Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diofantické rovnice

Autor: Pavlína Jansová

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že předložení bakalářské práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracovala samostatně. Veškerou literaturu a další zdroje, z nichž jsem při zpracování čerpala, v práci řádně cituji a jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v univerzitní knihovně.

V Praze dne 15. 4. 2010

NÁZEV:

Diofantické rovnice

ABSTRAKT:

Práce je věnována diofantickým rovnicím. Jsou v ní souhrnně zpracovány lineární a kvadratické diofantické rovnice o dvou a třech neznámých a některé typy jejich soustav.

V úvodní části práce jsou uvedeny bibliografické údaje o Diofantovi, podle kterého jsou rovnice pojmenovány. V další části jsou shrnuty informace o rovnicích a jejich soustavách. Hlavní část práce obsahuje přehled základních typů diofantických rovnic a jejich soustav. Jsou uvedeny způsoby jejich řešení. Tam, kde je uvedeno víc řešitelských postupů, jsou porovnány z hlediska požadovaných matematických znalostí a jejich výhod a nevýhod.

KLÍČOVÁ SLOVA:

Diofantické rovnice, rovnice, soustavy rovnic, Diofantos z Alexandrie

TITLE:

Diophantine equations

SUMMARY:

The thesis focuses on Diophantine Equations. Linear and quadratic Diophantine Equations of two and three variables and some types of their systems are described.

At the beginning of the thesis, information about Diophantus, who gave the name to the equations, is presented. Next, equations and their systems are summarized. The main section focuses on standard types of Diophantine equations and their systems and their solving strategies. Moreover, advantages and disadvantages of different solving methods and required mathematical knowledge are compared.

KEYWORDS:

Diophantine equations, equations, system of equations, Diophantus of Alexandria

OBSAH

ÚVOD

Při prvním setkání s pojmem diofantické rovnice jsem si nedokázala představit, o jaké rovnice se vlastně jedná, stejně jako jiným lidem. Teprve po bližším seznámení a prozkoumání příkladů mi bylo jasnější, co to jsou diofantické rovnice. Uvědomila jsem si, že jsme tyto rovnice probírali již na základní škole, a to jako lineární rovnice o dvou neznámých. Mnoho lidí, kteří se nezabývají matematikou, se s termínem diofantické rovnice nesetkali. A ti, kteří o nich slyšeli, si je nespojí s matematikou základní školy. Rozhodla jsem se proto diofantickým rovnicím věnovat více a přiblížit je čtenářům.

Práce obsahuje informace o rovnicích a soustavách rovnic, o Diofantovi a o vybraných diofantických rovnicích a jejich soustavách.

V první kapitole uvádím informace o Diofantovi, matematikovi, podle kterého byly tyto rovnice nazvány. Píši zde o jeho práci v oblasti rovnic, o tom, co nového do tohoto oboru přinesl, jaká díla napsal. Ve druhé kapitole popisuji, co jsou to rovnice a soustavy rovnic, uvádím základní pojmy spojené s definicí rovnice a soustavy rovnic a základní postupy pro jejich řešení. Uvádím zde klasifikaci rovnic podle typů. Ke každému typu je zpracován nástin postupu řešení. Ve třetí kapitole se zabývám diofantickými rovnicemi a jejich soustavami. Ke každému typu rovnic a jejich soustav, které jsou v práci zařazeny, jsou uvedeny příklady a možné řešitelské strategie.

1 Diofantos z Alexandrie (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς)

Diofantos byl řecký matematik, který pocházel z Alexandrie a žil okolo roku 250 n. l. Ohledně tohoto data je mnoho spekulací, existuje několik variant a všechny jsou probírány v knize Diophantos of Alexandria od Thomase L. Heatha (1885).

Diskuse se vedou i o Diofantově jméně: není jasné, zda se jmenoval Diofantos či Diofantes; někteří, jako např. Joannes Regiomontanus, Joachim Camerarius a další, se domnívali, že to byl Diofantus. (Heath, 1885) V česky psaných knihách se uvádí, že se jmenoval Diofantos. (Kolman, 1969) Proto toto jméno používáme v dalším textu.

O Diofantově životě je známo jen několik údajů, které jsou uvedeny v tzv. Diofantově aritmetickém epigramu. Epigram v češtině uvádí Kolman (1969, s. 195)

> „Šestinu života dopřál mu bůh být chlapcem.
> Za dvanáctinu života pak narostly mu vousy.
> K tomu sedmina života, když uzavřel sňatek manželský.
> Po pěti letech vzešel z toho spojení syn.
> Běda, dítě tak milované dožilo se poloviny let otcových, když ho Hádes strašlivý povolal k sobě.
> Ještě čtyři léta snášel Diofantos bolest, věnuje se vědě.“

Výsledkem tohoto epigramu je rovnice

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

z které lze vypočítat: dožil se 84 let, jeho dětství trvalo 14 let, v 21 letech mu narostly vousy, ve 33 letech se oženil a 5 let poté se mu narodil syn; ten zemřel ve věku 42 let; to bylo Diofantovi 80 let. (Heath, 1885)

1.1 Diofantova práce

Diofantos napsal několik děl, z nichž je nejznámější Aritmetika (Αριθμητικά). Dále napsal pojednání o „polygonálních číslech“, Porismata a Moriastika. Téměř všechny knihy se ztratily, dochovala se jen část Aritmetiky a Polygonálních čísel. (Kolman, 1969)

Aritmetika

Aritmetika je sbírka 189 úloh s řešeními a vysvětlivkami. Pravděpodobně obsahuje třináct knih (Diofantos se o tomto počtu zmiňuje v úvodu Aritmetiky), z nichž se dochovalo pouze šest. Není známo, které knihy Aritmetiky chybí. (Heath, 1885)

V Aritmetice Diofantos zavádí vlastní algebraickou symboliku. Zabývá se zde řešením určitých i neurčitých rovnic[1]. Z určitých rovnic se zabýval lineárními, kvadratickými a jedním příkladem kubické rovnice (viz 1.2 Příklady), kde hledal kladná racionální řešení. Z neurčitých rovnic řešil kvadratické rovnice, kubické a bikvadratické rovnice (viz 1.2 Příklady); řešením nemuselo být celé číslo. (Kolman, 1969)

Aritmetika obsahuje i obecné věty, které se vztahují k teorii čísel: (Kolman, 1969, s. 199)

1. „Je-li a dané číslo a x, y jsou taková čísla, že výrazy $x + a, y + a, xy + a$ jsou čtverce[2], pak rozdíl stran čtverců $x + a, y + a$ je 1;
2. Jsou-li n^2 a $(n + 1)^2$ dva po sobě následující čtverce a vezmeme-li ještě číslo $4(n^2 + n + 1)$, pak tato trojice čísel má vlastnost, že součin libovolné dvojice zvětšený buď o součet, nebo o třetí číslo, je čtvercem.“

Následující věty se týkají rozkladu čísla na součet dvou čtverců. (Kolman, 1969, s. 199-200)

1. „Každý čtverec lze vyjádřit libovolně mnoha způsoby jako součet dvou čtverců, protože a^2 lze vyjádřit jako součet $x^2 + y^2$, kde $x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot a,\ y = \frac{2t}{1+t^2} \cdot a$ (kde t je libovolný kladný pravý zlomek);
2. Tedy i každé číslo, které je součtem dvou čtverců, lze vyjádřit libovolně mnoha způsoby jako součet dvou čtverců;
3. Součin dvou celých čísel, z nichž každé je součtem dvou čtverců, lze vyjádřit ve tvaru součtu dvou čtverců dvěma způsoby:

   $$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2;$$

   tuto větu Diofantos používá k nalezení čtyř pravoúhlých trojúhelníků o celočíselných stranách a společné přeponě“.

V aritmetice je také několik úloh na konstrukci pravoúhlého trojúhelníka. (Kolman, 1969)

[1] Neurčitá rovnice je rovnice, která má nekonečně mnoho řešení.

[2] Slovo čtverec používáme ve shodě s Kolmanem pro druhou mocninu čísla.

Polygonální čísla

Dochoval se jen zlomek díla. (Kolman, 1969)

Moriastika

Dílo Moriastika se nedochovalo, mělo obsahovat nauku o zlomcích. (Kolman, 1969)

Porismata

Na dílo Porismata Diofantos odkazuje v Aritmetice. (Kolman, 1969)

Diofantos nepracoval se zápornými čísly stejně, jako to děláme dnes. S mínusem pracoval jen jako s operátorem; takže pokud mu vyšlo, že řešením rovnice je záporné číslo, nazval takovou rovnici protismyslnou, absurdní. (Kolman, 1969)

Diofantos hledal pouze kladná racionální řešení, takovéto rovnice dnes nazýváme diofantovské[3]. Diofantos pracoval se zlomky (Hejný, 1990).

Jako první začal Diofantos používat algebraickou symboliku[4]. Sčítání vyjadřoval tak, že sčítance řadil za sebe, odčítání označoval symbolem pro obrácené psí. Používal pouze jednu neznámou veličinu, musel tedy rovnice upravit tak, aby všechny neznámé byly vyjádřeny jako funkce jedné z nich. Neznámou, „naše“ x, nazýval číslo (ἀριθμός) a používal pro ni symbol ς΄. Koeficient zapisoval za znak neznámé ς΄$\overline{\iota\alpha}$ = $11x$. Stupeň neznámé označoval počátečními písmeny příslušných řeckých výrazů (Kolman, 1969, s. 195-196):

„x^2 - δύναμις - $\delta^{\tilde{\upsilon}}$

x^3 - κύβος - $\kappa^{\tilde{\upsilon}}$

x^4 - δυναμοδύναμις - $\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}$

x^5 - δυναμοκύβος - $\delta\kappa^{\tilde{\upsilon}}$

x^6 - κυβοκύβος - $\kappa\kappa^{\tilde{\upsilon}}$

Mocniny vyššího stupně nebral v úvahu. Měl symboly i pro převrácenou hodnotu.

$\frac{1}{x}$ - ἀριθμοστόν - $S^{\varkappa}$

$\frac{1}{x^2}$ - δυναμοστν - $\delta^{\tilde{\upsilon}\varkappa}$ “

[3] Označení diofantovské rovnice používá Hejný (1990) pro rovnice, kde hledá řešení v oboru $\mathbb{Q}_+$. Označení diofantické se používá (Kolman, 1969) pro rovnice, kde nás zajímá řešení v oboru $\mathbb{Z}$.

[4] Za symboly volil počáteční písmena příslušných řeckých výrazů.

1.2 Příklady

Uvedeme několik příkladů, kterými se Diofantos zabýval.

„Pro speciální případy rovnic, které bychom dnes shrnuli pod typ:

$$a_1x^n + b_1 + a_2x^n + b_2 + \cdots = c_1x^n + d_1 + c_2x^n + \cdots$$

naznačil Diofantos na speciálním případu obecná pravidla, podle nichž se mohla převést rovnice na tvar $ax^n = b$. Záleželo to v tom, že se podobné členy uspořádaly a možné záporné členy zrušily přičtením stejných veličin k oběma stranám rovnice. Tím pokládal rovnici za rozřešenou a řešení mu dalo jen jediný kladný kořen. Nadto požadoval, aby koeficienty a a b zaručovaly racionalitu kořene. Byla-li dále některá rovnice dělitelná činitelem x^m, pak nebral zřetel na kořen $x = 0$.“ (Kolman, 1969, 196-197)

Dále se Diofantos zabýval soustavami rovnic, z kterých po úpravách dostal rovnice druhého stupně. K řešení dospěl pomocí substituční metody. (Kolman, 1969)

$$\begin{matrix} x + y = 2a \\ xy = b \end{matrix} \quad (1) \quad \text{substituce:} \quad \begin{matrix} x = a + z \\ y = a - z \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x + y = 2a \\ x^2 + y^2 = b \end{matrix} \quad (2) \quad \text{substituce:} \quad \begin{matrix} x = a + z \\ y = a - z \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x - y = 2a \\ xy = b \end{matrix} \quad (3) \quad \text{substituce:} \quad \begin{matrix} x = z + a \\ y = z - a \end{matrix}$$

Jediným případem kubické určité rovnice, kterou se Diofantos zabýval, je rovnice

$$x^3 + 3x - 3x^2 - 1 = x^2 + 2x + 3;$$

po úpravách dostal rovnici

$$x^3 + x = 4x^2 + 4,$$

jejímž řešením je $x = 4$. Diofantos neuvedl, jak k tomuto výsledku dospěl. (Kolman, 1969)

Diofantos se v Aritmetice zabýval neurčitými rovnicemi hlavně ve tvaru

$$Ax^2 + Bx + C = y^2.$$

Řešil speciální případy pro konkrétní hodnoty koeficientů A, B, C.(Kolman, 1969)

Diofantos řešil i tzv. „dvojité“ rovnice, tj. soustavu rovnic

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = y^2$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = z^2.$$

Případ, kdy $a_1 = a_2 = 0$, počítal dvěma metodami. První metodu rozdělil ještě na další dvě možnosti: a) $b_1 = b_2$

b) $c_1 \cdot c_2$ je čtverec.

Druhou metodu využil jen v případě, kdy $c_1 = c_2$ jsou čtverce. Diofantos měl k soustavě omezující podmínky: $a_1 = a_2, c_1 = c_2$, nebo $a_1 = 1, a_2 = 0$, nebo $b_1 = b_2 = 0$. (Kolman, 1969)

Neurčité rovnice vyšších řádů uvažoval Diofantos ve tvaru

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Kx - M = y^2 \text{ nebo } y^3,$$

kde $n \leqq 6$ pro y^2, $n \leqq 3$ pro y^3. (Kolman, 1969)

Některé jednoduché případy soustavy dvou neurčitých rovnic obsahujících druhé a třetí mocniny lze vyřešit snadno. Uvažujeme např. soustavu $\begin{matrix} 4x + 2 = y^3 \\ 2x + 1 = z^2 \end{matrix}$; jejíž řešení vede k rovnici $y^3 = 2z^2$, odtud vyplývá, že $z = 2$. (Kolman, 1969)

V jediném případě řešil Diofantos slovní úlohu z běžného života: „Dvojího vína, míru lepšího za osm, míru horšího za pět drachem, smísil chytrý pán. Co za oba druhy zaplatil, bylo čtvercové číslo. Přidej k tomuto čtverci dané číslo (60), pak získáš jiný čtverec a jeho strana ti řekne množství vína, které všechno smíchal. Nyní mi, chlapče, urči, kolik bylo smíšeného vína lepšího a kolik horšího druhu.“ (Kolman, 1969, s. 201)

V obecném případě dostal soustavu rovnic

$$mx + nx = u^2$$
$$u^2 + a = (x + y)^2.$$

Pro $m = 8,\ n = 5$ a $a = 60$ je počet měr vína horšího, tj. po pěti drachmách $\frac{79}{12}$, a lepšího, tj. po osmi drachmách $\frac{59}{12}$.

Příklad 8 z II. knihy Aritmetiky (Heath, 1885, s. 173)[5].

Rozdělte čtverec na dva čtverce

Nechť číslo 16 je čtverec.

x^2 je jeden z hledaných čtverců. Proto $16 - x^2$ musí být také čtverec.

Vezmeme čtverec ve tvaru $(mx - 4)^2$, 4 je absolutní člen, protože $4^2 = 16$.

Tj. řekneme $(2x - 4)^2$ a porovnáme s $16 - x^2$.

Tedy $4x^2 - 16x = -x^2$.

Pak $x = \frac{16}{5}$.

Jeden čtverec je $\frac{16}{5}$ a druhý je $\frac{12}{5}$.

[5] Z angličtiny přeložila autorka.

2 Rovnice a soustavy rovnic

Rovnicí nazveme výrokovou formu ve tvaru $L(x) = P(x)$[6], kde výrazu $L(x)$ se říká levá strana rovnice a výrazu $P(x)$ pravá strana rovnice. (Polák, 1991)

Můžeme se setkat se speciálním případem rovnice, kde jedna strana rovnice je konstanta. Pokud je konstanta rovna nula, řekneme, že rovnice je v anulovaném tvaru. Proměnná x v rovnici se nazývá neznámá. Hodnoty x_k neznámé, pro které je rovnice splněna, tj. $L(x_k) = P(x_k)$, se nazývají kořeny (řešení) rovnice. Oborem řešení rovnice je číselný obor M, ve kterém hledáme kořeny rovnice. Definičním oborem rovnice je podmnožina množiny M, kde jsou definovány oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$, tedy průnik definičních oborů těchto výrazů. (Polák, 1991)

Ekvivalentní úpravy rovnic: (Polák, 1991, s. 183)

1. „Vzájemná výměna obou stran rovnice.
2. Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení rovnice.
3. Přičtení stejného čísla nebo výrazu, který má smysl pro celý obor řešení rovnice, k oběma stranám rovnice.
4. Vynásobení obou stran rovnice stejným číslem nebo výrazem (různým od nuly), který má smysl pro celý obor řešení rovnice.
5. Umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice.
6. Odmocnění obou stran rovnice přirozeným odmocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice.
7. Zlogaritmování obou stran rovnice se stejným základem, jsou-li obě strany rovnice kladné v celém oboru řešení rovnice.“

Soustava (systém) rovnic o *n* neznámých je množina rovnic o *n* neznámých. Řešením soustavy rovnic o *n* neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je každá uspořádaná *n*-tice $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ čísel

[6] Neznámá se označuje libovolnými písmeny. V této práci budeme používat x, případně y, z, pro více neznámých x_k, kde $k = 1, 2, \cdots, n$.

z daného číselného oboru, která je řešením všech rovnic soustavy. Množinou všech řešení soustavy je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy. (Polák, 1991)

Ekvivalentní úpravy soustav rovnic: (Polák, 1991, s. 248)

1. „Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní (viz Ekvivalentní úpravy rovnic).
2. Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
3. Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.“
4. Výměna pořadí rovnic.

2.1 Vybrané typy rovnic a soustav rovnic

Zvolili jsme rozdělení rovnic na algebraické a nealgebraické. Práce je zaměřena na diofantické rovnice, které patří mezi algebraické rovnice (viz 2.1.1), proto se zmíním jen o algebraických rovnicích a jejich soustavách.

2.1.1 Algebraické rovnice

Algebraická rovnice n-tého stupně s neznámou $x \in \mathbb{C}$ je každá rovnice tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Číslo n se nazývá stupeň algebraické rovnice. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou koeficienty algebraické rovnice. Koeficient a_0 se nazývá absolutní člen rovnice. Rovnici, kde $a_n = 1$, nazýváme normovanou rovnicí. (Jarník, Šisler, 1969, Polák, 1991)

Pokud $a_0 = 0$, pak rovnici nazýváme bez absolutního členu a jedním z kořenů rovnice je $x = 0$.

Typy algebraických rovnic:

Lineární rovnice, tj. algebraická rovnice prvního stupně, je rovnice s neznámou x tvaru

$$ax + b = 0,$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Tato rovnice má právě jedno řešení a tím je číslo $x = -\frac{b}{a}$. (Polák, 1991)

Kvadratická rovnice, tj. algebraická rovnice druhého stupně, je rovnice s neznámou x tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Členy kvadratické rovnice nazýváme: ax^2 kvadratický člen, bx lineární člen a c absolutní člen. (Polák, 1991)

Jestliže $b = 0$ a $a \neq 0$, tj. rovnice má tvar

$$ax^2 + c = 0$$

nazývá se ryze kvadratická rovnice. (Jarník, Šisler, 1969)

Pro řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je důležité číslo

$$D = b^2 - 4ac,$$

které nazýváme diskriminant kvadratické rovnice. Toto číslo rozhoduje o charakteru kořenů kvadratické rovnice.

Rozlišujeme tři případy pro kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty: (Jarník, Šisler, 1969; Bartsch, 2006)

1. $D > 0$: rovnice má právě dva různé reálné kořeny, které jsou dány vzorcem
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$
2. $D = 0$: rovnice má právě jeden dvojnásobný kořen, který získáme ze vzorce
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
3. $D < 0$: rovnice má právě dva komplexně sdružené imaginární kořeny, které jsou dány vzorcem
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}.$$

A jeden případ pro kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty: (Bartsch, 2006)

1. rovnice má právě dva různé reálné kořeny, které jsou dány vzorcem
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$
kde $\sqrt{D}$ je druhá odmocnina komplexního čísla D.

Kubická rovnice, tj. algebraická rovnice třetího stupně, je rovnice s neznámou x tvaru

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Rovnici lze dělením číslem a převést na normovaný tvar

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Každou rovnici v normovaném tvaru lze pomocí substituce $x = y - \frac{A}{3}$ převést na tzv. redukovaný tvar, s koeficientem u y^2 rovným nule.

$$y^3 + \left(-\frac{A^2}{3} + B\right)y + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0,$$

$$y^3 + py + q = 0,$$

kde $p, q \in \mathbb{C}$.

Kořeny můžeme vyjádřit pomocí Cardanových vzorců (Bartsch, 2006)

$$y_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{2}\mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$y_2 = -\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Binomická rovnice s neznámou x je rovnice tvaru

$$x^n - z = 0,$$

kde $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

Rovnice má pro $z = \varrho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ právě n jednoduchých kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

pro $\forall k \in \{0,1, \ldots, n-1\}$. (Bartsch, 2006)

Trinomická rovnice s neznámou x je rovnice tvaru

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ a $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Speciálním případem trinomické rovnice pro $n = 2$ je **bikvadratická rovnice** tvaru

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0.$$

Trinomickou rovnici řešíme pomocí substituce

$$z = x^n,$$

při které dostaneme z trinomické rovnice rovnici kvadratickou

$$az^2 + bz + c = 0,$$

řešením této rovnice jsou kořeny z_1, z_2, které postupně dosadíme do vztahu $z = x^n$ a dostaneme dvě binomické rovnice, jejichž řešením je $2n$ kořenů trinomické rovnice. Každý kořen počítáme s jeho násobností. (Polák, 1991)

Reciproká rovnice *n*-tého stupně I., resp. II. druhu je algebraická rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_n \neq 0$ a pro jejíž koeficienty $a_k (k = 0,1, \ldots, n)$ platí: (Polák, 1991)

a) reciproká rovnice I. druhu (kladně reciproká rovnice)

$$a_k = a_{n-k}, (k = 0,1, \ldots, n)$$

b) reciproká rovnice II. druhu (záporně reciproká rovnice)

$$a_k = -a_{n-k}, (k = 0,1, \ldots, n)$$

Řešení reciproké rovnice I. druhu: (Polák, 1991)

a) v případě, že stupeň je sudé číslo $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$, pak

1. dělíme obě strany rovnice výrazem

$$x^m \ (x \neq 0)^{[7]},$$

2. z prvního a posledního členu, druhého a předposledního členu atd. vytkneme společný koeficient této dvojice členů,
3. použijeme substituci

$$y = x + \frac{1}{x}$$

a dostaneme

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

$$y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3},$$

$$y^4 - 4y^2 + 2 = x^4 + \frac{1}{x^4},$$

podobně lze vyjádřit další součty $x^n + \frac{1}{x^n}$ jako polynomy v y.

[7] $x = 0$ není kořenem rovnice, proto můžeme dělit x.

b) v případě, že stupeň je liché číslo $n = 2m + 1$ $(m \in \mathbb{N})$, má rovnice vždy kořen -1, dělíme obě strany rovnice $x + 1$ a dále řešíme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně.

Řešení reciproké rovnice II. druhu: (Polák, 1991)

Rovnice má vždy kořen 1, dělíme tedy obě strany rovnice $x-1$ a dále řešíme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně.

2.1.1.1 Algebraické rovnice o n neznámých

Algebraická rovnice o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je rovnice

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, polynom $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je levá strana rovnice a polynom $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pravá strana rovnice. Řešením rovnice je uspořádaná n-tice $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. (Polák, 1991)

Nejčastěji se v aplikacích setkáváme s těmito dvěma typy algebraických rovnic o n neznámých.

Lineární rovnice o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je rovnice tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

kde koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, aspoň jeden je různý od nuly a číslo $b \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. (Polák, 1991)

Kvadratická rovnice o dvou neznámých x, y je rovnice tvaru

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y = b,$$

kde koeficienty $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je různý od nuly a číslo $b \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. (Polák, 1991)

2.1.2 Soustava m rovnic o n neznámých

Soustav m rovnic o n neznámých je mnoho typů. Můžeme se setkat s lineárními rovnicemi, kvadratickými rovnicemi, i se soustavami rovnic vyšších stupňů. Vyskytují se i soustavy rovnic, kde jsou rovnice různého stupně, např. soustava rovnic s lineární a kvadratickou rovnicí. Nebudeme je všechny vypisovat, uvedeme jen **soustavu m lineárních rovnic o n neznámých**, kterou se budeme v kapitole věnované diofantickým rovnicím a jejich soustavám věnovat nejvíce.

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty a $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ jsou absolutní členy soustavy. Pro čísla $m, n \in \mathbb{N}$ platí $m \geqq 1$ a $n \geqq 1$. Řešením soustavy je uspořádaná *n*-tice $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{C}^n$, která je řešením všech rovnic soustavy. Množinou všech řešení soustavy je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy. (Jarník, Šisler, 1969)

Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, když hodnost[8] matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené[9] matice soustavy. (Jarník, Šisler, 1969; Kopecký, Emanovský, 1990)

[8] Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků, sloupců. (Jarník, 1969)

[9] Rozšířená matice soustavy je matice soustavy rozšířená o sloupec pravých stran soustavy. (Polák, 1991)

3 Diofantické rovnice

3.1 Typy diofantických rovnic

Diofantická rovnice o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je algebraická rovnice, která má celočíselné koeficienty. Neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ mohou nabývat pouze celočíselných hodnot. (Calda, 1995)

Lineární diofantická rovnice o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je algebraická rovnice tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}$. Řešením rovnice je uspořádaná n-tice $[x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}] \in \mathbb{Z}^n$, pro kterou platí

$$a_1x_{10} + a_2x_{20} + \cdots + a_nx_{n0} = b.$$

Rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ je řešitelná právě tehdy, když $D(a_1, a_2, \dots, a_n)|b$[10]. (Calda, 1995) Důkaz pro speciální případ dvou neznámých je uveden v následujícím odstavci.

Lineární diofantická rovnice o dvou neznámých x, y je algebraická rovnice tvaru

$$ax + by = c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$. Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $[x_0, y_0] \in \mathbb{Z}^2$, pro kterou platí

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Rovnice $ax + by = c$ je řešitelná právě tehdy, když $D(a, b)|c$.

Důkaz: (Calda, 1995, s. 44-45)

Nejprve zjistíme, pro která a, b, c je rovnice $ax + by = c$ řešitelná. „Předpokládejme proto, že rovnice

$$ax + by = c$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$, má řešení $[x_0, y_0] \in \mathbb{Z}^2$, a nechť $D(a, b)$ je největší společný dělitel čísel a, b. Je zřejmé, že $D(a, b)$ je také dělitelem čísla $ax_0 + by_0$, a protože

[10] $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je označení pro největší společný dělitel čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Znak | označuje relaci „být dělitelem“ a znamená, že $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je dělitelem čísla b.

$ax_0 + by_0 = c$, je $D(a,b)$ i dělitelem čísla c. Dostali jsme tak nutnou podmínku, aby daná rovnice měla řešení: $D(a,b)$ musí být dělitelem čísla c."

Podmínka je i postačující. Předpokládejme, že $D(a,b)$ je zároveň dělitelem čísla c. Protože čísla $\frac{a}{D(a,b)}, \frac{b}{D(a,b)}$ jsou nesoudělná, existují $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tak, že platí

$$\frac{a}{D(a,b)}\alpha + \frac{b}{D(a,b)}\beta = 1.$$

Vynásobením číslem c dostaneme

$$a \cdot \frac{\alpha c}{D(a,b)} + b \cdot \frac{\beta c}{D(a,b)} = c,$$

což znamená, že čísla $x = \frac{\alpha c}{D(a,b)}, y = \frac{\beta c}{D(a,b)}$ splňují danou rovnici. Protože podle předpokladu $D(a,b)$ je dělitelem čísla c, jsou $x, y \in \mathbb{Z}$. K tomu, aby daná rovnice měla řešení, stačí, aby $D(a,b)$ byl i dělitelem čísla c.

Z toho plyne, že lineární diofantická rovnice

$$ax + by = c$$

s neznámými x, y má řešení právě tehdy, když $D(a,b)|c$.

Kvadratická diofantická rovnice o dvou neznámých x, y je algebraická rovnice tvaru

$$ax^2 + bx + cxy + dy + ey^2 = k,$$

kde $a, b, c\ d, e, k \in \mathbb{Z}$. Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $[x_0, y_0] \in \mathbb{Z}^2$, pro kterou platí

$$ax_0^2 + bx_0 + cx_0y_0 + dy_0 + ey_0^2 = k.$$

V práci se budeme dále zabývat kvadratickou diofantickou rovnicí, pro kterou $b = 0$, $c = 0, d = 0$, tedy rovnicí tvaru

$$ax^2 + ey^2 = k,$$

kde $a, e, k \in \mathbb{Z}$. (Weisstein, 2010) Řešením této rovnice je každá uspořádaná dvojice $[x_0, y_0] \in \mathbb{Z}^2$, pro kterou platí

$$ax_0^2 + ey_0^2 = k.$$

Na rozdíl od rovnic lineárních není pro kvadratické diofantické rovnice známa obecná metoda nalezení všech řešení. Pro některé speciální typy však taková metoda známa je, nebo jsou známy alespoň slabší vlastnosti řešení (např. metoda, jak z jednoho řešení nalézt nekonečně mnoho dalších, ne však nutně všechna). Příkladem může být předchozí tvar rovnice pro a, e kladná: z $ax^2 \geqq 0, ey^2 \geqq 0$ plyne po dosazení do rovnice $ax^2 \leqq c, ey^2 \leqq c$

a odtud $|x| \leqq \sqrt{\frac{c}{a}}, |y| \leqq \sqrt{\frac{c}{e}}$. Všechna řešení tedy můžeme nalézt přinejmenším tak, že do rovnice zkusíme dosadit všechny dvojice $[x, y] \in \mathbb{Z}^2$ splňující poslední dvě nerovnosti, protože těch je konečně mnoho. Zobecnit lze tuto úvahu do tvrzení, že diofantická rovnice, která má na jedné straně pozitivně či negativně definitní kvadratickou formu vektoru neznámých a na druhé konstantu, má vždy konečný počet řešení, která tím pádem lze všechna nalézt.

Dále pro kvadratickou diofantickou rovnici platí tvrzení: Jestliže rovnice $ax^2 + ey^2 = k$ má řešení, potom $D(a, e)|k$.

Důkaz[11]:

Nejprve zjistíme, pro která a, b, c je rovnice $ax^2 + by^2 = c$ řešitelná. Předpokládejme proto, že rovnice

$$ax^2 + by^2 = c$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$, má řešení $[x_0, y_0] \in \mathbb{Z}^2$, a nechť $D(a, b)$ je největší společný dělitel čísel a, b. Je zřejmé, že $D(a, b)$ je také dělitelem čísla $ax_0^2 + by_0^2$, a protože $ax_0^2 + by_0^2 = c$, je $D(a, b)$ i dělitelem čísla c. Dostali jsme tak podmínku: Jestliže je daná rovnice řešitelná, potom $D(a, b)$ je dělitelem čísla c.

Ještě zjistíme, zda je podmínka i postačující, tj. jestliže $D(a, b)|c$, potom má rovnice řešení. Tento výrok neplatí, ukážeme na příkladu:

$$3x^2 + 4y^2 = 5$$

$D(a, b)|c = D(3,4)|5$ je splněno, neboť $D(3,4) = 1$ a $1|5$, ale rovnice nemá celočíselné řešení, což je zřejmé. Tedy výrok: „Jestliže $D(a, b)|c$, potom má rovnice řešení.“, je nepravdivý.

Speciálním typem kvadratické diofantické rovnice je rovnice tvaru

$$x^2 - ny^2 = 1,$$

kde $n \in \mathbb{N}$; $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, která se nazývá Pellova rovnice. Pro n, která jsou čtvercem celého čísla, má rovnice jen triviální řešení. Je známa metoda, jak najít všechna řešení rovnice – jedná se

[11] Důkaz je udělán pro rovnici tvaru $ax^2 + ey^2 = k$, kterou se dále v této práci zabýváme.

o aplikaci rekurentního vzorce (viz 3.2.2 Příklad 3, Řešení IV.) na jedno konkrétní, tzv. fundamentální řešení, které lze získat pomocí teorie řetězových zlomků[12].

Jiným typem kvadratické diofanické rovnice s neznámými x, y je algebraická rovnice tvaru

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

která má nekonečně mnoho řešení tzv. pythagorejských trojic. (Weisstein, 2010; Huťťák, 2008)

Diofantickou rovnicí s neznámými x, y je také algebraická rovnice tvaru

$$x^n + y^n = c^n.$$

O jejím řešení mluví Velká Fermatova věta: pro přirozené číslo $n \geqq 3$ neexistuje netriviální celočíselné řešení rovnice $x^n + y^n = c^n$, kde $x, y, c \neq 0$. (Kala, 2005; Huťťák, 2008)

Soustava m diofantických rovnic o n neznámých je množina m diofantických rovnic různého stupně o n neznámých, přičemž $m < n$, aby soustava rovnic měla alespoň jeden stupeň volnosti. Řešením soustavy m rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je každá uspořádaná n-tice $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$, která je řešením všech rovnic soustavy. Množinou všech řešení soustavy je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy. (Polák, 1991)

3.2 Postup řešení diofantických rovnic a soustav rovnic a příklady

Při řešení diofantických rovnic využíváme znalostí o největším společném děliteli a vlastností dělitelnosti čísel, pomocí kterých lze určit, zda je rovnice řešitelná. Jestliže je diofantická rovnice řešitelná, pak je třeba vědět, jak rovnici řešit. Způsobů řešení diofantické rovnice je několik. V práci používáme řešení rovnic pomocí metody pokus-omyl, dále určením všech řešení z jednoho konkrétního řešení lineární diofantické rovnice, také pomocí ekvivalentích úprav rovnice a pomocí kongruence.

[12] Metodu hledání fundamentálního řešení neuvádíme, protože teorie řetězových zlomků přesahuje rámec této práce.

Metoda pokus omyl:

Zkoušíme do rovnice dosazovat libovolná čísla a řešit rovnici s nimi. Touto metodou nenalezneme všechna možná řešení, ale jen některá.

Z jednoho libovolného řešení lineární diofantické rovnice určit všechna řešení rovnice:

Máme lineární diofantickou rovnici $ax + by = c$ a nechť platí $D(a,b)|c$; předpokládejme, že uspořádaná dvojice $[x_0, y_0]$ je libovolným řešením rovnice. K určení všech řešení rovnice, ji převedeme na tvar $\frac{a}{D(a,b)}x + \frac{b}{D(a,b)}y = \frac{c}{D(a,b)}$. Protože $[x_0, y_0]$ je řešením rovnice, platí také $\frac{a}{D(a,b)}x_0 + \frac{b}{D(a,b)}y_0 = \frac{c}{D(a,b)}$, pokud odečteme od sebe tyto rovnice, dostaneme rovnici $\frac{a}{D(a,b)}(x - x_0) + \frac{b}{D(a,b)}(y - y_0) = 0$. Dělíme-li ji číslem $\frac{a}{D(a,b)} \neq 0$, dostaneme rovnici $(x - x_0) + \frac{\frac{b}{D(a,b)}(y-y_0)}{\frac{a}{D(a,b)}} = 0$. Výraz $y - y_0$ je dělitelný číslem $\frac{a}{D(a,b)}$, neboť $\frac{\frac{b}{D(a,b)}(y-y_0)}{\frac{a}{D(a,b)}} \in \mathbb{Z}$ a čísla $\frac{a}{D(a,b)}$, $\frac{b}{D(a,b)}$ jsou nesoudělná. Výraz $y - y_0$ můžeme psát ve tvaru $y - y_0 = t \cdot \frac{a}{D(a,b)}$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Dosazením do rovnice $\frac{a}{D(a,b)}(x - x_0) + \frac{b}{D(a,b)}(y - y_0) = 0$ dostaneme rovnici $\frac{a}{D(a,b)}(x - x_0) + \frac{b}{D(a,b)}t \cdot \frac{a}{D(a,b)} = 0$, odkud vyjádříme $x - x_0 = -\frac{b}{D(a,b)}t$. Každé celočíselné řešení rovnice $ax + by = c$ lze zapsat ve tvaru $x = x_0 - \frac{b}{D(a,b)}t$, $y = y_0 + \frac{a}{D(a,b)}t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Tedy pokud uspořádaná dvojice $[x_0, y_0]$ je libovolným řešením lineární diofantické rovnice $ax + by = c$, jsou všechna její řešení uspořádané dvojice $[x, y]$, pro něž platí $x = x_0 - \frac{b}{D(a,b)}t$, $y = y_0 + \frac{a}{D(a,b)}t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. (Calda, 1995)

Kongruence:

Definice: Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Řekneme, že celá čísla a, b jsou kongruentní modulo n, píšeme $a \equiv b \pmod n$, právě tehdy, když čísla a i b mají stejné zbytky při dělení číslem n. (Demlová, 2005, s. 29)

Tvrzení: Rovnice $ax \equiv b \pmod n$ má řešení právě tehdy, když číslo b je násobkem největšího společného dělitele čísel a a n. V takovém případě najdeme všechna čísla x jako řešení diofantické rovnice $ax + ny = b$. (Demlová, 2005, s. 30)

Postup řešení pro lineární a kvadratickou diofantickou rovnici pomocí kongruence.

Nechť pro lineární diofantickou rovnici $ax + ny = b$ platí $D(a,n)|b$. Pak podle definice kongruence platí, že

$$\begin{matrix} ax + ny \equiv b \pmod n \\ cx + 0y \equiv d \pmod n \\ x \equiv \frac{d}{c} \pmod n \end{matrix},$$

kde c je zbytek při dělení čísla a číslem n, a d je zbytek při dělení čísla b číslem n. Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{d}{c} \in \mathbb{Z}$. Pak řešením rovnice $ax + ny = b$[13] je x, pro které platí

$$x = \frac{d}{c} + n \cdot k,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.

Nechť pro kvadratickou diofantickou rovnici $ax^2 + ny^2 = b$ platí $D(a,n)|b$. Pak podle definice kongruence platí, že

$$\begin{matrix} ax^2 + ny^2 \equiv b \pmod n \\ cx^2 + 0y^2 \equiv d \pmod n \\ x^2 \equiv \frac{d}{c} \pmod n \end{matrix},$$

kde c je zbytek při dělení čísla a číslem n, a d je zbytek při dělení čísla b číslem n. Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x^2 \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{d}{c} \in \mathbb{Z}$. Pak řešením rovnice $ax^2 + ny^2 = b$[14] je

$$\begin{matrix} x^2 = \frac{d}{c} + n \cdot k \\ x = \pm\sqrt{\frac{d}{c} + n \cdot k} \end{matrix},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Hledáme řešení pro diofantickou rovnici, proto výraz $\sqrt{\frac{d}{c} + n \cdot k}$ musí být celočíselný.

Soustavy diofantických rovnic řešíme stejnými metodami jako soustavy rovnic, které řešíme v reálných číslech. Tyto metody se nazývají dosazovací a sčítací.

[13] Analogicky pro rovnici tvaru $nx + ay = b$.

[14] Analogicky pro rovnici tvaru $nx^2 + ay^2 = b$.

Slovní úlohy vedoucí na diofantické rovnice mají zpravidla množinu řešení omezenou podmínkami, vyplývajícími ze zadání. Velmi obvyklé jsou např. úlohy, kde se zjišťuje možný počet určitých objektů, a je tedy zřejmé, že řešení mohou být pouze nezáporná. Takové podmínky typicky omezí jinak nekonečnou množinu řešení rovnice na množinu konečnou.

Uvedeme příklady[15] lineárních a kvadratických diofantických rovnic a jejich soustav s řešeními. Dále uvedeme několik slovních úloh[16] vedoucích k řešení pomocí diofantických rovnic.

3.2.1 Lineární diofantické rovnice o dvou a třech neznámých

Příklad 1

Určete všechna řešení lineární diofantické rovnice $14x + 21y = 17.$

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že je řešitelná právě tehdy, když $D(14,21)|17$, což není splněno, neboť $D(14,21) = 7$ a $7 \nmid 17$, rovnice není tedy řešitelná.

Příklad 2

Určete všechna řešení lineární diofantické rovnice $3x + 4y = 5.$

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že je řešitelná právě tehdy, když $D(3,4)|5$, což je splněno, neboť $D(3,4) = 1$ a $1|5$, rovnice je tedy řešitelná.

Řešení I.

Metoda pokus-omyl.

Zvolíme libovolné číslo za x, např. $x = 1$; pak

$$3 + 4y = 5,$$

vypočítáme y: $y = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, $y \notin \mathbb{Z}$, $x = 1$ není řešením rovnice.

[15] Uvedené příklady a řešení jsou vlastní, slovní úlohy jsou převzaty, viz jednotlivé úlohy.

[16] Slovní úlohu používáme ve smyslu uvedeném v Analýza řešení slovních úloh na str. 10-11. (Novotná, 2000)

Zkusíme jiné číslo, např. $x = -1$; pak

$$-3 + 4y = 5,$$

vypočítáme y: $y = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$, $y \in \mathbb{Z}$, řešením rovnice je uspořádaná dvojice $[-1, 2]$.

Řešení II.[17]

Jestliže známe jedno řešení, najdeme pomocí něho všechna ostatní řešení. Použijeme uspořádanou dvojici $[-1, 2]$, kterou jsme nalezli v Řešení I. Upravíme danou rovnici na tvar

$$3(x + 1) + 4(y - 2) = 0.$$

Z vlastností čísel je zřejmé, že výraz $y - 2$ je dělitelný třemi; je možné ho tedy vyjádřit ve tvaru $y - 2 = 3t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Dosazením do předcházející rovnice dostaneme

$$3(x + 1) + 4 \cdot 3t = 0,$$

Odtud máme $x + 1 = -4t$.

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[-4t - 1;\ 3t + 2];\ t \in \mathbb{Z}$.

Řešení III.

Upravíme rovnici tak, že osamostatníme neznámou, u níž je menší koeficient[18]

$$x = \frac{5-4y}{3} = 1 - y + \frac{2-y}{3}.$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x, y \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{2-y}{3} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho t. Pak

$$x = 1 - y + t, \text{ kde } t = \frac{2-y}{3}.$$

Z toho plyne, že $3t = 2 - y$. Vyjádříme y: $y = 2 - 3t$.

Získali jsme celá čísla, dosadíme zpětně za y:

$$x = 1 - 2 + 3t + t = 4t - 1$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[4t - 1;\ 2 - 3t];\ t \in \mathbb{Z}$.

[17] Jedná se o postup popsaný na str. 24 pro konkrétní rovnici. Týká se všech dalších výskytů Řešení II. v podkapitole 3.2.1.

[18] Osamostatnění neznámé s menším koeficientem je výhodnější. Při osamostatnění neznámé s větším koeficientem bychom udělali jeden krok navíc a pak bychom pokračovali stejně jako při osamostatnění neznámé s menším koeficientem.

Řešení IV.

a) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence[19].

$$3x + 4y = 5$$

$$3x + 4y \equiv 5\ mod\ 3 \qquad 3x + 4y \equiv 5\ mod\ 4$$

$$y \equiv 2\ mod\ 3 \qquad 3x \equiv -x \equiv 1\ mod\ 4$$

$$y = 2 + 3k \qquad -x = 1 + 4k$$

$$x = -1 - 4k$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[-4k - 1;\ 2 + 3k];\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence a dosazením do rovnice.

$$3x + 4y = 5$$

$$3x + 4y \equiv 5\ mod\ 3 \qquad 3x + 4(2 + 3k) = 5$$

$$y \equiv 2\ mod\ 3 \qquad 3x + 12k = -3$$

$$y = 2 + 3k \qquad x = \frac{-3-12k}{3}$$

$$x = -1 - 4k$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[-4k - 1;\ 2 + 3k];\ k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 3

Určete všechna řešení lineární diofantické rovnice $15x + 17y = 19$.

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že je řešitelná právě tehdy, když $D(15,17)|19$, což je splněno, neboť $D(15,17) = 1$ a $1|19$, rovnice je tedy řešitelná.

Řešení I.

Metoda pokus-omyl.

Zvolíme libovolné číslo za x, např. $x = 1$; pak

$$15 + 17y = 19,$$

vypočítáme y: $y = \frac{19-15}{17} = \frac{4}{17}$, $y \notin \mathbb{Z}$, $x = 1$ není řešením rovnice.

Zkusíme jiné číslo, např. $x = -1$; pak

$$-15 + 17y = 19,$$

vypočítáme y: $y = \frac{19+15}{17} = \frac{34}{17} = 2$, $y \in \mathbb{Z}$, řešením rovnice je uspořádaná dvojice $[-1, 2]$.

[19] Jedná se o postup popsaný na str. 24 pro konkrétní rovnici. Týká se všech dalších výskytů Řešení IV. v podkapitole 3.2.1 a Řešení III. v podkapitole 3.2.2.

Řešení II.

Jestliže známe jedno řešení, najdeme pomocí něho všechna ostatní řešení. Použijeme uspořádanou dvojici $[-1, 2]$, kterou jsme nalezli v Řešení I. Upravíme danou rovnici na tvar

$$15(x+1) + 17(y-2) = 0.$$

Z vlastností čísel je zřejmé, že výraz $y-2$ je dělitelný patnácti; je možné ho tedy vyjádřit ve tvaru $y - 2 = 15t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Dosazením do předcházející rovnice dostaneme

$$15(x+1) + 17 \cdot 15t = 0,$$

Odtud máme $x + 1 = -17t$.

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[-17t - 1;\ 15t + 2];\ t \in \mathbb{Z}$.

Řešení III.

Upravíme rovnici tak, že osamostatníme neznámou, u níž je menší koeficient

$$x = \frac{19-17y}{15} = 1 - y + \frac{4-2y}{15}.$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x, y \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{4-2y}{15} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho t. Pak

$$x = 1 - y + t, \text{ kde } t = \frac{4-2y}{15}.$$

Z toho plyne, že $15t = 4 - 2y$. Vyjádříme y: $y = \frac{4-15t}{2} = 2 - 7t - \frac{t}{2}$.

Stále řešíme diofantickou rovnici, musí $y, t \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{t}{2} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho s. Pak

$$y = 2 - 7t - s, \text{ kde } s = \frac{t}{2}.$$

Z toho plyne, že $2s = t$.

Získali jsme celá čísla, dosadíme zpětně za t, y:

$$y = 2 - 7t - s = 2 - 7 \cdot 2s - s = 2 - 15s$$
$$x = 1 - y + t = 1 - 2 + 15s + 2s = -1 + 17s$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[17s - 1;\ 2 - 15s];\ s \in \mathbb{Z}$.

Řešení IV.

a) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence.

$$15x + 17y = 19$$

$15x + 17y \equiv 19\ mod\ 15$	$15x + 17y \equiv 19\ mod\ 17$
$2y \equiv 4\ mod\ 15$	$-2x \equiv 2\ mod\ 17$
$y \equiv 2\ mod\ 15$	$-x \equiv 1 + 17k$
$y = 2 + 15k$	$x = -1 - 17k$

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[-17k - 1;\ 2 + 15k];\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence a dosazením do rovnice.

$$15x + 17y = 19$$

$$\begin{aligned} 15x + 17y &\equiv 19\ mod\ 15 \\ 2y &\equiv 4\ mod\ 15 \\ y &\equiv 2\ mod\ 15 \\ y &= 2 + 15k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 15x + 17(2 + 15k) &= 19 \\ 15x + 255k &= -15 \\ x &= \frac{-15-255k}{15} \\ x &= -1 - 17k \end{aligned}$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[-17k - 1;\ 2 + 15k];\ k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 4

Určete všechna řešení lineární diofantické rovnice $8x + 9y - 11z = 13$.

Řešitelnost:

Analogicky jako pro dvě neznámé lze ukázat, že lineární diofantická rovnice o třech neznámých je řešitelná právě tehdy, když $D(8,9,11)|13$, což je splněno, neboť $D(8,9,11) = 1$ a $1|13$, rovnice je tedy řešitelná.

Řešení I.

Metoda pokus-omyl.

Zvolíme libovolné číslo za x, např. $x = 1$; pak

$$8 + 9y - 11z = 13,$$

po úpravě dostaneme $9y - 11z = 5$, zvolíme nyní za $y = 1$ pak

$$9 - 11z = 5$$

vypočítáme z: $z = \frac{5-9}{11} = \frac{-4}{11}$, $z \notin \mathbb{Z}$, $x = 1$, $y = 1$ není řešením rovnice.

Zkusíme jiné číslo, např. $x = 3$; pak

$$24 + 9y - 11z = 13,$$

po úpravě dostaneme $9y - 11z = -11$, zvolíme nyní za $y = 0$ pak

$$-11z = -11$$

vypočítáme z: $z = \frac{-11}{-11} = 1$, $z \in \mathbb{Z}$, řešením rovnice je uspořádaná trojice $[3, 0, 1]$.

Řešení II.

Jestliže známe jedno řešení, najdeme pomocí něho všechna ostatní řešení. Použijeme uspořádanou trojici $[3,0,1]$, kterou jsme nalezli v Řešení I., je to zobecnění postupu pro dvě neznámé. Upravíme danou rovnici na tvar

$$8(x-3)+9(y-0)-11(z-1)=0,$$

Z vlastností čísel je zřejmé, že výrazy $x-3$ a $z-1$ jsou dělitelné devíti; je možné je tedy vyjádřit ve tvaru $x-3=9t$ a $z-1=9s$, kde $t,s\in\mathbb{Z}$. Dosazením do předcházející rovnice dostaneme

$$8\cdot 9t+9(y-0)-11\cdot 9s=0,$$

Odtud máme $8t+y-11s=0$.

Řešením rovnice je množina uspořádaných trojic $[9t+3;\ -8t+11s;\ 9s+1];\ t,s\in\mathbb{Z}$.

Řešení III.

Upravíme rovnici tak, že osamostatníme neznámou, u níž je nejmenší koeficient

$$x=\frac{-9y+11z+13}{8}=-y+z+1+\frac{-y+3z+5}{8}.$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x,y,z\in\mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{-y+3z+5}{8}\in\mathbb{Z}$. Označíme ho t. Pak

$$x=-y+z+1+t,\text{ kde } t=\frac{-y+3z+5}{8}.$$

Z toho plyne, že $8t=-y+3z+5$. Vyjádříme y: $y=3z+5-8t$.

Získali jsme celá čísla, dosadíme zpětně za t,y:

$$x=-3z-5+8t+z+1+t=-2z+9t-4$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných trojic $[-2z+9t-4;\ 3z+5-8t;\ z];\ t,z\in\mathbb{Z}$.

Řešení IV.

a) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence, analogicky jako pro dvě neznámé.

$$8x+9y-11z=13$$

$$8x+9y-11z\equiv 13\ mod\ 8 \qquad 8x+9y-11z\equiv 13\ mod\ 9$$

$$y-3z\equiv 5\ mod\ 8 \qquad -x-2z\equiv 4\ mod\ 9$$

$$y\equiv 5+3z\ mod\ 8 \qquad -x\equiv +4+2z\ mod\ 9$$

$$y=5+3z+8k \qquad x=-4-2z-9k$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných trojic $[-4-2z-9k;\ 5+3z+8k;\ z];\ k,z\in\mathbb{Z}$.

b) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence a dosazením do rovnice.

$$8x + 9y - 11z = 13$$

$$8x + 9y - 11z \equiv 13\ mod\ 8$$
$$y - 3z \equiv 5\ mod\ 8$$
$$y \equiv 5 + 3z\ mod\ 8$$
$$y = 5 + 3z + 8k$$

$$8x + 9(5 + 3z + 8k) - 11z = 13$$
$$8x + 16z = -32 - 72k$$
$$x = -4 - 2z - 9k$$

Řešením rovnice je množina uspořádaných trojic $[-4 - 2z - 9k;\ 5 + 3z + 8k;\ z];\ k, z \in \mathbb{Z}$.

Závěr:

Řešením rovnice je množina uspořádaných *n*-tic, která je při použití různých řešitelských postupů zapsána jinak. Může se tedy zdát, že různým řešením nám vyšel různý výsledek, ale není tomu tak. Stačí použít vhodnou substituci a z jednoho řešení dostaneme druhé. Každý způsob řešení má své klady a zápory.

Řešení I. využijí žáci již od prvního stupně základní školy, kde se setkají poprvé s diofantickými rovnicemi. K Řešení I. je potřeba znát aritmetické operace. Na prvním stupni základní školy mohou žáci použít k řešení diofantických rovnic systematický pokus, kde se výsledky zaznamenávají do tabulky[20]. Těmito metodami nenalezneme všechna řešení diofantické rovnice.

Řešení II. využijí žáci od osmé třídy základní školy, kde se probírají lineární rovnice, které jsou k tomuto způsobu řešení potřeba. Tímto způsobem dostaneme všechna řešení diofantické rovnice.

Řešení III. využijí žáci od deváté třídy základní školy. Zde se učí lineární rovnice se dvěma neznámými, jejichž speciálním případem jsou lineární diofantické rovnice. Tímto způsobem dostaneme všechna řešení diofantické rovnice, ale je dlouhý, zvláště u složitějších úloh.

Řešení IV. využijí studenti na vysoké škole, je k němu třeba vědět, co znamená kongruence modulo n. Tento způsob řešení je jedním z nejrychlejších řešení diofantických rovnic, kterým nalezneme všechna řešení diofantické rovnice.

[20] Toto řešení je použito ve skriptech Elementární matematiky I. (Stehlíková, Hejný, 2000)

3.2.2 Kvadratické diofantické rovnice

Příklad 1

Určete řešení kvadratické diofantické rovnice $6x^2 + 14y^2 = 7$.

Řešitelnost:

Z vlastností kvadratické diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že jestliže je rovnice řešitelná, potom $D(6,14)|7$, což není splněno, neboť $D(6,14) = 2$ a $2 \nmid 7$, rovnice není tedy řešitelná.

Příklad 2

Určete řešení kvadratické diofantické rovnice $3x^2 + 4y^2 = 7$.

Řešitelnost:

Z vlastností kvadratické diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že jestliže je rovnice řešitelná, potom $D(3,4)|7$, což je splněno, neboť $D(3,4) = 1$ a $1|7$, na základě tohoto testu tedy nelze vyloučit, že rovnice má řešení.

Řešení I.

Metoda pokus-omyl.

Zvolíme libovolné číslo za x, např. $x = 1$; pak

$$3 + 4y^2 = 7,$$

vypočítáme y: $y^2 = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1$, $y = \pm 1$, $y \in \mathbb{Z}$, řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[1, 1]$, $[1, -1]$.

Řešení II.

Upravíme rovnici tak, že osamostatníme neznámou, u níž je menší koeficient

$$x^2 = \frac{7-4y^2}{3} = 2 - y^2 + \frac{1-y^2}{3}.$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x, y, \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{1-y^2}{3} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho t. Pak

$$x^2 = 2 - y^2 + t, \text{ kde } t = \frac{1-y^2}{3}.$$

Z toho plyne, že $3t = 1 - y^2$. Vyjádříme y^2: $y^2 = 1 - 3t$.

Získali jsme celá čísla, dosadíme zpětně za y^2:

$$x^2 = 2 - 1 + 3t + t = 1 + 4t.$$

Dopočítáme x, y: $x = \pm\sqrt{1 + 4t}$, $y = \pm\sqrt{1 - 3t}$, mají smysl jen pro $t = 0$.

Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[1, 1], [1, -1], [-1, 1], [-1, -1]$.

Řešení III.

a) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence.

$$3x^2 + 4y^2 = 7$$

$$3x^2 + 4y^2 \equiv 7\ mod\ 3 \qquad 3x^2 + 4y^2 \equiv 7\ mod\ 4$$

$$y^2 \equiv 1\ mod\ 3 \qquad 3x^2 \equiv -x^2 \equiv -1\ mod\ 4$$

$$y^2 = 1 + 3k \qquad -x^2 = -1 + 4k$$

$$y = \pm\sqrt{1 + 3k} \qquad x^2 = 1 - 4k$$

$$x = \pm\sqrt{1 - 4k}$$

x, y mají smysl jen pro $k = 0$.

Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[1, 1], [1, -1], [-1, 1], [-1, -1]$.

b) Rovnici budeme řešit pomocí kongruence a dosazením do rovnice.

$$3x^2 + 4y^2 = 7$$

$$3x^2 + 4y^2 \equiv 7\ mod\ 3 \qquad 3x^2 + 4(1 + 3k) = 7$$

$$y^2 \equiv 1\ mod\ 3 \qquad 3 - 12\mathrm{k} = 3x^2$$

$$y^2 = 1 + 3k \qquad 1 - 4\mathrm{k} = x^2$$

$$y = \pm\sqrt{1 + 3k} \qquad \pm\sqrt{1 - 4\mathrm{k}} = x$$

x, y mají smysl jen pro $k = 0$.

Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[1, 1], [1, -1], [-1, 1], [-1, -1]$.

Řešení IV.

Rovnice má konečně mnoho řešení a můžeme je nalézt tak, že zkoušíme dosazovat všechny dvojice $[x, y] \in \mathbb{Z}^2$ takové, že $|x| \leqq \sqrt{\frac{7}{3}}$, $|y| \leqq \sqrt{\frac{7}{4}}$, tedy $x, y \in \{-1, 0, 1\}$.[21]

Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[1, 1], [1, -1], [-1, 1], [-1, -1]$.

[21] Jedná se o postup uvedený na str. 21 pro konkrétní rovnici.

Příklad 3

Určete řešení kvadratické diofantické rovnice $x^2 - 3y^2 = 1$. (Pellova rovnice)

Řešitelnost:

Z vlastností kvadratické diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že jestliže je rovnice řešitelná, potom $D(1,3)|1$, což je splněno, neboť $D(1,3) = 1$ a $1|1$, na základě tohoto testu tedy nelze vyloučit, že rovnice má řešení.

Řešení I.

Metoda pokus-omyl.

Zvolíme libovolné číslo za x, např. $x = 2$; pak

$$4 - 3y^2 = 1,$$

vypočítáme y^2: $y^2 = \frac{-3}{-3} = 1$, $y = \pm 1$, $y \in \mathbb{Z}$.

Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[2, 1], [2, -1]$.

Řešení II.

Upravíme rovnici tak, že osamostatníme neznámou, u níž je menší koeficient

$$x^2 = 1 + 3y^2.$$

Vypočítáme $x = \pm\sqrt{1 + 3y^2}$. Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí platit $x \in \mathbb{Z}$, to je splněno pokud $1 + 3y^2 = l^2$, kde $l \in \mathbb{Z}$ a $y \in \mathbb{Z}$.

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[l, y]$, kde $l, y \in \mathbb{Z}$; $l^2 = 1 + 3y^2$.

Řešení III.

Rovnici budeme řešit pomocí kongruence a dosazením do rovnice.

$$\begin{aligned} x^2 - 3y^2 &= 1 \\ x^2 - 3y^2 &\equiv 1 \; mod \; 3 \\ x^2 &\equiv 1 \; mod \; 3 \\ x^2 &= 1 + 3k \\ x &= \pm\sqrt{1 + 3k} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 + 3k - 3y^2 &= 1 \\ 3y^2 &= 3k \\ y^2 &= k \\ y &= \pm\sqrt{k} \end{aligned}$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí platit $x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}$, to je splněno pokud $1 + 3k = l^2$, kde $l \in \mathbb{Z}$ a $k = m^2$, kde $m \in \mathbb{Z}$.

Řešením rovnice je množina uspořádaných dvojic $[l, m]$, kde $l, m \in \mathbb{Z}$; $l^2 = 1 + 3k$; $m^2 = k$.

Řešení IV.

V Řešení II. jsme vypočítali $x = \pm\sqrt{1 + 3y^2}$, jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí platit $x \in \mathbb{Z}$. Druhou neznámou vypočítáme z rekurentního vzorce. Tedy pokud máme $x_0 = 1, y_0 = 0$, pak $x_k = \sqrt{1 + 3y_k^2}$, $y_k = 2 \cdot y_{k-1} + x_{k-1}$, kde $k = 1,2, \dots, n$.
Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[x_k; y_k]$; $[-x_k; y_k]$; $[x_k; -y_k]$; $[-x_k; -y_k]$.

Příklad 4

Určete řešení kvadratické diofantické rovnice $x^2 + y^2 = 4$.

Řešitelnost:

Z vlastností kvadratické diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že jestliže je rovnice řešitelná, potom $D(1,1)|4$, což je splněno, neboť $D(1,1) = 1$ a $1|4$, na základě tohoto testu tedy nelze vyloučit, že rovnice má řešení.

Řešení I.

Metoda pokus-omyl.
Zvolíme libovolné číslo za x, např. $x = 2$; pak

$$4 + y^2 = 4,$$

vypočítáme y^2: $y^2 = 0$, $y = 0$, $y \in \mathbb{Z}$.
Řešením rovnice je uspořádaná dvojice $[2, 0]$.

Řešení II.

Upravíme rovnici tak, že osamostatníme neznámou, u níž je menší koeficient

$$x^2 = 4 - y^2.$$

Vypočítáme $x = \pm\sqrt{4 - y^2}$. Výraz $\sqrt{4 - y^2}$ je celočíselný jen pro $y \in \{-2, 0, 2\}$.
Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[0; -2]$; $[-2; 0]$; $[2; 0]$; $[0; 2]$.

Řešení III.

Nelze řešit kongruencí, protože podle definice: Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Řekneme, že celá čísla a, b jsou kongruentní modulo n, píšeme $a \equiv b \pmod n$, právě tehdy, když čísla a i b mají stejné zbytky při dělení číslem n. V tomto příkladě není splněno $n > 1$, pokud budeme rovnici řešit postupem uvedeným na str. 24-25.

Řešení IV.

Rovnice má konečně mnoho řešení a můžeme je nalézt tak, že zkoušíme dosazovat všechny dvojice $[x, y] \in \mathbb{Z}^2$ takové, že $|x| \leqq \sqrt{\frac{4}{1}}, |y| \leqq \sqrt{\frac{4}{1}}$, tedy $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Řešením rovnice jsou uspořádané dvojice $[0; -2]; [-2; 0]; [2; 0]; [0; 2]$.

Závěr:

Pokud v rovnici je neznámá sudého stupně, nezáleží na jejím znaménku.

Řešení I. využijí žáci od osmé třídy základní školy, kde se setkají s mocninami a umí řešit rovnice. Tímto postupem nenalezneme všechna řešení diofantické rovnice.

Řešení II. využijí žáci na střední škole. Zde probírají kvadratické rovnice. Tímto způsobem dostaneme všechna řešení diofantické rovnice, ale může být obtížné najít celočíselná řešení.

Řešení III. využijí studenti na vysoké škole, je třeba znát kongruenci. Je to jeden z nejrychlejších způsobů řešení kvadratické diofantické rovnice, při kterém získáme všechna řešení diofantické rovnice. Vzhledem k odmocňování může být obtížné nalézt celočíselná řešení, stejně jako u předchozích řešení.

3.2.3 Soustavy lineárních diofantických rovnic[22]

Příklad 1

Určete všechna řešení soustavy diofantických rovnic $\begin{matrix} 4x + 6y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{matrix}$.

Řešitelnost:

Z vlastností diofantických rovnic víme, že první rovnice soustavy je řešitelná právě tehdy, když $D(4,6,2)|3$, což není splněno, neboť $D(4,6,2) = 2$ a $2|3$, rovnice nejsou řešitelné.

Příklad 2

Určete všechna řešení soustavy diofantických rovnic $\begin{matrix} 2x + 6y = 2 \\ 9x + 2y + z = 1 \end{matrix}$.

[22] Tyto soustavy můžeme nalézt také pod názvem soustava n lineárních o m neznámých, kde hledáme pouze celočíselná řešení.

Řešitelnost:

Z vlastností diofantických rovnic víme, že první rovnice soustavy je řešitelná právě tehdy, když $D(2,6)|2$, což je splněno, neboť $D(2,6) = 2$ a $2|2$. Druhá rovnice je řešitelná právě tehdy, když $D(9,2,1)|1$, což je splněno, neboť $D(9,2,1) = 1$ a $1|1$, rovnice jsou tedy řešitelné.

Soustava je řešitelná[23] právě tehdy, když hodnost $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ = hodnost $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, což je splněno, neboť hodnost $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ a hodnost $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = 2$.

Řešení I.

Dosazovací metoda.

Z jedné rovnice osamostatníme jednu neznámou

$$x = 1 - 3y,$$

dosadíme ji do druhé rovnice

$$9(1 - 3y) + 2y + z = 1,$$

a vypočítáme druhou neznámou

$$\begin{aligned} -25y + z &= -8 \\ z &= -8 + 25y \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných trojic $[1 - 3y;\ y;\ 25y - 8];\ y \in \mathbb{Z}$.

Řešení II.

Sčítací metoda.

Rovnice upravíme tak, aby se daly sečíst a tím se jedna neznámá odečetla. Druhou rovnici vynásobíme mínus třemi, dostaneme

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 2 \\ -27x - 6y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

rovnice sečteme $-25x - 3z = -1$, osamostatníme neznámou s nižším koeficientem

$$z = \frac{1-25x}{3} = -8x + \frac{1-x}{3}.$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x, z \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{1-x}{3} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho t. Pak

$$z = -8x + t, \text{ kde } t = \frac{1-x}{3},$$

[23] U soustav diofantických rovnic nás zajímají celočíselná řešení. Pokud soustava rovnic nemá celočíselná řešení, je řešitelná, ale ne jako soustava diofantických rovnic.

vyjádříme x: $x = 1 - 3t$. Dopočítáme z: $z = -8(1 - 3t) + t = -8 + 25t$.

Vypočítané neznámé dosadíme do jedné z rovnic a zbývající neznámou.

$$\begin{aligned} 2(1 - 3t) + 6y &= 2 \\ 6y &= 2 - 2 + 6t \\ y &= t \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných trojic $[1 - 3t;\ t;\ 25t - 8];\ t \in \mathbb{Z}$.

Příklad 3

Určete všechna řešení soustavy diofantických rovnic $\begin{matrix} 8x + 7y + z = 3 \\ 9x + y + z = 4 \end{matrix}$.

Řešitelnost:

Z vlastností diofantických rovnic víme, že první rovnice soustavy je řešitelná právě tehdy, když $D(8,7,1)|3$, což je splněno, neboť $D(8,7,1) = 1$ a $1|3$. Druhá rovnice je řešitelná právě tehdy, když $D(9,1,1)|4$, což je splněno, neboť $D(9,1,1) = 1$ a $1|4$, rovnice jsou tedy řešitelné.

Soustava je řešitelná právě tehdy, když hodnost $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = hodnost $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, což je splněno, neboť hodnost $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ a hodnost $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = 2$. Soustava je řešitelná a má jednu neznámou volitelnou.

Řešení I.

Dosazovací metoda.

Z jedné rovnice osamostatníme jednu neznámou

$$z = 3 - 8x - 7y,$$

dosadíme ji do druhé rovnice

$$9x + y + 3 - 8x - 7y = 4,$$

a vypočítáme druhou neznámou

$$\begin{aligned} x - 6y &= 1 \\ x &= 1 + 6y \end{aligned}$$

výsledek dosadíme do rovnice $z = 3 - 8x - 7y$ a vypočítáme z,

$$z = 3 - 8(1 + 6y) - 7y = 3 - 8 - 48y - 7y = -5 - 55y.$$

Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných trojic $[1 + 6y; y;\ -5 - 55y];\ y \in \mathbb{Z}$.

Řešení II.

Sčítací metoda.

Rovnice upravíme tak, aby se daly sečíst a tím se jedna neznámá odečetla. První rovnici vynásobíme mínus jednou, dostaneme

$$\begin{aligned} -8x - 7y - z &= -3 \\ 9x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

rovnice sečteme $x - 6y = 1$, osamostatníme neznámou, u níž je menší koeficient

$$x = 1 + 6y.$$

Výsledek dosadíme do jedné z rovnic a dopočítáme druhou neznámou

$$\begin{aligned} 8(1 + 6y) + 7y + z &= 3 \\ 55y + z &= -5 \\ z &= -5 - 55y \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných trojic $[1 + 6y; y; -5 - 55y]; y \in \mathbb{Z}$.

Závěr:

Všechny uvedené způsoby řešení jsou schopni použít žáci v devátém ročníku základní školy, kde se soustavy lineárních rovnic probírají. Většinou používají jeden ze způsobů řešení soustav rovnic. U diofantických rovnic si žáci i studenti musí uvědomit, že hledají všechna celočíselná řešení, nestačí tedy, aby uvedli jedno z řešení. V množině řešení soustavy musí být alespoň jeden parametr.

Žáci nevyužijí možnosti zjistit řešitelnost soustavy pomocí hodnosti matice, tato látka se probírá až na střední, příp. vysoké škole.

3.2.4 Soustavy kvadratických diofantických rovnic

Soustavy kvadratických diofantických rovnic se mohou řešit všemi způsoby, které jsou uvedeny v podkapitole 3.2.3. U každého příkladu soustavy kvadratických diofantických rovnic uvedeme pouze jeden způsob řešení.

Příklad 1

Určete řešení soustavy kvadratických diofantických rovnic $\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 27 \\ x^2 + 3y^2 - z^2 &= 2 \end{aligned}$.

Řešitelnost:

Z vlastností diofantických rovnic víme, že jestliže první rovnice soustavy je řešitelná potom $D(1,3)|27$, což je splněno, neboť $D(1,3) = 1$ a $1|27$. Pro druhou rovnicic platí, že jestliže je řešitelná, potom $D(1,3,1)|2$, což je splněno, neboť $D(1,3,1) = 1$ a $1|2$. Pro jednotlivé rovnice na základě tohoto testu tedy nelze vyloučit, že rovnice mají řešení.

Soustavu rovnic budeme řešit sčítací metodou.

Rovnice upravíme tak, aby se daly sečíst a přitom se jedna neznámá odečetla. Druhou rovnici vynásobíme mínus jednou, dostaneme

$$\begin{matrix} x^2 + 3y^2 = 27 \\ -x^2 - 3y^2 + z^2 = -2' \end{matrix}$$

rovnice sečteme $z^2 = 25, z = \pm 5$. Vypočítáme další neznámou dosazením do druhé rovnice

$$\begin{matrix} x^2 + 3y^2 - 25 = 2 \\ x^2 = 27 - 3y^2 \\ x = \pm\sqrt{27 - 3y^2} \end{matrix} .$$

Řešíme kvadratickou diofantickou rovnici, $x \in \mathbb{Z}$, to je splněno jen pro

$$\begin{matrix} 27 - 3y^2 \geqq 0 \\ y^2 \leqq \frac{27}{3} \\ y \leqq \pm 3 \end{matrix} .$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná množina trojic $\left[\sqrt{27 - 3y^2}; y;\ 5\right]$; $\left[\sqrt{27 - 3y^2}; y;\ -5\right]$, kde $y \in \{-3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Příklad 2

Určete řešení soustavy kvadratických diofantických rovnic $\begin{matrix} x^2 + 3y^2 + z^2 = 4 \\ 2x^2 - y^2 + 2z^2 = 1 \end{matrix}$.

Řešitelnost:

Z vlastností diofantických rovnic víme, že jestliže první rovnice soustavy je řešitelná potom $D(1,3,1)|4$, což je splněno, neboť $D(1,3,1) = 1$ a $1|4$. Pro druhou rovnici platí, že jestliže je řešitelná, potom $D(2,1,1)|1$, což je splněno, protože $D(2,1,1) = 1$ a $1|1$. Pro jednotlivé rovnice na základě tohoto testu tedy nelze vyloučit, že rovnice mají řešení.

Soustavu rovnic budeme řešit sčítací metodou.

Rovnice upravíme tak, aby se daly sečíst a přitom se jedna neznámá odečetla. První rovnici vynásobíme mínus dvěma, dostaneme

$$-2x^2 - 6y^2 - 2z^2 = -8$$
$$2x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$$

rovnice sečteme $-7y^2 = -7$, a vypočítáme y: $y^2 = 1$, $y = \pm 1$. Vypočítáme další neznámou dosazením do první rovnice

$$x^2 + 3 + z^2 = 4$$
$$x^2 + z^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1 - z^2}$$

Řešíme kvadratickou diofantickou rovnici, $x \in \mathbb{Z}$, to je splněno jen pro

$$1 - z^2 \geqq 0$$
$$z^2 \leqq 1 \quad .$$
$$z \leqq \pm 1$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná množina trojic $\left[\sqrt{1 - z^2}; 1;\ z\right]$;

$\left[\sqrt{1 - z^2}; -1;\ z\right]$, kde $z \in \{-1; 0; 1\}$.

Příklad 3

Určete řešení soustavy kvadratických diofantických rovnic $\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \end{matrix}$.

Řešitelnost:

Z vlastností diofantických rovnic víme, že jestliže první rovnice soustavy je řešitelná potom $D(1,1)|4$, což je splněno, neboť $D(1,1) = 1$ a $1|4$. Pro druhou rovnici platí, že jestliže je řešitelná, potom $D(1,1,1)|1$, což je splněno, protože $D(1,1,1) = 1$ a $1|1$. Pro jednotlivé rovnice na základě tohoto testu tedy nelze vyloučit, že rovnice mají řešení.

Soustavu rovnic budeme řešit dosazovací metodou.

Z jedné rovnice osamostatníme jednu neznámou

$$x^2 = 4 - y^2$$
$$x = \pm\sqrt{4 - y^2}$$

dosadíme ji do druhé rovnice

$$4 - y^2 - y^2 + z^2 = 1$$

a vypočítáme druhou neznámou

$$z^2 = -3 + 2y^2$$
$$z = \pm\sqrt{-3 + 2y^2}$$

Řešíme kvadratickou diofantickou rovnici, $x, z \in \mathbb{Z}$, to je splněno jen pro

$$\begin{array}{ll} & -3 + 2y^2 \geqq 0 \\ 4 - y^2 \geqq 0 & y^2 \geqq \frac{3}{2} \\ y^2 \leqq 4 & \\ y \leqq \pm 2 & y \geqq \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} .$$

$$\pm 2 \geqq y \geqq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná množina trojic $\left[\sqrt{4 - y^2}; y; \sqrt{-3 + 2y^2}\right]$, kde $y \in \{-2; 2\}$.

Závěr:

Soustavy kvadratických diofantických rovnic mohou uvedenými způsoby řešit žáci na středních školách, kde se vyučují kvadratické rovnice. U diofantických rovnic musí mít žáci i studenti na paměti, že hledají celočíselná řešení. Což může být u soustav kvadratických rovnic obtížné. V množině řešení soustavy musí být alespoň jeden parametr, který je omezen v závislosti na odmocňovaném výrazu.

3.2.5 Slovní úlohy vedoucí na diofantickou rovnici

V předchozí části práce jsme uvedli různé způsoby řešení diofantických rovnic a soustav rovnic. V této podkapitole se zabýváme slovními úlohami vedoucích k řešení diofantických rovnic a soustav rovnic. U každé slovní úlohy používáme jiný způsob řešení.

Příklad 1 (upraveno podle Calda, 1995)

Určete, kolik je potřeba desetilitrových a patnáctilitrových nádob, aby bylo možné do nich rozlít vodu z nádrže o objemu 200 litrů.

Sestavení rovnice:

Počet desetilitrových nádob… x

Počet patnáctilitrových nádob… y

Dostaneme diofantickou rovnici $10x + 15y = 200$, tj. $2x + 3y = 40$.

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že je řešitelná právě tehdy, když $D(2,3)|40$, což je splněno, neboť $D(2,3) = 1$ a $1|40$, rovnice je tedy řešitelná.

K řešení použijeme tento postup: z jednoho řešení diofantické rovnice dostaneme všechna řešení.

Jedním z řešení rovnice je uspořádaná dvojice $[11,2]$. Upravíme danou rovnici na tvar

$$2(x - 11) + 3(y - 2) = 40,$$

odtud vidíme, že výraz $x - 11$ je dělitelný třemi; je možné je tedy vyjádřit ve tvaru $x - 11 = 3t$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Dosazením do předcházející rovnice dostaneme

$$2 \cdot 3t + 3(y - 2) = 40,$$

Odtud máme $2t + y - 42 = 0,\ y = 42 - 2t.\ x, y$ jsou nezáporná, parametr t musí být takový, aby platilo

$$\begin{gathered} 11 + 3t \geqq 0, 42 - 2t \geqq 0 \\ \frac{42}{2} \geqq t \geqq -\frac{11}{3} \end{gathered} .$$

Desetilitrových nádob je potřeba $11 + 3t$ a patnáctilitrových nádob je potřeba $42 - 2t$, kde $t \in \{-3, -2, -1, 0, 1, \ldots, 21\}$.

Příklad 2 (upraveno podle Hejný, 1990)

Dá se suma 500 Kč zaplatit dvaceti mincemi hodnoty 5, 20 a 50 Kč?

Sestavení rovnice:

5-ti korunové mince…x

20-ti korunové mince…y

50-ti korunové mince…z

Dostaneme soustavu diofantických rovnic $\begin{gathered} 5x + 20y + 50z = 500 \\ x + y + z = 20 \end{gathered}$.

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice víme, že první rovnice soustavy je řešitelná právě tehdy, když $D(5,20,50)|500$, což je splněno, neboť $D(5,20,50) = 5$ a $5|500$. Druhá rovnice je řešitelná právě tehdy, když $D(1,1,1)|20$, což je splněno, neboť $D(1,1,1) = 1$ a $1|20$, rovnice jsou tedy řešitelné.

Soustava je řešitelná právě tehdy, když hodnost $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = hodnost $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 20 & 50 & 500 \\ 1 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right)$, což je splněno, neboť hodnost $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ a hodnost $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 20 & 50 & 500 \\ 1 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right) = 2.$

K řešení použijeme dosazovací metodu.

Z jedné rovnice osamostatníme jednu neznámou

$$x = 20 - y - z,$$

dosadíme do druhé rovnice

$$5(20 - y - z) + 20y + 50z = 500$$

a vypočítáme druhou neznámou

$$15y + 45z = 400$$
$$y = \frac{400-45z}{15} = 26 - 3z + \frac{10}{15},$$

Řešíme diofantickou rovnici, hledáme tedy celočíselná řešení, což y nesplňuje. Rovnice nemá celočíselné řešení.

Suma se nedá zaplatit dvaceti mincemi hodnoty 5, 20 a 50 Kč.

Příklad 3

Zjistěte, kolik kusů židlí a stolů bylo koupeno, víme-li, že celková cena nákupu byla 59 000 Kč, židle stojí 670 Kč a stůl stojí 2 590 Kč.

Sestavení rovnice:

Počet židlí…x

Počet stolů…y

Dostaneme lineární diofantickou rovnici $670x + 2590y = 59000,$

tj. $67x + 259y = 5900.$

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice o dvou neznámých víme, že je řešitelná právě tehdy, když $D(67{,}259)|5900$, což je splněno, neboť $D(67{,}259) = 1$ a $1|5900$, rovnice je tedy řešitelná.

K řešení použijeme tento postup: rovnici budeme řešit tak, že neznámou s menším koeficientem osamostatníme

$$x = \frac{5900-259y}{67} = 88 - 3y + \frac{4-58y}{67}.$$

Jelikož řešíme diofantickou rovnici, musí $x, y \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{4-58y}{67} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho t. Pak

$$x = 88 - 3y + t, \text{ kde } t = \frac{4-58y}{67}.$$

Z toho plyne, že $67t = 4 - 58y$. Vyjádříme y: $y = \frac{4-67t}{58} = -t + \frac{4-9t}{58}$.

Stále řešíme diofantickou rovnici, $y, t \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{4-9t}{58} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho s. Pak

$$y = -t + s, \text{ kde } s = \frac{4-9t}{58}.$$

Z toho plyne, že $58s = 4 - 9t$. Vyjádříme t: $t = \frac{4-58s}{9} = -6s + \frac{4-4s}{9}$.

Pokračujeme v řešení diofantické rovnice, $t, s \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{4-4s}{9} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho r. Pak

$$t = -6s + r, \text{ kde } r = \frac{4-4s}{9}.$$

Z toho plyne, že $9r = 4 - 4s$. Vyjádříme s: $s = \frac{4-9r}{4} = 1 - 2r + \frac{r}{4}$.

Řešíme diofantickou rovnici, $s, r \in \mathbb{Z}$, tedy výraz $\frac{r}{4} \in \mathbb{Z}$. Označíme ho p. Pak

$$s = 1 - 2r + p, \text{ kde } p = \frac{r}{4}.$$

Z toho plyne, že $4p = r$.

Získali jsme celá čísla, dosadíme zpětně za s, t, x, y:

$$\begin{aligned} s &= 1 - 2 \cdot 4p + p = 1 - 7p \\ t &= -6(1 - 7p) + 4p = -6 + 46p \\ y &= 6 - 46p + 1 - 7p = 7 - 53p \\ x &= 88 - 3(7 - 53p) - 6 + 46p = 205p + 61 \end{aligned}$$

x, y jsou celá nezáporná čísla, parametr p musí být takový, aby platilo

$$\begin{gathered} 205p + 61 \geqq 0, 7 - 53p \geqq 0 \\ \frac{7}{53} \geqq p \geqq -\frac{61}{205} \end{gathered} .$$

Podmínka platí pouze pro $p = 0$.

Bylo koupeno 61 židlí a 7 stolů.

Příklad 4

Máme 71 chapadel a chceme zjistit, kolik máme červených, modrých a zelených chobotnic, když po řadě mají 3,4 a 7 chapadel?

Sestavení rovnice:

Červená chobotnice…x

Modrá chobotnice…y

Zelená chobotnice…z

Dostaneme lineární diofantickou rovnici $3x + 4y + 7z = 71$.

Řešitelnost:

Z vlastností lineární diofantické rovnice víme, že je řešitelná právě tehdy, když $D(3,4,7)|71$, což je splněno, neboť $D(3,4,7) = 1$ a $1|71$, rovnice je tedy řešitelná.

Rovnici budeme řešit pomocí kongruence a dosazením do rovnice.

$$3x + 4y + 7z = 71$$

$$3x + 4y + 7z \equiv 71\ mod\ 3 \qquad 3x + 4(2 - z + 3k) + 7z = 71$$

$$y + z \equiv 2\ mod\ 3 \qquad 3x + 8 - 4z + 12k + 7z = 71$$

$$y = 2 - z + 3k \qquad 3x = 63 - 3z - 12k$$

$$x = 21 - z - 4k$$

Jelikož řešíme slovní úlohu, kde hledáme celočíselná kladná řešení, tak musí platit

$$21 - z - 4k \geqq 0, 2 - z + 3k \geqq 0, z \geqq 0$$

$$\frac{21-z}{4} \geqq k \geqq \frac{z-2}{3},$$

Červených chobotnic je $21 - z - 4k$, modrých chobotnic je $2 - z + 3k$ a zelených chobotnic je z, kde $z \in \mathbb{Z}_+$ a pro k platí $\frac{21-z}{4} \geqq k \geqq \frac{z-2}{3}$.

Závěr:

Slovní úlohy, které řešíme pomocí diofantických rovnic, mají většinou omezení řešení. Často jedním z omezení je, že hledáme pouze kladná řešení, které vyplývá ze zadání a vzhledem k diofantickým rovnicím také celočíselné.

ZÁVĚR

Při zkoumání literatury, která se zabývá diofantickými rovnicemi, jsem se nesetkala s žádnou česky psanou literaturou, kde by toto téma bylo uceleně zpracováno.

Podařilo se mi nalézt a zpracovat informace o Diofantovi a jeho práci. Také se mi povedlo získat informace o diofantických rovnicích. Bylo především problematické sehnat informační zdroje o kvadratických diofantických rovnicích, což se mi nakonec také podařilo. Na příkladech, které jsem v práci uvedla, jsem si vyzkoušela, jaké to je vytvářet zadání úloh, a jak je těžké vytvořit soustavu diofantických rovnic, aby byla řešitelná.

Práce je vhodným úvodem do podstaty diofantických rovnic a vhodným teoretickým východiskem pro zkoumání didaktických aspektů diofantických rovnic. V oblasti výuky matematiky lze např. zjistit, kterým způsobům řešení dávají žáci přednost, vzhledem k jejich matematickým znalostem a dovednostem. Toto téma by bylo užitečné rozšířit i v teoretické části, např. zabývat se hlouběji kvadratickými diofantickými rovnicemi.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A PRAMENŮ

BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Vyd. 4. Praha : Academia, 2006. 831 s. ISBN 80-200-1448-9.

CALDA, Emil. *Rovnice ve škole neřešené*. Vyd. 1. Praha : Prometheus, 1995. 54 s. ISBN 80-85849-88-7.

DEMLOVÁ, Marie. *Diskrétní matematika a logika* [online]. 2005 [cit. 2010-03-06]. Dostupné z WWW: <http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/dml/pred10.pdf>

HEATH, Thomas Little. *Diophantos of Alexandria : A Study in the History of Greek Algebra* [online]. Cambridge : University press warehouse, 1885 [cit. 2010-03-13]. Dostupné z WWW: <http://ia311315.us.archive.org/2/items/diophantosofalex00heatrich/diophantosofalex00heatrich.pdf>.

HEJNÝ, Milan, et al. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladatel'stvo, 1990. 560 s. ISBN 80-08-01344-3.

HUŘŤÁK, Otto. *Science world : Matematika* [online]. 2008-05-07 [cit. 2010-03-26]. Věčné tajemství diofantických rovnic. Dostupné z WWW: <http://scienceworld.cz/matematika/vecne-tajemstvi-diofantickych-rovnic-546>.

JANEČEK, František. *Algebraické výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy : sbírka úloh k opakování a procvičování učiva matematiky střední školy*. 2. upr. a rozš. vyd. Praha : Jednota československých matematiků a fyziků, 1991. 137 s. ISBN 80-7015-300-8.

JARNÍK, Jiří; ŠISLER, Miroslav. *Jak řešit rovnice a jejich soustavy*. 2. dopl. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1969. 243 s.

KALA, Víťa Diofantické rovnice. In *Diofantické rovnice*. Bernartice : [s.n.], 2005 [cit. 2010-04-01]. Dostupné z WWW: <http://|mks.mff.cuni.cz/library/DiofantickeRovniceVK/DiofantickeRovniceVK.pdf>.

KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha : Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1969. 224 s. ISBN 507-21-875.

KOPECKÝ, Milan; EMANOVSKÝ, Petr. *Sbírka řešených příkladů z algebry*. Vyd. 1. Olomouc : Univerzita Palackého, 1990. 206 s.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha : UK-PedF, 2000. 126 s. ISBN 80-7290-011-0.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Vyd. 8. Praha : Prometheus, 1991. 608 s. ISBN 80-7196-267-8.

STEHLÍKOVÁ, Naďa; HEJNÝ, Milan. *Elementární matematika : rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie*. Vyd. 2. Praha : Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. 80 s. ISBN 80-7290-014-5.

WEISSTEIN, Eric W. *Wolfram MathWorld* [online]. c1999-2010, 2010-03-03 [cit. 2010-04-01]. Diophantine Equation--2nd Powers. Dostupné z WWW: <http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation2ndPowers.html>.

DALŠÍ POUŽITÁ LITERATURA

COUFALOVÁ, Jana, et al. *Matematika pro osmý ročník základní školy*. Vyd. 1. Praha : Fortuna, 2000. 208 s. ISBN 80-7168-722-7.

COUFALOVÁ, Jana, et al. *Matematika pro devátý ročník základní školy*. Vyd. 1. Praha : Fortuna, 2000. 252 s. ISBN 80-7168-731-6.

MAŘASOVÁ, Hana. *Lineární diofantické rovnice*. Praha, 2002. 61 s. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

NOVOTNÁ, Jarmila; TRCH, Milan. *Algebra a teoretická aritmetika : sbírka příkladů. Část 1, Lineární algebra*. Vyd. 3. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2006. 166 s. ISBN 80-7290-252-0.

NOVOTNÁ, Jarmila; TRCH, Milan. *Algebra a teoretická aritmetika : sbírka příkladů. Část 2, Polynomická algebra*. Vyd. 1. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 138 s. ISBN 80-7066-266-2.

ODVÁRKO, Oldřich; CALDA, Emil; ŠEDIVÝ, Jaroslav; ŽIDEK, Stanislav. *Metody řešení matematických úloh*. Vyd. 1. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 261 s. ISBN 80-04-20434-1.

STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*. Vyd. 1. Praha : Orbis, 1963. 256 s. ISBN 11-123-63.

ŠISLER, Miroslav; ANDRYS, Josef. *O řešení algebraických rovnic*. Vyd. 1. Praha : Mladá fronta, 1966. 126 s.

Matematika : učební osnovy pro 1. až 9. ročník. Vyd. 1. Praha : Fortuna, 1996. 37 s.

Učební dokumenty pro gymnázia : učební plány, učební osnovy (denní studium, studium při zaměstnání) : osmiletý studijní cyklus, čtyřletý studijní cyklus. Vyd. 1. Praha : Fortuna, 1999. 205 s.