

Posudek na bakalářskou práci Martina Melicherčíka

Pan Martin Melicherčík se ve své bakalářské práci zabývá teorií oceňování finančních derivátů na základě extremálních bodů množiny martingalových měr. Práce má rešeršní charakter a je rozdělena do tří základních kapitol. Dodatkovou kapitolu tvoří především komplikovanější důkazy.

V první kapitole je čtenář seznámen s tzv. Douglasovou větou, která tvoří základní teoretický pilíř pro celou práci pro oceňování finančních derivátů. V druhé kapitole je napsána obecná teorie martingalů. Ve třetí kapitole je provedena interpretace pojmu z Douglasovy věty do financí spolu s ukázkou na malém příkladě.

Obecná úprava práce

Úprava práce je na velmi vysoké úrovni. Ale jak to v podobných pracích bývá, menší chyby se prostě vždy najdou. Rád bych upozornil na to, že

- (1) občas jste ukončil řádek samohláskou (např. str. 2, 4. řádek odspoda - "a") a někdy souhláskou (např. str. 11, 7. řádek odshora v příkladu - "Z"). To se u samohlásky, resp. souhlásky, bez nějakého speciálního významu (např. označení metrického prostoru, funkcionálu atd.) nemá.
- (2) někdy dělíte rovnost na dva řádky (např. str. 4, 4. řádek odspoda - " $P(A) = 0$ "), někdy množinové náležení (např. str. 8, 3. řádek odspoda před definicí \mathcal{F}_t -martingalu a jeho variací - " $(X_t, t \in T)$ "), někdy zobrazení (str. 18, důkaz věty 13 - " $\tau : \Omega \rightarrow \{s, r\} \subset T$ "), což se též nemá. Pokud máte pojem jako např. " \mathcal{F}_{n-1} -měřitelný" dělte jej podle slova za pomlčkou a ne podle naznačené pomlčky (str. 14, 3. řádek odshora v příkladu). Podobně u slova " σ -algebry" (str. 4, 3. řádek odshora po ukončení důkazu lemmatu 1).
- (3) není dodržována konzistence definic, čímž myslím, že definovaný pojem jste **neztučnil** (od definice v sekci 2.4 už to chybí všude). Na straně 10 jste také napsal za důkazem lemmatu 8 definici martingalu, který by měl mít nálepku definice. Případně, pokud by byl definován nějaký méně důležitý pojem a byl mimo definici, šlo by třeba použít **tučnou kurzívu**.
- (4) není správné odsazení od " $=$ " u rozpisu více rovností. Přesněji, jde o konstantu C na str. 22 a str. 34. Navíc, na str. 34 (3. rovnost při rozpisu $\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_p]$) jste skončil řádek symbolem "+", což není potřeba, protože na dalším řádku jej máte zmíněn. Občas jste též nedodržoval důsledně uzávorkování (např. pro integrandy u integrálu na str. 6, poslední řádek či str. 7, předposlední řádek). Někdy by se též hodilo zvětšit závorky, pokud uvnitř nich používáte zlomek (3. řádek od konce důkazu věty 11, str. 16), sumu (např. předposlední řádek, str. 28) nebo sjednocení (str. 23, poslední řádek).

Matematická úprava práce

Předně, nepíšeme "lema", ale "lemma". V odkazech na literaturu bych se též vyvaroval používání internetových odkazů na přednášky popisující danou problematiku, které mají spíše nejistou budoucnost existence. Mnohem lepší je zmiňovat oficiální knížky, které tvoří základ pro tyto přednášky. Např. Olav Kallenberg *Foundations of Modern Probability*, Springer, Berlin, 1997 (tuto knížku jste v literatuře třeba neměl).

Většina chyb v práci patrně pramení z překlepů, resp. nadklepů (pokud je něco navíc), resp. nedoklepů (pokud něco chybí). Např. uprostřed důkazu věty 4, str. 6, nebo na začátku důkazu věty 18, str. 22, má být \mathcal{X}^* a přitom je zde \mathcal{L}^* . S tím souvisí tato sada otázek. Pokuste se je zodpovědět všechny **s důrazem na zodpovězení otázek (a), (c), (d), (f), (j)**.

- (a) Jakou normu $\|\cdot\|$ uvažujete v důkazu lemmatu 1 na str. 3? Pokud nějakou konkrétní měl jste ji zmínit hned na začátku důkazu. S tím souvisí i dotaz, zda-li je norma $\|\cdot\|_\infty$ v důkazu Douglasovy věty na str. 6 toho samého typu? Nebo je to norma z přílohy B, tzn. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, kde (\cdot, \cdot) je skalární součin a x je vektor z lineárního prostoru X (se skalárním součinem)? A jak je to s vyjádřením λ_k v 2. řádku odspoda na straně 29? Je tam eukleidovská norma nebo ne?
- (b) Na posledním řádku (str. 3) píšete $V = \{-\frac{v}{\lambda}; v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Je správné značit tuto množinu jako V ? Od toho potom přecházíte k jinému vyjádření normy funkcionálu F (str. 4) a je tam podivně napsáno

$$\|F\| = \sup \left\{ \frac{1}{\|x - v\|}, v \in V, (*) \right\}.$$

A co je na místě (*)?

- (c) Konec důkazu lemmatu 2. Píšete, cituji: "... každá $f \in \mathbb{L}^1(P)$ sa dá napísat ako $f = f^- + f^+$, tak $C = \mathbb{L}^1(P) \dots$ ". Že by funkce f byla vyjádřena zrovna takto?
- (d) Na konci důkazu Douglasovy věty (str. 7) píšete, cituji: "Teda $Q^+, Q^- \in \mathcal{M} \dots$ ". Co to je \mathcal{M} ? Nevidím to nikde předtím zadefinováno.
- (e) Pokud připustím, že definice \mathcal{F}_t -martingalu na straně 8 je dobré, proč na další straně píšete např. v 7. řádku odshora $X_t = \mathbf{E}[X_\infty | \mathcal{F}_t]$ a nikde tam nevidím skoro jistě? Podobně, konec důkazu Lemmatu 6, kde jste napsal $\mathbb{E}_Q[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ opět bez skoro jistě. Těch případů je vícero. Zajímá mě, jestli tam má být skoro jistě nebo ne? Pokud ano, tak jste to mohl zmínit někde předem, abyste se s tím nemusel pořád obtěžovat.
- (f) V tvrzení lemmatu 8 píšete, cituji: "Ak je filtrácia $(\mathcal{G}_t, t \in T)$ zavretá medzi $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t \dots$ ". Tomu nerozumím formálně, ale neformálně ano. Zkuste to přeforumlovat do formální řeči.
- (g) V důkazu věty 11 na začátku máte po limitním přechodu $0 \geq \mathbf{E}[C_n / C_n^* + 1]$ a za chvíliku máte, že $\mathbf{E}[C_n / C_n^*] \leq 1$? V čem je problém?
- (h) Je v pořádku na str. 20 tvrdit, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 1,$$

kde $n \in M = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$ je pevně zvoleno? Určitě ne, ale proč? Stejný problém je v následujícím vyjádření pro t_n .

- (i) Na úplném začátku věty 18 na str. 22 píšete, cituji: "Nech $Q \in \mathcal{M}_\mathcal{L} \dots$ ". Co to je $\mathcal{M}_\mathcal{L}$?

(j) Důkaz věty 18, str. 23 nahoře. Platí s předpoklady věty 18 rovnost

$$\mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[Y_k|\mathcal{F}_{n-1}] = H_{n-1}^k(X_n - X_{n-1})?$$

(k) Důkaz lemmatu 26, str. 34 nahoře. Platí s předpoklady lemmatu 26 rovnost

$$\sum_{n=p+1}^N \mathbf{E}[(H_n)^T(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_p] = \sum_{n=p+1}^N \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^d H_n^k \mathbf{E}[(X_n^k - X_{n-1}^k)|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_n\right]?$$

Označíme-li výraz na pravé straně jako (PS), platí potom

$$C + \sum_{n=1}^p (H_n)^T(X_n - X_{n-1}) + (PS) = C + \sum_{n=1}^p (H_n^m)^T(X_n - X_{n-1})?$$

(l) Důkaz věty 19, str. 34. Píšete, cituji: "Podľa lemmy 26 pre všetky $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathbf{E}[Y_m|\mathcal{F}_m] - \mathbf{E}[Y_m|\mathcal{F}_{n-1}] = (H_n^m)^T(X_n - X_{n-1}).$$

Výraz na ľavej strane konverguje absolútne v \mathbb{L}^1 , a tedy má aj limitu s.i. Preto má limitu s.i. aj výraz na ľavo...". Nerozumím, proč je tam napsáno dvakrát nalevo. Nemá tam být někde napsáno i napravo?

Shrnutí

Práce svým charakterem odpovídá plně bakalářskému studiu. Je to rešeršní a velmi precízně napsaná práce bez závažnejších matematických chyb.

Práci připouštím k obhajobě.

V Praze dne

Jiří Haman

.....