Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce na téma:

Historie logiky jako inspirace pro vyučování matematiky

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Ph.D.

Vypracoval:

Jméno: Karel Zavřel
Rok: 2010
Adresa: Měchnov 20, Divišov 257 26
Email kzavrel@seznam.cz

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci

Historie logiky jako inspirace pro vyučování matematiky

napsal sám a pouze s použitím uvedené literatury.

V Měchnově 7. dubna 2010,

Karel Zavřel

Poděkování

Děkuji především vedoucímu své práce prof. L. Kvaszovi, nejen za usměrňování a cenné připomínky, ale i za vypůjčenou literaturu, především však za jeho zapálený výklad v kurzech historie matematiky a logiky, kterým mě přivedl k hlubšímu zájmu o toto téma.

Obsah

Obsah 4
Abstrakt 5
Abstract 6

Úvod 7
1 Shrnující exkurz do historie logiky jako celku 8
1.1 Aristoteles 8
1.2 Stoikové 9
1.3 Středověk 10
1.4 Novověk 11
2 Přehled formalizací logiky 13
2.1 Sylogistika 13
2.1.1 Zrod formální logiky 13
2.1.2 Idea sylogismu 14
2.2 Diagramové metody znázornění sylogismů 16
2.2.1 Eulerovy diagramy 16
2.2.2 Vennovy diagramy 17
2.2.3 Logika hrou Lewise Carrolla 18
2.3 Booleova algebra 20
2.3.1 George Boole 20
2.3.2 Východiska Booleovy algebry 21
2.3.3 Základní pravidla 21
2.3.4 Booleovo řešení sylogismů 24
2.3.5 Využití Booleovy algebry 25
2.4 Moderní logika 26
2.4.1 Gottlob Frege 26
2.4.2 Východiska Fregovy logiky 28
2.4.3 Symbolika 29
2.4.4 Výroková logika 30
2.4.5 Kvantifikace 33
2.4.6 Shrnutí 35
3 Využití historie logiky ve vyučování matematiky 37
3.1 Aniž si uvědomujeme 37
3.2 Motivační příklady 38
3.2.1 Sofismata 38
3.2.2 Pravdivostní tabulky 40
3.2.3 Autoreference 44
Závěr 47

Literatura 49
Přílohy 50

Abstrakt

Bakalářská práce *Historie logiky jako inspirace pro vyučování matematiky* se snaží nějakým způsobem integrovat poznatky a příklady z historie logiky do celku matematiky, především s ohledem k vyučování.

Úvodní exkurzní kapitola ilustruje vývoj procesu usuzování, zároveň naznačuje, jaké postavení v panteonu vědních odvětví logika v té které době zaujímala. Druhá kapitola se zabývá několika odlišnými způsoby formalizace logiky. Je to především Aristotelův konstrukt formální logiky a na něj navazující sylogistika. Ta je dále rozebírána z hlediska vývoje klasifikace platnosti sylogismů, od memorovacích formulí přes různé druhy diagramových metod pro znázornění sylogismů.

Následují dva oddíly, které se věnují přínosu George Boolea a Gottloba Frega. Je zde částečně srovnáván jejich přístup k logice jako takové a zmiňují se nejdůležitější principy a akcenty, které jsou obsaženy v jejich dílech.

Třetí kapitola je ryze praktická, začíná krátkým přehledem situací, kdy je logika implicitně obsažena ve vyučování, aniž bychom si to nutně uvědomovali. Další tři oddíly se postupně zabývají sofismaty, pravdivostními tabulkami a fenoménem autoreference. Jsou zde zmíněny příklady typových úloh, které tuto problematiku ilustrují, zároveň jsou tyto tři oddíly vnitřně spojeny s předcházejícími kapitolami, totiž s Aristotelovou sylogistikou, Booleovou algebrou logiky a Fregovým dílem, které paradox autoreference rovněž poznamenal.

Abstract

The bachelor thesis *History of logic as an inspiration for mathematics education* endeavors to integrate pieces of knowledge and examples taken from the history of logic into the entire mathematics, especially into mathematics education.

The introductory overview chapter illustrates the development of the process of logical inference, and simultaneously it indicates the position of logic in the pantheon of all branches of science in the particular periods of history. The second chapter deals with the different ways of formalizing logic. First I discuss Aristotle's construction of formal logic as a system of syllogisms. That system is analyzed from the point of view of a classification of syllogisms and the proof of their validity, as well as from the point of view of several medieval memorizing formulas and the different diagrammatic methods for representation syllogism.

The next two chapters describe the contribution of George Boole and Gottlob Frege. In the text I try to compare their approaches to logic and describe the most important principles and accents, present in their works. The third chapter is a purely practical one; it starts with a short overview of the situations, where logic is implicitly included in mathematics education without our being aware of it. Next three short sub-chapters deal with sophisms, tables of truth values and the phenomenon of self-reference. There are discussed several examples, which are related to these three problems. Further, these three sub-chapters are also related to passages in the second chapter, especially to Aristotle's syllogisms, to Boole's project of arithmetization of logic and to Frege's work, which is also affected by the self-reference paradoxes.

Úvod

K tématu práce mě přivedly kurzy z historie matematiky a logiky, které jsem absolvoval v letním semestru 2009 pod vedením prof. L. Kvasze. Přednášky mě natolik zaujaly, že jsem se rozhodl zvolit si jako téma své bakalářské práce historii logiky. Aby práce přinesla nový pohled na tuto, vesměs už dobře prozkoumanou a v mnoha publikacích popisovanou problematiku, pojednávám ji ve vztahu k vyučování matematiky.

Základní otázka, na kterou chce tato práce odpovědět, zní: Má historie logiky nějaký význam pro vyučování matematiky? Pokud ano, tak jaký? Na tyto otázky se pokouším hledat odpověď nejprve nepřímo pomocí exkurzu do chronologie vývoje logiky a také na několika příkladech velkých vědců tohoto odvětví. Následně pak přímo pomocí několika úloh, které ve své podstatě souvisí s některým problémem či objevem z historie logiky popisovaným v předchozích kapitolách.

1 Shrnující exkurz do historie logiky jako celku

1.1 Aristoteles

Začněme krátkým chronologickým exkurzem do historie logiky. Prvním uceleným systémem klasifikace lidského uvažování a vyjadřování byl Aristotelův konstrukt formální logiky, o kterém bude podrobněji pojednáno v oddíle 2.1.1. Jeho nespornou výhodou je především jasnost, přehlednost a systematická jednoduchost, která ho dodnes předurčuje jako první pojednání ve většině úvodních kurzů logiky. V mnoha publikacích pojednávajících o historii logiky[1] bývá uváděna pasáž z Kantovy *Kritiky čistého rozumu*, ve které považuje logiku po Aristotelovi za vědu uzavřenou a úplnou. Bývá mu vytýkáno nejen to, že Aristotelův systém přecenil, ale i to, že svým dílem způsobil zpomalení dalšího vývoje logiky jako vědecké disciplíny. V. Kolman však Kanta částečně obhajuje, a to jednak již zmíněnou jednoduchostí a systematičností Aristotelova systému, a zároveň neexistencí alternativní adekvátně rozvinuté a přehledné teorie.[2]

Jisté však je, že Aristotelův přístup není dokonalý. Jeho zásadní chybou, od které se pak odvíjejí další, je jeho přílišné sepjetí s přirozeným jazykem, ze kterého mimoděk odvozuje například význam slov *každý* a *nějaký*. To ho pak vede k přirozenému vztahu *subsumpce*[3], ve kterém však oslabený soud ztrácí svou obecnou pravdivost, poněvadž (tiše) předpokládá neprázdnost množiny subjektů. Na tomto základu pak staví mnohá sofismata. Pokus usuzovat na pravdivost výroků z přirozeného jazyka *„troskotá nutně na šíři a indefinitnosti jazykové praxe.“* [4]

[1] Mráz 1988, s. 186; Berka 1959, s. 3; Šedivý 1984, s. 90
[2] Kolman 2002, s. 3
[3] viz oddíl 2.1.1 Zrod formální logiky
[4] Kolman 2002, s. 6

1.2 Stoikové

Další antický logický systém vytvořili stoikové. Základním pojmem se zde stává *výrok*, jejich systém tedy nazýváme antickou výrokovou logikou. Oproti Aristotelovi jasně odlišují *„mezi slovy a jejich významem, mezi ‚označením' a ‚označovaným'."* [5] Výrok tedy představuje objektivní význam myšlenky vyjádřené v přirozeném jazyce. Výroky dělí na jednoduché a složené podle toho, zda obsahují či neobsahují logické spojky. Jejich filosofie jako striktně dualistická se promítla i do této oblasti, kdy každý výrok musí být buď pravdivý, nebo nepravdivý, *tertium non datur*. Jako spojky (také výrokotvorné částice) používali negaci, implikaci, vylučovací disjunkci, alternativu a konjunkci. Kombinací těchto spojek získávali *úsudky*, což jsou soubory výroků, které obsahují zpravidla dvě premisy a z nich plynoucí závěr. Úsudky mohou být pravdivé (tj. z pravdivých premis vyplývá pravdivý závěr) či nepravdivé (tj. závěr neplyne z premis nebo je alespoň jedna premisa nepravdivá).

Velký význam připisovali tzv. úsudkům *anapodeiktickým*, tj. nedokazatelným, *„v nichž závěr vyplývá z premis na základě jejich struktury."* [6] Ty jsou pokládány za vždy platné a ostatní platné úsudky na ně lze redukovat; bývají vyjádřeny ve formě pěti jednoduchých schémat[7]. Kromě těchto schémat stoikové vytvořili ještě čtyři *metalogická pravidla*[8], která spolu s anapodeiktickými úsudky tvoří ucelený systém *teorie dedukce*, ve kterém byli schopni analyzovat i strukturu některých sofismat[9] a antických paradoxů.[10]

Za zmínku jistě stojí i osobnost Klaudia Galéna[11], který na stoický logický systém navázal. Vypustil některé anapodeiktické úsudky, které považoval za odvoditelné od zbylých. Především však úsudkový systém rozšířil o zcela nový typ výpovědí, tzv. *relační soudy*, např. „Prvý má dvakrát více než druhý, druhý má dvakrát více než třetí, tedy, prvý má čtyřikrát více než třetí." Stoikové sice takové soudy také znali, ale neuměli je do svého systému zařadit, považovali je tedy za nesprávné úsudky.[12]

---

[5] Šedivý 1984, s. 91
[6] Šedivý 1984, s. 93
[7] viz Příloha 2: Stoický systém teorie dedukce
[8] viz Příloha 2: Stoický systém teorie dedukce
[9] viz oddíl 3.2.1
[10] Šedivý 1984, s. 94
[11] asi 129 – 200, věhlasný římský lékař
[12] Berka 1959, s. 61 a 64; Šedivý 1984, s. 95

1.3 Středověk

Po úpadku antické kultury a civilizace vůbec přichází období středověku, které můžeme z hlediska vývoje logiky rozdělit na tři etapy. Ta první *(logika vetus)* sahá až do 12. století a je charakterizována především studiem Aristotelových spisů. Za hlavního představitele bývá považován Petr Abélard[13]. Druhá etapa *(logika nova)* pokrývá 12 – 13. století a je obdobím vlastní tvůrčí práce. Je to především snaha o syntaktickou i sémantickou analýzu přirozeného jazyka, ale vyvíjí se i výroková logika. Jednou z nejvýznamnějších osobností tehdejší doby byl Albert Veliký[14]. Období třetí *(logika modernorum)* sahá pak až do konce 15. století a snaží se co nejlépe systematizovat poznatky předchozí plodné etapy. Jako představitele je možno uvést např. Jana Duns Scota[15].

Období 11. – 15. století, tedy druhá a třetí etapa vývoje středověké logiky, se časově překrývá s obdobím scholastiky a je charakterizováno rozvojem vzdělanosti, který souvisí se vznikem a rozkvětem univerzit. V tomto období měla logika sloužit především teologickým disputacím. Byla součástí studia na artistických fakultách, kde se sedm svobodných umění dělilo na dva základní bloky: trivium tvořené logikou, gramatikou a rétorikou a quadrivium, které obsahovalo aritmetiku, geometrii, astronomii a nauku o hudbě. Už z tohoto rozdělení jsou patrné konotace, jak byla logika jako věda ve středověku chápána. Tím, že byla přiřazena k oborům formálním, se více posilovalo její sepjetí s jazykem a teorií argumentace. Vytrácí se však její význam pro matematiku a přírodní vědy vůbec. Ztrácí se úmysl popsat to, co je objektivně vyjádřeno v přirozeném jazyce (Stoikové), ale logické zkoumání se zaměřuje na jazyk samotný[16]. Kromě již známých výrokotvorných konstant, jako je např. spona *je*, kvantifikátory *každý*, *žádný*, *nějaký* a logické spojky *a*, *nebo*, *jestliže-pak*, zde můžeme vysledovat i některé pojmy nové, a to tzv. modální funktory: *nutný*, *možný*, *nahodilý*.[17]

Základní oblastí vývoje byla ve středověku výroková logika. Složené výroky byly jasně definovány na základě svých pravdivostních hodnot. S tím souvisí dobré znalosti ohledně zaměnitelnosti složených výroků. Stále přetrvává diskuze (už od dob antiky)

---

[13] asi 1079 – 1142, francouzský teolog a myslitel. *Poznávám, abych věřil.*
[14] asi 1206 – 1280, německý teolog a filosof, věnoval se i přírodním vědám. Jedním z jeho žáků byl také Tomáš Akvinský. Bývá nazýván *doctor universalis.*
[15] asi 1266 – 1308, skotský teolog a filosof, nazýván *doctor subtilis* (důsledný, přesný)
[16] Jazykem vzdělaných byla tehdy latina.
[17] Šedivý 1984, s. 97n

o smyslu implikace: zda ji pojímat striktně formálně či materiálně, resp. zda je správné, aby z nepravdivého výroku plynul jakýkoli výrok. Velkou část středověké výrokové logiky tvořila *závěrová pravidla* pro složené výroky. Známá jsou především *modus ponens* a *modus tollens*:

modus ponens: $$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$ *modus tollens*: $$\frac{A \Rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Zajímavé je například také pravidlo Jana Duns Scota o rozporném výroku: $\dfrac{A \wedge \neg A}{B}$. V původním textu je uvedeno příkladem: „*Sókrates existuje a Sókrates neexistuje, tedy v koutě stojí hůl.*“ [18]

Vedle výrokové logiky byla ve středověk rozpracována i logika predikátová. Staví především na Aristotelově sylogistice a podrobněji o ní bude pojednáno v oddíle 2.1.

1.4 Novověk

V období renesance došlo k velkému rozvoji všech přírodních věd včetně matematiky, ale logika – snad díky svému přiřazení k formálním vědám – zažívala naopak úpadek. Nebyl zde jednotný proud, který by mohl vykazovat trend většího rozvoje. Někteří chtěli zachovat dosavadní přístup scholastický, jiné skupiny volaly po čisté aristotelovské nauce a ještě jiní chtěli začít úplně od začátku jinak.[19]

Postupně je možné zaznamenat v logice novou tendenci: snahu o jasný a přesný zápis logických výpovědí. Jako vzor zde posloužila aritmetika, kde je vše už na první pohled zřejmé, jasné a bezesporné. První, kdo si uvědomil některé analogie logiky a aritmetiky, byl zřejmě G. W. Leibniz. Jeho cílem bylo vytvořit umělé písmo, které by věrně, avšak logicky správně, zachycovalo přirozenou stavbu věty. Jeho fascinace „aritmetizací“ logiky však nabrala špatný směr, když se snažil nahradit jednotlivá slova číselnými hodnotami. Na jeho úsilí později navázal George Boole, jehož propracovaný koncept bude blíže popsán v oddíle 2.3. I ten se ale stále více zaplétal do aritmeticko-logických analogií, až se jeho písmo postupně vzdálilo skutečnému jazyku a tak i problémům,

[18] citováno podle Šedivý 1984, s. 106
[19] Šedivý 1984, s. 115

které měly být jeho pomocí řešitelné. Na to poukazuje Gottlob Frege, jehož pojmové písmo a logický systém bude hlavním předmětem zájmu v oddíle 2.4.

2 Přehled formalizací logiky

2.1 Sylogistika

2.1.1 Zrod formální logiky

Aristoteles žil zřejmě mezi lety 384 – 322 př. n. l., byl žákem Platónovým a stal se snad nejvýznamnějším filosofem antického období. A protože filosofii chápal jako vědu o *poznávání všeho, co jest*, položil tak základy mnoha dalším disciplínám, mimo jiné i nauce o správném usuzování, kterou nazýváme logikou. Jeho spisy týkající se tohoto vědního odvětví se souborně nazývají *Organon*, tj. *Nástroj*, a patří sem *Kategorie*, O *vyjadřování*, *První a druhé analytiky*, *Topiky* a O *sofistických důkazech*.

Základem formální logiky jsou tzv. *subjekt-predikátové soudy*, neboli oznamovací věty přičítající dané vlastnosti daným předmětům. Lidé je používají snad odjakživa a vycházejí z přirozených struktur evropských jazyků. *Subjektem* je předmět, kterému je daná vlastnost připisována a *predikátem* rozumíme buď danou vlastnost či příslušnost do určité třídy apod. Nejjednodušeji můžeme rozdělit soudy na obecné a částečné, následně pak na kladné a záporné. Uveďme příklad.

s – subjekt, *p* – predikát

	Kladné	Záporné
Obecné	Každé *s* je *p*.	Žádné *s* není *p*.
Částečné	Některé *s* je *p*.	Některé *s* není *p*.

Kvůli zkrácení a zjednodušení zápisu se vžily zkratky, resp. označení soudů písmeny A, E, I, O. Samohlásky A a I označují soudy kladné (Affirmo = tvrdím), naopak E a O přiřazujeme soudům záporným (Nego = popírám). A a E značí soudy obecné, I a O naopak částečné. Zkrácenou tabulku můžeme tedy zapsat takto:

	Kladné	Záporné
Obecné	*sap*	*sep*
Částečné	*sip*	*sop*

Jistě si uvědomujeme, že soudy A, E, I, O nejsou nezávislé. Nejprve si všimneme vztahu *kontradikce*. Ten značí, že dané soudy nemohou platit zároveň, tvrdí pravý opak.

Tento vztah vidíme v úhlopříčkách tabulky, tj. mezi *sap* a *sop* a dále mezi *sep* a *sip*. Dalším na první pohled zjevným vztahem je *subsumpce*, kterou v tabulce vidíme ve vertikálním směru, tedy mezi *sap* a *sip* a mezi *sep* a *sop*. Subsumpce znamená zahrnutí či vyplývání, částečné soudy vyplývají z obecných. Zbývá tedy směr horizontální. Vztah mezi *sap* a *sep* se nazývá *kontrárnost* a říká, že dané soudy sice nemohou být oba zároveň pravdivé, ale mohou zároveň platit jejich negace. *Subkontrárností* nazýváme vztah *sip* a *sop*, zde naopak mohou být pravdivé oba soudy zároveň, nikoli však jejich negace. Pro přehledné zobrazení těchto vztahů se ve středověku používal tzv. *logický čtverec*[20].

2.1.2 Idea sylogismu

To vše Aristoteles popisuje ve svém spise *První analytiky*. Naznačuje zde i ideu sylogismu jako korektního úsudku. Ta je taková, že z pravdivosti dvou soudů (premis) můžeme předpokládat pravdivost soudu třetího (závěru). Musíme však ještě upřesnit konkrétní strukturu všech tří soudů: první premisa musí vypovídat o *p* a *m*, druhá o *s* a *m* a závěr musí obsahovat *s* a *p*. Z pravidel kombinatoriky tedy vyplývá, že jsou možné čtyři figury:

I.	II.	III.	IV.
m * p	p * m	m * p	p * m
s * m	s * m	m * s	m * s
s * p	s * p	s * p	s * p

Namísto * je možné doplnit jednu ze samohlásek A, E, I, O. Získáváme tím tedy celkem 256 4×(4×4×4) možných kombinací. Ovšem jen některé z nich představují platné sylogismy, tj. jen u některých platí, že jsou li pravdivé premisy, je vždy pravdivý i závěr. Je zde tedy problém: jak rozlišit platné a neplatné sylogismy. Nejefektivnější cestou by bylo najít nějaký algoritmus, středověk však tento problém vyřešil jinak. Už od Petra Hispana[21] je znám soubor tříslabičných slov, která reprezentovala platné sylogismy čtyř jednotlivých figur. Ta byla pak studentům předkládána k memorování.

[20] viz Příloha 1: Středověké mnemotechnické pomůcky
[21] asi 1215 – 1277, profesor logiky v Paříži, pozdější papež Jan XXI.

I. figura

barbara, celarent, darii, ferio, barbari(*), celaront(*)

II. figura

baroco, cesare, camestres, festino, cesaro(*), camestros(*)

III. figura

bocardo, disamis, datisi, darapti(*), ferison, felapton(*)

IV. figura

bramalip(*), calemes, dimatis, fresison, fesapo(*), calemos(*)

Jak pomohou tato slova sestavit sylogismus by už mělo být zřejmé. Vezměme si například sylogismus barbara. Musíme vědět, že patří k první figuře, a musíme znát postavení predikátu *m* v této figuře (středověk k tomu opět vynalezl pomůcku, nazývali ji *andělská křidýlka*[22]).

barbara

m * p		*map*		Každé *m* je *p*.
s * m	→	*sam*	→	Každé *s* je *m*.
s * p		*sap*		Každé *s* je *p*.

Některé sylogismy jsou vlastně jen oslabením jiných pomocí subsumpce, například barbari (oslabením sylogismu barbara):

barbari

m * p		*map*		Každé *m* je *p*.
s * m	→	*sam*	→	Každé *s* je *m*.
s * p		*sip*		Některé *s* je *p*.

Sylogismy označené (*) předpokládají neprázdnost některých predikátů. Bez tohoto předpokladu (např.v soudobé logice) máme tedy pouze 15 platných sylogismů (z 256!). Kromě toho středověká sylogistika, narozdíl od Aristotelovy, klidně používá v nižší premise výpověď o jednotlivé věci či osobě. Tak také mohl vzniknout snad nejznámější sylogismus:

Lidé jsou smrtelní.
Sókrates je člověk.
Sókrates je smrtelný.

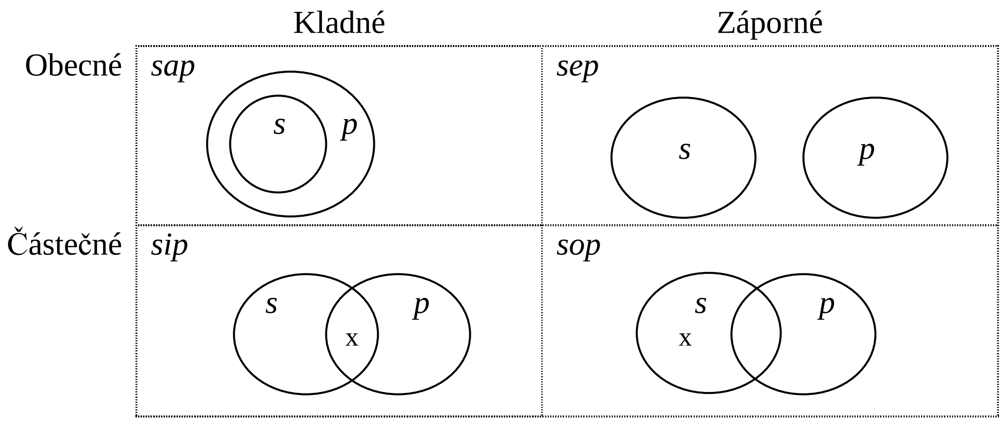
[22] viz Příloha 1: Středověké mnemotechnické pomůcky

U Aristotela v sylogismu nemohlo vystupovat jméno, tedy singulární termín, ale vždy jen pojem, tedy termín obecný.

2.2 Diagramové metody znázornění sylogismů

2.2.1 Eulerovy diagramy[23]

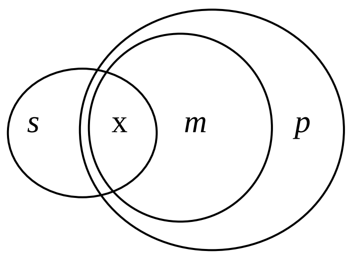
Zde ovšem středověkou sylogistiku opustíme a budeme se věnovat efektivnějšímu způsobu hledání platných sylogismů, totiž tvorbě algoritmu, který je jednoznačně určí. Jednu z takových pomůcek vytvořil i švýcarský matematik Leonhard Euler[24]. Všechny subjekty i predikáty chápal jako množiny a zakresloval je pomocí kroužků. Tabulka základních soudů z úvodu této kapitoly by tedy v jeho podání vypadala takto:



Křížek v diagramech částečných soudů značí hledanou část množiny. Pro zakreslení sylogismu jsou potřebné tři kroužky, *s*, *p*, a *m*. Eulerova metoda je velmi dobrá a názorná pro platné sylogismy, ale může být nebezpečná pro ty neplatné, jelikož je třeba zkoumat všechny možné polohy „množin“ *s*, *p*, a *m*. Jako příklad si tedy vezměme sylogismus, který je zjevně platný, např. datisi (zakreslíme postupně kroužky podle první a druhé premisy a uvidíme, že i závěr je platný):

datisi

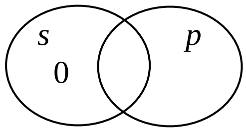
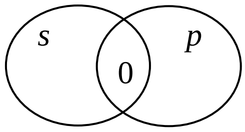
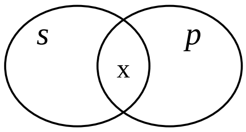
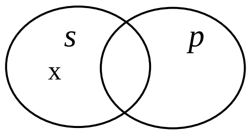
m * p m * s	→	*map* *mis*	→	Každé *m* je *p*. Některé *m* je *s*.
s * p		*sip*		Některé *s* je *p*.



[23] Bendová 1998, s. 27
[24] 1707 – 1783, švýcarský matematik a fyzik, považován za jednoho z největších matematiků 18. století

2.2.2 Vennovy diagramy[25]

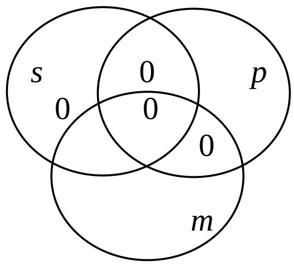
Dalším způsobem klasifikace sylogismů se stala metoda Johna Venna[26]. Oproti Eulerovým diagramům je méně názorná, avšak má tu přednost, že je algoritmická, tj. že vždy jednoznačně rozhodne o platnosti sylogismu, a to bez nutnosti kreslit všechny možné kombinace či hledat protipříklady. Obrázek si v tomto případě nakreslíme vždy stejně a křížkem či nulou označíme nutnou neprázdnost či naopak prázdnost dané části diagramu. Opět tabulka základních čtyř soudů:

	Kladné	Záporné
Obecné	*sap* 	*sep* 
Částečné	*sip* 	*sop* 

Pro zobrazení sylogismu jsou opět nutné tři kroužky. Jako příklad si vezměme sylogismus první figury celarent:

celarent

m * p	→	*mep*	→	Žádné *m* není *p*.
s * m		*sam*		Každé *s* je *m*.
s * p		*sep*		Žádné *s* není *p*.

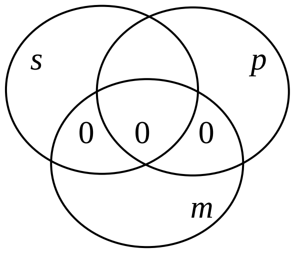


Opět postupně zakreslujeme podle premis do obrázku nuly a křížky a vidíme, že diagram vystihuje i závěr. Pokud je jedna z premis obecná a druhá částečná, zakreslujeme nejprve obecnou.

Nyní si ukážeme použití této metody na jeden z neplatných sylogismů. Vidíme, že v tomto diagramu předpokládaný závěr neplatí.

[25] Bendová 1998, s. 37
[26] 1834 – 1923, anglický matematik a filosof

p * m m * s	→	*pem* *mes*	→	Žádné *p* není *m*. Žádné *m* není *s*.
s * p		*sep*		Žádné *s* není *p*.



2.2.3 Logika hrou Lewise Carrolla[27]

Velice zajímavým způsobem klasifikace sylogismů se jeví způsob Lewise Carrolla[28], autora *Alenky v říši divů*, který představil v knížce *Logika hrou*. Navázal na ideu Vennových diagramů, ale rozšířil je o negativní rozměr predikátů, tedy množiny objektů, které jsou *ne-p, ne-s,* případně *ne-m*. Stále používáme značení nulou či křížkem. Nejprve několik jednoduchých soudů:

Každé *s* je *p*.

	s	*ne-s*
p		
ne-p	0	

Některé *s* je *p*.

	s	*ne-s*
p	x	
ne-p		

Některé *ne-s* je *p*.

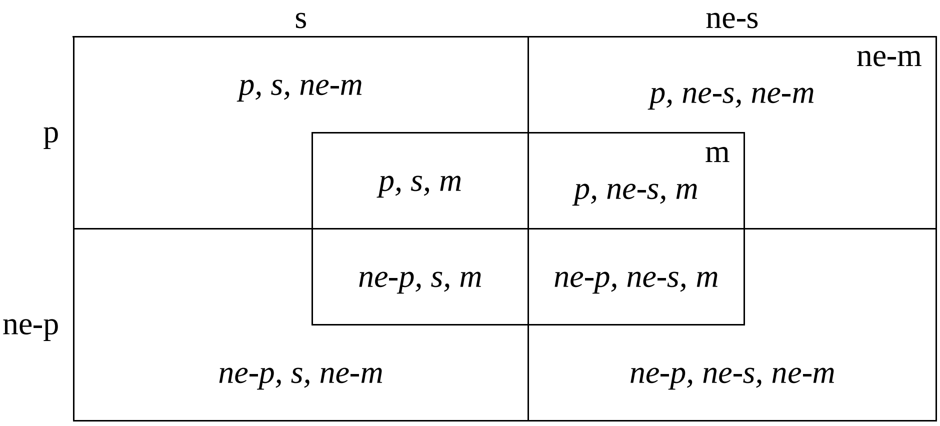
	s	*ne-s*
p		x
ne-p		

Žádné *ne-s* není *ne-p*.

	s	*ne-s*
p		
ne-p		0

Carrollova projekce nám i naznačuje různé další možnosti formulace téhož soudu. První tabulku bychom mohli též zapsat: Žádné *s* není *ne-p*. Žádné *ne-p* není *s*. Podobně bychom mohli přepsat i další soudy. Pro vyšetřování sylogismů potřebujeme opět rozšířit „tabulku“ o další rozměr:

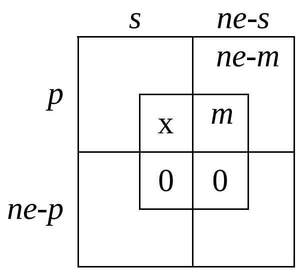
[27] Carroll 1972, s. 26n; Bendová 1998, s. 55
[28] 1832 – 1898, anglický spisovatel a matematik



Nyní konkrétně, např. sylogismus darii:

darii

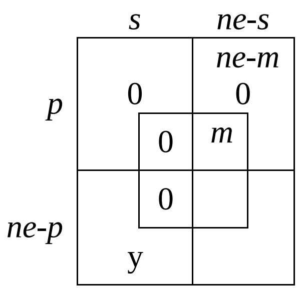
m * p s * m	→	*map* *sim*	→	Každé *m* je *p*. Některé *s* je *m*.
s * p		*sip*		Některé *s* je *p*.



Opět začínáme obecnou premisou a zakreslíme nuly do spodní poloviny malého čtverce. Podlé druhé premisy chceme zakreslit křížek do levé poloviny menšího čtverce. Vidíme, že levý spodní roh musí být podle první premisy prázdný, zbývá tedy jeho levá horní čtvrtina. A vidíme, že křížek skutečně vystihuje i závěrečný soud.

Následující případ je o něco složitější, předpokládáme v něm totiž neprázdnost jedné z množin, konkrétně *s*:

Každé *p* je *m*. Žádné *s* není *m*.	→
Některé *s* není *p*.	



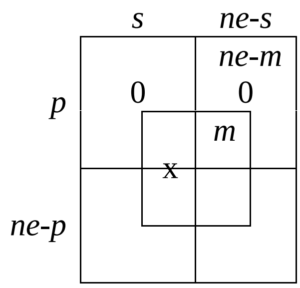
Skutečně vidíme, že po zakreslení premis nám zbývá prázdný levý spodní roh většího čtverce, o němž vypovídá i závěr. Ovšem z premis neplyne jistě, zda tato

„množina“ obsahuje nějaké objekty, musíme je tedy dodefinovat (značíme je *y*) a předpokládat neprázdnost *s*.

Nakonec ještě jeden příklad neplatného sylogismu a jeho odhalení pomocí Carrollovy metody:

Každé *p* je *m*. Některé *s* je *m*.
Některé *s* je *p*.

→



První premisu zakreslíme bez problémů, ale nevíme, kam umístit křížek z druhé premisy. Sylogismus je tedy neplatný.

2.3 Booleova algebra

2.3.1 George Boole

George Boole se narodil v roce 1815 v anglickém Lincolnu. Jeho matka pracovala jako služka, otec byl ševcem. Jeho obchod však příliš nevzkvétal, jednou z příčin mohla být i jeho časově náročná záliba v matematice a konstrukci optických přístrojů. George byl nejstarším ze čtyř dětí. Rodiče se mu snažili poskytnout nejlepší možné vzdělání, ale moc prostředků k tomu neměli.

George už v poměrně mladém věku projevil výrazný talent v oblasti cizích jazyků, z větší části samostudiem se naučil latinsky a řecky, později ještě německy a francouzsky. Kromě toho sdílel s otcem zájem o matematiku. Jeho studium bohužel nepokračovalo na akademické úrovni, ale kvůli krachu otcova obchodu od svých 16 let pracoval jako asistent učitele v Doncasteru. Jeho zájem o jazyky trval dál, kromě toho se začal systematicky věnovat matematice. Už o tři roky později si v rodném Lincolnu založil vlastní školu, čímž získal větší nezávislost a čas k vlastnímu studiu. V té době četl především práce S. F. Lacroixe[29], J. L. Lagrange[30] a P. S. Laplace[31], velký vliv na

[29] 1765 – 1843, francouzský matematik, jeho největším dílem je kniha *Diferenciální a integrální počet*

něj měla i korespondence s matematiky jeho generace, jakými byl např. D. Gregory[32], především pak A. De Morgan[33].

V roce 1844 napsal článek *On a general method of analysis*, kde popisoval aplikaci algebraických metod na řešení diferenciálních rovnic. Za tento článek dostal ocenění Královské společnosti, čímž začaly jeho úspěchy na poli matematiky. V roce 1848 se stal profesorem matematiky na Queen's College v irském Corcu a toto místo zastával až do své smrti v roce 1864. Jeho stěžejním dílem je *An Investigation of the Laws of Thought*.[34]

2.3.2 Východiska Booleovy algebry

Boole si všiml analogií mezi základními logickými spojkami a aritmetickými operacemi násobení a sčítání. Ke sčítání přiřadil spojku *nebo*, k násobení pak spojku *a*. Zavedl rovněž pojem *univerzální třída*, tj. taková třída, která zahrnuje všechny myslitelné objekty, a značil ji jedničkou, nulou naopak značil *třídu prázdnou*. Tyto znaky rovněž zastávají funkci neutrálního prvku pro výše zmíněné operace, 0 pro sčítání, 1 pro násobení. Jak již napovídají pojmy univerzální, resp. prázdné třídy, Boole chápal všechny predikáty jako třídy prvků. Aristotelův soud *„Každé S je P"* bychom tedy mohli přeformulovat na *„Pro všechny prvky třídy S platí, že jsou zároveň prvky třídy P,"* resp. *„Třída S je podtřídou třídy P."* Od tohoto pojetí se rovněž odvíjí jeho zápis negace. Objekty, které nejsou *P* (tedy jsou *ne-P*), lze zapsat jako doplněk třídy *P* do univerzální třídy, tedy (1-*P*).

2.3.3 Základní pravidla

Další analogie, která vychází z pojetí predikátů jako tříd, je mezi aritmetickými operacemi sčítáním a násobením a mezi operacemi množinovými, konkrétně sjednocením a průnikem. Na základě toho je možné soud *„Každé S je P"* přeformulovat na *„Průnik množin/tříd S a P je právě S."*

---

[30] 1736 – 1813, italsko-francouzský matematik, zabýval se především analýzou
[31] 1749 – 1827, francouzský matematik, fyzik, astronom a politik, rovněž se zabýval analýzou
[32] 1813 – 1864, anglický matematik, toho času editor *Cambridge Mathematical Journal*
[33] 1806 – 1871, anglický matematik, později opravil nedostatky Booleova logického systému
[34] O'Connor, Robertson: *George Boole.* [online]

V důsledku zmíněných analogií operací, pojmů univerzální a prázdné třídy a také definice negace jako doplňku množiny je třeba zavést následující pravidla:[35]

1 $S + (1 - S) = 1$
2 $S \cdot (1 - S) = 0$
3 $S \cdot 1 = S$
4 $S + 1 = 1$
5 $S \cdot 0 = 0$
6 $S + 0 = S$

Jak je možno na první pohled vidět, pravidla aritmetiky jsou porušena ve druhém a čtvrtém řádku. Booleova algebra nebyla v tomto smyslu ještě zcela dokonalá, ale k pochopení nám pomůže výše zmíněná analogie operací sčítání a násobení s operacemi sjednocení a průniku. Tak se osvětluje to, co se děje na prvním a druhém řádku: Sjednocením množiny s jejím doplňkem získáváme univerzální třídu. Naopak průnik množiny a jejího doplňku je nutně prázdný. Takto bychom mohli pokračovat pro všechna další pravidla, včetně řádku č. 4, kde sjednocujeme danou třídu se třídou univerzální. Výsledek je jistě správný, i když aritmetickým nárokům neodpovídá.

Než si zavedeme pravidla pro sčítání a násobení dvou a více množin, je nutné se zmínit o tzv. *Booleově identitě*. Ta ukazuje, jak bude vypadat součin jedné a téže množiny:[36]

$$S \cdot S = S^2 = S$$

Platnost této formule je opět zřejmá, pokud si místo násobení představíme množinovou operaci průnik. Podobný vztah, jehož platnost je vyplývá z operace sjednocení, platí i pro sčítání:

$$S + S = S$$

Souhrnně se tyto vztahy někdy nazývají *zákony opakování*. Nyní tedy lze uvést další pravidla, která blíže charakterizují Booleovy operace sčítání a násobení:[37]

---

[35] Bendová 1998, s. 50; K. Bendová používá o málo odlišné značení: univerzální třídu značí V a pro negaci P, resp. doplněk třídy P, používá znak p namísto rozšířenějšího a názornějšího (1-P).
[36] Boole 1958, s. 31
[37] Bendová 1998, s. 50; vyjma pravého sloupce: pojmenování vlastností

1a	$S+P=P+S$	komutativita sčítání
1b	$S \cdot P = P \cdot S$	komutativita násobení
2a	$(S+P)+M = S+(P+M)$	asociativita sčítání
2b	$(S \cdot M) \cdot P = S \cdot (M \cdot P)$	asociativita násobení
3a	$S \cdot (P+M) = S \cdot P + S \cdot M$ [38]	distributivita násobení
3b	$S+(P \cdot M) = (S+P) \cdot (S+M)$	distributivita sčítání

Pokud opět sledujeme analogii aritmetiky a Booleovy algebry, jediný problém nastává v pravidle 3b, které zavádí distributivitu sčítání vzhledem k násobení. Pokusme se dokázat proč.

Nejprve si roznásobíme pravou stranu rovnosti 3b.

$$(S+P) \cdot (S+M) = S^2 + (S \cdot P) + (S \cdot M) + (P \cdot M)$$

Nyní můžeme S^2 podle Booleovy identity nahradit S. Tím získáme na obou stranách členy $S+(P \cdot M)$, na pravé straně nám ale po roznásobení ještě přebývají členy $(S \cdot P)+(S \cdot M)$. Představme si tedy místo operací násobení a sčítání množinové operace průniku a sjednocení a výsledek je zřejmý. Zjednodušeně řečeno, pokud množinu *S* sjednotíme s jejím průnikem s jakoukoli jinou množinou, získáme opět množinu *S*. Formálně:

$$(S^2 = S) \text{ a současně } (S+(S \cdot P)=S) \text{ a současně } (S+(S \cdot M)=S)$$
$$S^2 + (S \cdot P) + (S \cdot M) + (P \cdot M) = S + (P \cdot M)$$

Nyní už tedy můžeme pomocí Booleovy algebry jasně zapsat čtyři základní soudy:

	Kladné	Záporné
Obecné	*sap* *Každé S je P.* $S \cdot P = S$	*sep* *Žádné S není P.* $S \cdot P = 0$
Částečné	*sip* *Některé S je P.* $S \cdot P \neq 0$	*sop* *Některé S není P.* $S \cdot (1-P) \neq 0$

[38] Vzhledem k oboustranné distributivitě sčítání a násobení se dle mého názoru ztrácí evidentní přednost násobení před sčítáním, proto bych tento výraz oproti originálu doplnil závorkami: $S \cdot (P+M) = (S \cdot P) + (S \cdot M)$.

I zde je možné vypozorovat vztahy logického čtverce, resp. různé možnosti zápisu téhož soudu. Tak je tedy zřejmě rovnocenné, pokud zapíšeme $S \cdot P = S$ či $S \cdot (1 - P) = 0$. Druhá sekvence je pak pravým opakem soudu *sop*, vidíme zde příklad kontradikce. Druhý kontradiktický vztah mezi *sep* a *sip* vidíme přímo v tabulce bez nutnosti dalšího přepisu. o něco složitější je znázornit vztahy subsumpce, především mezi soudy *sep* a *sop*. Vztah $S \cdot P = 0$ můžeme přepsat jako $S \cdot (1 - P) \neq 0$ či jako $(1 - S) \cdot P \neq 0$, oboje za předpokladu neprázdnosti *S* a *P*. Soud *sop* je tedy v soudu *sep* obsažený, ale je proti němu oslaben. Subsumpce mezi *sap* a *sip* je zřejmá.

2.3.4 Booleovo řešení sylogismů

Booleova algebra je jistě schopna řešit mnohem složitější aplikace, avšak v návaznosti na předchozí kapitolu a kvůli snaze o názornost se nyní omezme opět na oblast sylogistiky. Jak se zapisují jednotlivé soudy je zřejmé z výše uvedené tabulky. Pokud si tedy zapíšeme obě premisy i závěr pomocí formulí Booleovy algebry, stačí už vhodnou aplikací pravidel 1 – 6 a 1a – 3b na premisy dokázat závěr. Uveďme dva příklady:

ferio

mep		Žádné *m* není *p*.		$M \cdot P = 0$
sim	→	Některé *s* je *m*.	→	$S \cdot M \neq 0$
sop		Některé *s* není *p*.		$S \cdot (1 - P) \neq 0$

Chceme tedy dokázat, že $S \cdot (1 - P) \neq 0$ z předpokladů $M \cdot P = 0$ a $S \cdot M \neq 0$.

úprava výrazu	použité pravidlo
$S \cdot (1 - P) = S \cdot (1 - P) \cdot 1$	3
$= S \cdot (1 - P) \cdot (M + (1 - M))$	1
$= (S \cdot (1 - P) \cdot M) + (S \cdot (1 - P) \cdot (1 - M))$	3a
$= (S \cdot M \cdot (1 - P)) + (S \cdot (1 - P) \cdot (1 - M))$	1b
$= (S \cdot M) + (S \cdot M \cdot (1 - P)) \neq 0$	1a, (*)

(*) Zde jsme použili rovnost $(S \cdot (1 - P) \cdot (1 - M)) = S \cdot M$ vycházející z toho, že formuli $M \cdot P = 0$ je možné přepsat jako $M \cdot (1 - P) = M$. Druhý předpoklad tvrdí, že

$S \cdot M \neq 0$, což samo o sobě stačí, aby byl závěr dokázán, bez ohledu na součin/průnik tříd $S, M, (1-P)$.[39]

darii

m * p s * m	→	Každé *m* je *p*. Některé *s* je *m*.	→	$M \cdot P = M$ $S \cdot M \neq 0$
s * p		Některé *s* je *p*.		$S \cdot P \neq 0$

úprava výrazu	použité pravidlo
$S \cdot P = S \cdot P \cdot 1$	3
$= S \cdot P \cdot (M + (1-M))$	1
$= (S \cdot P \cdot M) + (S \cdot P \cdot (1-M))$	3a
$= (S \cdot M \cdot P) + (S \cdot (1-M) \cdot P)$	2b
$= (S \cdot M) + (S \cdot (1-M) \cdot P) \neq 0$	(**)

(**) V této úpravě jsme nejprve využili předpoklad první, tedy $M \cdot P = M$, následně hned druhý, který neprázdností $S \cdot M$ zajišťuje neprázdnost celého výsledku.

2.3.5 Využití Booleovy algebry

Na Booleovu koncepci aritmetizace logiky navázali další. W. S. Jevons[40] přehodnotil způsob zapisování negace. Namísto Booleovy formulace $(1-X)$ zavedl zápis $\bar{x}$, význam negace jako doplňku dané třídy do třídy univerzální zůstal zachován. Otevřel tím cestu pro přijetí dvou De Morganových zákonů:

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \qquad \overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Těmito a dalšími úpravami byly odbourány aritmetické nedostatky a v jistém smyslu se nechá říci, že se z Booleovy algebry stala booleovská. Ta má i dnes velké využití, například v elektrotechnice se hojně využívají tzv. logické členy. Jsou to elektronické prvky standardně s několika vstupy a jedním výstupem, které pracují jen s dvěma hodnotami napětí, např. 5V a 0V, které reprezentují logickou jedničku a nulu. Z logických členů se staví logické obvody, které jsou pak velmi často využívány v mnoha odvětvích výpočetní techniky, kybernetiky či energetiky.

---

[39] Bendová 1998, s. 52
[40] 1835 – 1882, anglický ekonom a logik

2.4 Moderní logika

2.4.1 Gottlob Frege

Gottlob Frege se narodil v roce 1848 v německém Wismaru. Jeho otec Karl Alexander Frege zde vedl vyšší dívčí školu, sepsal také moderní učebnici německé gramatiky. Po jeho smrti v roce 1866 převzala řízení školy jeho žena, Auguste Frege. Gottlob po maturitě z řečtiny, francouzštiny, latiny a matematiky odešel na univerzitu v Jeně, která se mu později stala celoživotním působištěm. Během studia v Jeně navštěvoval především kurzy fyziky, chemie a matematiky se zaměřením na geometrii, kromě toho i některé přednášky z filosofie.

Po čtyřech semestrech přesouvá své studium na univerzitu v Götingen, jejíž matematické oddělení proslulo takovými vědci, jakými byli C. F. Gauss[41], G. L. Dirichlet[42] či B. Rieman[43], a promuje zde v roce 1873. Už rok nato se habilituje a vrací se zpět do Jeny, kam byl na doporučení svého přítele Ernsta Abbeho[44] přijat jako soukromý docent. To však znamenalo, že většinu platu dostával od studentů, kteří se účastnili jeho přednášek. Frege se nikdy nestal řádným profesorem, V. Kolman vypočítává, že za 68 semestrů, které dohromady strávil v Jeně, si vydělal asi tolik, co někteří z jeho kolegů za semestry dva.[45]

Jeho prvním významným dílem byl *Begriffsschrift*. Vyšel roku 1879 a přinesl mu první zklamání v jeho vědecké kariéře. Frege zde zavádí na první pohled těžkopádnou symboliku logického usuzování a do povědomí širší veřejnosti se publikace nedostala. E. Abbe o ní napsal: *„Za šťastný autorský debut (proto) tuto publikační prvotinu svého kolegy nemohu považovat; důkladně číst ji bude málokdo a ještě méně bude těch, kdo ji pochopí a ocení.“* [46] Abbe zde naráží mimo jiné na to, že rozvíjejícím se odvětvím byla tehdy spíše matematická analýza a pro Fregovu akademickou dráhu by bylo v tomto smyslu výhodnější, kdyby se držel tohoto hlavního proudu. Frege v následujících semestrech v Jeně otvíral i kurz *Begriffsschrift*, jeho návštěvnost však byla minimální.

---

[41] 1777 – 1855, německý matematik a fyzik, zabýval se především geometrií a analýzou
[42] 1805 – 1959, německý matematik, zabýval se analýzou, teorií čísel a statistikou
[43] 1826 – 1866, německý matematik, zasloužil se o rozvoj analýzy a diferenciální geometrie
[44] 1840 – 1905, německý fyzik a astronom, zasloužil se o velký vývoj optických přístrojů
[45] Kolman 2002, s. 35 – 37, O'Connor, Robertson: *Friedrich Ludwig Gottlob Frege.* [online]
[46] citováno podle Kolman 2002, s. 38

Snad veden snahou vyhnout se nepochopení a nepřijetí, které následovalo vydání *Begriffsschrift*, píše Frege své druhé dílo, *Die Grundlagen der Arithmetik*, stylem spíše populárně naučným a bez použití symbolismu. Kniha byla publikována v roce 1884, avšak ani toto dílo – až na několik převážně záporných recenzí – ohlas kolegů matematiků nevzbudilo. Všechen tento neúspěch pomalu ale jistě formoval Fregovu povahu. Ač už dříve introvertní a ve větší společnosti často nesvůj, stával se postupem času břitkým i v kontaktu s těmi, kdo se k jeho pracím vyjadřovali.

První díl Fregova hlavního díla, *Grundgesetze der Arithmetik*, vyšel roku 1893. Frege v něm podrobně rozpracovává svůj systém aritmetiky, který načrtl v *Grundlagen*. Do 90. let se také datuje Fregova korespondence s G. Peanem[47] a R. Dedekindem[48], jejichž uznání je částečně i podkladem k jeho jmenování „čestným profesorem“. Tato funkce však byla titulární, bez zakotvení na katedře či přístupu do senátu fakulty. Zajistila mu alespoň doživotní penzi.

Těsně před vydáním druhého dílu *Grundgesetze* však přišel zlom. B. Russell[49], který pracoval na svém díle *The Principles of Mathematics*, objevil v prvním díle *Grundgesetze* spor. Šlo o problém autoreference ve Fregově definici množiny množin. Pro Frega to byla velká rána, uvažoval, zda vůbec druhý díl publikovat, nakonec k němu pouze připojil stručný doslov: „*Vědeckému spisovateli se sotva může přihodit něco nepříjemnějšího, než že se mu po dokončení práce zhroutí jeden ze základů stavby. Do této situace mne dostal dopis pana Bertranda Russella ve chvíli, kdy se tisk tohoto svazku chýlil ke konci.*“ [50]

Zneuznaný Frege se stále více uzavíral do sebe a svůj kontakt s vědeckou veřejností omezil jen na občasnou korespondenci, na své plány týkající se logického založení matematiky rezignuje. Teprve po odchodu do penze v roce 1918 píše ještě tři významné články, *Der Gedanke* (Myšlenka), *Die Verneinung* (Negace) a *Gedankengefüge* (Spojení myšlenek). Gottlob Frege umírá v roce 1925. Jeho odkaz zůstal v jeho rodném Německu dlouho nepovšimnut, ačkoli v ostatní Evropě jeho dílo již našlo částečnou oporu v osobnostech B. Russella a G. Peana, kteří na jeho převratné myšlenky upozornili ve svých dílech.

---

[47] 1858 – 1932, italský matematik, logik a filosof, jeden ze zakladatelů moderní logiky
[48] 1831 – 1916, německý matematik, proslul hlavně v oborech algebry a teorii čísel
[49] 1872 – 1970, anglický matematik, filosof, logik a spisovatel, mj. nositel Nobelovy ceny za literaturu
[50] Frege 1903, s. 253; citováno podle Kolman 2002, s. 43

2.4.2 Východiska Fregovy logiky

Frege se ve svém spise *Begriffsschrift* snaží vytvořit takové písmo, ve kterém bychom byli schopni zcela objektivně, neovlivňováni ničím vnějším, vést linii matematického důkazu. J. Peregrin se domnívá, že právě tento poměrně nevysoký cíl, resp. úzké pole zájmu, byly tím správným stimulem pro to, aby konečně vzniklo relevantní písmo, které zpřesňuje přirozený jazyk. V protikladu k cílené a úspěšné snaze Fregově Peregrin uvádí Leibnizův utopický univerzalistický koncept *calculus philosophicus*, jakousi „abecedu lidských myšlenek“, která by nám pomocí analýzy slov a písmen umožnila posoudit všechno ostatní.[51]

Fregova snaha souvisí bezprostředně s tím, jak vůbec chápal logiku: *„Charakteristický rys mého pojetí logiky nejprve ozřejmím tím, že na vrchol kladu obsah slova ‚pravda‘, a pak tím, že za ním nechávám ihned následovat myšlenku jako to, u čeho pravdivost vůbec přichází v úvahu. Nevycházím tedy od pojmů a neskládám z nich myšlenky nebo soudy, nýbrž získávám části myšlenky jejím rozpadnutím. Tímto se odlišuje moje pojmové písmo od podobných výtvorů Leibnizových a jeho následovníků, přes moje možná nešťastně zvolené pojmenování.“* [52] Konkrétně na adresu Booleovu uvádí: *„Boole předpokládal logicky dokonalé pojmy jako předem dané, čímž si ušetřil tu nejobtížnější část logické práce a mohl tak z daných předpokladů vyvozovat své důsledky mechanickými výpočty.“* [53]

Začněme tedy termínem *pravda*. Pro Frega představuje pravda normativní primitiv, což dokládá regresním argumentem: *„Kdybychom chtěli říci: ‚pravdivá je představa, jestliže se shoduje se skutečností‘, nic bychom tím nezískali, neboť, abychom to mohli použít, museli bychom v každém daném případě rozhodnout, zda se nějaká představa shoduje se skutečností; jinými slovy: zda je pravda, že se ona představa shoduje se skutečností. Definované by tedy muselo předcházet sebe sama.“* [54]

Druhým termínem, který je pro Frega stěžejní, je *myšlenka*. *„Aniž bych tím chtěl podat definici, nazývám myšlenkou něco, u čeho může pravdivost vůbec přicházet*

---

[51] Peregrin: *Co je to (Fregovská) logika?* [online]
[52] Frege 1983, s. 273; citováno podle Kolman 2002, s. 93. V tomto oddíle se nevyhýbám delším citacím. Zdá se mi přijatelnější a vůči autorovi uctivější citovat v klíčových místech originál než ho nemotorně parafrázovat.
[53] Frege 1983, s. 39; citováno podle Kolman 2002, s. 93
[54] Frege 1983, s. 140; citováno podle Kolman 2002, s. 59

v úvahu. Nepravdivé tedy počítám k myšlence zrovna tak jako pravdivé.“ [55] Dále tvrdí, že jedna a táž myšlenka je buď pravdivá nebo nepravdivá, *tertium non datur*, a nemůže svou pravdivostní hodnotu sama o sobě měnit. Pro případy, kdy se nám zdá, že daná věta v jednu chvíli platí a v jinou chvíli nikoli, uvádí Frege pojem *nevlastní věty*. To je taková, která obsahuje indexické výrazy; je-li např. vyslovena v přítomném čase, je doba jejího vzniku determinujícím údajem pro její pravdivostní hodnotu. Souhrnně je tedy možno říci, že myšlenkou nazývá Frege souditelný obsah vyjádřený situačně nezávislou větou.

2.4.3 Symbolika

Takovou myšlenku pak značí vodorovným *pruhem obsahu* a vyjadřuje tím jen *„okolnost, že…“*, aniž by byla tato okolnost tvrzena.[56]

$$\text{———}\ \boldsymbol{A}$$

Z toho vyplývá, že kromě pruhu obsahu je nutné použít další znak pro tvrdící sílu, Frege zvolil svislý *pruh soudu*. Symbol

$$\vdash\!\text{——}\ \boldsymbol{A}$$

tedy představuje jednoznačné přiřazení pravdivostní hodnoty myšlence *A*. Celá tato Fregova konvence se zdála být některým jeho současníkům poměrně zbytná, symbol tvrzení přirovnávali co do důležitosti např. k číslu věty. Frege se však hájí: *„Kdybychom při prezentaci úsudku v mém pojmovém písmu vynechali u premis pruhy soudu, chybělo by něco podstatného. A je dobře, že je toto podstatné viditelně ztělesněno v nějakém symbolu, a ne jen dodatečně pochopeno na základě nevyslovené konvence; neboť konvence, podle níž by mělo být něco dodatečně pochopeno, upadne lehce v zapomnění, zvláště tehdy, je-li nevyslovena.“* [57] To jen potvrzuje jeho záměr, nenechat v oblasti usuzování žádný prostor subjektivitě či jakémukoli předpochopení.

Pro lepší uchopení tvrdícího symbolu poslouží konstatování triviality, totiž že *„tvrzení věty jakožto její vyslovení s pravdivostním nárokem je ekvivalentní tvrzení, že je pravdivá.“* [58] Tedy:

[55] Frege 1918/1919, s. 61; citováno podle Kolman 2002, s. 64
[56] Frege 1879, § 2.
[57] Frege 1976, s. 127; citováno podle Kolman 2002, s. 71
[58] Kolman 2002, s. 72

$$(\vdash\!\!\!-\!\!\!- (\boldsymbol{A} \text{ je pravdivá})) = \vdash\!\!\!-\!\!\!- \boldsymbol{A}$$

V důsledku regresního argumentu normativního primitivu pravdy platí také ekvivalence mezi tvrzením pravdivosti daného soudu a tímto soudem samotným. Formálně:

$$(\text{„}\vdash\!\!\!-\!\!\!- \boldsymbol{A}\text{“ je pravdivý soud}) = \vdash\!\!\!-\!\!\!- \boldsymbol{A}$$

Zajímavým způsobem se Frege dostává k negaci. Při výkladu termínu tvrdící síly přičítá tuto vlastnost i tzv. větným (zjišťovacím) otázkám, tedy takovým, na které je možno odpovědět *ano* či *ne*. Odpověď *ano* říká totéž, co tvrdící věta z otázky vytvořená. A skrze odpověď *ne* se dostáváme k popření. *„Proti každé myšlence stojí myšlenka jí protikladná, takže zavržení jedné znamená uznání druhé. Souzení je volba mezi dvěma protikladnými myšlenkami. Uznání jedné z nich a zavržení druhé je jeden a tentýž čin. Pro zavržení tedy nepotřebujeme žádný speciální symbol, pro popření bez tvrdící síly však ano.“* [59] Fregův symbol pro protikladnou myšlenku k

$$-\!\!\!-\!\!\!- \boldsymbol{A}$$

získáme přidáním svislého *pruhu popření*, čímž má být vyjádřena okolnost, že obsah neplatí:

$$-\!\!\!\top\!\!\!- \boldsymbol{A}$$

Zřetelněji to vyjádříme rovností:

$$-\!\!\!-\!\!\!- (\text{není pravda, že } \boldsymbol{A}) = -\!\!\!\top\!\!\!- \boldsymbol{A}$$

Moderní variantou Fregova symbolu popření je negátor ($\neg A$).

2.4.4 Výroková logika

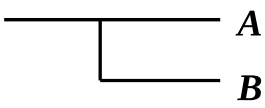
Po uvedení všech Fregových symbolů pro jeden soud se nyní dostáváme k dvojici soudů. V Begriffsschrift čteme: *„Znamenají-li A a B souditelné obsahy, máme zde následující čtyři možnosti:*

(1) *A* je potvrzen a *B* je potvrzen.
(2) *A* je potvrzen a *B* je popřen.
(3) *A* je popřen a *B* je potvrzen.
(4) *A* je popřen a *B* je popřen.“ [60]

---

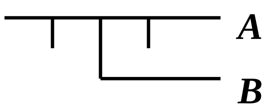
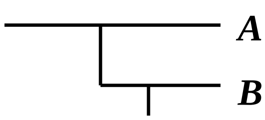
[59] Frege 1983, s. 214; citováno podle Kolman 2002, s. 77
[60] Frege 1879, § 5; vlastní překlad

Zde Frege zavádí svůj symbol pro materiální kondicionál. Dva vodorovné pruhy obsahu spojuje svislým, tzv. *podmínkovým pruhem*.



Co přesně tedy tento symbol znamená? K pochopení nám pomůže následující úryvek: *„Jestliže říká jedno ze dvou značení totéž, co znamená i druhé, zatímco toto druhé neobsahuje celý smysl prvního, nazývám význam druhého jednodušší nežli prvního, neboť má méně obsahu. Uplatníme-li toto měřítko, vidíme, že nejjednodušší možný vztah dvou souditelných obsahů lze získat popřením jednoho ze čtyř případů (viz přehled výše), neboť popření dvou z nich říká více než popření jediného a popření tří ještě více; shoduje se s potvrzením čtvrtého. Z booleovských symbolů neodpovídá žádný tomuto požadavku nejvyšší jednoduchosti významu. (…) Booleův logický součin* $A \cdot B$ *znamená jakožto potvrzení prvního případu popření tří zbylých, a je tedy velmi obsažný. (…) Chceme-li se vyvarovat právě uvedeného nedostatku, musíme zavést vlastní vyjádření pro popření jednoho ze čtyř výše vyčíslených případů. (…) Vybral jsem si třetí případ ‚ne A a B‘ jako ten, jehož popření získá vlastní symbol.*“ [61]

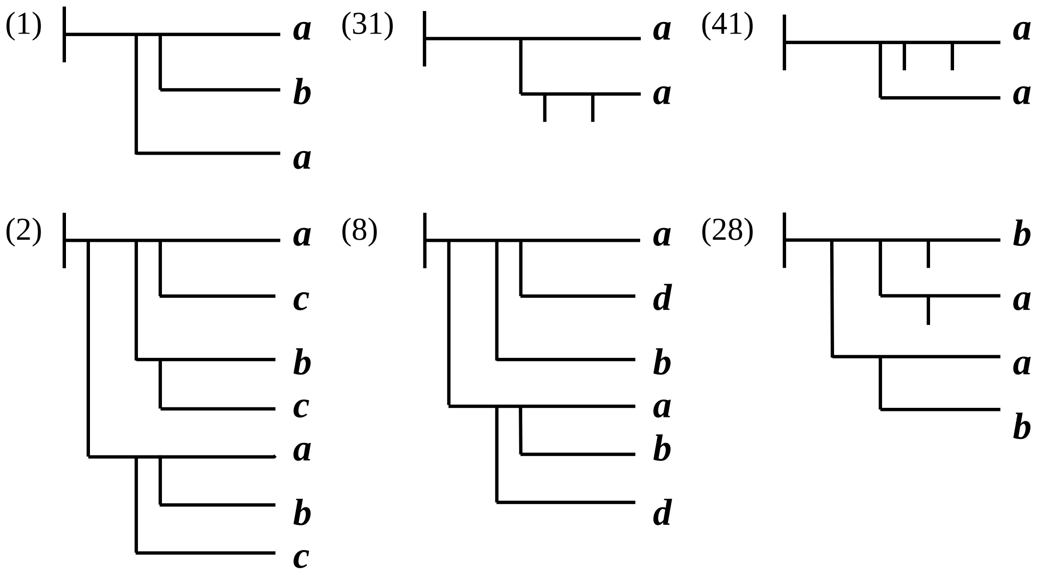
Nyní je už zřejmé, co Fregův materiální kondicionál znamená. V moderní notaci bychom ho zapsali jako $B \rightarrow A$, přičemž symbol „$\rightarrow$“ nazýváme subjunktorem a celý vztah je co do pravdivostních hodnot obdobou dnešní implikace: je nepravdivý pouze pro *ne A* a *B*. Frege dokládá, že pomocí tohoto symbolu a svého symbolu pro popření je schopen zapsat Booleův logický součet i součin. Konkrétně:

	booleovsky $A \cdot B$, moderní notací $A \wedge B$
	booleovsky $A + B$, moderní notací $A \vee B$

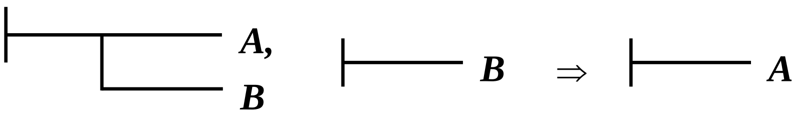
Frege dále ukazuje, že pomocí negátoru a subjunktoru je schopen vytvořit nejen všechny formule Booleovy, ale jakékoli schéma s libovolnými pravdivostními vstupy

[61] Frege 1983, s. 55n; citováno podle Kolman 2002, s. 79

a výstupy, tady že jeho výrokový počet je s těmito dvěma symboly kompletní. Zavádí pojem *logicky platného úsudku*, to je takový, který je – nezávisle na pravdivosti vstupních soudů – vždy pravdivý. Takové schéma také nazýváme *tautologií*. Jeho uzavřený systém výrokové logiky obsahuje šest axiomů ve formě tautologií[62]



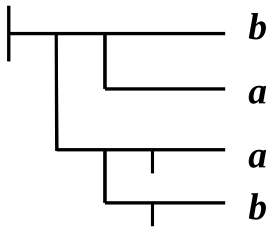
a pouze jedno úsudkové pravidlo, *modus ponens*:



V. Kolman podotýká, že jde o vůbec první kompletní axiomatizaci tautologických schémat výrokové logiky. Důkaz korektnosti svého kalkulu Frege explicitně neuvedl, stačí ovšem ukázat, že uvedené axiomy jsou skutečně tautologickými schématy a dále že ta schémata, která vzniknou aplikací pravidla *modus ponens* na axiomy, si rovněž zachovají charakter tautologie. Na Fregově konceptu výrokové logiky dále pracoval J. Łukasiewicz[63], který objevil závislost mezi Fregovými axiomy, konkrétně ukázal, že axiom (8) je odvoditelné z (1) a (2), a že lze (28), (31) a (41) nahradit jediným axiomem novým, a to

[62] Frege 1879, §14 – 19; číslováno podle originálu
[63] 1878 – 1956, polský matematik a filosof, zabýval se analytickou filosofií a matematickou logikou

(Ł)



Tím tedy z (1), (2), a (Ł) vzniká nezávislý axiomatický systém, který – doplněný o *modus ponens* – představuje kompletní kalkul, jehož úplnost Łukasiewicz dokázal. A protože je Łukasiewiczův axiom ve Fregově kalkulu odvoditelný, přenáší se důkaz jeho úplnosti i na systém Fregův.[64]

2.4.5 Kvantifikace

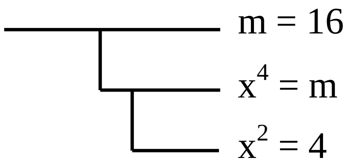
Dalším velkým Fregovým přínosem bylo zavedení kvantifikace. Úvodem k této problematice je třeba uvést jasné rozdělení mezi *předmětem* a *pojmem*. Toto rozdělení, resp. jeho explicitní neuvedení, způsobilo nedostatky Aristotelova systému, jak byly zmíněny v úvodní exkurzní kapitole. Vyjdeme-li nyní z transformace fregovské věty (myšlenky) do subjekt-predikátové formy Aristotelovy, můžeme jasně odlišit tři základní možnosti pro soud „Každé *S* je *P*."

1. Spadání: V tomto případě *S* označuje předmět, zatímco *P* představuje pojem. Jen o málo odlišnou formulací můžeme *S* nazvat jménem *vlastním* a *P* jménem *funkčním*. *„Kopula je zde výrazem funkcionální aplikace funkce P na předmět S."* [65]
2. Identita: Zde kopula *je* slouží k vyjádření rovnosti. Bývá uváděna např. věta: *„Jitřenka je Večernice,"* v níž se jedná o rovnost (identitu) dvou předmětů.
3. Podřazení: V případě podřazení se jedná o dva pojmy, z nichž jeden je nadřazen druhému. Zmíněnou subjekt predikátovou formu bychom tak mohli nahradit např. větou: *„Spadá-li něco pod pojem S, spadá to i pod pojem P."* [66]

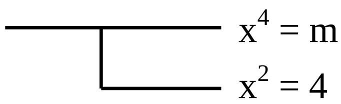
Následuje úryvek, ve kterém Frege zdůvodňuje a zavádí svůj symbol pro kvantifikaci. *„Uvažme nyní případ, kdy je obsah obecného kladného soudu částí soudu*

[64] Kolman 2002, s. 86n
[65] Kolman 2002, s. 107
[66] Kolman 2002, s. 107

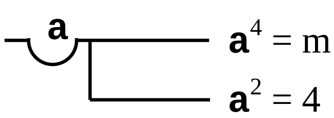
složeného, třeba jako podmínka soudu hypotetického; např. jestliže je každá druhá odmocnina ze 4 *čtvrtou odmocninou z* m, *musí být* m *rovno* 16. *Výraz*

(δ) 

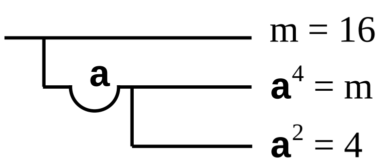
této větě neodpovídá, a je dokonce nepravdivý, pročež je také pruh soudu na levém konci nejvyššího vodorovného pruhu vynechán, neboť za m *a* x *mohou být dosazena čísla, která obsah učiní nepravdivým. Takto není* (δ) *pravdivý pro všechny hodnoty pro* x *a* m, *což by bylo předsazením pruhu soudu tvrzeno. Věta ‚jestliže je každá druhá odmocnina ze* 4 *čtvrtou odmocninou z* m, *musí být* m *rovno* 16*‘ říká však něco jiného. Její obsah by mohl být také vyjádřen takto: ‚jestliže, ať je x cokoli, platí věta, že musí být* $x^4 = m$ *tehdy, když* je $x^2 = 4$*: pak je* $m = 16$.*‘* | *Vidíme tedy: obecnost vyjádřena pomocí* x *se nesmí týkat celku* (δ), *nýbrž je omezena na*



Toto označuji tak, že pruh obsahu opatřuji jamkou, do níž vkládám německé písmeno, kterým je také nahrazen výskyt x*:*



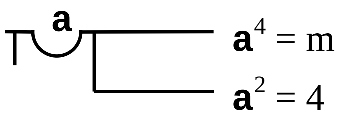
Takto omezuji obor obecnosti vyjádřené německým písmenem na obsah, do jehož pruhu byla umístěna jamka (§ 11 Begriffsschrift). Náš (pravdivý) soud tak získává následující výraz: [67]

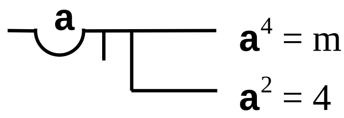


Tento Fregův symbol a jeho moderní přepis „$\forall$“ nazýváme *obecným kvantifikátorem* a německé písmeno zde představuje tzv. *vázanou proměnnou*. Frege si dobře uvědomoval, že tato jeho notace předstihla vše, co bylo před ní, včetně propracovaného kalkulu Booleova.

[67] Frege 1983, s. 20n, citováno podle Kolman 2002, s. 111n

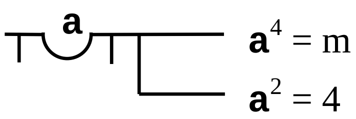
Pokud zkombinujeme obecný kvantifikátor s pruhem popření, můžeme velmi dobře zapsat záporné soudy a odlišit mezi obecným a částečným:





První sentenci můžeme přečíst jako *„ne pro všechna* **a** *platí…*“, a představuje tedy částečný záporný soud, druhé schéma je možno interpretovat *„pro každé* **a** *není pravda, že…*“ či pomocí typicky českého zdvojeného záporu *„pro žádné* **a** *neplatí…*“ a získáváme tak soud obecný záporný.

Ze čtyř soudů logického čtverce nám nyní zbývá popsat už jen částečný kladný soud. Zatímco moderní logika pro něj má druhý, tzv. *existenční kvantifikátor* „∃“, Frege tuto situaci důmyslně popisuje pomocí obecného kvantifikátoru a dvou negací, totiž že *„není pravda, že pro žádné* **a** *neplatí…*“ Symbolicky:



Pro úplnost je třeba zmínit, že o několik let později nezávisle na Fregem popsal teorii kvantifikace také americký matematik Ch. S. Peirce[68].

2.4.6 Shrnutí

Fregovo logické zkoumání jde samozřejmě mnohem dál, ale není úkolem této práce celé jeho dílo zmapovat. Mým záměrem bylo jen ukázat nejdůležitější principy a nové myšlenky, které tento velký vědec matematické logice přinesl. Ač za svého života zneuznán, dnes bývá nazýván Novým Aristotelem a zakladatelem moderní logiky. Přestože je jeho dílo poznamenáno paradoxem autoreference, ke kterému ho dohnala snaha o maximální univerzálnost, čerpáme z jeho myšlenek dodnes. Ostatně zmíněný paradox obsahovaly snad všechny publikace tohoto zaměření až do jeho objevení

[68] 1839 – 1914, americký matematik, logik a filosof, mj. zakladatel pragmatismu

B. Russellem. Tato chyba byla později opravena a jeho dílo přepsáno do lineární notace Peanovy, která se časem prosadila v celé oblasti matematiky a nahradila i pojmové písmo Fregovo. Nakonec jen krátký citát z jeho pozůstalosti, část dopisu adoptivnímu synovi Alfrédovi:

„Milý Alfréde!
Neopovrhuj mnou napsanými rukopisy. I když všechno to zlato není, přece je zlato v nich. Věřím, že mnohé z toho bude jednou ceněno mnohem více než dnes. Dohlédni na to, aby se nic netratilo.
V lásce tvůj otec.
Je to velký kus mne samotného, který ti v tom odkazuji.“ [69]

[69] Frege 1983, XXXIV; citováno podle Kolman 2002, s. 52

3 Využití historie logiky ve vyučování matematiky

3.1 Aniž si uvědomujeme

Kdykoli vyučujeme matematiku a konec konců i ostatní předměty, učíme vlastně, aniž bychom si to uvědomovali, i základy logiky. *„Již v předškolním věku se dítě setkává se skutečností, že něco je a něco není pravda. Setkává se tedy s pravdivými a nepravdivými výroky. Také kvantifikátory* každý, všechny, alespoň jeden, alespoň jeden ne *a podobně se velice často v běžné řeči dítěte vyskytují. Stejně tak se v běžné komunikaci s dítětem vyskytuje konjunkce, alternativa, implikace či ekvivalence. (Budeš-li zlobit, pak se nepůjdeš koupat. Do divadla půjdeme jen tehdy, budeš-li hodný. atd.)“* [70]

Při řešení úloh typu $\square < 7$ se žáci setkávají s *výrokovou formou*, kterou musí dle svých znalostí doplnit tak, aby byla pravdivá. Kromě toho je třeba upřesnit, zda mají najít právě jedno, alespoň dvě či dokonce všechna řešení a podobně.

Pokud zůstaneme u tohoto typu úloh, pak nás příklad $5 < \square < 9$ seznamuje s konjunkcí, hledáme totiž číslo, které je větší než pět a zároveň menší než devět. Pokud bychom chtěli v úlohách pro základní školu najít příklad disjunkce, dobře nám poslouží slovní úlohy typu *„Všichni žáci 4.A hrají fotbal nebo volejbal. Dva žáci provozují oba sporty…“* Implikaci a ekvivalenci můžeme objevit ve větách o dělitelnosti. Ekvivalenci představuje věta *„Číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.“* Pro vyjádření věty ve tvaru implikace můžeme např. omezit pravidlo tak, aby opačná implikace neplatila: *„Jestliže má číslo jako poslední cifru nulu, pak je dělitelné pěti.“*

Podobně implicitně se v matematice, ale přinejmenším na stejné úrovni i v dalších předmětech, uplatňuje teorie množin, která je z určitého pohledu rovněž součástí logiky. Žáci se učí srovnávat pojmy, zařazovat je do daných tříd, hledat nadřazená a podřazená slova, tvořit synonyma a podobně.

---

[70] Folk, Ausbergerová 1996, s. 2

Tolik jen několik příkladů, abychom si uvědomili, že logika je implicitně obsažena v každé vědě a tedy i v každém školním předmětu. Pro matematiku na základní škole je charakteristické, že žáci umí pojmy z oblasti logiky intuitivně používat, protože odvozují jejich platnost z přirozeného jazyka, zatímco odborně je charakterizovat se naučí až později.

3.2 Motivační příklady

V této části práce se chci zaměřit na praktické příklady, které dokládají stálou aktuálnost popisovaných období či osobností z historie logiky. V první části to bude problematika sofismat jako nekorektních úsudků, v druhé části příklady, které lze řešit pomocí booleovských funkcí a pravdivostních tabulek, třetí část se pak věnuje příkladům, v nichž nějakým způsobem figuruje fenomén autoreference, který poznamenal i dílo Fregovo.

3.2.1 Sofismata

Sofisma je nesprávný logický úsudek. Spočívá v tom, že tazatel řetězcem zdánlivě správných argumentů donutí tázaného souhlasit s něčím, co evidentně není pravda, případně v jeho odpovědích ukazuje spor. Používali je řečtí učitelé moudrosti, tzv. sofisté, aby tak demonstrovali svou sílu logické argumentace a získávali si tak žáky, kteří jim pak platili za vyučování. Pro ty bylo umění argumentace lákavé zejména kvůli vystupování při veřejných soudech v demokratických městských státech.

Aristoteles sofistickou praxi kritizuje a důkladně rozebírá ve svém spise *O sofistických důkazech*. Na příkladech jednotlivých sofismat ukazuje, co přesně je v rozporu se správnou argumentací a jakým způsobem tedy na otázky sofistů odpovídat. Aristoteles vypočítává celkem šest způsobů, na jejichž základě sofisté svou argumentaci staví. Jsou to stejnojmennost, dvojznačnost, spojení, rozdělení, přízvuk ve výslovnosti a tvar slovního vyjádření.[71]

K prvnímu typu chybné argumentace, tedy stejnojmennosti, je možno uvést příklad *„Zlo je dobro; neboť dobro je to, co být musí, zlo však musí být také.“* Stejnojmenný je zde výraz *musí být*, který se v řečtině užívá ve dvou významech, jednak značí přírodní

[71] Aristoteles 1978, s. 26n

nutnost (zde ve spojení s pojmem zla), jednak znamená mravní povinnost (v tomto významu se zde pojí s dobrem).

Problém dvojznačnosti ilustruje sofisma *„Říká-li někdo, že je to a to, říká také, že je tím a tím? Jestliže ano, pak někdo, když řekne, že kámen je, říká o sobě, že je kamenem.“* Toto sofisma je založeno na záměně pádů, v řečtině mezi nominativem a akuzativem, v češtině dochází k analogické záměně mezi nominativem a instrumentálem. Příkladem dvojznačnosti je i věta *„Nepřátele nechej mne napadnout.“* Zde se dvojznačnost projevuje neurčitostí a snadnou záměnností subjektu a objektu děje; není zřejmé, zda mají nepřátelé napadnout mne nebo já je.

Jako další druh sofistických argumentací uvádí Aristoteles spojení. Tento problém reprezentují věty jako *„Nepíšící může psát.“* či *„Sedící může jít.“* Zdánlivě se zde spojují neslučitelné děje, ve skutečnosti však sloveso *moci* způsobuje, že druhý výraz (psát, jít) je v obou případech popisem dovednosti, zatímco výraz první (nepíšící, sedící) popisuje aktuální činnost.

Mezi argumenty stavící na rozdělení patří např. *„Pět jsou dvě a tři, tedy pět je sudé a liché.“* Takových vět by bylo jistě možné sestavit mnoho, Aristoteles tedy upozorňuje na nesprávný způsob dělení výrazů a vět, kterým se ztrácí původní význam.

Aristotelovy příklady nesprávné argumentace využitím změny přízvuku by po překladu do češtiny ztratily smysl, ale takových výrazů je v každém jazyce dostatek. K. Berka, který je autorem poznámkového aparátu k českému překladu Aristotelova spisu, v této souvislosti uvádí poměrně triviální příklad *„Ty JSI štědrý člověk“* oproti *„Ty jsi ŠTĚDRÝ člověk.“*

Jako šestý způsob chybné argumentace je uveden tvar slovního vyjádření. Ten je využíván, *„kdykoli se to, co není totožné, vyjadřuje v řeči stejným způsobem.“* [72] Konkrétně se může jednat o nerozlišování mužského a ženského, kvality a kvantity, činného a trpného rodu a podobně.

Tím jsme tedy vyčerpali výčet chybných způsobů argumentace, které se více či méně zakládají na slovní interpretaci. Všechny tyto způsoby je možné ještě umocnit například rychlostí kladených otázek, přeskakováním od jedné věci ke druhé, případně podněcováním emocí a afektů.

Aristoteles dále vypočítává několik druhů argumentů, které mají základ mimo slovní vyjádření. Často se používají tzv. důkazy ze znaku: *„Chce-li se dokázat, že je někdo*

[72] Aristoteles 1978, s. 28

cizoložník, vezme se na pomoc to, co s ním bývá spojeno: že je strojivý, nebo že je ho vidět v noci se potloukat po ulici. Než to je možné u mnohých, aniž jim náleží ona přisuzovaná vlastnost.“ [73]

Další způsob sofistické argumentace využívá toho, že lidé často říkají něco jiného, než si myslí. *„Například říkají, že se má raději žít v chudobě spravedlivě než hanebně v bohatství, přejí si však opak toho.“* [74] Na základě tohoto rozporu je pak sofista další argumentací dovede k tomu, že buď musí tento rozpor přiznat, nebo své stanovisko změnit.

Ještě jiný způsob představuje kladení otázek, na něž neexistuje správná odpověď. Typickým příkladem je otázka *„Přestal jsi bít svého otce?“ Ano*, tedy jsi ho bil; *ne*, tedy ho stále biješ. Obdobné je to s otázkou *„Má se konat to, co je prospěšné, či to, co je spravedlivé?“* Proti jedné i druhé odpovědi lze najít přesvědčující argumenty, které odpovídajícího donutí změnit své stanovisko.

Tolik jen krátký přehled některých Aristotelových postřehů. Dnes se má za to, že jeho kritika sofistů nebyla zcela nestranná, avšak odhlédneme-li od historického rámce, podal v tomto díle poměrně důkladný rozbor všech možných úskalí, kterým se nevyhneme, chceme-li dokazovat či vyvracet pravdivost tvrzení v přirozeném jazyce.

3.2.2 Pravdivostní tabulky

Pravdivostní tabulky nám mohou pomoci v mnoha úlohách, které představují nějakým způsobem aplikaci výrokové logiky. Typickým případem jsou úlohy, kdy je nám předkládána řada výroků, o nichž víme, že některé mohou být nepravdivé, nevíme však které. Kontextově se jedná např. o výpovědi obyvatel tří vesnic, z nichž jeden mluví vždy pravdu, druhý vždy lže a třetí střídá pravdivé a nepravdivé odpovědi. Takové úlohy nám předkládají např. maďarští autoři G. Bizám a J. Herczeg nebo americký matematik R. Smullyan.

Uveďme dva příklady z knihy *Zaujímavá logika* maďarských autorů. Nejprve popišme situaci, která kontextově vychází z předcházejících úloh. Tři obce, které

[73] Aristoteles 1978, s. 30
[74] Aristoteles 1978, s. 46

determinují všechny odpovědi svých obyvatel, autoři nazvali Pravdovice, Klamárov a Střídavá[75], všechny tři vesnice leží na bájném ostrově Tambolo.

Požárnický problém[76]

Na ostrově Tambolo na hasičské stanici si službu konající strážník právě četl zajímavý román, když vtom ho vyrušil telefon.

- „Hned přijeďte, v naší vesnici vypukl požár!“ ozvalo se v telefonu.
- „Odkud jste?“ ptá se strážník.
- „Ze Střídavé,“ odpovídá hlas.

Co udělá strážník na hasičské stanici?

Odpověď je: Položí sluchátko a klidně pokračuje ve čtení.

A nyní způsob, kterým jsme se k této odpovědi dostali. Autoři v tomto případě uvádějí řešení bez použití pravdivostní tabulky, zřejmě proto, že úloha je velmi jednoduchá. Odpověď se samozřejmě odvíjí od toho, z jaké vesnice volající skutečně je. K vyhodnocení nám poslouží dva výroky, které řekl: V_1: *„V naší vesnici vypukl požár.“* V_2: *„Jsem ze Střídavé.“* Větu *„Hned přijeďte!“* nepovažujeme za výrok, neboť jí nelze přiřadit pravdivostní hodnotu.

Máme tedy tři možnosti: Je-li volající z Pravdovic, musely by být V_1 i V_2 pravdivé, V_2 ovšem zcela jistě pravdivý není. Je-li volající z Klamárova, což by odpovědi připouštěly, není pravdivý ani jeden jeho výrok, a tedy v jeho obci žádný požár nevypukl. A konečně, je-li volající ze Střídavé, musel by být jeden z jeho výroků pravdivý a druhý nepravdivý. A jelikož v tomto případě je V_2 evidentně pravdivý, musí být V_1 nepravdivý, tedy ani ve Střídavé žádný požár nevznikl.

Pokusíme se vzhledem k následující složitější úloze ozřejmit i tento příklad pomocí pravdivostní tabulky. V_1 a V_2 značí naše výroky, P, K, S značí obyvatele příslušných obcí. Kombinace nul a jedniček pod V_1 a V_2 značí pravdivost či nepravdivost jednotlivých výroků, nuly a jedničky v odpovídajících řádcích pod písmeny P, K, S značí, zda by takovou kombinaci pravdivých a nepravdivých výroků V_1 a V_2 mohl pronést obyvatel dané obce.

[75] Názvy jsou částečně počeštěné, ve slovenském překladu K. Rovana jsou to Pravdovce, Klamárovo a Striedavá.
[76] Bizám, Herczeg 1975, s. 96; vlastní překlad

V_1	V_2	P	K	S
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0

Z této tabulky jsou zřejmé všechny vztahy, které jsme výše popsali v běžném textu, tabulka je však přehledněji zobrazuje. Tuto výhodu oceníme především při větším počtu výroků.

Ve výcvikovém táboře,[77]
který jsme nedávno navštívili, jsme se potkali se třemi sportovkyněmi. Protože nechtěli uvést svá jména, budeme je značit *A*, *B*, *C*. Věděli jsme, že jedna závodí za ČH, druhá za Duklu, třetí za Inter. Chtěli jsme je požádat o rozhovor, ale děvčata, která měla zřejmě žertovnou náladu, prohlásila, že mohou dávat jen částečné informace, a to jen co se týká barvy jejich klubů. Souhlasili jsme, protože jsme věděli, že barvy ČH jsou modrá a bílá, Dukly červená a bílá, Interu červená a modrá.

- (1) A: Jedna z barev *B* je modrá.
- (2) B: Jedna z barev *C* je bílá.
- (3) C: Jedna z barev *A* je modrá.
- (4) A: Jedna z barev *C* je modrá
- (5) B: Ani jedna z barev *A* není červená.
- (6) C: Jedna z barev *B* je bílá.

Tyto informace nás přivedly do rozpaků. Naštěstí šel zrovna okolo trenér a řekl nám: „Dávejte si dobrý pozor. Těmto děvčatům se tak zalíbily příběhy z ostrova Tambolo, že se rozhodli, že jedna bude vždy jako z Pravdovic, druhá z Klamárova a třetí ze Střídavé. A samozřejmě podle toho hovoří.“ Než jsme se však stačili zeptat, která z dívek je z které obce, trenér odběhl. Nezbylo nám, než se obrátit na chichotající se děvčata a ta pokračovala:

- (7) A: *C* doteď lhala vícekrát než *B*.
- (8) B: Doteď byla více než polovina našich odpovědí pravdivá.
- (9) C: Doteď byla více než polovina našich odpovědí nepravdivá.

[77] Bizám, Herczeg 1975, s. 102; vlastní překlad

(…) Je možné na základě známých informací zjistit, do kterých klubů děvčata patří?

I k tomuto úkolu uvádějí autoři slovní řešení, ale to je už skutečně velmi nepřehledné. Jako druhý způsob pak uvádějí řešení tabulkou. V každém případě bude rozumné přepsat si odpovědi (1) – (9) stručněji a přehledněji:

- (1) A: *B* není z Dukly.
- (2) B: *C* není z Interu.
- (3) C: *A* není z Dukly.
- (4) A: *C* není z Dukly.
- (5) B: *A* je z ČH.
- (6) C: *B* není z Interu.
- (7) A: Zatím kl(*C*) > kl(*B*).
- (8) B: Z odpovědí (1) – (7) jsou alespoň 4 pravdivé.
- (9) C: Z odpovědí (1) – (8) jsou nejvíc 3 pravdivé.

V tabulce vytvoříme řádek pro každou možnou kombinaci členství v klubech dívek *A*, *B*, *C*. Těch je celkem šest. Pro tyto kombinace pak zapíšeme jedničky a nuly pod jednotlivá tvrzení (1) – (9) v závislosti na jejich aktuální pravdivosti a sledujeme, ve kterém řádku odpovědi děvčat vykazují typické charakteristiky obyvatel ostrova Tambolo.

	A	*B*	*C*	A	B	C	A	B	C	A	B	C
				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
I	Dukla	ČH	Inter	1	0	0	1	0	1	0	0	1
II	Dukla	Inter	ČH	1	1	0	1	0	0	1	1	0
III	ČH	Dukla	Inter	0	0	1	1	1	1	0	1	0
IV	ČH	Inter	Dukla	1	1	1	0	1	0	1	1	0
V	Inter	Dukla	ČH	0	1	1	1	0	1	0	1	0
VI	Inter	ČH	Dukla	1	1	1	0	0	1	0	1	0

Vidíme, že z tohoto hlediska je smysluplný pouze II. řádek, neboť pouze zde jedna z dívek mluví vždy pravdu, druhá vždy lže a třetí pravidelně střídá pravdivé a nepravdivé odpovědi. *A* je tady z Dukly, *B* z Interu a *C* je z ČH. Co se týká ostrova Tambolo, *A* je z Pravdovic, *B* ze Střídavé a *C* je z Klamárova.

3.2.3 Autoreference

Fenomén autoreference, tedy problematika výroků vypovídajících o své vlastní pravdivostní hodnotě, je již velmi starobylá. Jedním z nejznámějších paradoxů, které autoreference využívají, je tzv. paradox lháře. Bývá uváděn např. ve tvaru *„Tato věta je nepravdivá.“* Předpokládejme, že se jedná o pravdivý výrok, tedy že je pravda to, co tvrdí. Tvrdí však, že tato věta je nepravdivá, tedy je nepravdivá a dostáváme se ke sporu s předpokladem. K analogickému sporu bychom dospěli, pokud bychom předpokládali, že je nepravdivá. Hovoříme zde o míšení dvou jazykových úrovní, jazyka a metajazyka. Proto (kvůli bezespornosti vět a definic) se větám, které se tohoto míšení dopouštějí, nepřiřazuje žádná pravdivostní hodnota, resp. nemá smysl jim pravdivostní hodnotu přiřazovat, tyto věty nemají žádnou vypovídací hodnotu.

Paradox autoreference poznamenal řadu vědeckých děl, kromě již zmíněného Fregova systému *Grundgesetze* měla obdobný problém např. i naivní teorie množin G. Cantora[78]. Nyní se však na tento fenomén podíváme spíše z pohledu amerického matematika R. Smullyana, jehož kniha s příhodným názvem *„Jak se jmenuje tahle knížka?“* nám na toto téma předkládá mnoho vtipných a zajímavých, avšak ne vždy jednoduchých úloh a variací.

Porciiny skříňky

V knize je soubor úloh, kdy si dívka Porcie vybírá ženicha podle jeho důvtipu. Má vždy několik skříněk s nápisy na víkách a do jedné z nich dá svou podobiznu. Úkolem ženicha je zjistit, ve které ze skříněk se Porciina podobizna skrývá.

Měla např. tři skříňky s těmito nápisy: ZLATÁ: *Podobizna není ve stříbrné skříňce.* STŘÍBRNÁ: *Podobizna není v této skříňce.* OLOVĚNÁ: *Podobizna je v této skříňce.* Nápadníkovi ještě poradila, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je nepravdivý. Šlo tedy opět „jen“ o kombinaci pravdivých a nepravdivých výroků a tyto úlohy jsou poměrně snadno řešitelné úvahou či pravdivostní tabulkou. (V tomto případě byla podobizna ve zlaté skříňce.)

Poslední z Porciiných zkoušek je však kvalitativně odlišná. Tentokrát máme pouze dvě skříňky a v jedné z nich je podobizna. Na skříňkách jsou tyto nápisy:

---

[78] 1845 – 1918, německý matematik a logik, zabýval se především teorií množin

ZLATÁ	STŘÍBRNÁ
Zde podobizna není.	Právě jeden z těchto dvou nápisů je pravdivý.

„Nápadník uvažoval takhle: Pokud výrok na stříbrné skříňce je pravdivý, pak právě jeden z výroků je pravdivý. To znamená, že výrok na zlaté skříňce musí být nepravdivý. Na druhé straně předpokládejme, že výrok na stříbrné skříňce není pravdivý, Pak není pravda, že by právě jeden z obou výroků byl pravdivý, to znamená, že výroky jsou buď oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. Nemohou být oba pravdivé (předpokládáme přece, že druhý je nepravdivý), a tak jsou oba nepravdivé. Takže i výrok na zlaté skříňce je nepravdivý. Tedy bez ohledu na to, je-li výrok na stříbrné skříňce pravdivý nebo nepravdivý, výrok na zlaté skříňce je nepravdivý. Takže podobizna musí být ve zlaté skříňce.

A tak nápadník vítězoslavně vyhrkl: ‚Podobizna je ve zlaté skříňce!‘ a odklopil víko. Jaký byl jeho úlek, když zlatá skříňka byla prázdná! Nápadník dočista zkoprněl a vyhrkl, že ho Porcie podvedla. ‚K podvodům bych se nesnížila,‘ rozesmála se Porcie a pohrdavě otevřela stříbrnou skříňku a nastojte, podobizna byla v ní!“ [79]

A kde vlastně udělal nápadník chybu? Chybný byl už předpoklad, že každý z nápisů je buď pravdivý, nebo nepravdivý. Výrok na zlaté skříňce tuto dichotomii zjevně splňuje; tím, že Porcie dala podobiznu zrovna do stříbrné skříňky, je mu přiřazena hodnota *pravda*. A nyní se můžeme pokusit zkoumat pravdivost nápisu na stříbrné skříňce. Předpokládejme, že je pravdivý. Pak je pravda, že právě jeden z výroků je pravdivý, avšak víme, že pravdivý je už výrok na zlaté skříňce, vzniká tedy spor. Obdobně, budeme-li předpokládat, že nápis na stříbrné skříňce je nepravdivý, zjišťujeme, že skutečně je právě jeden z nápisů nepravdivý, což ovšem nápis na stříbrné skříňce tvrdí, dostáváme se tedy ke stejnému sporu.

[79] Smullyan 1986, s. 61n

Pověsit, nebo utopit?[80]

V téhle oblíbené hádance kdosi spáchal zločin, který se trestá smrtí. Smí vyslovit jeden výrok. Když bude pravdivý, kat ho utopí; když bude nepravdivý, kat ho pověsí. Jaký výrok by měl vyslovit, aby vyvázl?

I tato otázka zřejmě volá po odpovědi, která je vnitřně sporná, a tudíž nebude možné jí jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu. Autor nám předkládá odpověď: „*Budu oběšen.*“ A skutečně, kdybychom předpokládali, že je tato věta pravdivá, měl by být dotyčný utopen, čímž se však pravdivost odpovědi popírá. Stejně tak budeme-li předpokládat nepravdivost odpovědi, čeká dotyčného oprátka, což ale pravdivostní hodnotu věty opět převrací.

[80] Smullyan 1986, s. 193

Závěr

Ve své bakalářské práci se snažím ukázat, že příklady z historie logiky mají význam pro vyučování i v dnešní době. Pomocí exkurzu do chronologie vývoje logiky je velmi dobře vidět, jak se proces usuzování postupně nejen zpřesňoval, ale i formalizoval a měnila se používaná notace. Na příkladech tří velkých představitelů této vědy je pak jasně patrný rozdílný osobní přístup k logice jako takové a z toho plynoucí zaměření jejich zkoumání. Pro Aristotela bylo důležité, aby byly funkční vazby logického čtverce, možná trochu na úkor využitelnosti jeho konceptu pro přesné vyjadřování v přirozeném jazyce. Boole se snažil logiku natolik přiblížit algebře, aby usuzování maximálně zprůhlednil a zautomatizoval. Frege svým pojmovým písmem doufal zpřesnit přirozený jazyk natolik, aby z procesu usuzování zcela eliminoval „lidský faktor“.

Jak je vidět, všechny tři přístupy nějakým způsobem souvisí s přirozeným jazykem. Vztah logiky a jazyka je ovšem téma, které není možné shrnout v jednom odstavci, aniž bychom se dopustili zjednodušení a tím i nepřesností. Byl by to však zajímavý styčný bod pro případné pokračování této práce.

Kvantitativně je jádro práce ve druhé kapitole přehledu historických formalizací logiky, avšak i touto částí prochází linie praktická či didaktická. Můžeme ji vypozorovat v měnícím se přístupu ke klasifikaci pravdivosti sylogismů, od memorování formulí přes soubor pravidel k univerzálnímu algoritmu. Rovněž středověké mnemotechnické pomůcky představují příspěvek k didaktické části této práce.

Z didaktického hlediska shledávám zajímavým také fakt, že zatímco Vennovy diagramy se při vyučování matematiky používají poměrně často, další diagramové metody (Euler, Carroll) se ve škole většinou nevyskytují. Zajímavým rozšířením či pokračováním této práce by mohl být praktický výzkum využitelnosti či srovnatelnosti těchto přístupů ve školách.

Podobně zajímavý by mohl být výzkum řešitelských strategií žáků různých věkových kategorií v případě logických úloh různých typů, jak jsou nastíněny v příkladových částech 3.2.2 a 3.2.3, případně pozorování konfrontace odlišných řešení v případě týmové spolupráce.

Co se týká oddílů 2.3.1 a 2.4.1, tedy životopisných částí, nepovažuji je jen za „výplň“, jak by se snad mohlo zdát. Historie matematiky, která kromě biografií vědců zahrnuje i genezi jednotlivých odvětví, je velice zajímavou součástí matematiky.

Považuji za škodu, že ve školách se prakticky nezmiňuje. Povědomí o nejdůležitějších osobnostech či objevech by mohlo žákům pomoci integrovat jejich matematické znalosti do celku jejich historicko-kulturního přehledu.

Literatura:

ARISTOTELES. *První analytiky.* Praha : NČAV, 1961. 220 s.

ARISTOTELES. *O sofistických důkazech.* Praha : Academia, 1978. 133 s.

BENDOVÁ, K. *Sylogistika.* Praha : Karolinum, 1998. 102 s. ISBN 80-7184-568-X.

BERKA, K. *K dějinám výrokové logiky v antice.* Praha : Nakladatelství ČSAV, 1959. 100 s.

BIZÁM, G., HERCZEG, J. *Zaujímavá logika.* Bratislava : Alfa, 1975. 421 s.

BOOLE, G. *An Investigation of the Laws of Thought.* New York : Dover Publications, Inc., 1958. 424 p. ISBN 0-486-60028-9.

CARROLL, L. *Logika hrou.* Praha : Presfoto, 1972. 99 s.

FOLK, R., AUSBERGEROVÁ, M. *Uplatnění logiky v pedagogické praxi.* Plzeň : Pedagogické centrum, 1996. 34 s.

FREGE, G. *Begriffsschrift.* Halle 1879.

FREGE, G. *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgelaitet. II. Band.* Jena 1903.

FREGE, G. Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, I, 1918/1919, s. 58 – 77.

FREGE, G. *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Hamburg 1976.

FREGE, G. *Nachgelassene Schriften.* Hamburg 1983.

KOLMAN, V. *Logika Gottloba Frega.* Praha : Filosofia, 2002. 295 s. ISBN 80-7007-164-8.

MRÁZ, V. *Logika pro pedagogy.* Praha : SPN, 1988. 201 s.

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. *Friedrich Ludwig Gottlob Frege.* [online], [cit. 23. 3. 2010]. Dostupné na WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frege.html>.

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. *George Boole.* [online], [cit. 18. 3. 2010]. Dostupné na WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Boole.html>.

PEREGRIN, J. *Co je to (Fregovská) logika?* [online], [cit. 23. 3. 2010]. Dostupné na WWW: <http://jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/412.pdf>.

SMULLYAN, R. *Jak se jmenuje tahle knížka?* Praha : Mladá fronta, 1986. 212 s.

ŠEDIVÝ, J. *Světonázorové problémy matematiky II.* Praha : SPN, 1984. 220 s.

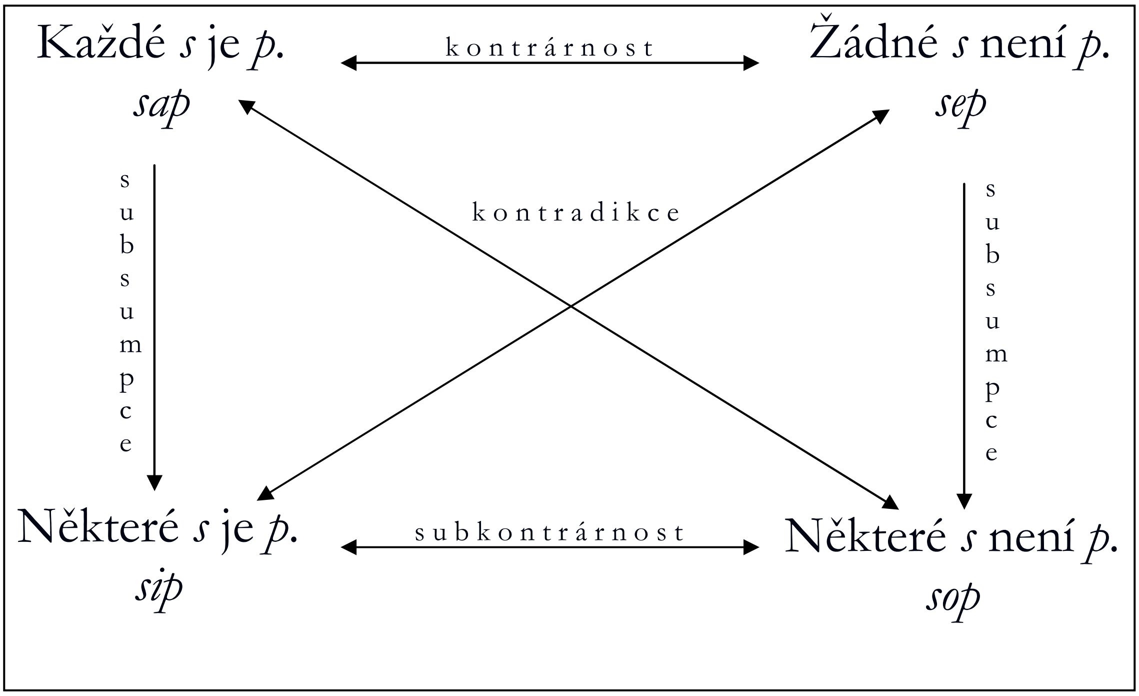
Přílohy

Seznam příloh:

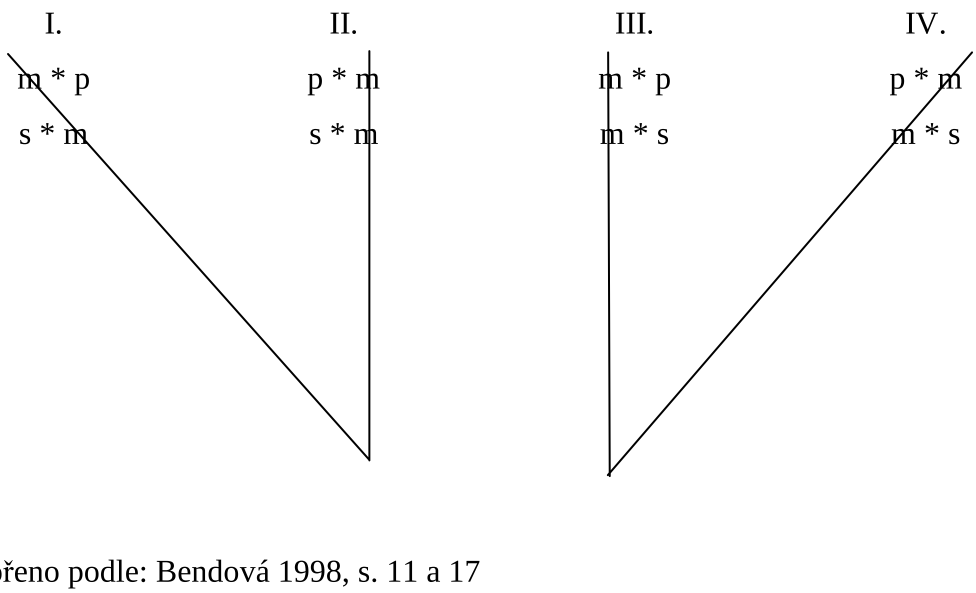
Příloha 1: Středověké mnemotechnické pomůcky
Příloha 2: Stoický systém teorie dedukce

Příloha 1: Středověké mnemotechnické pomůcky

Logický čtverec:



Andělská křidýlka:



Vytvořeno podle: Bendová 1998, s. 11 a 17

Příloha 2: Stoický systém teorie dedukce

Pět anapodeiktických úsudků:

$$\frac{\begin{array}{l} X \Rightarrow Y \\ X \end{array}}{Y} \qquad \frac{\begin{array}{l} X \Rightarrow Y \\ Y' \end{array}}{X'} \qquad \frac{\begin{array}{l} (X \wedge Y)' \\ X \end{array}}{Y'} \qquad \frac{\begin{array}{l} X \vee Y \\ X \end{array}}{Y'} \qquad \frac{\begin{array}{l} X \vee Y \\ X' \end{array}}{Y}$$

Čtyři metalogická thémata:

Jestliže $(P \wedge Q) \Rightarrow R$, pak $(P \wedge R') \Rightarrow Q'$.

Jestliže $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ a $(R \wedge Q) \Rightarrow T$, pak $(P \wedge Q) \Rightarrow T$.

Jestliže $(S \Rightarrow P)$ a $[(P \wedge Q) \Rightarrow R]$, pak $(S \wedge Q) \Rightarrow R$.

Jestliže $P \Rightarrow R$, $Q \Rightarrow R$, pak $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

Vytvořeno podle: Šedivý 1984, s. 93n