP pro NIM*3.

$$\text{NIM}^*(n;4): 1250 = (4+2) + (4+1) * t$$

$$1250 = 6 + 5k$$

$$1244/5 = k$$

$$248,8 = k \text{ ..není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;5): 1250 = (5+2) + (5+1) * t$$

$$1250 = 7 + 6k$$

$$1243/6 = k$$

$$207,17 = k \text{ ..není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;6): 1250 = (6+2) + (6+1) * t$$

$$1250 = 8 + 7k$$

$$1242/7 = k$$

$$177,43 = k \text{ ..není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;7): 1250 = (7+2) + (7+1) * t$$

$$1250 = 9 + 8k$$

$$1241/8 = k$$

$$155,13 = k \text{ ..není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;8): 1250 = (8+2) + (8+1) * t$$

$$1250 = 10 + 9k$$

$$1240/9 = k$$

$$137,78 = k \text{ .. není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;9): 1250 = (9+2) + (9+1) * t$$

$$1250 = 11 + 10k$$

$$1239/10 = k$$

$$123,9 = k \text{ ..není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;10): 1250 = (10+2) + (10+1) * t$$

$$1250 = 12 + 11k$$

$$1238/11 = k$$

$$112,55 = k \text{ ..není KP}$$

$$\text{NIM}^*(n;11): 1250 = (11+2) + (11+1) * t$$

$$1250 = 13 + 12k$$

$$1237/12 = k$$

$$103,08 = k \text{ ..není KP}$$

$$\begin{array}{l} \text{NIM}^*(n;12): 1250 = (12+2) + (12+1) \cdot t \\ 1250 = 14 + 13k \\ 1236/13 = k \\ 95,08 = k \dots \text{není} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NIM}^*(n;13): 1250 = (13+2) + (13+1) \cdot t \\ 1250 = 15 + 14k \\ 1235/14 = k \\ 88,21 = k \dots \text{není KP} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NIM}^*(n;14): 1250 = (14+2) + (14+1) \cdot t \\ 1250 = 16 + 15k \\ 1234/15 = k \\ 82,27 = k \dots \text{není KP} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NIM}^*(n;15): 1250 = (15+2) + (15+1) \cdot t \\ 1250 = 17 + 16k \\ 1233/16 = k \\ 77,06 = k \dots \text{není KP} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NIM}^*(n;16): 1250 = (16+2) + (16+1) \cdot t \\ 1250 = 18 + 17k \\ 1232/17 = k \\ 72,47 = k \dots \text{není KP} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{NIM}^*(n;17): 1250 = (17+2) + (17+1) \cdot t \\ 1250 = 19 + 18k \\ 1231/18 = k \\ 68,39 = k \dots \text{není KP} \end{array}$$

Do této chvíle jsem nenašla NIM* I, pro něhož by byla VP 1250 krizovou pozicí. Trochu přemýšlím, zda jsem vše vypočítala dobře, je to trochu zvláštní. Ale chybou si nejsem vědoma. (14. 2. 2006, 17:30 hodin).

3.6 NIM* SPECIÁL

14. 2. 2006

Úlohu NIM* $S(n;1,2,4)$ řeším doma v čase od 17:35 do 18:05 (rám. 47 až rám.50) (příloha VIII). Jedno z pravidel, že kdo bere poslední kámen, prohrává, si na papíru podtrhávám, abych si to opravdu uvědomila a následně se nedopustila chyby.

Budu se snažit brát kameny tak, aby po mém tahu zbyl na hromadě 1 kámen pro Protihráče.

!* $S(4;1,2,4)$: --> {J1} --> 3 --> {P2} --> 1 --> {J1} --> 0 => - ⁸ !!
: --> {J2} --> 2 --> {P1} --> 1 ... 0 => - !!
⇔ 4 je KP (kdo začne)

-----9

* $S(5;1,2,4)$: --> {J4} --> 1 - Protihráč prohraje..... => +
: --> {J2} --> 3 --> {P2} --> 1 --> {J} --> 0.... => -

Při znalosti strategie je prohra ve druhé hře typu $(5;1,2,4)$ zbytečná.

Rám. 47

* $S(6;1,2,4)$: --> {J4} --> 2 --> {P1} --> 1J ¹⁰ => -
: --> {J2} --> 4 --> {P1} --> 3 --> {J2} --> 1 P.... => +

Mate mě typ hry NIM a NIM*.

: --> {J1} --> 5 --> {P4} --> 1J => -

! * $S(7;1,2,4)$: --> {J1} --> 6 --> {P2} --> 4 --> {J2} --> 2 --> {P1} --> 1J => -
: --> {J2} --> 5 --> {P4} --> 1J.... => -
: --> {J4} --> 3 --> {P2} --> 1J => -

Tato pozice je krizová, protože ve všech třech pokusech hry jsem i při největší snaze prohrála.

Nebudou KP násobky 4 a 7? (4 je jeden z povoleného počtu odebíraných kamenů, hodnotu 7 získám celkovým součtem všech kamenů /1+2+4/ nabízených k odebírání).

* $S(8;1,2,4)$: --> {J1} --> 7 --> {P4} --> 3 --> {J2} --> 1P.... => +

* $S(9;1,2,4)$: --> {J2} --> 7 --> 1P.... => +

Rám. 48

⁸ Symboly + a - označují výsledek soutěže. => + znamená mou výhru, => - označuje moji prohru.

⁹ Oddělování některých her čarami má pouze orientační význam.

¹⁰ Toto označení obsahuje počet kamenů a zkratku toho, kdo tyto kameny dobere. Proto se stává poraženým.

! * S(10;1,2,4): --> {J1}-->9--> {P2} --> 7 => -
 : --> {J2}-->8--> {P1} --> 7 => -
 : --> {J4}-->6-->{P2} --> 4-->{J2} --> 2--> {P1}--> 1J => -

Opět jsem prohrála ve všech zápasech, proto je VP 10 KP.

Rozdílem mezi KP jsou 3 kameny. Není to ten chybějící člen v řadě možných odebíraných kamenů?

 * S(11;1,2,4): --> {J1} --> 10 => +
 * S(12;1,2,4): --> {J2} --> 10 => +

Usínám.

Rám. 49

15. 2. 2006

Strategii pro NIM *S(n;1,2,4) hledám od 1:00 do 1:20 v noci (příloha VIII).

! * S(13;1,2,4): --> {J1} --> 12 --> {P2} --> 10J => -
 : --> {J2} --> 11 --> {P1} --> 10J => -
 : --> {J4} --> 9 --> {P2} --> 7J => -

Tato pozice je krizovou.

 * S(14;1,2,4): --> {J1} --> 13 P => +

KP NIM* S(n;1,2,4) = 4, 7, 10, 13, ...

Za okamžik však uvažuji, že mezi KP pro výše uvedený typ NIMu patří i VP 2 a 3, protože:

* S(2;1,2,4): --> {1P} --> 1J => -

* S(3;1,2,4): --> {2P} --> 1J => -

A kvůli tomu, že mezi KP patří i VP 2 a VP 3, patří tam i VP 4 (4-1=KP 3 a 4-2= KP 2)

Rám. 50

Následně jsem se pokusila najít vzájemné vztahy mezi KP a povolenými počty odebíraných kamenů.

22
32+1
44
7.....4+2+1
10.....(2+1)*2+4 i (4*2)+2
13.....(2+1)*3+4

Rám. 51

Rám. 51

Nic jsem neobjevila, pokračuji ve hře jiného typu NIMu* S (n;a,b,c).

NIM* S(n;1,2,5)

Čas: 1:20 - 1:35

Podle KP NIMu* S(n;1,2,4) jsem zapsala hypotézu o KP NIMu* S(n;1,2,5) ještě před začátkem jeho řešení.

KP *S(n;1,2,5): 2 2	4 2+2 ale i 5-1
3 1+2 ale i 5-2	
! * S(2;1,2,5): --> {P1} --> 1J ... => -	
! * S(3;1,2,5): --> {P2} --> 1J ... => -	
! * S(4;1,2,5): --> {J2} --> 2 --> {P1} --> 1J ... => -	
: --> {J1} --> 3 --> {P2} --> 1J ... => -	

Rám. 52

Nebude * S(5;1,2,5) taky krizovou, když u NIM* S(n;1,2,4) byla KP 4? A nehraje roli v hodnotě KP ciferný rozdíl? U *S(n;1,2,4): 4 - (2+1),
 u * S(n;1,2,5): 5 - (1+2)

* S(5;1,2,5): --> {J1} --> 4 --> {P1} --> 3 --> {J2} --> 1 P ... => +
--> {P2} --> 2 --> {J1} --> 1P ... => +
5 není KP.
* S(6;1,2,5): --> {P}

Rám. 53

Už jsem z toho popletená, nevím, co je KP.

Čas: 10:55, řeším doma, (příloha IX).

Pro uvědomění si významu KP (co znamená) hledám v NIMu I (n;2). Tam se ujišťuji v tom, že z KP nechci začínat, protože bych prohrála.

* S(6;1,2,5): --> {J2} --> 4 --> {P2} --> 2 --> {J1} --> 1P ... => +	
ale i : --> {J5} --> 1 P ... => +	

! * S(7;1,2,5): --> {J1} --> 6 --> {P2} --> 4 --> ... => -	
: --> {J2} --> 5 --> {P2} --> 3 --> {J2} --> 1P ... => +	
: --> {J5} --> 2 --> {P1} --> 1J => -	
Zkoumám vítězství ve druhé hře se 7 kameny. Zatím v tom nic nevidím, ale tato výhra je zidealizovaná, protože on by hrál takto (aby vyhrál):	
* S(7;1,2,5): --> {J2} -- 5 --> {P1} --> 4 --> {J1} --> 3 --> {P2} --> 1J => -	

Rám. 54

* S(7;1,2,5) je KP. Proto jsem k ní zpětně doplnila vykřičník (rám. 54).

* S(8;1,2,5): --> {J1} --> 7 --> {P2} --> 5 --> {J1} --> 4 --> {P2} --> 2 --> {J1} --> 1P => +
 * S(9;1,2,5): --> {J5} --> 4 --> {P2} --> 2 --> {J1} --> 1P => +

 ! * S(10;1,2,5): --> {J1} --> 9 --> {P5} --> 4 => -
 : --> {J2} --> 8 --> {P5} --> 3 --> {J2} --> 1P => +
 : --> {J5} --> 5 --> {P1} --> 4 => -

Druhá hra je opět zidealizovaná, neboť i v ní můžu prohrát (kdyby protihráč hrál takto):

* S(10;1,2,5): --> {J2} --> 8 --> {P1} --> 7 --> {J2} --> 5 --> {P1} --> 4 => -
 Proto je * S(10;1,2,5) KP.

Rám. 55

V 11:20 jsem ale poslední nápad z dnešního rána /to, že (2;1,2,5) a (3;1,2,5) jsou KP/ musela zavrhnout, jelikož jsem si uvědomila, že KP označuje tu pozici, z níž ten, kdo začne, prohraje. Byla jsem ovlivněna tím, že jsem hru prohrála, a nevšimla si, že jsem, na rozdíl od ostatních soubojů, dopřála Protihráči první tah. Kdybych první tah uskutečnila Já, prohrál by Protihráč. Výchozí pozice 2 a 3 kamenů tedy není krizovou.

Výše popsanou událost způsobila druhá hra NIM S(10;1,2,5) (rám. 54). V jejím závěru jsem přemýšlela, zda z VP 3 vyhraji tím, že odeberu 1 kámen, nebo tím, že odeberu 2. Jelikož se mi v představách podařilo vyhrát z obou dvou VP, zjistila jsem, že moje původní myšlenka je chybná (rám. 55).*

VP 2 není KP - začnu-li z ní hrát: 2-->{J1}--> zbyde 1 kámen pro P ... => +
 VP 3 není KP - začnu-li z ní hrát: 3-->{J2}--> zbyde 1 kámen pro P => +
 VP 2 a VP 3 proto není KP ani u * S(n;1,2,4) !! Celý NIM* S(n;1,2,5) prověřuji znovu.

Rám. 56

* S(11;1,2,5): --> {J1} --> 10 => +
 : --> {J2} --> 9 --> {P2} --> 7 => -
 : --> {J5} --> 6 --> {P5} --> 1J => -

U $n=(c+1)$ - smím na 1. tahu odebrat $c \Rightarrow +$. U $(2*c) + 1$ nesmím vzít c - protihráč by vzal také c a já bych prohrála.

Rám. 57

*V souvislosti se třetí hrou * S(11;1,2,5) jsem zapsala nový poznatek do rám. 57. Proto jsem počítala dále, abych zjistila, zda se mi jeho platnost potvrdí i na * S(16;1,2,5), kde jsem jeho výskyt předpokládala znovu, (příloha IX dole).*

* S(12;1,2,5): --> {J2} --> 10 => +
 * S(13;1,2,5): --> {J1} --> 12 --> {P2} --> 10 => -
 : --> {J2} --> 11 --> {P1} --> 10 => -
 : --> {J5} --> 7 --> ne 7 ale 8 --> {P1} --> 7 => -

Rám. 58

*Ve třetí hře * S(13;1,2,5) (viz rám. 58) jsem udělala chybu při odečítání 13-5. Právě s úlohami 12-5 a 13-5 mám neustálé problémy a při jejich řešení musím dávat velký pozor. Vždy si dopomáhám rozkladem (12-2)-3 a (13-3)-2. Je to způsobeno nedostatečným procvičením učiva v nižších ročnících základní školy, kdy se mi u těchto typů úloh nevytvořily dostatečné spoje pro to, aby vyřešení 12-5 a 13-5 bylo rutinou, jako je např. 11-5 a 14-5.*

* S(14;1,2,5): --> {J1} --> 13 => +
 * S(15;1,2,5): --> {J2} --> 13 => +

 !* S(16;1,2,5): --> {J1} --> 15 --> {P2} --> 13 => -
 : --> {J2} --> 14 --> {J2} --> 13 => -
 : --> {J5} --> 11 --> {P1} --> 10 => -
 --> {P5} --> 6 --> {J5} --> 1J => +
 (tento průběh hry je nepravděpodobný, zná-li Protihráč strategii. Proto VP považuji za KP).

 KP NIMu* S(n;1,2,5)= 4, 7, 10, 13, 16, ... - posloupnost sousedních KP je rozdílná o 3 kameny - jsou to tytéž VP jako KP u NIMu* S(n;1,2,4).

Rám. 59

Trochu mě udivuje shodnost KP NIMu* S(n;1,2,4) a NIMu* S(n;1,2,5), ale nezabývám se tím.

* S (16;1,2,5) je krize. Potvrdila se mi hypotéza, že kdyby se používal k odběru z tohoto čísla maximální odběr (5 kamenů, což je c), u čísel $n = (t \cdot c) + 1$, pak bylo - li by t liché /např. $= (1 \cdot c) + 1$, $(3 \cdot c) + 1$ / a používal - li by Protihráč také odběr 5 kamenů, vyhraji. To ovšem nelze předpokládat, jelikož odebrání 5 kamenů je v tuto chvíli pro Protihráče nevýhodné (prohrál by).

Je - li t sudé /např. $(2 \cdot c) + 1 = 11$ kamenů, $(4 \cdot c) + 1 = 21$ kamenů/, je nevýhodou z nich začínat při odebrání 5 kamenů - prohrála bych, protože bych se kvůli tomu dostala na KP.

Rám. 60

Rám. 60 - viz příloha X

Ve 12:15 téhož dne (15. 2. 2006) pokračuji řešením NIMu* $S(n;1,3,5)$ - (příloha X).

* $S(2;1,3,5)$: --> {J1} --> 1P => +
 KP * $S(3;1,3,5)$: --> {J1} --> 2 --> {P1} --> 1J => -

 * $S(4;1,3,5)$: --> {J3} --> 1P => +
 KP* $S(5;1,3,5)$: --> {J1} --> 4 --> {P1} --> 3 --> ... => -
 : --> {J3} --> 2 --> {P1} --> 1J => -

 * $S(6;1,3,5)$: --> {J1} --> 5 --> {P3} --> 2 --> {J1} --> 1P => +
 : --> {J5} --> 1P => +

 KP * $S(7;1,3,5)$: --> {J1} --> 6 --> {P1} --> 5 => -
 : --> {J3} --> 4 --> {P1} --> 3 => -
 : --> {J5} --> 2 --> {P1} --> 1 J ... => -

 Hodnoty KP se navyšují o 2 kameny stejně jako $5-3=2$ a $3-1=2$

 * $S(8;1,3,5)$: --> {J1} --> 7 => +
 : --> {J3} --> 5 => +
 : --> {J5} --> 3 => +

Rám. 61

<p> $KP * S(9;1,3,5): \rightarrow \{J1\} \rightarrow 8 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 7 \dots \Rightarrow -$ $\quad \quad \quad \rightarrow \{J3\} \rightarrow 6 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 5 \dots \Rightarrow -$ $\quad \quad \quad \rightarrow \{J5\} \rightarrow 4 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 3 \dots \Rightarrow -$ </p> <p>-----</p> <p> $* S(10;1,3,5): \rightarrow \{J1\} \rightarrow 9 \dots \Rightarrow +$ $\quad \quad \quad \rightarrow \{J3\} \rightarrow 7 \dots \Rightarrow +$ $\quad \quad \quad \rightarrow \{J5\} \rightarrow 5 \dots \Rightarrow +$ </p> <p>-----</p> <p> $KP * S(11;1,3,5): \rightarrow \{J1\} \rightarrow 10 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 9 \dots \Rightarrow -$ $\quad \quad \quad \rightarrow \{J3\} \rightarrow 8 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 7 \dots \Rightarrow -$ $\quad \quad \quad \rightarrow \{J5\} \rightarrow 6 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 5 \dots \Rightarrow -$ </p>

Rám. 62

Při přepisování zápisků jsem místo vykřičníku, kterým jsem v zápiscích označovala KP, přímo použila a i nadále používat budu označení KP. Sama vidím, že toto nové označení pomáhá k lepší orientaci.

Před počítáním dalších NIMů* S jsem zapsala všechny KP NIMů* S proto, abych z tohoto zápisu lépe odhalila návod na získání KP. Hodnoty dalších KP, které najdu, jsem sem dopisovala.

<p> $KP * S(n;1,2,4): 4, 7, 10, 13, \dots$ $KP * S(n;1,2,5): 4, 7, 10, 13, \dots$ (správnost není prověřena - KP nejsou správné) $KP * S(n;1,3,5): 3, 5, 7, 9, 11, \dots = (t*2)+1$ $KP * S(n;1,3,6): 3, 5, 10, 12, 14, \dots$ $KP * S(n;1,4,5): 3, 9, 11, 17, 19, 25, \dots$ $KP * S(n;1,5,6): 3, 5, 13, 15$ </p>

Rám. 63

15. 2. 2006 počítám NIM* S(n;1,3,6) od 12:30 do 13:00

Nejdříve jsem chtěla opravit zápisky NIMu S(n;1,3,5) (příloha XI), jelikož jsem si poznamenala toto:*

<p> Ale u * S(n;1,3,5) není VP 3 krizí, protože když vezmu 2 kameny, zbyde na hromadě 1 kámen pro Protihráče, a Já tím vyhraji. Proto dále upravuji, že 1. KP pro * S(n;1,3,5) by byla VP 5. Tím by platilo, že 1. KP je rovna hodnotě c. </p>
--

Rám. 64

Vzpomínám si, že jsem nad správností tvrzení z rám. 64 ještě chvíli přemýšlela. Potom jsem pokračovala v řešení již nadepsaného NIMu $S(n;1,3,6)$ - (příloha XI).*

* $S(2;1,3,6)$: $--> \{J1\} --> 1 P \dots \Rightarrow$
 KP * $S(3;1,3,6)$: $--> \{J_2 1\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$

Rám. 65

Za okamžik jsem si uvědomila, že 2 kameny odebírat nemůžu. A také to, že jsem se stejného omylu dopustila i v případě zamítnutí toho, že NIM $S(3;1,3,5)$ je KP - viz rám. 63. Ihned jsem napsala nové tvrzení, které je v rámečku 66.*

Nelze, neplatí (výše zmiňovaná oprava), protože 2 kameny se brát nesmí. Znovu opravuji, že u $*S(n;1,3,5)$ je VP 3 KP.

Rám. 66

Zde bych opět chtěla poukázat na ovlivnění pravidly předchozí hry, která používám i ve hře nové. Tato pravidla jsou však odlišná oproti hře předchozí.

* $S(4;1,3,6)$: $--> \{J1\} --> 3 --> \{P1\} --> 2 --> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$
 $: --> \{J3\} --> 1P \dots \Rightarrow +$

KP * $S(5;1,3,6)$: $--> \{J1\} --> 4 --> \{P1\} --> 3 \dots --> 1J \dots \Rightarrow -$
 $: --> \{J3\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$

Není zde člen c zbytečný pro strategii? Nepoužívám ho.

* $S(6;1,3,6)$: $--> \{J1\} --> 5 \dots \Rightarrow +$
 $: --> \{J3\} --> 3 --> \{P1\} --> 2 --> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$

* $S(7;1,3,6)$: $--> \{J1\} --> 6 --> \{P1\} --> 5 \dots \Rightarrow -$
 $: --> \{J3\} --> 4 --> \{P1\} --> 3 \dots \Rightarrow -$
 $: --> \{J6\} --> 1P \dots +$

Rám. 67

VP 7 by se mohla vyjádřit jako pozice $c+1$. A platí totéž jako u VP $a+1$ a VP $b+1$ - kdo z těchto VP začne a odebere kameny tak, aby po jeho tahu zbyl 1 kámen, zaručeně vyhraje. VP $a+1$ nutno odebrat a
 VP $b+1$ nutno odebrat b
 VP $c+1$ nutno odebrat c .

Rám. 68

Obsah rám. 68 je pravdivý, a když jsem se zpětně podívala na vlastní tahy z VP, které byly o 1 kámen větší než a, b i c, (tedy z těch pozic, o nichž píše v rám. 68), opravdu jsem díky této taktice dostala Protihráče na VP 1 kamene, který musel dobrat, čímž prohrál. Toto jsem si ale uvědomila až při sepisování údajů do rámečku 68. Při pohledu na můj vlastní tah následující hry s 8 kameny na hromadě ale zjišťuji, že zde nevyužívám získaných poznatků a odebírám kameny tak, aby Protihráč začínal hrát z pozice c+1. To zavinilo mou prohru.

<p>* S(8;1,3,6): --> {J1} --> 7--> {P6} --> 1J => - : --> {J3} --> 5 --> {P3} --> 2 --> {J1} --> 1P => + : --> {J6} --> 2--> {P1} --> 1J => -</p>

Rám. 69

Krátce po dopsání třetí hry NIMu* S(8;1,3,6) jsem připsala: Vítězství ve druhé hře * S(8;1,3,6) je nereálné, jelikož kdyby Protihráč odebral z VP 5 kamenů 2 kameny, dostal by mě na KP. O chvíli déle jsem však tuto domněnku popřela, protože jsem si všimla, že jsem opět chybně odebrala 2 kameny, které u tohoto typu NIMu* S povoleny odebírat nebyly.

15. 2. 2006, 14:30 hodin. Začínám prověřovat* S(8;1,3,6), abych si mohla být jistá, že se nejedná o KP.

<p>* S(8;1,3,6): --> {J3} --> 5 --> {P3} --> 2 --> {J1} --> 1P => + * S(9;1,3,6): --> {J1} --> 8 --> {P3} --> 5 => - : --> {J3} --> 6--> {P1} --> 5 => - : --> {J6} --> 3 --> {P2 1} --> 2 --> {J1} --> 1P ... => +</p> <p>-----</p> <p>KP * S(10;1,3,6): --> {J1} --> 9 --> {P6} --> 3 => - : --> {J3} --> 7 --> {P6} --> 1J => - : --> {J6} --> 4 --> {P1} --> 3 => -</p> <p>-----</p> <p>* S(11;1,3,6): --> {J1} --> 10 => + KP * S(12;1,3,6): --> {J1} --> 11 --> {P1} --> 10=> - : --> {J3} --> 9 --> {P6} --> 3 => - : --> {J6} --> 6 --> {P3} --> 3 => -</p>
--

Rám. 70

*Ve třetí hře * S(9;1,3,6) (viz rám.70; příloha XII) jsem byla stále ovlivněna tím, že jsem v předchozí hře směla odebrat 2 kameny. Tyto pokusy byly založeny na objevování izolovaných modelů. O generickém modelu jsem vůbec netušila.*

<p>* S(13;1,3,6): --> {J1} --> 12 => +</p> <p>-----</p> <p>KP * S(14;1,3,6): --> {J1} --> 13 --> {P1} --> 12 => -</p> <p> : --> {J3} --> 11 --> {P1} --> 10 => -</p> <p> : --> {J6} --> 8 --> {P3} --> 5 => -</p>

Rám. 71

3.7 NÁVRAT K NIMU EXTRA

20. 2. 2006

Od toho, co jsem hledala strategii pro typ NIMu EXTRA (n ; k max, Vn), uplynula již delší doba. Ve svých poznámkách bych některé věci označila jinak, proto nejdříve naváži na myšlenky ze 6. 10. 2005 a následně je vylepším. Všimám si toho, že „ a “ vyjadřuje pořadí KP, ve skutečnosti je však o jednu nižší, než je zapsané. Dosadím-li tedy za „ V “ 4 kameny a nechám-li „ a “ zvětšené o 1, vychází mi počty kamenů na KP stejné jako ty skutečné. Při snaze použít čísla z pravého sloupce tak, aby ovlivnila výsledek správné KP, zjišťuji, že jsou také posunuta, tentokrát o řádek výš. Všechny tyto opravné výpočty provádím z paměti. Pro lepší srozumitelnost uvádím vzorec nový, který je v podstatě shodný s tím původním, je pouze vhodněji vyjádřen:

KP pro ($n;2;V4$): 7, 10, 13, 16?, 19?, ..	V^*	a	-1	
	2	(2)	-2	=> nejasné při
	3	(3)	-3	vysokých
	4	(4)	-4	číselech
		(5)	-1	
		(..)	-2	
		(..)	-3	

Rám. 72

$V^* a - (1 \text{ až } 4) \dots a = (\text{pořadí KP} + 1)$	(7)
--	-----

Jedinou potíží při použití vzorce je zjistit, kolik kamenů se má právě teď odečíst. Snad mi pomůže opětovné vypsání KP s tím, jak je získám /podle (7)/.

KP ($n;2;V4$):	7=	4* 2- 1
	10=	4* 3- 2
	13=	4* 4- 3
	16=	4* 5- 4
	19=	4* 5- 1
	22=	4* 6- 2

Abych dodržela neustálé opakování odečítaných čísel v pořadí 1, 2, 3 a 4, musela jsem u KP 19 porušit pravidlo o pořadí KP. Tím jsem zapsala na stejné pořadí pro KP 16 i 19 (obě jsou na 5. pořadí), to není dobré. Je nutné znovu prozkoumat vztahy mezi čísly a každé pořadí KP přidělit pouze jednomu číslu. Stejně jsem však nezjistila, jaké číslo se bude odečítat - nevidím v tom žádné pravidlo.

Po několika málo minutách jsem zjistila novou zákonitost, která mě opravdu potěšila, neboť předpokládám, že ji bude možné použít i při hledání vysokých čísel KP.

KP 19 získám i jako $4 * 6 - 5$, KP 22 jako $4 * 7 - 6$. Jestliže doplním čísla k ostatním, vznikne mi následující:

$$7 = 4 * 2 - 1 \qquad 19 = 4 * 6 - 5$$

$$10 = 4 * 3 - 2 \qquad 22 = 4 * 7 - 6$$

$$13 = 4 * 4 - 3$$

$$16 = 4 * 5 - 4$$

Na první pohled je tím patrná souvislost $(KP + 1)$ s odečítaným číslem - toto číslo je o 1 nižší než $(KP + 1)$.

Pokusím se opět dokázat toto tvrzení. Náhodně zvolím $(KP + 1)$:

$$4 * 10 - 9 = 40 - 9 = 31$$

Nyní doplním řadu krizových pozic: 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, ..

31 je opravdu KP.

$$\text{Zkusím dále: } 4 * 15 - 14 = 60 - 14 = 46$$

Řada KP je: 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, ..

Mezi KP NIMu($n; 2; V4$) patří i VP 46.

$$\boxed{KP(n; 2; V4) = V * (KP + 1) - KP} \quad (8)$$

Ověření vzorce: V je 4. Chci zjistit počet kamenů na 1. KP – do závorky dosadím $1+1$. Nakonec od součinu V a závorky (tj. $4 \cdot 2$) odečtu 1. První KP je tedy na VP 7 kamenů. Vzorec je platný.

A jak zjistím, zda je konkrétní číslo KP?

Vezmu číslo, které zkoumám, a dosadím ho do vzorce (8). Např. 59, dále 55.

$$59 = 4 * (KP + 1) - KP$$

$$55 = 4 * (KP + 1) - KP$$

$$59 = 4KP + 4 - KP$$

$$55 = 4KP + 4 - KP$$

$$59 = 3KP + 4$$

$$55 = 3KP + 4$$

$$55 = 3KP / :3$$

$$51 = 3KP / :3$$

$$\underline{18,33 = KP}$$

$$\underline{17 = KP}$$

U těchto čísel jsem z předchozího počítání věděla, že $(59;2;V4)$ není KP a $(55;2;V4)$ je KP. Podle toho jsem usoudila, že je-li dané číslo KP, bude dělitelné trojkou beze zbytku. Jestliže krizovým nebude, při dělení nevyjde celé číslo.

Tento názor se ještě pokusím ověřit dalším počítáním.

Zjišťování KP u určitého čísla opět tvořím u počítače, takže záznamy na papíru nemám. Je 23:17 hodin.

Jsou 42, 73 a 80 KP?

$$42 = 4 * (KP + 1) - KP$$

$$73 = 4 * (KP + 1) - KP$$

$$80 = 4 * (KP + 1) - KP$$

$$42 = 4KP + 4 - KP$$

$$73 = 4KP + 4 - KP$$

$$80 = 4KP + 4 - KP$$

$$38 = 3KP$$

$$69 = 3KP$$

$$76 = 3KP$$

$$\underline{12,67 = KP}$$

$$\underline{23 = KP}$$

$$\underline{25,33 = KP}$$

Podle výsledků nepovažuji počet kamenů 42 a 80 za krizový. 73 kamenů se mi jeví jako KP.

Nyní sepíši řadu KP: 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, ...

Tím jsem potvrdila, že z těchto tři čísel je jedinou KP (80;2;V4), zároveň i to, že moje dnes vyvozené závěry jsou správné.

Z tohoto objevu mám radost, jelikož původně (v říjnu 2005) jsem v této etapě žádný obecný vzorec pro $(n;2;V4)$ neměla.

21. 2. 2006

Navazuji na úlohy řešené 10. 10. 2005. Je třeba ověřit vzorec (6) - (viz rám. 73). *Ověřování provádím u počítače, nemám písemný podklad.*

k	V	rozdíl	je/4	je KP?	začne	skutečnost
20	6	14	není	není	Já	není KP
30	10	20	je	je	Protihráč	je KP
15	12	3	není	není	Já	není KP
11	2	9	není	není	Já	není KP
26	14	12	je	je	Protihráč	je KP

Rám. 73

KP jsem vypočítala podle vzorce. Ted' je ještě potřebuji potvrdit v odehraných zápasech.

Musím objevit KP pro $(n;3;V2)$, $(n;3;V6)$, $(n;3;V10)$, $(n;3;V12)$ a $(n;3;V14)$.

$(n;3;V2)$:

$(4;3;V2)$: $-->\{J;2\}--> 2$ Já

$(5;3;V2)$: $-->\{J;3\}--> 2$ Já

$(6;3;V2)$: $-->\{P;3\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

$(7;3;V2)$: $-->\{J;1\}--> 6 -->\{P;3\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

$(8;3;V2)$: $-->\{J;2\}--> 6 -->\{P;3\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

$(9;3;V2)$: $-->\{J;3\}--> 6 -->\{P;3\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

$(10;3;V2)$: $-->\{P;3\}--> 7 -->\{J;1\}--> 6 -->\{P;3\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

$(11;3;V2)$: $-->\{J;1\}-->10-->\{P;3\}-->7-->\{J;1\}-->6-->\{P;3\}-->3-->\{J;1\}--> 2$ Já ... není KP

$(n;3;V6)$:

$(8;3;V6)$: $-->\{J;2\}--> 6$ Já

$(9;3;V6)$: $-->\{J;3\}--> 6$ Já

$(10;3;V6)$: $-->\{P;3\}--> 7 -->\{J;1\}--> 6$ Já

$(11;3;V6)$: $-->\{J;1\}--> 10 -->\{P;3\}--> 7 -->\{J;1\}--> 6$ Já

(12;3;V6): -->{J;2}--> 10 -->{P;3}--> 7 -->{J;1}--> 6 Já
 (13;3;V6): -->{J;3}--> 10 -->{P;3}--> 7 -->{J;1}--> 6 Já
(14;3;V6): -->{P;3}--> 11 -->{J;1}--> 10 -->{P;3}-->7-->{J;1}--> 6 Já
 (15;3;V6): -->{J;1}-->14-->{P;3}-->11-->{J;1}-->10-->{P;3}-->7-->{J;1}-->
 6 Já

(16;3;V6):-->{J;2}-->14-->{P;3}-->11-->{J;1}-->10-->{P;3}-->7-->{J;1}-->
 6Já

(17;3;V6):-->{J;3}-->14-->{P;3}-->11-->{J;1}-->10-->{P;3}-->7-->{J;1}-->
 6Já

**(18;3;V6): -->{P;3}-->15-->{J;1}-->14-->{P;3}-->11-->{J;1}-->10--
 >{P;3}--> 7-->{J;1}-->6 Já**

(19;3;V6):-->{J;1}-->18-->{P;3}-->15-->{J;1}-->14-->{P;3}-->11-->{J;1}--
 >10-->{P;3}--> 7 -->{J;1}--> 6 Já

(20;3;V6): -->{J;2}-->18-->{P;3}-->15-->{J;1}-->14-->{P;3}-->11-->{J;1}--
 >10-->{P;3}-->7-->{J;1}--> 6 Já ...není KP

Všimla jsem si, že nezáleží na tom, zda hraji ($n;3;V2$) nebo($n;3;V6$) – KP jsou stejné pro oba dva typy her. Typu ($n;3;V6$) pouze chybí jedna KP (ta první), kterou je VP 6 kamenů.

(n;3;V4)

(5;3;V4): -->{J;1}--> 4 Já

(6;3;V4): -->{J;2}--> 4 JáTakže VP 6 nebude KP.

(7;3;V4): -->{J;3}--> 4 Já

Pokračuji hrou (n;5;V4)

(8;5;V4): -->{J;4}--> 4 Já

(9;5;V4): -->{J;5}--> 4 Já

(10;5;V4): -->{P;5}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já

(11;5;V4): -->{J;1}--> 10 -->{P;5}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já

(12;5;V4): -->{J;2}--> 10 -->{P;5}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já

(13;5;V4): -->{J;3}--> 10 -->{P;5}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já

(8;3;V4): -->{P;3}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já
(9;3;V4): -->{J;1}--> 8 -->{P;3}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já
(10;3;V4): -->{J;2}--> 8 -->{P;3}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já
(11;3;V4): -->{J;3}--> 8 -->{P;3}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já .. 12 bude KP
(12;3;V4): -->{P;3}--> 9 -->{J;1}--> 8 -->{P;3}--> 5 -->{J;1}--> 4 Já
(13;3;V4): -->{J;1}-->12-->{P;3}-->9-->{J;1}-->8-->{P;3}-->5-->{J;1}-->4Já
(14;3;V4): -->{J;2}-->12-->{P;3}-->9-->{J;1}-->8-->{P;3}-->5-->{J;1}-->4Já
(15;3;V4): -->{J;3}-->12-->{P;3}-->9-->{J;1}-->8-->{P;3}-->5-->{J;1}-->4Já
(16;3;V4): -->{P;3}-->13-->{J;1}-->12-->{P;3}-->9-->{J;1}-->8-->{P;3}-->5-->{J;1}--> 4 Já

Vidím, že KP pro $(n;3;V4)$ jsou jiné než $(n;3;V2)$ a $(n;3;V6)$. Jsou sice od sebe také vzdáleny o 4 kameny, ale nacházejí se na vzájemně odlišných VP.

Je to způsobeno tím, že každá 1. KP vznikne na o 4 kameny vyšší VP, než je hodnota V. Proto předpokládám, že krizové pozice V, jejichž označení je nějakým násobkem 4, budou také násobky 4. Krizové pozice, které jsou u her $V(4+2)$, by měly mít hodnotu jakéhokoliv násobku 4, zvětšeného o 2.

Pro příklad: V4 má mít KP: 8, 12, 16, ...

*V6 (= V4+ 2) má KP: 10(=2*4+2), 14 (3*4+2), 18(4*4+2), ...*

Předpokládám, že u $(n;3;V10)$ bude 1. KP na VP 14 kamenů a další bude o 4 kameny dále.

(n;3;V10)

(12;3;V10): -->{J;2}--> 10 Já
(13;3;V10): -->{J;3}--> 10 Já
(14;3;V10): -->{P;3}--> 11 -->{J;1}--> 10 Já
(15;3;V10): -->{J;1}--> 14-->{P;3}--> 11 -->{J;1}--> 10 Já
(16;3;V10), (17;3;V10): -->{J; }--> 14 -->{P;3}--> 11 -->{J;1}--> 10 Já

(18;3;V10): KP, začne Protihráč, vyhrají Já s 10 kameny

VP19, 20, 21: začnu já

(22;3;V10): začne Protihráč

VP 23, 24, 25: začnu já, postupně odebírám na 18, 14 a 10 kamenů

(26;3;V10): KP

27, 28, 29: začnu já

30: KP

(n;3;V12)

VP 13, 14, 15: začnu já a vyhrají, tyto pozice nejsou krizovými

(16;3;V12): 1. KP

(n;3;V14)

- předpoklad: KP: 18, 22, 26, ...

VP 15, 16, 17: -->{J; }--> 14 Já

(18;3;V14): KP

VP 19, 20, 21: -->{J; }--> **18**

(22;3;V14): KP

VP 23, 24, 25: -->{J; }--> **22**

(26;3;V14): KP

VP 27, 28, 29: -->{J, }--> **26**

Odhalení KP pro $(n;3;Vn)$:

KP bude pouze sudé číslo.

Je-li n násobkem 4, pak bude každá KP dělitelná 4. Je-li n násobkem

4- zvětšeným o 2, pak bude KP každý počet kamenů, jenž bude násobkem

4- zvětšeným o 2. Počet kamenů na sousedních KP se zvyšuje o 3+1 kámen.

Tento stejný závěr uvádím již výše, tam to však byly pouhé domněnky.

Zde je potvrzují a uznávám za správné.

Zajímá mě, jak to bude s KP u hry $(n;5;Vn)$. Očekávám, že KP bude

muset být dělitelná 6.

22. 2. 2006

Ve večerních hodinách se při hokejovém zápase ČR - SR snažím objevit strategii hry NIM ($n;5;Vn$). Vn je sudý počet kamenů (konkrétně specifikovaný) pro toho, komu zbydou po jeho tahu. *Jelikož televizi sleduji na stejné obrazovce, jako píši tuto práci, občas mi pozornost přejde k hokeji a práce na NIMu pokračuje až v méně napínavých chvílích. Tím si ale ztěžuji práci - musím se opětovně začítat do již zapsaných poznatků, což mě trochu zdržuje.*

($n;5;V2$)

(7;5;V2): $-->\{J;5\}--> 2$ Já

(8;5;V2): $-->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

(9;5;V2): $-->\{J;1\}--> 8 -->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

(10;5;V2): $-->\{J;2\}--> 8 -->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

(11;5;V2): $-->\{J;3\}--> 8 -->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

(12;5;V2): $-->\{J;4\}--> 8 -->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

(13;5;V2): $-->\{J;5\}--> 8 -->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

(14;5;V2): $-->\{P;5\}--> 9 -->\{J;1\}--> 8 -->\{P;5\}--> 3 -->\{J;1\}--> 2$ Já

VP 15, 16, 17, 18, 19: začnu já, postupně dobírám na 14, 8 kamenů.

(20;5;V2): KP

VP 21, 22, 23, 24, 25: není KP, začnu já

(26;5;V2): KP

Moje očekávání, že KP u typu ($n;5;V2$) budou dělitelná 6, se nesplnila. Možná je to kvůli záměně dělitelnosti šesti hodnoty KP s dělitelností rozdílu výherního počtu kamenů od počtu kamenů. Tento rozdíl by totiž dělitelný 6 byl.

(14;5;V4): $-->\{J;4\}--> 10 -->\{P;5\}--> 5 -->\{J;1\}--> 4$ Já

(15;5;V4): $-->\{J;5\}--> 10 -->\{P;5\}--> 5 -->\{J;1\}--> 4$ Já

(16;5;V4): $-->\{P;5\}--> 11 -->\{J;1\}--> 10 -->\{P;5\}--> 5 -->\{J;1\}--> 4$ Já

VP 17, 18, 19, 20, 21 ...nejsou KP

(22;5;V4): KP

Budu-li hrát NIM, kde lze odebírat 1 až 5 kamenů při jednotlivém tahu, bude hodnota KP narůstat o 6 kamenů mezi jednotlivými sousedními KP. Tato pozice musí být násobkem 6, ale zvětšeným o takový počet kamenů, jaký je hodnota vítězné pozice.

OBECNĚ:

Získání hodnoty KP:

Budu-li hrát jakýkoliv NIM, kde lze odebírat 1 až n kamenů při jednotlivém tahu, bude hodnota KP narůstat o $1+n$ kamenů mezi jednotlivými sousedními KP. Tato pozice musí být násobkem $1+n$, a navíc být zvětšená o takový počet, jakým je hodnota vítězné pozice.

Rozpoznání KP v konkrétním čísle:

Od tohoto čísla odečtu hodnotu vítězné pozice. Je-li rozdíl dělitelný $(n+1)$, pak je toto číslo KP a nechci z něho začínat.

V průběhu sepisování výše popsaných úvah vidím, že jsem si zaměnila pravidla. Zadaná hra spočívala v tom, že vyhrává ten, na něhož zbývá sudý počet kamenů po soupeřově tahu. Tehdy jsem to ale netušila a systematicky hledala strategii hry. Proto se domnívám, že i takto mnou formulovaná hra má smysl.

3.8 NÁVRAT K NIMU* SPECIÁL

22. 2. 2006

Od 16:30 do 16:50 se v metru snažím řešit NIM* $S(n;1,4,5)$ (příloha XIII).

Ale nejde mi to, na počítání nemám náladu, přemýšlím o něčem jiném.

* $S(2;1,4,5)$: $--> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$ * $S(3;1,4,5)$: $--> \{P1\} --> 2 --> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$

Rám. 73

Za okamžik jsem si uvědomila, že VP 3 je KP. Protože jsem však obrátila pořadí hráčů - opět jsem jako prvního nechala hrát Protihráče, tím na něho zbyl poslední kámen. Abych si dokázala, že VP 3 je pro tuto hru opravdu krizovou, zahrála jsem si tento souboj ještě jednou a já v něm měla první tah.

KP * $S(3;1,4,5)$: $--> \{J1\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$ VP 3 je KP * $S(4;1,4,5)$: $--> \{J1\} --> 3 --> \{P1\} --> 2 --> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$ * $S(5;1,4,5)$: $--> \{J4\} --> 1P \dots \Rightarrow +$ * $S(6;1,4,5)$: $--> \{J5\} --> 1P \dots \Rightarrow +$ ----- * $S(7;1,4,5)$: $--> \{J5\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$: $--> \{J1\} --> 6 --> \{P5\} --> 1J \dots \Rightarrow -$: $--> \{J4\} --> 3 --> \{P1\} --> 2 --> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$
--

Rám. 74

* $S(8;1,4,5)$: $--> \{J1\} --> 7 --> \{P4\} --> 3 --> \{J1\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$: $--> \{J4\} --> 4 --> \{P1\} --> 3 --> \{J1\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$: $--> \{J5\} --> 3 --> \{P1\} --> 2 --> \{J1\} --> 1P \dots \Rightarrow +$
--

Kdo začne z VP 4, vyhraje.

Kdo začne z VP 5, vyhraje.

KP * $S(9;1,4,5)$: $--> \{J1\} --> 8 \dots \Rightarrow -$: $--> \{J4\} --> 5 --> \{P4\} --> 1J \dots \Rightarrow -$: $--> \{J5\} --> 4 --> \{P1\} --> 3 --> \{J1\} --> 2 --> \{P1\} --> 1J \dots \Rightarrow -$
--

Rám. 75

24. 2. 2006

13:15 - 13:30 v metru - znovu jsem prověřovala postup u poslední včera odehrané hry * $S(9;1,4,5)$ (viz příloha XIII uprostřed), neboť jsem si

nebyla jistá, že jsem při této hře myslela právě na její průběh.

$KP * S(9;1,4,5): \rightarrow \{P1\} \rightarrow 8 \rightarrow \{J4\} \rightarrow 4 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 3 \rightarrow \{J1\} \rightarrow 2 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 1J \dots \Rightarrow -$
 $8 \rightarrow \{J5\} \rightarrow 3 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 2 \rightarrow \{J1\} \rightarrow 1P \dots \Rightarrow +$

Rám. 76

*Nevím, proč jsem při prvním tahu nechala jako prvního hrát Protihráče. Na výsledku zápasu to sice nic nezmění, já to ale uvádím proto, že mě to klame, protože jsem po téměř celou dobu řešení NIMu zvyklá, že ve většině her uskutečňuji první tah Já. Navíc mi tento způsob hry nedokládá, že je VP 9 krizovou, jelikož tahy, lépe řečeno počty odebraných kamenů, nejsou voleny tak, aby využívaly výhod pro hráče, který dostane soupeře na KP. Zmiňovanou netaktičnost vidím např. u tahu J4, kde jsem správně měla odebrat Z VP8 kamenů 5. Tím bych soupeře dostala na KP 3. Ve skutečnosti jsem ale z tohoto počtu musela začínat Já, způsobilo to mojí prohru. Druhou hru již mohu považovat za takticky správnou. * S(9;1,4,5) je KP.*

*Obava z toho, že své výsledky uveřejním v diplomové práci, způsobila, že jsem se opět vrátila k * S(9;1,4,5) a prověřování toho, zda je to KP. Odehrála jsem pět dalších zápasů (ty sem již nepřepisuji, neboť jsou totožné s výše uvedenými), dva z nich byly takticky špatné a vůbec nevyužívaly znalostí o předchozích KP. Byly to vlastně náhodné hry a vyhrála jsem v nich i přes to, že VP 9 je KP. To proto, že jsme ani Já, ani soupeř neznali strategii a náhodně odebírali libovolný počet kamenů z hromady.*

$*S(10;1,4,5): \rightarrow \{J1\} \rightarrow 9 \rightarrow \{P5\} \rightarrow 4 \rightarrow \{J1\} \rightarrow 3 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 2 \rightarrow \{J1\} \rightarrow 1P \Rightarrow +$
 $: \rightarrow \{J4\} \rightarrow 6 \rightarrow \{P5\} \rightarrow 1J \dots \Rightarrow -$
 $: \rightarrow \{J5\} \rightarrow 5 \rightarrow \{P4\} \rightarrow 1J \dots \Rightarrow -$

Rám. 77

KP * S(11;1,4,5): -->{J1}-->10-->{P1}-->9 Já => -
 : -->{J4}--> 7-->{P1}-->6-->{J5}-->1P => +
 -->{P4}-->3-->{J1}-->2-->{P1}-->1J....=> -
 Protihráč chce vyhrát, proto mě dovede na KP (=3). *Tento průběh je nejpravděpodobnější, jestliže by z VP 7 začínal hrát Protihráč.*
 -->{P5} -->2-->{J1}-->1P => +
 : --> {J5}--> 6 -->{P5}-->1J => -

 * S(12;1,4,5): --> {J1} --> 11 --> => + 12-1= KP
 * S(13;1,4,5): --> {J4} --> 9 => +

Rám. 78

*Od VP 12 jsem hrála pouze jeden zápas při každé VP, která nebyla krizová. Toho jsem docílila tím, že jsem hledala souvislosti mezi již objevenými KP a povoleným počtem kamenů k odebrání. Někdy jsem nemohla použít KP objevenou jako „poslední“, protože bych nemohla splnit podmínku o odebrání pouze předepsaného počtu kamenů. Proto jsem musela použít KP předchozí. Tento komentář připojuji záměrně, jelikož dříve jsem zmíněné souvislosti mezi KP a povoleným počtem odebíraných kamenů nesledovala. Tehdy jsem při hledání strategie zkoušela hru tak, že jsem kameny odebírala v pořadí od nejmenšího povoleného počtu při 1. tahu prvního zápasu k největšímu povolenému počtu při 1. tahu zápasu posledního. (např. při * S(n;1,3,5) jsem při prvním tahu první hry automaticky odebrala 1 kámen. Při prvním tahu druhé hry to byly kameny tři, při prvním tahu třetí hry jsem odebrala kamenů 5. Samozřejmě to takto probíhalo pouze při prvních tazích, ty ostatní jsem se snažila takticky promýšlet).*

14:00 - 14:45 v autobuse (viz příloha XIV)

* S(14;1,4,5): --> {J5} --> 9 P => +
 * S(15;1,4,5): --> {J4} --> 11 P => +
 * S(16;1,4,5): --> {J5} --> 11 P => +

 KP * S(17;1,4,5): --> {J1} --> 16 --> {P5} --> 11 Já => -
 : --> {J4} --> 13 --> {P4} --> 9 Já => -
 : --> {J5} --> 12 --> {P1} --> 11 Já => -

Rám. 79

* $S(17;1,4,5)$ jsem jako KP očekávala, protože mezi poslední KP a následujícími čísly již byl velký odstup. Navíc * $S(16;1,4,5)$ je nejbližší VP, která dosahovala na předchozí KP.

Sepsala jsem hodnoty KP a zkoumala souvislosti mezi nimi samými i mezi KP a povolenými počty odebraných kamenů (rám. 80).

KP * $S(n;1,4,5)$: 3,9,11,17.

Rozdíl mezi 3. a 1. KP je 8 ($11-3=8$). Rozdíl mezi 4. a 2. KP je také 8 ($17-9=8$).

$$8 = 2 \cdot b = 2 \cdot 4$$

$$= 2 \cdot (c-a) = 2 \cdot (5-1)$$

Rám. 80

Protože se vzdálenost mezi 1. a 3. členem posloupnosti KP zvětšila o 8 kamenů, očekávám, že další (pátá) KP bude na VP 19 kamenů. A 6. KP že bude na VP 25 kamenů.

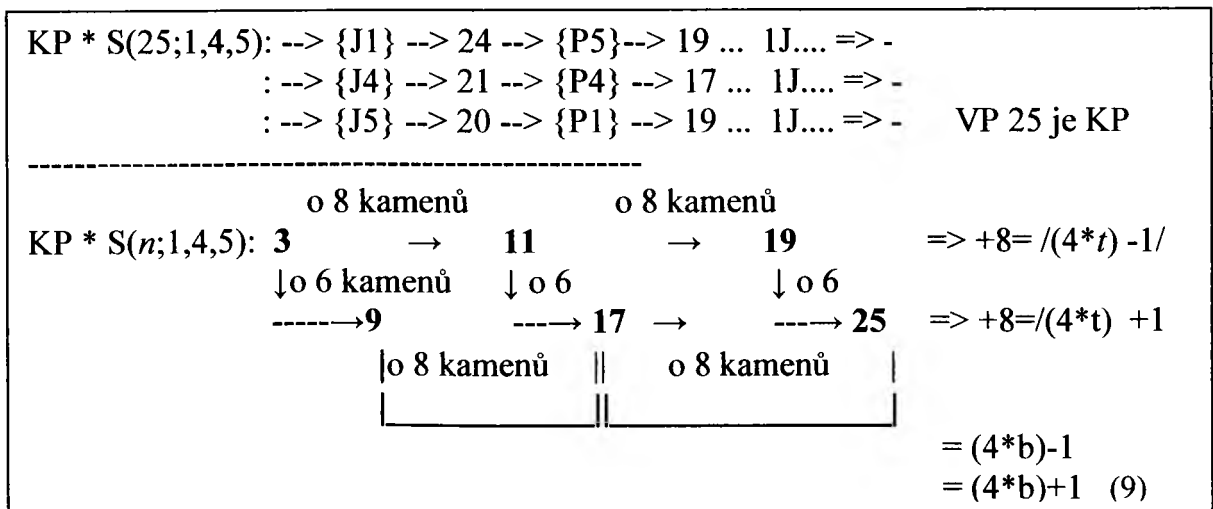
* $S(18;1,4,5)$: --> {J1} --> 17 IP => +
 KP * $S(19;1,4,5)$: --> {J1} --> 18 --> {P1} --> 17 ... 1J.... => -
 : --> {J4} --> 15--> {P4} --> 11 ... 1J => -
 : --> {J5} --> 14 --> {P5} --> 9 ... 1J => -

Rám. 81

* $S(20;1,4,5)$: --> {J1} --> 19 => +
 * $S(21;1,4,5)$: --> {J4} --> 17 => +
 * $S(22;1,4,5)$: --> {J5} --> 17 => +
 * $S(23;1,4,5)$: --> {J4} --> 19 => +
 * $S(24;1,4,5)$: --> {J5} --> 19 => +

Rám. 82

Ve 14:20 jsem v autobuse sepsala dosud nalezené KP pro NIM* $S(n;1,4,5)$: 3, 9, 11, 17, 19. Počítala jsem s nadšením, protože jsem velmi chtěla strategii objevit. Od této činnosti mě ale často odváděly myšlenky z olympiády - vzpomínky na dopoledního vítězství Kateřiny Neumannové. Z jejího úspěchu jsem měla opravdu velikou radost.

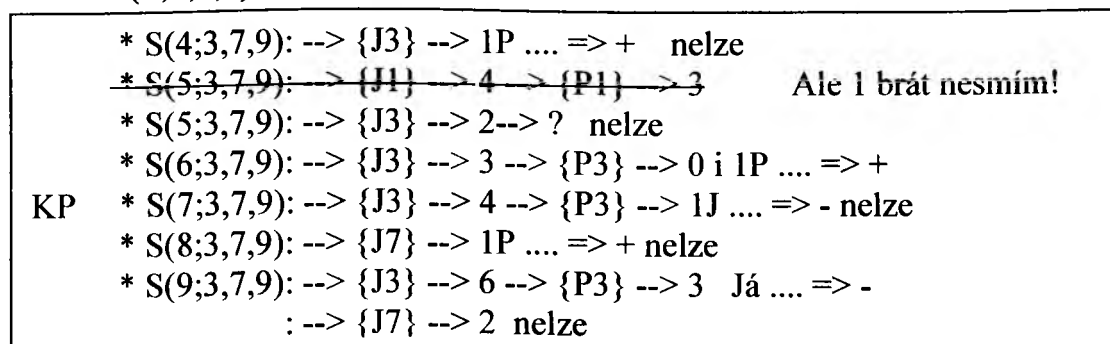


Rám. 83

Rám. 83 (viz příloha XV) poukazuje na mnou vyzkoumané souvislosti mezi KP NIMu* $S(n;1,4,5)$. Každá KP na lichém pořadí, tedy 3., 5., atd. bude o 8 kamenů vzrůstat oproti své liché předchozí pozici (např. VP 11 vzrostla o 8 kamenů oproti předchozí VP 3). Stejně narůstání počtu kamenů je i u KP, nacházejících se na sudých postech (např. VP 17 vzrostla o 8 kamenů oproti předchozí VP 9. Jsou na sudých postech, jelikož se nacházejí na 2. a 4. pořadí v posloupnosti KP).

Předpokládám, že po sepsání KP NIMu* $S(n;1,b,c)$ nebude dlouho trvat objevit obecný návod pro KP * $S(n;1,b,c)$. Proto se nyní budu zabývat NIMem* $S(n;3,b,c)$.

NIM* $S(n;3,7,9)$



Rám. 84

Vrátila jsem se k formulaci KP pro NIM* $S(n;1,4,5)$. V rám. 83 jsem jako (9) zapsala, že KP získám jako $(4*b) \pm 1$. To ale není správně, jelikož b se rovná právě 4.

Proto zápis o KP opravuji na (10).

$$(b*t)+1 \text{ a } (b*t)-1 \quad (10)$$

$$(b*t)-a \text{ a } (b*t)-a \quad (11)$$

Následně vzorec vylepšuji jako (11),

což je stejné jako (12).

$$(b*t) - (c-b) \text{ a } (b*t) + (c-b) \quad (12)$$

25. 2. 2006

17:30 - 17:50

Nevěděla jsem, jak mám vyřešit to, že na hromadě zbyde počet kamenů menší, než je minimálně povolený odběr kamenů (tedy že zbyde méně kamenů, než je a). Tato situace byla nová, neboť když jsem řešila $*S(n;1,b,c)$, nemohla mi taková potíž vzniknout. Nedovedla jsem navrhnout ani postup při situaci, kdy je na hromadě 1 kámen. Brát ho jako součást povoleného počtu kamenů nebo jako remízu? Proto jsem všechny hry z rám. 83, kde zbyl menší počet kamenů než a , označila slovem „nelze“ a rozhodla se při následné konzultaci s vedoucí práce (27. 2. 2006) informovat ji o tomto problému. Tam, kde na hromadě zbyl počet kamenů 3, jsem nyní „nelze“ nepsala, protože tam hráč může a odebrat. Odebere tím tedy i poslední kámen z hromady, čímž prohraje. Vrátila jsem se proto ke hledání KP pro NIM* $S(n;1,b,c)$ a získání obecného vzorce pro tento typ NIMu*.

27. 2. 2006

Na konzultaci s vedoucí práce jsem se shodly na tom, že zbyde-li při NIMu* $S(n;a,b,c)$, kdy a je větší než 1, na hromadě počet kamenů, který je menší než a , pak lze tyto kameny odebrat s tím, že kdo je odebírá, prohrává.

1. 3. 2006

0:50 - 1:40, NIM* $S(n;1,5,6)$

Přemýšlím nad soupisem KP z 15. 2. 2006 a hledám pravidlo pro určení KP u $*S(n;1,b,c)$. Nic mě nenapadá, jdu hrát (viz příloha XVI).

KP * $S(3;1,5,6)$: --> {J1} --> 2 --> {P1} --> 1J => -
* $S(4;1,5,6)$: --> {J1} --> 3 --> {P1} --> 2 --> {J1} --> 1P => +
KP * $S(5;1,5,6)$:-->{J1}-->4-->{P1} -->3-->{J1}-->2-->{P1}-->1J =>-
* $S(6;1,5,6)$:-->{J1}-->5-->{P1}-->4-->{J1}-->3-->{P1}-->2-->{J1}-->
1P=> +
: --> {J5} --> 1P

Rám. 85

* $S(7;1,5,6)$: --> {J1} --> 6 --> {P5} --> 1J => -
: --> {J6} --> 1P => +

* $S(8;1,5,6)$: --> {J1} --> 7 --> {P6} --> 1 J => -
: --> {J5} --> 3 --> {P1} --> 2 --> {J1} --> 1P => +
: --> {J6} --> 2 --> {P1} --> 1J => -

Rám. 86

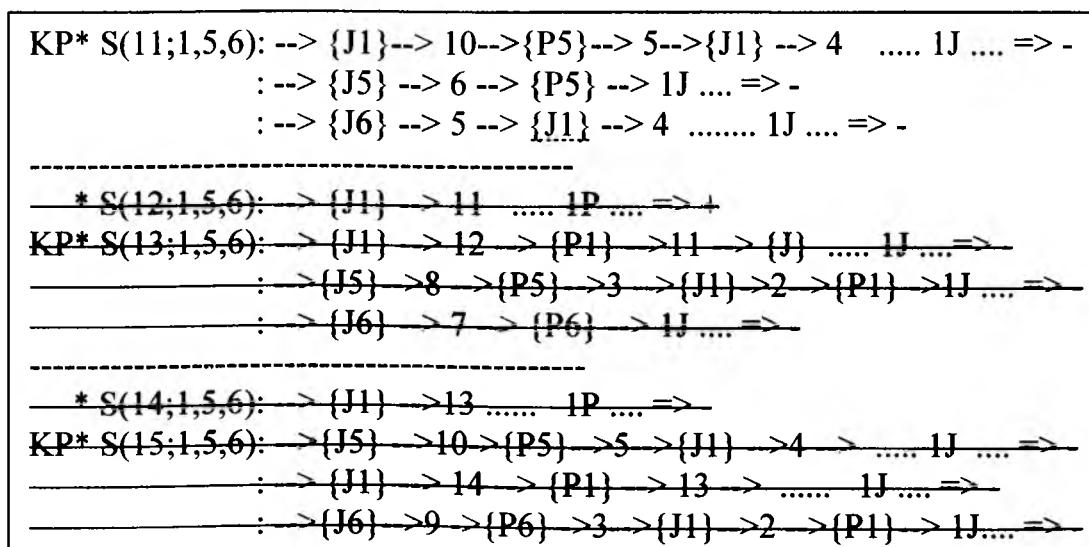
*Zaměřím-li se na $*S(8;1,5,6)$ (v rám. 86), je první a třetí hra hrou náhodnou. Bylo zbytečné, že jsem nevyužila takového odběru kamenů, aby Protihráč musel začínat z VP 3, která je zároveň KP. Druhá hra je sice odehrána tak, že jsem Protihráče na KP dovedla, vidím však, že to bylo náhodou, nikoli taktikou. Generický model KP není vůbec vytvořen a tři separované modely pro VP 8 vznikají na základě postupného odebírání a, b i c při mých vlastních prvních tazích těchto her.*

* $S(9;1,5,6)$:-->{J1}-->8-->{P5}-->3-->{J1}-->2--> {P1} --> 1J => -
:-->{J5}-->4-->{P1}-->3-->{J1}-->2-->{P1}--> 1J => -
:--> {J6} --> 3 --> {P1} --> 2 --> {J1} --> 1P => +

* $S(10;1,5,6)$:-->{J1}-->9-->{P6}-->3-->{J1}-->2-->{P1} -->1J => -
:-->{J5}-->5-->{P1}-->4 -->{J1}-->3-->{P1}-->2 -->
{J1}-->1P => +
:-->{J6}-->4-->{P1}-->3-->{J1}-->2-->{P1}--> 1J => -

Rám. 87

1:30 - Zápisky (rám. 86 a 87) z procesu hledání strategie NIMu* $S(n;1,5,6)$ jsem znovu prohlížela. Snažila jsem se tím najít další KP. Nebyla jsem ale úspěšná, proto jsem pokračovala v počítání.



Rám. 88

Nejdříve jsem měla radost z úspěšného nalezení dalších KP. Potom ale, když jsem znovu začala ověřovat, zda je vše správně, jsem dopsala: Další řešení odkládám z důvodu, že jsem chybně označila VP 11 za KP (rám. 88). Vzniklo to tím, že jsem v zápisu dvakrát hrála Já místo střídání se s Protihráčem (chybné značení tahů).

1:30 - 1:40 Následovala další kontrola správnosti řešení u předchozích VP NIMu* $S(n;1,5,6)$. Hledala jsem další případnou chybu. Tu jsem nenašla.

<p>Nyní znám tyto KP pro $* S(n;1,5,6)$: VP 3 a VP 5. Ostatní VP (od VP 12) musím prověřit znovu, neboť byly ovlivněny chybným určením, že VP 11 je krizovou. Raději je škrtnám.</p>

Rám. 89

16:00 - 16:13 v metru (příloha XVI)

Rozhodla jsem znovu prověřit i VP $*S(11;1,5,6)$ - (rám. 90). Dávala jsem již pozor na záměnu pořadí při pravidelném střídání hráčů.

<p style="text-align: center;">* S(11;1,5,6): --> {J6} --> 5 --> {P1} -->1P => +</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>KP* S(12;1,5,6): --> {J1} --> 11 --> {P6} --> 5 1J => - : --> {J5} --> 7 --> {P1} --> 6 --> {J5} --> 1P => + : --> {P5} --> 2 --> {J1} --> 1P => + : --> {J6} --> 6 --> {P1} --> 5 --> {J1} --> 4 1J => -</p> <p>Uvědomuji si chybu - z VP 7 může Protihráč odebrat 6 kamenů a já prohrají. Tento Protihráčův vítězný tah jsem původně zapomněla udělat.</p> <p style="display: flex; justify-content: space-between;"> 7 --> {P6} --> 1J => - Proto VP 12 je KP. </p>

Rám. 90

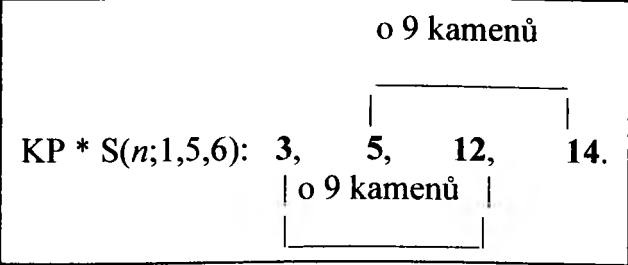
*Ve třetí hře * S(12;1,5,6) (rám. 90) mě sice Protihráč dostal na KP 5 kamenů, mohl však hru trochu urychlit tím, že by z VP 6 kamenů odebral 5 kamenů. Tím by na mě zbyl kámen 1 a o vlastní prohře bych se dozvěděla rychleji. Ve výsledku se ale nic nezměnilo - v obou situacích bych byla poražena.*

<p style="text-align: center;">* S(13;1,5,6): -->{J1}-->12 1P.... => +</p> <p>KP* S(14;1,5,6): -->{J1}-->13-->{P1}-->12 1J => - : -->{J5}-->9 -->{P6}-->3-->{J1}-->2-->{P1}-->1J => - : -->{J6}-->8-->{P5}-->3-->{J1} --> 1J => -</p>

Rám. 91

*Trochu jsem očekávala, že *S(14;1,5,6) bude KP, jelikož se stejná vzdálenost mezi KP vyskytovala i u VP 3 a VP 5 - také po 2 kamenech.*

Potom jsem hledala souvislosti mezi hodnotami KP * S(n;1,5,6) - (rám.92).



Rám. 92

22:15 - 22:40

Při přepisování řešení NIMu* S(n;1,2,4) ze dne 15. 2. 2006 jsem možná objevila strategii pro tento typ hry. Pomohlo mi vypsání jednotlivých KP,

doplněných vlastním rozbořem, v němž jsem se pokoušela sestavit hodnotu příslušné KP z povolených počtů odebíraných kamenů. Následující počítání je součástí sebereflexe, tvořím ho přímo u počítače. Nejedná se o přepis zápisků.

$$4 \dots 4$$

$$7 \dots 4+2+1 \text{ i } 4*2-1$$

$$10 \dots (2+1)*2+4 \text{ i } (4*2)+2$$

$$13 \dots (2+1)*3 +4 \text{ i } 3*4+1 \text{ i } (4*4)-2-1$$

*Chvilí jsem pozorovala souvislosti mezi KP. Potom jsem zjistila, že by KP 10 šla zapsat jiným způsobem, a to jako $(4*3)-2$. Tento krok mi dopomohl ke zjištění posloupnosti v nárůstu hodnot KP. Pro lepší přehlednost jsem situaci znovu přepsala, získání některých KP ještě upravila:*

$$4 \dots 4*1 - 0$$

$$7 \dots 4*2 - 1$$

$$10 \dots 4*3 - 2$$

$$13 \dots 4*4 - 3$$

$$16 \dots 4*5 - 4$$

$$19 \dots 4*6 - 5$$

Tímto postupem pro získání KP NIMu $S(n;1,2,4)$ si jsem jistá. Hlavní roli v něm hraje třetí hodnota ze tří povolených počtů odebíraných kamenů, v tomto případě je to 4. Ta je jedním z činitelů. Tím druhým je jakékoliv číslo větší než 0, proto ho označím jako t . Od součinu těchto dvou hodnot odečtu číslo, které je o 1 menší než konkrétní hodnota t v daném případě. Vzorec pro KP NIMu* $S(n;1,2,4)$ je (13).*

$$\boxed{(4*t) - (t-1)} \quad (13)$$

Dále budu zkoumat, zda je vzorec (13) pro KP* $S(n;1,2,4)$ shodný, nebo alespoň v některých částech podobný i pro jiné varianty NIMu* $S(n;a,b,c)$.

2. 3. 2006

8:00 a dále - přepisování řešení.

Znovu jsem četla to, co jsem napsala 1. 3. 2006 o KP. Při tomto čtení jsem objevila další možnost, jak KP pro NIM* $S(n;1,2,4)$ získat - KP jsou totiž čísla, která jsou o 1 větší, než jsou násobky 3. Nejdříve jsem myslela, že se touto domněnkou nebudu zabývat, jelikož v povolených odběrech kamenů se 3 nikde nevyskytuje. Po chvíli jsem si však uvědomila, že číslo 3 mohu získat jako $4-1$, tedy rozdíl hodnot pozic c a a . Proto vznikl další vzorec pro získání KP NIMu* $S(n;1,2,4)$ jako (14):

$$\boxed{(c-a)^t + 1} \quad (14)$$

V dalších typech NIMu* $S(n;a,b,c)$ budu pozorovat, který ze vzorců (13) nebo (14) bude platný pro získání KP. Možné je, že objevím vzorec nový.

Již 15. 2. 2006 jsem zjistila, že u hry NIM* $S(n;1,2,5)$ došlo k chybě. Ta vznikla záměnou pořadí hráčů (neuvědomila jsem si podstatu významu KP). Proto jsem chybně považovala * $S(2;1,2,5)$ a * $S(3;1,2,5)$ za KP. Sice jsem si to následně uvědomila a tento omyl opravila, ale zapomněla jsem, že v dalším počítání nadále považuji * $S(2;1,2,5)$ a * $S(3;1,2,5)$ za KP. Tím byl ovlivněn průběh dalšího hledání KP. Myslím, že tehdy objevené KP pro * $S(n;1,2,5)$ nejsou těmi správnými. Musím je ověřit znovu (příloha XIX uprostřed).

NIM* $S(n;1,3,6)$

17:40 do 18:00 - Při přepisování zápisků jsem asi objevila způsob, jak získat KP pro NIM* $S(n;1,3,6)$ na základě znalosti předchozích KP. Obecný vzorec KP pro tento typ NIMu* S jsem zatím neobjevila.

Z 15. 2. 2006 znám pro výše nadepsaný NIM* $S(n;1,3,6)$ KP: 3,5,10,12,14. Pokračovala jsem v počítání od * $S(15;1,3,6)$ (rám. 93).

* S(15;1,3,6): --> {J1} --> 14 => +	
* S(16;1,3,6): --> {J6} --> 10 => +	
* S(17;1,3,6): --> {J3} --> 14 => +	
* S(18;1,3,6): --> {J6} --> 12 => +	

KP * S(19;1,3,6): --> {J1} --> 18 --> {P6} --> 12 => -	
: --> {J3} --> 16 --> {P6} --> 10 => -	
: --> {J6} --> 13 --> {P1} --> 12 => -	

* S(20;1,3,6): --> {J1} --> 19 => +	

KP * S(21;1,3,6): --> {J1} --> 20 --> {P1} --> 19 => -	
: --> {J3} --> 18 --> {P6} --> 12 => -	
: --> {J6} --> 15 --> {P3} --> 12 => -	

* S(22;1,3,6): --> {J1} --> 21 => +	

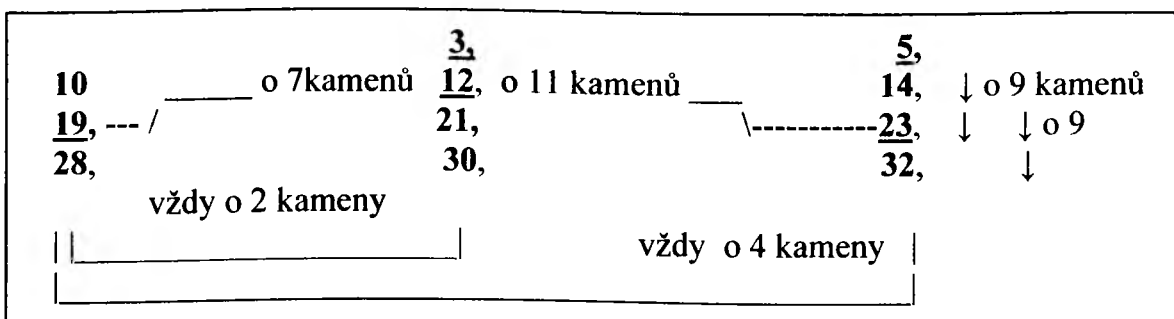
KP * S(23;1,3,6): --> {J1} --> 22 --> {P1} --> 21 => -	
: --> {J3} --> 20 --> {P1} --> 19 => -	
: --> {J6} --> 17 --> {P3} --> 14 => -	

* S(24;1,3,6): --> {J1} --> 23 => +	
* S(25;1,3,6): --> {J6} --> 19 => +	
* S(26;1,3,6): --> {J3} --> 23 => +	
* S(27;1,3,6): --> {J6} --> 21 => +	
* S(28;1,3,6): je KP Očekávám, že 28, 30 a 32 jsou KP.	

Rám. 93

Všechny známé KP pro NIM* S(n;1,3,6) jsou: 3, 5, 10, 12, 14, 19, 21, 23, 28.

U těchto čísel vidím posloupnost (rám. 94).



Rám. 94

Na základě vypočítaných posloupností jsem v rám. 95 prodloužila řadu KP pro NIM* S(n;1,3,6).

1	3	5
10	12	14
19	21	23
28	30	32
37	39	41
46	48	50
55	57	59
64	66	68
73	75	77, atd.

Rám. 95

Nevěděla jsem však, kam v rám. 94 zakomponovat KP 3 a KP 5. Určitě na první řádek, ale na kterou pozici? Bylo nutné dodržet posloupnost mezi sousedními řádky jednoho sloupce o 9 kamenů. Proto KP 5 bude ve třetím sloupci, KP 3 ve sloupci druhém. A v prvním sloupci nebude nic? Když odečtu od 10 číslo 9, získám 1, což je poslední kámen, vlastně by se také mohl nazvat KP, protože ten, kdo ho dobere, prohrává. Proto v 1. sloupci v 1. řádce je KP 1. Hodnoty KP 1, 3 a 5 jsem přidala do rám. 95.

4. 3. 2006

Rám. 96: V čase 1:30 - 1:40 řeším NIM* $S(n;1,5,6)$ od * $S(15;1,5,6)$, (navazuji na práci z 1. 3. 2006), (příloha XVII).

* $S(15;1,5,6)$: --> {J1} --> 14 1P => +

Bude 16 KP?
KP * $S(16;1,5,6)$: --> {J1} --> 15 --> {P1} --> 14 1J => -
: --> {J5} --> 11 --> {P6} --> 5 1J => -
: --> {J6} --> 10 --> {P5} --> 5 1J => - VP 16 je KP.

* $S(17;1,5,6)$: --> {J1} --> 16 1P => + další KP - VP 21, 23, 25?
* $S(18;1,5,6)$: --> {J6} --> 12 1P => +
* $S(19;1,5,6)$: --> {J5} --> 14 1P => +

Rám. 96

* S(20;1,5,6): --> {J6} --> 14 1P => +

Nebude VP 21 krizovou?

* S(21;1,5,6): --> {J1} --> 20--> {P6} --> 14 1J => -

: --> {J5} --> 16 --> {P} 1P => +

VP 21 není KP, bude to až VP 23, 25, 27.

* S(22;1,5,6): --> {J6} --> 16 1P => +

KP * S(23;1,5,6): --> {J1} --> 22 --> {P6} --> 14 1J => -

: --> {J5} --> 18 --> {P6} --> 12 1J => -

: --> {J6} --> 17--> {P1} --> 16 1J => -

KP budou VP 23, 25, 27, protože

1		3		5	↓	o 11 kamenů
12		14		16	↓	o 11 kamenů
23		25		27		

U * S(n;1,5,6) je navýšení 1. KP z trojice krizových pozic o 11 oproti 1. KP z trojice předchozí. 11= b+c

U KP * S(n;1,4,5) je nárůst 1. KP z trojice o 9. (následně opraveno): špatná domněnka - u * S(n;1,4,5) jsou KP jinak.

Rám. 97

*V rám. 97 jsem hledala další KP pro * S(n;1,5,6). Nejdříve jsem si mylně myslela, že KP bude VP 21. Pramenilo to ze zkoumání souvislostí mezi KP 3, 5, 12, 14, 16. Přehlédla jsem totiž KP 16, a tím jsem zohledňovala nárůst KP na lichých pořadích o 9 kamenů /3(+9) 12 (+9) 21/. Pak jsem si ale uvědomila výskyt KP 16, i to, že tvoří jakousi skupinu s KP 12 a KP 14. Také jsem vzala v úvahu, že mezi KP by mohla patřit i VP 1 (kdo vezme 1 kámen, prohraje). Vznikla mi tím další skupina KP. Poslední KP z trojice předchozí je o 7 kamenů menší než 1. KP trojice následující (např. KP 5 je o 7 kamenů menší než KP 12. KP 16 je také o 7 kamenů menší než KP 23) -(viz příloha XVII).*

1:40 - 1:50 hodin (4. 3. 2006), NIM* S(n;1,5,7), (příloha XVII).

KP * S(3;1,5,7): --> {J1} --> 2 --> {P1} --> 1J => -

* S(4;1,5,7): --> {J1} --> 3 --> {P1} --> 2 --> {J1} --> 1P => +

KP * S(5;1,5,7): --> {J1} --> 4 --> {P1} --> 3 --> {J1} --> 2 --> {P1} --> 1J => -

* S(6;1,5,7): --> {J5} --> 1P => +

Rám. 98

<p> KP * S(7;1,5,7): --> {J1} --> 6 --> {P1} --> 51J => - : --> {J5} --> 2 --> {P1} --> 1J => - ----- * S(8;1,5,7): --> {J1} --> 71P => + KP * S(9;1,5,7): --> {J1} --> 8 --> {P1} --> 71J => - : --> {J5} --> 4 --> {P1} --> 31J => - : --> {J7} --> 2 --> {P1} --> 1J => - ----- * S(10;1,5,7): --> {J1} --> 9 1P.... => + KP * S(11;1,5,7): --> {J1} --> 10 --> {P1} --> 91J => - : --> {J5} --> 6 --> {P1} --> 51J => - : --> {J7} --> 4 --> {P1} --> 31J => - ----- KP * S(n;1,5,7): 3, 5, 7, 9, 11, ... </p>

Rám. 99

Pozoruj KP NIMu* S(n;1,5,7) - (rám. 98 a 99). Povolené počty odebíraných kamenů jsou pouze liché. A pouze liché jsou i KP.

Zaměří-li se na NIM* S(n;1,5,6). Pozice a a b jsou liché, pozice c je sudá. U tohoto typu NIMu* S je střídají liché a sudé KP, lépe řečeno liché trojice KP se sudými trojicemi KP.

/(1), 3, 5, - trojice lichých KP

12, 14, 16, - trojice sudých KP

23, 25, 27, - trojice lichých KP

... .. /.

Myslím, že na vlastnosti KP má vliv pozice c. (příloha XVIII)

1:50 - 1:56 hodin (4. 3. 2006) NIM* S(n;1,5,9), (příloha XVIII).

<p> KP * S(3;1,5,9): --> {J1} --> 2 --> {P1} --> 1J => - * S(4;1,5,9): --> {J1} --> 3 --> {P } 1P => + ----- KP * S(5;1,5,9): --> {J1} --> 4 --> {P1} --> 3 1J => - * S(6;1,5,9): --> {J5} --> 1P => + ----- KP * S(7;1,5,9): --> {J1} --> 6 --> {P1} --> 51J => - : --> {J5} --> 2 --> {P1} --> 1J => - </p>

Rám. 100

<p>* $S(8;1,5,9)$: $\rightarrow \{J5\} \rightarrow 3 \dots 1P \dots \Rightarrow +$ KP * $S(9;1,5,9)$: $\rightarrow \{J5\} \rightarrow 4 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 3 \dots 1J \dots \Rightarrow -$</p> <p>-----</p> <p>* $S(10;1,5,9)$: $\rightarrow \{J1\} \rightarrow 9 \dots 1P \dots \Rightarrow +$ KP * $S(11;1,5,9)$: $\rightarrow \{J1 \text{ i } 5\} \rightarrow \dots 1J \dots \Rightarrow -$: $\rightarrow \{J9\} \rightarrow 2 \rightarrow \{P1\} \rightarrow 1J \dots \Rightarrow -$</p> <p>-----</p> <p>KP * $S(n;1,5,9)$: 3, 5, 7, 9, 11 - liché, narůstají o 2 kameny</p> <p>Hodnota c je lichá, KP jsou také liché.</p>
--

Rám. 101

Ani po odehrání NIMu* $S(n;1,5,9)$ nemám představu o vzorci po KP. Znovu proto sepíši všechny dosud objevené KP pro NIM* $S(n;1,b,c)$. Třeba mi pomůže to, že rozdělím NIMy* S do třech skupin. V té jedné budou NIMy* S , jejichž \underline{b} i \underline{c} je liché. Druhou skupinu utvoří NIMy* S , kde jedna z pozic \underline{b} nebo \underline{c} je sudá. A ve třetí skupině budou NIMy* S , kde bude \underline{a} liché a \underline{b} i \underline{c} sudé (tedy kde budou dvě pozice se sudým počtem kamenů.)

- 1) KP NIM* $S(n;1,3,5)$: 3, 5, 7, 9, 11
 KP NIM* $S(n;1,5,7)$: 3, 5, 7, 9, 11
 KP NIM* $S(n;1,5,9)$: 3, 5, 7, 9, 11

- 2) KP NIM* $S(n;1,3,4)$:
 KP NIM* $S(n;1,3,6)$: 3, 5, 10, 12, 14, 19, 21, 23
 KP NIM* $S(n;1,4,5)$: 3, 9, 11, 17, 19, 25 $(4*t) \pm 1$
 KP NIM* $S(n;1,5,6)$: 3, 5, 12, 14, 16, 23, 25, 27

- 3) KP NIM* $S(n;1,2,4)$: 4, 7, 10, 13, 16, 19 $(4*t) - (t-1)$

4. EXPERIMENTY

Protože jsem chtěla znát nejenom vlastní reakce na hru NIM, ale i reakci těch, s nimiž budu v budoucnu pracovat, chodila jsem do tříd 1. stupně různých ZŠ (převážně pražských) a tam sledovala, jak budou děti hledat strategie. Jelikož sama vím, že objevování strategií NIMu je obtížné, úmyslně jsem kvůli výběru dětí oslovovala učitelky 5. ročníků a vůbec se nebránila, když mi často nabízely velmi nadané děti. Někdy mi k NIMu byly „propůjčeny“ i děti mající v matematice horší výsledky, abych hru zkusila i s nimi.

4.1 PŘEDEXPERIMENTY

4.1.1 Příprava předexperimentů

Dva předexperimenty jsem udělala proto, abych podle nich mohla sestavit scénář pro experimenty. Hned v počátku jsem si vytyčila tyto body:

- v rámci klimatického rozhovoru vysvětlím, co název hry znamená
- vysvětlím pravidla hry
- jako ilustraci odehrají první hru (já) mezi dvěma fiktivními hráči - její výsledky nezapisuji
- děti odehrají další hry – při nových hrách měním počty kamenů na VP
- pozoruji reakce dětí a zapisuji počty odebraných kamenů

4.1.2 Realizace předexperimentů

Oba předexperimenty jsem uskutečnila podle výše zapsaného. Přehled provedených předexperimentů je uveden v tab. 1.

V jejich začátcích proběhl klimatický rozhovor s dětmi, v němž jsem nejprve zjistila jméno a věk obou dětí a pak jim vysvětlila, co znamená NIM a jak se tato hra hraje. Pravidla jsem se snažila formulovat takto: děti hrají střídavě proti sobě; musí vzít alespoň 1 kámen (méně kamenů než 1 vzít nelze);

maximální počet odebraných kamenů je určen; vyhrává ten, kdo hromadu dobere (tj. odebere poslední kámen).

V první hře jsem vždy já sama demonstrovala, jak má hra vypadat. Na ukázkou jsem přesunovala kameny z původní hromady neznámého počtu na dvě nové hromady (každému hráči jsem střídavě přidávala kameny na jeho hromadu) a komentovala, kdo kolik kamenů odebírá. V závěru jsem uvedla počet odebraných kamenů posledního tahu a jméno hráče, který by vyhrál. V předexperimentu 1 byl jako kameny použit hrách (levná pomůcka, zároveň veliká spousta kamenů).

Průběhy obou předexperimentů jsem zaznamenávala na diktafon a zároveň se snažila vše zapisovat do bloku, včetně znázorňování zajímavých okamžiků, které by mi diktafon neukázal. Samy děti mi na mou výzvu pomáhaly se zápisem průběhu hry, a to tak, že diktovaly, kolik kamenů vzaly při jednom tahu. Pro diktování potom používaly už jenom počáteční písmeno svého jména a číslo určující počet odebraných kamenů. Takže v diktafonu je nahráno pouze např. „K2, J3, K1, J2,...“ místo zdlouhavého oznamování, že Karel vzal 2 kameny, Jindřich 3 kameny, Karel pak 1 kámen a Jindřich 2 kameny.

V předexperimentu 1 byly děti vyzvány, aby sehrály následující hry: (20;2), (30;2), (10;2), (15;2) a (30;3). V předexperimentu 2 byly děti vyzvány, aby sehrály následující hry: (20;2), (30;2), (36;2), (40;3), (56;3), (60;3), (70;4), (76;4), (100;5), (100;6), (150;10).

O délce trvání hry jsem předem neuvažovala, nedokázala jsem to odhadnout. Ale protože jsem při předexperimentu 1 viděla, že hra děti zaujala a dokázaly by ji hrát velmi dlouho, musela jsem v dalších experimentech ve školním prostředí omezit dobu jejího trvání na jednu vyučovací jednotku, tedy na 45 minut.

ČÍSLO PŘEDEXPERIMENTU	DATUM	ČAS	JMÉNA DĚTÍ	VĚK	TŘÍDA	ZNAMKA Z MATEMATIKY
1	2. 8. 2005	17:37 - 19:05	Patrik Martin	11 let 11 let	5. 5.	1 1
2	19.10.2005	8:00 - 8:45	Pavel Lucka	11 let 11 let	5. 5.	1 1

Tab. 1

4.1.3 Průběh předexperimentů

PŘEDEXPERIMENT 1 a jeho analýza (viz příloha XXIII až XXVI)

Uskutečněn: 2. 8.2005 v čase od 17:37 do 19:05.

Tento výzkum jsem podnikla o prázdninách, proto trvá mnohem delší čas než výzkumy prováděné ve školním prostředí. Zde jsme ale nebyli ničím omezeni, hru jsem ukončila teprve v okamžiku, kdy jsem viděla, že již jsou děti z dlouhodobého soustředění unavené. Aktéry experimentu 1 byly děti z příbuzenstva, Patrik (P) a Martin (M), které šly v září 2005 do 5. ročníku základní školy. Oběma tehdy bylo 11 let.

Patrik a Martin začali NIMem I(20;2) ^{E1)}

<p>(20;2):-->{P;1}-->19-->{M;2}-->17-->{P;1}-->16-->{M;1}-->15-->{P;2}-->13-->{M;1}-->12-->{P;1}-->11-->{M;2}-->9-->{P;1}-->8-->{M;2}-->6-->{P;2}-->4-->{M;1}-->3-->{P;1}-->2-->{M;1}-->1-->{P;1}--> + Patrik</p>

Rám. D1

<p>(20;2):-->{M;1}-->19-->{P;2}-->17-->{M;2}-->15-->{P;1}-->14-->{M;1}-->13-->{P;2}-->11-->{M;1}-->10-->{P;2}-->8-->{M;2}-->6-->{P;1}-->5-->{M;1}-->4-->{P;2}-->2-->{M;2}--> + Martin</p>

Rám. D2

První odehrané hry NIMu I(20;2) (rám. D1 a D2) byly náhodné. V obou případech mohl vyhrát právě ten hráč, který prohrál. Jelikož ale strategii neznal, prohrál. Kdyby totiž v rám. D1 odebral Martin ve svém posledním tahu 2 kameny, vyhrál by, jelikož by hromadu dobral. Neznalost strategie je

^{E1)} Při přepisování předexperimentů a experimentů budu do rámečků uveřejňovat průběh her a dětské výroky. Vlastní komentáře ke hrám uvedu pod rámeček.

vidět od začátku D2, z toho je zřejmé, že hráči neměli vhléd. Kdyby totiž v rám. D2 odebral Patrik při svém posledním tahu pouze 1 kámen (z VP 4 kamenů), dostal by Martina na KP, a potom by Patrik vyhrál.

Další dva zápasy byly opět náhodnými hrami (proto je zde nebudu uvádět v rámečcích), kdy chlupci okamžitě, jakmile byli na tahu, bez jakéhokoliv přemýšlení odebírali kameny z hromady. Na ani jednom z hráčů jsem nezaznamenala náznak přemýšlení. V tu chvíli si asi ještě neuvědomovali, že k výhře je nutné znát strategii.

Prvního váhání jsem si v dalším zápase, tedy v páté hře v pořadí (rám.D3), všimla u Patrika. Z VP 6 Patrik otálí s odběrem dalších kamenů.

<p>(20;2): -->{M;2}-->18-->{P;1}-->17-->{M,1}-->16-->{P;2}-->14--> {M;1}-->13-->{P;1}-->12-->{M,2}-->10-->{P;2}-->8-->{M;2}-->6-->{P;2; pauza}-->4-->{M,1}-->3-->{P;2}-->1-->{M;1}--> + Martin</p>
--

Rám. D3

Rám.D3: Je možné, že si Patrik intuitivně uvědomil nevýhodnost VP 6, ale je též možné, že to vůbec nepoznal. Martin z této VP měl též možnost zjistit, jak je jeho postup výhodný, ale pro tuto ideu nemáme důkaz a Martin mohl vyhrávat jen náhodně.

<p>(20;2):-->{P;2}-->18-->{M;1}-->17-->{P;1}-->16-->{M,2}-->14-->{P;2} -->12-->{M;1}-->11-->{P;2}-->9-->{M;2}-->7-->{P;2;pauza}-->6--> {M;2;pauza}-->5-->{P;1}-->4-->{M,1}-->3; P:,,Do Prčic, měl jsem vzít 1!“-->{P;2}-->2-->{M;1}..=>+ M</p>

Rám. D4

Protože NIM I(20;2) má příliš vysoký počet kamenů na VP, začínali oba hráči nad taktikou uvažovat až při nižším počtu kamenů na hromadě (viz podtržený přepis v rám. D4). Ty okamžiky, díky nimž hráč vyhrál, budu v tomto a následujících prepisech označovat podtržením. Ty spolu s výhrou měly pak vliv na uvědomění si vítězné strategie hráčů.

V situaci z rám. D4 vidím, že již oba chlapci chtěli taktizovat. Začalo to na VP 7, kdy Patrik nejdříve vzal 2 kameny, ale potom si to rozmyslel a vzal 1 kámen. Tím dostal Martina na KP 6 kamenů (pravděpodobně nevědomě). Martin také dlouho uvažoval a také svoje rozhodnutí změnil, když vzal nejdříve 2 kameny, ale pak 1 vrátil. Nyní byl na tahu Patrik. Protože ale neznal strategii, nevyužil příležitosti a místo toho, aby z VP 5 kamenů vzal 2 a dostal Martina na KP 3 kamenů, odebral pouze 1 kámen (na VP4). Následně se sám ocitl na KP 3 kamenů, kam ho dostal Martin po odebrání 1 kamene. Z této analýzy je zřejmé, že se u Patrika částečně vynořila vítězná strategie. To dokládá nejen jeho zvažování u VP 6, ale také jeho věta na závěr experimentu, kde je evidentní, že věděl, že někde v odběru udělal chybu. Začal si uvědomovat, že úspěšnost ve hře závisí na počtu odebraných kamenů.

(20;2)-->{M;1}-->19-->{P;2}-->17-->{M;1}-->16-->{P,2}-->14-->
 {M;1}-->13-->{P;2}-->11-->{M;2}-->9-->{P;1}-->8-->{M;2}-->6-->{P;1}-->
 5-->{M;2}-->3 -->{P,1}--> 2 -->{M;2} => + M

Rám. D5

Po hře (rám. D5) jsem se zeptala Patrika, zda ví, proč prohrál. Odpověděl mi: „*Já dával jinak než Martin.*“ Patrik si z poslední hry uvědomil, závislost úspěšnosti ve hře na počtu odebraných kamenů. Uvědomil si potřebu jisté strategie. Proto pro hru volil strategii doplňku, o níž jsem se vyjadřovala v deníkové části diplomové práce. Bohužel ji aplikoval na VP, která není KP. Jeho mysl je natolik obsazena myšlenkou své strategie, že na otázku „Proč prohrál?“ odpověděl právě zkratkovitým popisem strategie. Z přepisu bychom mohli usuzovat, že též Martin používal strategii doplňku, ale protože při hře začínal, je též možné, že pouze aplikoval jakýsi rytmus nabídnutý Patrikem. Tento rytmus narušuje pouze jednou, a to na VP 11. Pak tento rytmus dodržoval a náhodně vyhrál.

(20;2):-->{P;1}-->19-->{M;2}-->17-->{P;1}-->16-->{M,1}-->15-->{P;2}-
->13-->{M;1}-->12-->{P;2}-->10-->{M;2}-->8-->{P;1}--> 7-->{M;2; „Ted’
jsem prohrál.“}-->5-->{P;2}-->3-->{M,1}-->2-->{P;2}.... => + P

Rám. D6

V dalším zápase (rám. D6) si již oba chlapci byli vědomi, že začnou-li hrát z VP 3, prohrají. Využil toho Patrik - z VP 5 odebral 2 kameny, a Martin musel začínat z KP 3. I sám Martin si to uvědomil hned po svém tahu, protože když uviděl na hromadě 5 kamenů, z nichž měl nyní odebírat Patrik, správně předpověděl výsledek hry. Ukazuje to i na Martinovo povědomí, že si je Patrik vědom toho, že VP 3 je zároveň KP - že Patrik jistě odebere tolik kamenů, aby po jeho tahu zbyly na hromadě 3 kameny. Vybudování představy o krizi na VP 3 je tedy dokončené. Ale konkrétně u Martina nebyla vybudována žádná představa o KP jiných než 3. Kdyby totiž tato představa byla vybudována, neodebral by ze 7 kamenů kameny 2, ale 1, a tím by musel Patrik začínat z VP 6, tedy z KP. Martin mi přiznal, že strategii hledal až od VP 5.

(20;2): -->{M;2}--> 18--> {P;2}--> 16-->{M;1} --> 15--> {P,2} --> 13-->
{M;2}--> 11-->{P;2}--> 9-->{M;1}--> 8-->{P;1}--> 7-->{M;2;1;pauza} -->
6-->{P;1}--> 5 -->{M;2}-->3 -->{P,2}--> 1 -->{M;1} => + M

Rám. D7

Martinovo váhání o počtu odebraných kamenů z VP 7 kamenů v rám. D7 dokazuje, že 7 bude vhodná VP pro promýšlení vítězné strategie chlapci. Podobně tomu bylo v rám. D4. Je zde vidět, že v této chvíli Martin možná tuší souvislost mezi VP 6 kamenů a KP.

(20;2):-->{P;2}-->18-->{M;2}-->16-->{P;2}-->14-->{M,1}-->13-->{P;1}-->
12-->{M;1}-->11-->{P;1}-->10-->{M;2}-->8-->{P;2}-->6-->{M;1}-->5-->
Martin: „A jsem v čoudu.“{P;2}-->3 -->{M,1}--> 2 -->{P;2} => + P

Rám. D8

Rám. D8: Z VP 6 kamenů, tedy z KP, začínal hrát Martin. To, že tento zápas nevyhraje, si uvědomil ještě před Patrikovým tahem z VP 5 kamenů

(20;2):-->{M;2}-->18-->{P;2}-->16-->{M;1}-->15-->{P,1}-->14-->
 {M;1}-->13-->{P;1}-->12-->{M;1}-->11-->{P;1}-->10-->{M;2}-->8-->
 {P;2}-->6-->{M;1;pauza}-->5 M: „A *prohrál jsem.*“ --> {P,2}--> 3-->
 >{M;1}--> 2-->{P,2}-->....=> + P

Rám. D9

Nejsem si jistá, že moje domněnka o tom, že si je Martin vědom souvislostí mezi KP a VP 6 kamenů, je správná (rám. D9). To proto, že Martin předvídal vítěze až z VP 5, kdy si představil, jak bude Patrik hrát, nikoli z toho, že se před svým tahem ocitl na VP 6 kamenů, tedy na KP. Každopádně viděl, že začínal-li hrát Patrik z VP 5 kamenů, nemohl on sám vyhrát.

(20;2):-->{P;1}-->19-->{M;1}-->18-->{P;2}-->16-->{M,2}-->14-->{P;2}-
 -->12-->{M;2}-->10-->{P;1}-->9-->{M;1}-->8-->{P;1;pauza}-->7-->{M;1}-
 -->6-->{P;1;pauza}-->5-->{M,2}-->3-->{P;1}-->2-->{M,2}-->....=> + M

Rám.D10

I když v dalším zápase (rám. D10) Patrik váhal již při tahu z VP8 (asi se domníval, že má již vzhled do VP 7 a méně), nepostupoval strategicky, tudíž se on sám dostal do KP, kde opět váhal. Z toho je zřejmé, že z předchozích a této hry představa o VP 6 jako KP nebyla dotvořena.

(20;2): -->{M;1}--> 19--> {P;1}--> 18-->{M;2} --> 16--> {P,2} --> 14-->
 {M;2}-->12-->{P;2}-->10-->{M;1}-->9-->{P;1}-->8-->{M;1}-->7-->
 {P;1}-->6 -->{M;1;pauza}-->5-->{P,2}-->3-->{M;1}-->2-->{P,2} => + P

Rám. D11

Rám. D11: Tak jako Patrik v předchozím případě zde Martin viditelně přemýšlel z VP 6 nad počty odebraných kamenů. V tu chvíli začínal hrát z KP, proto stejně nevyhrál.

Cítala jsem, že děti přestává hra bavit. Opadlo jejich prvotní nadšení. Proto, jak jsem měla v plánu, zvýšila jsem počet kamenů na (30;2).

(30;2):-->{P;2}-->28-->{M;2}-->26-->{P,1}-->25-->{M;2}-->23-->{P;1}-->22-->{M;1}-->21-->{P;1}-->20-->{M;1}-->19-->{P;1}-->18-->{M;1}-->17-->{P,2}-->15-->{M;2}-->13-->{P,2}-->11-->{M;1}-->10-->{P;2}-->8-->{M;2; pauza}-->6: P: „Martin vyhrál, ne já.“-->{P;2;pauza}-->4-->{M;1}-->3-->{P,1}-->2-->{M;2}=>+M
M : „, Kdybys ze 6 vzal 1, já bych vzal 2 a vyhrál bych stejně.“

Rám. D12

Na VP 8 kamenů (rám. D12) Martin váhal a úmyslně odebíral 2 kameny, aby dostal Patrika na VP 6 kamenů, která je krizovou. Patrik si toho byl vědom, a i když na VP 6 kamenů o počtu odebraných kamenů nejdříve přemýšlel, po chvíli svou porážku uznal. Martinovi i Patrikovi se dotvořila představa o VP 6 a VP 3 coby KP.

(30;2):-->{M;2}-->28-->{P,1} --> 27-->{M;1}--> 26-->{P;1}--> 25-->{M;2}-->23-->{P;2}-->21-->{M;1}-->20-->{P;1}-->19-->{M;1;váhá}-->18-->{P,1}-->17-->{M;2}-->15-->{P,2}-->13-->{M;1}-->12-->{P;1}-->11-->{M;2}-->9-->{P;2}-->7-->{M;1;váhá}-->6:M: „A máš to v čoudu.“
P: „Když z VP 6 kamenů vezmu 2 kameny, ty vezmeš 1, tak já prohraju. A kdybych vzal jenom 1 kámen, ty bys vzal naopak 2 kameny a stejně prohraju.“ -->{P,1}-->5-->{M;2}-->3-->{P,1}-->2-->{M;2}=> +M

Rám.D13

Rám. D13: První Martinovo přemýšlení v tomto zápase jsem zaznamenala na VP 18 kamenů. Bylo dobré, že se Martin snažil taktizovat už tam, ale myslím, že to bylo předčasné, jelikož na VP s tak vysokou hodnotou kamenů nemohl ještě mít představu o nejbližší KP. Z výroku na VP 6 je evidentní, že Martin už má představu o KP. Patrik to svým tvrzením dokazuje také. Z přepisu je vidět, že Martin již od VP 19 postupuje takticky. Nejsm si ale jistá, že si vítěznou strategii uvědomoval.

(30;2):-->{P;2}-->28-->{M;2}-->26-->{P;2}-->24-->{M;1}-->23-->{P;1}-->22-->{M;2}-->20-->{P;2}-->18-->{M;1}-->17-->{P;1}-->16-->{M;2;pauza}-->14-->{P;2}-->12-->{M;1}-->11-->{P;1}-->10-->{M;1}-->9-->{P;1}-->8-->{M;1;pauza}-->7-->{P;1;pauza}-->6-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;1}-->2-->{P;2}=> +P

Rám. D14

Rám. D 14: Představa o KP je u Martina i Patrika vytvořena pouze do VP 6.

(30;2):-->{M;1}-->29-->{P;1}-->28-->{M;2}-->26-->{P;2}-->24-->{M;1}-->23-->{P;1}-->22-->{M;2}-->20-->{P;2}-->18-->{M;1}-->17-->{P;1}-->16-->{M;2}-->14-->{P;2}-->12-->{M;1}-->11-->{P;1}-->10-->{M;1}-->9-->{P;1}-->8-->{M;1}-->7-->{P;1;pauza.počítá}-->6M: „A jsem v čoudu.“-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;1}-->2-->{P;2} => +P

Rám.D15

Myslím si, že chlapci věděli, že VP 6 je zároveň KP. Z rám D14 a D15 mám ale dojem, že tento poznatek ještě nemají osvojený, a to, že VP 6 kamenů je krizová, si uvědomí až v okamžiku, kdy se na ni dostanou. Jinak si totiž nedokážu vysvětlit, proč Martin z VP 8 kamenů stále odebíral pouze 1 kámen, a tím prohrával. Tato situace se opakovala ve dvou hrách po sobě - měla stejný průběh (jak v rám. D 14, tak i v rám. D 15).

Patrik mi prozradil, že aby vyhrál: „*Musí to zůstat na sudých číslech.*“ Měl sice pravdu, ale pouze částečnou, jelikož liché a sudé KP se pravidelně střídají. Nelze tedy jednoznačně říci, že KP jsou jenom sudé.

(30;2):-->{P;2}-->28-->{M;1}-->27-->{P;1}-->26-->{M;2}-->24-->{P;2}-->22-->{M;2}-->20-->{P;2}-->18-->{M;2}-->16-->{P;2}-->14-->{M;2}-->12-->{P;2}-->10-->{M;1}-->9-->{P;1;váhá}-->8-->{M;2}-->6P: „*Ted' je to špatné.*“ -->{P;1;váhá}-->5-->{M;2}-->3-->{P;1}-->2-->{M;2}=> +M;
M: „*Když jich tam je 7 a Patrik vezme 1 nebo 2, vždy prohraji.*“

.. Rám. D16

To, že Patrik přemýšlí, kolik kamenů odebrat z VP 9 (rám D16), ukazuje, že ještě nezaznamenal souvislost mezi KP 6 a následnou KP - KP 9 kamenů. A Patrik svým váháním na VP 6 stále dokazuje, že není přesvědčen, že z VP 6 kamenů vždy prohraje (pokud soupeř využije strategii). Ani Martin si nebyl jistý svými objevy. Potvrdil to svou částečně pravdivou výpovědí na konci tohoto zápasu Platnost tohoto výroku jsem ale musela omezit proto, jelikož je pravdivý pouze v případě, že by Patrik odebral pouze 1 kámen, tím by Martin musel začínat hrát z KP 6 a prohrál by. Kdyby ale Patrik odebral kameny 2, začínal by Martin hrát z KP 5 a po odebrání 2 kamenů by Patrika dostal na KP 3 kamenů. Chlapci zatím nedospěli do fáze generického modelu.

Snížili jsme počet kamenů na hromadě. Hráli jsme NIM I(10;2).

(10;2): -->{M;1}-->9-->{P;2}-->7-->{M;1}-->6; M: „Vyhrál jsem.“ -->{P;2}-->4-->{M;1}-->3-->{P;2}-->1-->{M;1} => +M

(10;2):-->{P;1;váhá}-->9-->{M;1;váhá}-->8-->{P;2}-->6-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;1}-->2-->{P;2} => +P

Rám. D17

V obou zápasech (rám. D17) vyhráli ti hráči, kteří v konkrétním zápase začínali. Oba si již byli vědomi, že VP 6 je KP (to mi řekli). Jejich výhru však způsobil první tah, kdy odebrali z hromady pouze 1 kámen - dostali soupeře na KP 9 kamenů (toho si možná všimli, ale neuváděli to jako důvod výhry).

(10;2): -->{M;2}-->8-->{P;2}-->6-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;1}-->2-->{P;2} => +P

Patrik: „Když ze 3 kamenů vezmu 2, on vezme 1 a vyhraje.
A když vezmu 1, on vezme 2 a zase vyhraje.“

Rám. D18

Jakmile ale Martin v prvním tahu odebral 2 kameny (rám. D18), využil toho Patrik a dostal Martina na KP 6. Pak mi ještě upřesnil, jak zjistil, že VP 3 „je KP.

Pokračovali jsme hrou NIM I(15;2).

(15;2):-->{P;1}-->14-->{M;2}-->12-->{P,2;váhá}-->10-->{M;2}-->8-->
{P;2}-->6; P:„Už jsi prohrál.“ -->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;2}-->1--
>{P;1}=> +P

Rám. D19

(15;2):-->{M;2}-->13-->{P,1}-->12-->{M;1}-->11-->{P;1}-->10-->
{M;1}-->9-->{P;1}-->8-->{M;2}-->6-->{P;1}-->5-->{M;2}-->
3-->{P;1}-->2-->{M;2}=> +M

Rám. D 20

Patrik svou větou (rám. D 19) pouze potvrdil, že ví o krizi na VP 6. Nic nového ale ani jeden z chlapců neobjevili (ani v rám. D 20).

(15;2):-->{P;1}-->14-->{M;1}-->13-->{P,1}-->12-->{M;1}-->
11-->{P;1}-->10-->{M;1}-->9-->{P;2}-->7-->{M;1}-->6-->{P;1}-->5--
>{M;2}-->3-->{P;2}-->1-->{M;1}=> +M; P:„ Když je 9 kamenů, jsi
v čoudu. Protože z toho vezmeš 2, on vezme 1 a jsi na 6 kamenech. A
když z 9 kamenů vezmeš 1 kámen, on vezme 2 a jsi zase na 6
kamenech.“

Rám. D 21

Díky tomu, že Patrik nevyhrál, zpětně si i uvědomil, že začínal nejen z KP 6 a KP 3, ale i z počtu 9 kamenů. Chvilí přemýšlel a potom mi řekl větu z rám. D21. Od této chvíle jsem v dalších zápasech (rám. D 22, D23 a D24), viděla, jak se Patrik snaží dostat Martina na KP 9 kamenů.

(15;2):-->{M;2}-->13-->{P,2}-->11-->{M;1}-->10-->{P;1}-->9-->{M;2}--
>7-->{P;1}-->6-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;2}-->1-->{P;1}=> +P

Rám. D 22

O poznatek, že VP 9 je KP, byl Patrik v objevování strategie dále než Martin. Martin proto nevědomě (rám. D22) způsobil svou prohru tím, když z VP 11 odebral pouze 1 kámen. Patrik potom odebral 1 kámen tak, aby Martin začínal z KP.

(15;2):-->{P;2}-->13-->{M;1}-->12-->{P,1}-->11-->{M;1}-->10-->{P,1}-->9-->{M;2}-->7-->{P;1}-->6-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;2}-->1-->{P;1} => +P; P: „Potřebuju dostat Martina na 9 kamenů a potom na 6 kamenů. Potom vyhraju.“

Rám. D 23

Po skončení zápasu (rám. D23) mi Patrik sdělil taktiku.

(15;2):-->{M;1}-->14-->{P,2}-->12-->{M;2}-->10-->{P;1}-->9-->{M;1}-->8-->{P;2}-->6-->{M;1}-->5-->{P;2}-->3-->{M;2}-->1-->{P;1} => +P; P: „Vyhrál jsem tak, že jsem dorovnával do 3.“

Rám. D 24

Patrik mi řekl nejen to, jak vyhrál, ale i naznačil, že si myslí, že VP 12 je dalším nebezpečným místem. Díky tomu, že VP byla přímo KP, se konečně Patrikovi vyplatila znalost principu doplňku, který se pokoušel uplatnit již v začátku hry.

Všimla jsem si, že Martina tato hra přestávala bavit. Ani jsem se nedivila, protože Patrik v posledních zápasech našel alespoň částečnou strategii NIMu $I(n;2)$, a díky tomu vyhrával. Ale chtěla jsem ještě setrvat v prostředí NIMu, proto jsem se rozhodla hrát NIM $I(n;3)$ s nadějí, že na tom budou oba chlapci stejně a oba budou muset objevovat strategii znovu. A protože se zvýšil počet možných odebraných kamenů, zvýšila jsem i VP. Proto jsme hráli NIM $I(30;3)$.

(30;3):-->{M;1}-->29-->{P;3}-->26-->{M;2}-->24-->{P;2}-->22-->
 {M;1}-->21-->{P;2}-->19-->{M;3}-->16-->{P;1}-->15-->{M;1}-->14-->
 {P;2}-->12;P: „A vyhraju.“ -->{M;2}-->10-->{P;1}-->9-->{M;3}-->6-->
 {P;1}-->5-->{M;2}-->3-->{P;3}=> +P

Rám. D25

Poté, co Patrik prohlásil, že vyhraje, vlastně oznámil, že si uvědomil, jaké KP budou v NIMu $(n;3)$. Předpokládal, že KP je VP 12 kamenů, a následně i vyhrál.

(30;3):-->{P;2}-->28-->{M;1}-->27-->{P;1}-->26-->{M;2}-->24-->{P;2}-->
 22-->{M;1}-->21-->{P;3}-->18-->{M;3}-->15-->{P;3;pauza}-,->12-->
 {M;1}-->11-->{P;3;pauza}-->8-->{M;2}-->6-->{P;2}-->4-->{M;3}-->1-->
 {P;1}=> +P; P: „Když se odebírá 1 až 2 kameny, nebezpečnými jsou lichá
 čísla. Když se odebírají 1 až 3 kameny, nebezpečnými jsou vlastně sudá
 čísla.“ Lebedová: „„Ale když se odebírá 1 až 2 kameny, tak 6 není lichá.“
 P: „Tak nevím.“

Rám. D 26

Patrikova taktika v odebírání kamenů (rám. D26) očividně poukazuje na to, že ví, kolik kamenů má odebrat k tomu, aby musel Martin začínat z KP. Když jsem ho ale po zápase požádala o návod na výhru, nedokázal své poznatky zobecnit. V hrách sice dokázal reagovat a taktiku využít ve svůj prospěch, ale slovy to nazvat neuměl. Byl totiž ve fázi izolovaných modelů, od nichž se nedokázal odpoutat.

(30;3):-->{M;3}-->27-->{P;1}-->26-->{M;1}-->25-->{P;3}-->22--> .
 {M;2}-->20-->{P;2}-->18-->{M;1}-->17-->{P;3}-->14-->{M;2;pauza}-->
 12-->{P;3}-->9-->{M;2}-->7-->{P;1}-->6-->{M;1}-->5-->{P;1}-->4-->
 {M;1}-->3-->{P;3} => +P

Rám. D 27

Už jsem myslela, že Martin (rám. D 27) objevil strategii a záměrně odebral 2 kameny z VP 14, čím dostal Patrika na KP 12. Potom jsem to ale přehodnotila na náhodu, jelikož v následujících tazích již Martin své výhody dostat soupeře na KP nevyužil. Překvapily mě i Patrikovy tahy, kdy z VP 7 kamenů neodebral kameny tak, aby dostal Martina na KP 4 kamenů. I když riskoval, vyhrál, jelikož Martin o taktice vůbec netušil. Mám dojem, že hra v rám. D 27 je až do VP 5 kamenů, kdy Patrik odebral 1 na KP 4 kamenů, čímž vyhrál, hrou náhodnou. Překvapilo mě, že Patrik nevyužíval poznatků, které našel v předchozích hrách. Jeho systém tahů do VP 5 kamenů na mě působil tak, jako kdyby hru hrál poprvé. Ještě by bylo možné, že záměrně odebíral proti své taktice, aby zjistil, jak je na tom s taktikou jeho protihráč. To je ale moje pouhá domněnka, navíc asi nesprávná. Víم totiž, že chlapci chtěli vyhrávat proto, aby měli po úplném ukončení hry na svém kontě co nejvíce vyhraných zápasů.

(30;3):-->{P;2}-->28-->{M;2}-->26-->{P,2}-->24-->{M;2}-->22-->
 {P;2}-->20-->{M;2}-->18-->{P;2}-->16-->{M;2}-->14-->{P;2}-->
 12-->{M;3;pauza}-->9-->{P,1;směje se}-->8-->{M;2}-->6-->{P,2}-->
 4-->{M;3}--1-->{P;1} => +P

Rám. D28

Rám. D 28: Martin sice přemýšlel, kolik kamenů má odebrat, nevěděl ale, že v tu chvíli je na KP. Patrik svým smíchem následně naznačil, že opět vyhraje. Zápas v rám. D 28 je vzorovým návodem, jak v NIMu (n;3) vyhrát. Začal hrát Patrik, protože se chlapci pravidelně střídali. Odebral 2 kameny, a tím musel Martin odebírat z KP 28. Při každém následujícím tahu Patrik odebral tak, že byl Martin nucen začínat opět z KP. Nemyslím, že průběh hry z rám. D 28 byl ovlivněn Patrikovou znalostí strategie. Domnívám se, že tato situace vznikla tím, že chlapce rozveselovalo to, že oba neustále odebírají 2 kameny (možná tato legrace z odebírání 2 kamenů byla působena i vysokou

hodnotou VP, která se tak stala pro hráče nečitelnou). Patrikovi to ale dopomohlo k vítězství.

(30;3):-->{M;3}-->27-->{P,1}-->26-->{M;2}-->24-->{P;2}-->22-->{M;3}-->
 19-->{P;1}-->18-->{M;1}-->17-->{P;3}-->14-->{M;2;1;váhá}-->13-->{P,1}-->
 12-->{M;3}-->9-->{P,1}-->8; P: „A jsi v čoudu.“-->{M;1}-->7-->{P;3}-->
 4-->{M;1}-->3-->{P;3} => +P

Rám. D29

Rám. D 29: Od VP 30 až do VP 14 Patrik odebírá kameny s využitím principu doplňku. Protože se ale VP 30 nerovnála KP, správně od tohoto způsobu upustil a z VP 13 kamenů odebral 1, aby protihráč musel začínat z KP. Potom opět pokračoval doplňováním do počtu 4 odebraných kamenů po obou hráčích a vyhrál. Patrik samozřejmě v tu dobu netušil, že VP 30 není KP. Pouze na VP 13 zjistil, že musí odebrat takový počet kamenů, aby Martin začal hrát z VP 12. Na VP 8 Martinovi naznačil, že nemá šanci vyhrát.

(30;3):-->{P;2}-->28-->{M;1}-->27-->{P,3}-->24-->{M;3}-->21-->
 {P;1}-->20-->{M;3}-->17-->{P;1}-->16-->{M;1}-->15-->{P;3}-->
 12-->{M;2}-->10-->{P,1}-->9-->{M;1}-->8-->{P,1}-->7-->{M;3}-->
 4-->{P;3}-->1-->{M;1} => +M

Rám. D 30

Rám. D 30: Patrik sice dovedl Martina na KP 12, ale při svém následujícím tahu z VP 10 zariskoval a odebral pouze 1 kámen místo 2. Martin následně odebral tak, že Patrik musel začínat z KP 8. Martin si udržel výhodu dorovnávat na KP, a v důsledku toho vyhrál.

(30;3):-->{M;2}-->28-->{P,2}-->26-->{M;3}-->23-->{P;1}-->22-->
 {M;1}-->21-->{P;3}-->18-->{M;2}-->16-->{P;2}-->14-->{M;1}-->
 13-->{P;3}-->10-->{M;1}-->9-->{P,1}-->8-->{M;1}-->7-->{P;3}-->
 4-->{M;1}-->3-->{P;3} => +P

Rám. D3

Nerozumím tomu, proč Patrik (rám. D 31) riskoval a z VP 13 kamenů odebíral 3 a ne jenom 1 kámen. Přitom již dříve ukázal, že VP 12 chápe jako krizovou. Martin se snažil vzpomenout si na minulou hru a zužitkovat výhru z ní (rám.D30): „ Z čeho jsem před chvílí vyhrál?“ Myslel tím, která VP ovlivnila Patrikovu prohru. Chybně ale označil VP 7, jelikož ji zaměnil s VP, z které začínal hrát on sám. Touto chybou se ale řídil, proto prohrál.

Patrik šel na WC, proto jsem se nabídla, že budu hrát za Patrika. A abych nebyla zvýhodněná, hrála jsem se zavřenýma očima a odebírala jsem náhodné počty kamenů z hromady. Zápas bude hrát Martin (M) a já (L = Lebedová).

(30;3):-->{M;2}-->28-->{L,2}-->26-->{M;3}-->23-->{L;3}-->20-->{M;1}->
19-->{L;2}-->17-->{M;3}-->14-->{L;3}-->11-->{M;2}-->9-->{L,1}-->8-->
{M;1}->7-->{L,2}-->5-->{M;1}-->4-->{L;1}-->3-->{M;3} => +M

Rám.D 32

Rám.D 32: VP 4 jako KP si Martin uvědomil. Jinou KP zatím nenašel.

(30;3):-->{L,3}-->27-->{M;3}-->24-->{L;3}-->21-->{M;3}-->18-->{L;1}-->
17-->{M;2}-->15-->{L;3}-->12-->{M;3}-->9-->{L,2}-->7-->{M;3;pauza}->
4-->{L,2}-->2-->{M;2} => +M

Rám. D 33

Rám. D 33: Díky tomu, že jsem neviděla, kolik kamenů zbývá na hromadě, je můj tah z VP 9 netaktický. Toho využívá Martin a po chvíli přemýšlení mě dostává na KP 4. Myslím, že v tuto chvíli se ujistil, že VP 4 je krizovou.

(30;3):-->{M;3}-->27-->{L,3}-->24-->{M;3}-->21-->{L;1}-->20-->
{M;3}-->17-->{L;3}-->14-->{M;2}-->12-->{L;3}-->9-->{M;1;pauza}-->
8-->{L,3}-->5-->{M;1}->4-->{L,2}-->2-->{M;2} => +M

Rám.D 34

Zápas z rám. D 34 byl poslední hrou. Děti již byly z přemýšlení unavené, a navíc jsme dostali pozvání k právě dovařené večeři. Martin objevil další KP - KP 8 kamenů a využil ji k vlastní výhře.

4.1.4 Zhodnocení

Jelikož to byl můj první předexperiment se hrou NIM, vznikly tam některé situace, stejně jako v předexperimentu 2, kterých jsem se po konzultaci s vedoucí mé práce v dalších experimentech vyvarovala. Byl to hlavně vysoký počet kamenů na hromadě. Jednotlivých her z těchto VP však chlapci (předexperiment 1) uskutečnili více než děti experimentující v základní škole. Tím měli čas vytvořit si povědomí i o KP ve hrách, kde se začínalo s 10 a méně kameny. I přes již zmiňovaný vysoký počet kamenů na VP v počátku hry však uznávám, že se chlapci ve hře NIM velmi dobře orientovali, a připravili mi tím spoustu zajímavých situací k pozorování. Jednotlivé zápasy oba prožívali jako soupeři - neradili si a jestliže objevili nějakou cestu - vedoucí k výhře, třeba i jenom nepotvrzenou hypotézu, sdělovali mi ji za dveřmi nebo v takové vzdálenosti od toho druhého, aby se vzájemně neslyšeli. Hra je velmi zaujala a s velkým nadšením se pohybovali ve světě čísel i přes to, že byly prázdniny.

Předexperiment 1 se uskutečnil v domácím prostředí – venku na terase u stolku. Předexperiment 2 se odehrával na školní chodbě u stolku. Ukázalo se velmi vhodným to, že děti nebyly rušeny. Tvar hrachu, coby hracích kamenů, se ukázal jako nevhodný, jelikož se na kývajících lavicích kutálel, a jeho zachytávání často rozptylovalo děti v přemýšlení. Proto jsem hrách hned po druhém předexperimentu vyměnila za vhodnější pomůcku. Průběh předexperimentu 2 je uveden v příloze XX.VII až XXX.

4.2 EXPERIMENTY

4.2.1 Scénáře

Na základě poučení se z chyb předexperimentů 1 a 2 jsem sestavila scénář pro následující experimenty. Byl vlastně stejný jako ten, z něhož jsem vycházela při předexperimentech, v některých bodech byl ale poupraven:

- hrát NIM I(n ;2):
 1. začínat na NIM I(12;2)
 2. NIM I (6;2)
 3. několik her se zvyšováním n : I(n ;2), kde $6 < n \leq 13$,
 4. možnost sehrát i NIM I (n ;2), kde $13 < n < 50$
- dovolit i dětem navrhnout počet kamenů n , asi dvakrát
- někdy zařadit i hru NIM I(12;3), (6;3), $6 < n \leq 20$

4.2.2. Realizace

Přehled provedených experimentů je uveden v tab. 2.

ČÍSLO EXPERIMENTU	DATUM	ČAS	JMÉNA DĚTÍ	VĚK	TŘÍDA	ZNÁMKA Z MATEMATIKY
1	24.10.2005	8:10 - 8:55	Vasil Alžběta	11 let 10 let	5. 5.	3 3
2	24.10.2005	9:00 - 9:45	Kateřina Marek	10 let 11 let	5. 5.	1 1
3	5.12.2005	11:00 - 11:45	Stefani Nataša	11 let 11 let	5. 5.	1 1
4	5.12.2005	12:00 - 12:45	Dan Ivan	11 let 10 let	5. 5.	1 1
5	12.12.2005	8:00 - 8:45	Ondřej Václav	11 let 11 let	5. 5.	1 1
6	12.12.2005	10:00 - 10:45	Jakub Otakar	11 let 11 let	5. 5.	1 1
7	19.12.2005	10:00 - 10:45	Aneta Lenka	11 let 10 let	5. 5.	1 1

Tab. 2

Všech 7 experimentů se odehrálo buď v prázdné třídě, či na chodbě na koberci. Jako hrací kameny nám dobře posloužila kolínka.

U každého experimentu jsem byla přítomná. Jeho průběh jsem zaznamenávala na diktafon a zároveň i do bloku, stejně jako u předexperimentů. I zde mi děti zkratkami diktovaly jméno hráče a počet odebraných kamenů.

Protože jsem si chtěla pojistit, že nápady z odehraných her neřeknou žádnému svému spolužákovi, který by mohl být hráčem v příštím experimentu, vždy jsme se dohodli na mlčení a já jim za to dala malou pozornost v podobě bonbónu.

Pro všechny experimenty jsem používala kolínka, která se ukázala jako výhodná pomůcka. Zůstávala vždy na místě, nikam nemizela. Často ale mně i dětem způsobovala takové chutě na jídlo (např. rajskou omáčku s těstovinami), že jsme z počátku hry měli myšlenky na oběd a ne na hraní NIMu. To obohacovalo klimatický rozhovor, a tudíž přispívalo k vytvoření příjemného klimatu pro experiment. Pravděpodobně to, že byla kolínka příjemná na dotyk, způsobilo, že v průběhu hry si děti, které nebyly na tahu, s nimi hrály. Někdy to bylo i v době, kdy samotný hráč uvažoval o svém tahu (současně s přemýšlením skládal i malé obrazce z kolínek již odebraných).

4.2.3 Průběhy experimentů

EXPERIMENT 6 a jeho analýza (příloha XLIX až LII).

Tento výzkum probíhal ve školním prostředí - na chodbě.

<p>(12;2): -->{J;2}-->10-->{O;2 „<i>Tak já taky 2.</i>“} -->8-->{J;2} -->6 --> {O;1}-->5--> {J;2;smích}--> 3-->{O;2; „<i>To už nemá cenu.</i>“} -->1-->{J;1} -->... => + J</p> <p>Lebedová: „<i>Tak to můžeme zkusit znovu, to nic neznamena, že se to jednou povedlo.</i>“</p>
--

Rám. D 35

Rám. D 35 ukazuje, že hráči nejdříve kameny odebírali náhodně - na základě zvukomalebnosti slova 2. I když se jednalo o první odehranou hru, v jejím závěru si všimli, že průběh a vítězství ve hře mohou ovlivnit.

(12;2): --> {J;2} -->10 -->{O;2} -->8--> {J;2} --> 6 --> {O;2} -->4-->
 {J;1} --> 3 --> {O;2} --> 1 --> {J;1} -->... => + J

 (12;2): --> {O;1} --> 11--> {J;2} --> 9-->{O;1} -->8--> {J;1} --> 7 -->
 {O;2} -->5--> {J;2;pauza} --> 3 --> {O;1} -->2--> {J;2} -->... => +J

Rám. D 36

Z rám. D36 je patrné, že si Jakub ověřoval, zda je VP 3 krizovou. Dokládá to nejen jeho váhání, ale i počty odebraných kamenů, které zapříčinily Otakarovu prohru.

(12;2): --> {J;2} -->10 -->{O;1} -->9--> {J;2} --> 7 --> {O;1} -->6-->
 {J;1} --> 5 --> {O;2;smích} --> 3--> {J;2} -->1--> {O;1} -->.. => + O

 (12;2): --> {J;2} -->10 -->{O;1} -->9--> {J;1} --> 8 --> {O;2} -->6-->
 {J;1} --> 5 --> {O;2} --> 3--> {J;1} -->2--> {O;2} -->... => + O

Rám. D 37

V rám. D 37 Otakar odebral kameny tak, že Jakub musel začínat už z KP 6. Uvědomil si to ale až při odebírání 2 kamenů z VP 5.

(12;2): --> {O;1} --> 11--> {J;2} --> 9-->{O;2} -->7--> {J;1} --> 6 -->
 {O;1} -->5--> {J;2} --> 3 --> {O;1} -->2--> {J;2}-->... => + J

Lebedová: „Můžeme dát jiný počet, chcete třeba 6?“

J: „A to se hraje stejnou metodou?“ Lebedová: „Ano, pořád bereme 1 až 2 kameny.“

Rám. D 38

Po hře (rám. D 38) jsme snížili počet kamenů na hromadě.

O: „Chceš začít.“ J: „Ne.“
 (6;2): --> {O;1} --> 5--> {J;2} -->3 -->{O;1} -->2--> {J;2} -->... => + J
 (6;2): --> {J;2} -->4 -->{O;1} -->3--> {J;2} --> 1 --> {O;1} -->... => + O
 (6;2): --> {O;1} --> 5--> {J;2} -->3 -->{O;1} -->2--> {J;2} -->... => + J
 Lebedová: „Můžeme zvýšit, třeba na 7.“

Rám. D 39

Rám. D 39: Oba hráči hráli takticky. A oba také poznali, že z (6;2) vyhrát nemohou - hraje-li soupeř strategicky.

(7;2): -->{J;1;smích}-->6-->{O;2}-->4-->{J;1}--> 3-->{O;2}-->1-->{J;1}
 -->... => + J

(7;2): -->{O;1} --> 6--> {J;1} -->5 -->{O;2} -->3--> {J;2} -->1-->{O;1} -->
 >... => + O

Rám. D 40

Hráči využívali zkušeností z (6;2) a proto ten, kdo začal, ihned odebral 1 kámen. Ukazuje to na jejich povědomí o KP 6.

J: „Vyhraje, kdo začíná. Lichý – kdo začne, vyhraje. Sudý – ten druhý vítěz. Když to teda nezkazí.“
 O: „No (souhlasí), ne teda do těch 12.Nebo i do těch 12?“
 J: „No, když to nezkazíš, tak to.... počkej, když se bude pořad brát.... no, prostě když už jich je hodně, tak to má víc možností.“

Rám. D 41

Již v rám. D 41 se ukázal jiný přístup hráčů ke hře - chtěli si poradit, tudíž nebyli jako protihráči. S tím jsem se u jiných experimentů nesetkala.

(7;2): -->{O;1}-->6-->{J;1;}-->5-->{O;2}-->3-->{J;2}-->1-->{O;1}-->
 ... => + O

J: „ Když vezmeš na začátku 1, vyhraješ.“

(7;2):-->{J;1}-->6-->{O;2}-->4-->{J;1}-->3-->{O;1}-->2-->{J;2}-->...
 =>+ J; J : „ Podle toho, jak začneš.“

(7;2): -->{O;2}-->5-->{J;2}-->3 -->{O;1}-->2-->{J;2}-->... => + J

Rám. D 42

Práce na společné strategii pokračovala. Jakub vyjádřil svou domněnku. Třetí hra však byla odehrána nestrategicky - Otakar nevyužil KP6.

(8;2): -->{J;2}-->6-->{O;1}-->5-->{J;2}-->3-->{O;1}-->2-->{J;2}-->...
=>+J

(8;2):-->{O;2}-->6-->{J;2}-->4-->{O;1}-->3-->{J;2}-->1-->{O;1}-->
...=>+O

Rám. D 43

Hráči opět využívají KP 6, díky tomu zvítězili.

J chce začít

(9;2): -->{J;2} -->7 -->{O;1} -->6--> {J;1} --> 5 --> {O;2} -->3--> {J;2} --
> 1 --> {O;1} -->... => + O

(9;2): --> {J;1} -->8 -->{O;2} -->6--> {J;1} --> 5 --> {O;2} -->3--> {J;2} -
-> 1 --> {O;1} -->... => + O

(9;2): --> {J;2} -->7 -->{O;1} -->6--> {J;1} --> 5 --> {O;2} -->3--> {J;1} -
-> 2 --> {O;2} -->... => + O ; O: „Jo, už vím.“

Rám. D 44

Tři zápasy odehrané z KP 9 pomohly Otakarovi k objevení vlastnosti
VP 9 - viz Rám. D45

(9;2): --> {O;1} --> 8--> {J;2} -->6 -->{O;2} -->4--> {J;1} --> 3-->{O;2} -
->

1--> {J;1} -->... => + J

J + O: „ Vyhraje ten druhéj, co nezačne.“

Rám. D 45

Opět jsme zvýšili počet kamenů na hromadě.

(10;2): -->{O;1; „Měl bych vyhrát, když je to lichý.“}--> 9-->{J;2;pauza}--
>7 -->{O;2}-->5-->{J;2 J:„Jo, skvělý kdybys tam vzal 1, vyhrál bys.“}-->
3... => + J

Lebedová: „Kdy kdyby vzal 1?“

J: „Kdyby z těch 7 vzal 1 a ne 2.“

Rám. D 46

Hráči hledali strategii i pomocí rozlišování VP na sudé a liché.

(10;2): J: „Začni a zkus vzít 2.“-->{O;2}-->8-->{J;2}-->6 J: „ Už je jedno, co vezmeš.“

(10;2): --> {J;2; J: „Vezmeš si, prosím tě, 1?“} -->8 -->{O;1; O: „A já teď.... jednu.“} -->7--> {J;1} --> 6 --> {O;2} --> 4

Rám. D 47

Rám. D 47 znovu dokazuje, jak si oba hráči radili.

(11;2): --> {J;1} -->10 -->{O;2} -->8--> {J;+2} --> 6 (*nedohráno*)

J: odehrává zápasy sám a komentuje je: „ Když je tam 1 – vezmu ho a vyhraju.

Když jsou tam: 2, třeba on vezme 2 a vyhraje.

: 3, on vezme 2 a já 1 a vyhraju. Do hry se přidává i O:

: 4, začne O, vezme 1, pak J vezme 1 a O vezme 2, vyhraje.

: 5, začnu já (J), vezmu 2, zbyde tam xxx a vyhraju. Ty 2

prostě vzít musím.

Rám. D 48

Zde hráči opětovně prozkoumávali VP a

(12;2): -->{J;2}-->10-->{O;1} -->9--> {J;2} --> 7 --> {O;1} -->6--> {J;1} -->

5--> {O;2} -->3 = xxx /--> {J;2} -->--> {O;1}/ -->.. => + O

(12;2): --> {J;2} -->10 -->{O;1} -->9--> {J;1} --> 8 --> {O;2} -->6--> {J;1} --> 5 --> {O;2} -->3 = xxx

(12;2): --> {J;1} -->11 -->{O;2} -->9--> {J;1} --> 8 --> {O;2} -->6 ... -->xxx

Rám. D49

Od Rám. D 49 se hráči neorientovali na vyhrávání, ale na hledání strategie.

J: „Dáme 14 a se třema?“
 Lebedová: „Teď dáme poslední 1 až 2 se 14 kameny a pak hned jdeme na 1 až 3.“
 (14;2): --> {J;2} -->12 -->{O;2} -->10--> {J;2} --> 8 --> {O;2} -->6-->
 {J;1} --> 5 --> {O;2} --> xxx 3 /--> {J;2} -->1--> {O;1} -->/.. => + O

Rám. D 50

Hra rám. D 50 byla náhodnou. Ani jeden z hráčů si neuvědomil KP 4.

J: „Musí na hromadě zbýt 4 kameny.“
 (12;3): --> {J;3} --> -->{O;3} -->--> {J;1} --> 3 --> {O;1} -->--> {J;3} -->
 3 --> {O;1} -->... => + O

 (12;3): -->{J;2}-->10-->{O;3}-->7-->{J;3;smích}-->4-->{O;3}-->1--
 >{J;1}
 -->... => + J
 J: „Musí zbýt 4, aby kdo bere, byl v nevýhodě a nemohl vyhrát.“

Rám. D 51

Jakub pochopil , kde bude KP ve hře (12;3). Své poznatky sdělil i Otakarovi. Ověřil je ještě v následujících hrách - rám. D 52

(12;3): -->{J;3} -->9 -->{O;1} -->8--> {J;2}--> 6 --> {O;2} -->4--> {J;3} -
 ->
 1 --> {O;1} -->... => + O

 (12;3): --> {J;3} -->9 -->{O;1} -->8--> {J;3} --> 5 --> {O;1} -->4-->xxxx
 /{J;3} --> 1 --> {O;1}/-->... => + O

 (12;3): --> {O;1} --> 11--> {J;3} --> 8-->{O;3} -->5--> {J;1} --> 4 -->
 {O;3} -->1--> {J;1} --> => + J J: „Nevýhodu má vlastně ten, kdo začne.“

Rám. D 52

O: „Tak vono je to podle sudýho nebo lichýho počtu, - bud' začnu nebo ne.
 J: „Záleží to na tom, kolik kamenů se může odebírat.“

Rám. D 53

Rám. D 53 je závěrečným shrnutím hry NIM hráči. Sdělili tam, jak by se mělo hrát, aby hra končila vítězstvím.

4.2.4 Zhodnocení

Zajímavé bylo i sledování, zda si soupeři chtějí poradit, a tím se ve stejném poměru chtějí podílet na společné tvorbě taktiky k vítězství, nebo zda každý objevuje strategii sám a případné nápady na výhru mi diktuje třeba za dveřmi - aby ho ten druhý neslyšel. Nyní jsem chtěla napsat, že je škoda, že pouze v jediném případě to byla hezká spolupráce, kdy si hráči radili a vůbec jim nešlo o to, o kolik výher mají více než jejich protihráč. Když se ale zamyslím zpátky, vzpomenu si, jak mě toto jejich přátelské chování překvapilo a potěšilo. Zároveň s tím jsem si říkala, že jsem něco takového vůbec nečekala. Když se řekne „hra“ NIM, sama si vybavím, že hra znamená soutěž, tedy soupeření. Ani já sama bych se tedy se svým sokem neradila o tom, jak ho přelstít. Výše popsaná spolupráce mohla také vzniknout proto, že oba hráči byli velkými kamarády, nevím. Každopádně - jejich přístup ke hře NIM ve mně zanechal opravdu silný zážitek.

5. ZÁVĚR

Vypracováním této práce jsem se podrobněji seznámila s jednou z her, ve které, chci-li vyhrát, musím v každém jejím okamžiku přemýšlet. Nikdy dříve mě nenapadlo, kolik variant může hra NIM mít. Navíc vím, že jsem pronikla jen do pouhé menšiny obměn této hry.

Hlavním pomocníkem mi byla pouze jediná kniha (Hejný, Gatial, Hecht, 1982). Dalo by se říci, že jsem odborné literatury využívala málo, ale já jsem se soustředila hlavně na moje vlastní objevování strategií. Jsem si i jistá, že kdyby tato práce byla tvořena na základě toho, co vyčtu z knih, nebyla by pro mě tolik poučná a zábavná jako tomu bylo takto. Přirovnala bych to k prožitkovému učení (viz např. [www. rvp. cz](http://www.rvp.cz)) - větší vliv na nás má to, co sami prožijeme než to, o čem pouze zprostředkovaně slyšíme.

I když hra NIM velmi napomáhá k rozvoji strategického, tedy logického myšlení, nejsem si jistá, že je vhodná pro všechny žáky primárního školství. Kvůli její náročnosti bych ji doporučila hrát až ve vyšších ročnících 1. stupně. Mají-li se hráči stát objevovateli její strategie (a ne pasivními odběrateli kamenů z hromady), zařadila bych ji nejdříve do 5. ročníku ZŠ. V mých experimentech většinou žáci alespoň částečně strategii objevili, protože ve většině případů se jednalo o nadané děti. Navíc jim byla zadána jedna z lehčích variant. Někdy bych proto NIM ve výuce určitě využila. Častěji bych však zařazovala některé hry, které jsou NIMu podobné hledáním strategie, a zároveň jsou, dle mého názoru, jednodušší. Jsou to často hry, které se hrají na čtverečkovaném papíře, jako např. hra Brigita. V ní mají hráči za úkol propojit horní stranu hracího pole s dolní. (Angiolino, 2000, s. 28). Další zajímavou hrou jsou Bloky (Angiolino, 2000, s. 21). V hracím poli hráči střídavě vybarvují dva přilehlé čtverečky. První, kdo tak učinit nemůže, prohrává. Zaujala mě i hra Laso (Angiolino, 2000, s. 110). V ní je nutné

zakreslovat laso okolo koleček na herní ploše. Laso musí vycházet z jednoho volného kolečka a musí obtočit další volné kolečko. Lasa se nesmí protínat. Prohrává ten, kdo nemá možnost nakreslit další laso.

Proto, abych našla vítězné strategie, jsem sama řešila mnoho konkrétních úloh, tedy izolovaných modelů. Získala jsem tím vhled do celé hry. Protože mi ale počítáním vznikl větší soubor materiálů, než jsem mohla v této práci uveřejnit a podrobit analýze, uvádím zbytek vyřešených úloh pouze v přílohách. Zároveň jsem si uložila úkol do budoucna - objevit generický model pro úlohy typu NIM* Speciál, který se mi dosud, i přes dlouhou dobu, kterou řešení hledám, nepodařilo najít.

Uvědomuji si, jako roli při objevování strategie hraje osobní jistota řešitele. Co se týče mně - často jsem se ujišťovala o správnosti výpočtu, a to mě zdržovalo. K tomu je nutné dodat, že velký vliv na tuto nejistotu mělo okolní prostředí, ve kterém jsem úlohy řešila. Obvykle se jednalo o prostředí prostředku hromadné dopravy.

Objevování strategie NIMu je nestálý proces učení. Objevovatel si často zvyká na nové podmínky a sám je nucen být při práci neustále soustředěn.

Díky tomu, že jsem někdy ve vlastních poznámkách chybovala, jsem si uvědomila, jak snadné je chybu udělat, ale i to, že daleko obtížnější je ji vyhledat. Často se mi stávalo, že tím, že jsem chybu v konkrétní situaci registrovala, jsem se zcela přestala orientovat v následujícím počítání, a musela jsem vynaložit velké úsilí, abych ji našla a následně se zpět do počítání vrátila. Uvědomuji si, že se do stejných situací mnohdy dostanou i moji žáci. Proto budu k jejich chybám přistupovat jako k součásti přirozeného procesu učení.

LITERATURA

HEJNÝ, M., GATIAL, J., HECHT, T. *Hry takmer matematické*. Praha : ÚV Matematické olympiády, 1982.

ANGIOLINO, A. *Hry s čtverečkováným papírem a tužkou*. Praha : Portál, 2000.
ISBN 80-7178-392-1

HEJNÝ, M., KRATOCHVÍLOVÁ, J. From Experience, through Generic Models to Abstract knowledge. (Posláno jako příspěvek na CERME4 Fourth conference of the European Research in Mathematics Education, prošlo recenzním řízením, 10 stran.)