

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
**Bakalářská práce**



Daniel Duda

**Nekovové odporové termometry nízkých teplot**

Katedra fyziky nízkých teplot

Vedoucí práce: doc. RNDr. Miloš Rotter, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2011

Zde vyslovuji poděkování mému vedoucímu, panu doc. Miloši Rotterovi za jeho příjemné vedení a za trpělivost při zodpovídání dotazů. Také děkuji panu RNDr. Davidu Schmoranzerovi, který mi mnoho pomáhal při praktické práci v laboratoři a při přípravě experimentu. Za motivaci děkuji panu prof. Ladislavu Skrbkovi. Největší poděkování náleží Bohu, stvořiteli nádherného Vesmíru plného tajemství, která zde na Matfyzu můžeme hledat a studovat.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

podpis

**Název práce:** Nekovové odporové termometry nízkých teplot

**Autor:** Daniel Duda

**Katedra:** Katedra fyziky nízkých teplot

**Vedoucí bakalářské práce:** doc. RNDr. Miloš Rotter, CSc, Katedra fyziky nízkých teplot, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

**Abstrakt:** Byla provedena teplotní kalibrace série rezistorů  $\text{RuO}_2$  v provedení SMD v lázni normálního a supratekutého hélia v oboru teplot 1,4 až 4,2 K vůči referenčnímu teploměru tlaku nasycených par. Naměřená teplotní závislost elektrického odporu rezistorů byla analyzována s použitím exponenciální funkce a Čebyševových polynomů. Byla stanovena optimální kalibrace pro využití rezistorů  $\text{RuO}_2$  jako nízkoteplotních teploměrů.

**Klíčová slova:** nízkoteplotní termometrie, elektrický odpor rezistorů  $\text{RuO}_2$ , čerpání par  $^4\text{He}$ , teplotní kalibrace, Čebyševovy polynomy.

**Thesis title:** Non-metallic resistive low temperature thermometers

**Author:** Daniel Duda

**Department:** Department of Low Temperature Physics,

**Supervisor:** doc. RNDr. Miloš Rotter, CSc, Department of Low Temperature Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague.

**Abstract:** temperature calibration has been carried out on series of resistors made of  $\text{RuO}_2$  of SMD type in the bath of normal and superfluid helium in temperatures at 1.4 - 4.2 K with reference thermometer of saturated vapor pressure. Measured temperature dependence of electrical resistance of resistors was analyzed using the exponential function and Chebychev's polynomials. It was established an optimum calibration for the use of resistors as thermometers.

**Keywords:** low-temperature thermometry, electrical resistance of  $\text{RuO}_2$  resistors,  $^4\text{He}$  vapor pumping, temperature calibration, Chebychev's polynomials.

# Obsah

Obsah .....	5
Úvod.....	6
1. Teoretický úvod.....	7
1.1. Teplota.....	7
1.2. Odpor polovodiče .....	8
2. Popis měření .....	10
2.1. Vztažný teploměr .....	10
2.2. Osazení odporů.....	11
2.3. Cyklování .....	12
2.4. Kryostat .....	13
2.5. Měření tlaku.....	14
2.6. Program pro sběr dat .....	14
2.7. Program na výpočet teploty .....	15
2.8. Závislost měřených hodnot na excitaci.....	15
2.9. Čebyševovy polynomy .....	19
2.10. Jaký řád rozvoje použít? .....	20
3. Výsledky .....	24
3.1. Naměřená data .....	24
3.2. Proložení exponenciální funkcí .....	26
3.3. Proložení Čebyševovými polynomy .....	31
3.4. Proložení Čebyševovými polynomy druhého řádu .....	35
3.5. Různé další jevy pozorované v naměřených datech.....	39
4. Diskuse .....	44
Závěr .....	46
Seznam použité literatury.....	48

# Úvod

Nejnižší pozorovaná teplota na Zemi je  $-90^{\circ}\text{C}$ , nejnižší teplota ve Vesmíru je teplota *reliktního záření* 2,7 K. Dusík, běžně používaná kryokapalina, vře při  $-196^{\circ}\text{C}$ , hélium přechází do *supratekutého stavu* při 2,17 K a pokročilými metodami jaderné demagnetizace lze v laboratoři dosáhnout až teplot v řádu pK.

Fyzika nízkých teplot se zabývá nejrůznějšími zákony popsány v ostatních partiích fyziky nastávajícími právě při nízkých teplotách. K těmto vzrušujícím jevům patří *supratekutost* a *supravodivost*, obecně makroskopické projevy kvantové podstaty světa kolem nás.

Velmi mnoho nejrůznějších fyzikálních veličin má závislost na *teplotě*. Tudíž je nutné umět *měřit teplotu*. Jedním z možných teploměrů, dokonce definičním teploměrem v oblasti od 0,65 K do 5 K, je *tlak nasycených par hélia nad hladinou kapalného hélia*.

Mnohdy je snazší měřit jinou veličinu s teplotou svázanou a z ní teplotu vypočítat. Mezi takovéto snadno měřitelné a dobře reprodukovatelné veličiny patří veličiny elektrické, v této oblasti především *odpor* polovodičů, ten totiž s klesající teplotou velmi rychle roste, takže relativní citlivost je tím lepší, čím je vzorek studenější. Jako polovodičové odporové teploměry lze snadno použít sériově vyráběné rezistory v provedení SMD, které jsou malé, levné a velmi odolné vůči teplotnímu i mechanickému namáhání.

Cílem mé práce je proměřit teplotní závislost odporu několika takovýchto běžně dostupných rezistorů a najít funkce popisující závislost jejich odporu na teplotě, tak je přeměnit v *teploměry*, které bude možno v budoucnu v laboratoři použít právě tam, kde je nepohodlné používat definiční teploměr – *tlak nasycených par*.

# 1. Teoretický úvod

## 1.1. Teplota

Teplotu jakožto intenzivní veličinu nemůžeme definovat pomocí nějakého *etalonu*. Nezbyvá než vhodným způsobem definovat *stupnici*, která je buď vztažena k nějakým pevným bodům (například trojný bod vody), nebo k nějakému fyzikálnímu jevu jednoznačně souvisejícímu s teplotou (například teplotní roztažnost rtuti). Výběr stupnice je vždy předmětem *dohody* podobně jako etalony používané pro určování jiných veličin.

V současnosti (od roku 1990 minimálně do roku 2011) se užívá *Mezinárodní Teplotní Stupnice ITS-90* [1], která je pevně definována na různých teplotních intervalech a v různých pevných bodech (*tabulka 1.1.1*). Mezi jednotlivými pevnými body je teplota určena pomocí *Planckova vyzařovacího zákona* (1.1.3) pro monochromatické záření, neboť tento zákon je *absolutní* funkcí teploty. Při nižších teplotách se však užívá teploměrů jiných a to z důvodů ryze praktických.

*Tabulka 1.1.1.: Pevné body a intervaly stupnice ITS-90 [1]*

Vztah nebo bod	Teplota nebo interval [K]	Teploměr	
Tlak nasycených par <i>hélia 3</i>	(0,65; 3,2)	Tlak nasycených par	
Tlak nasycených par <i>hélia 4</i> pod $\lambda$ -bodem	(1,25; 2,1768)		
Tlak nasycených par <i>hélia 4</i> nad $\lambda$ -bodem	(2,1768; 5,0)		
Trojný bod <i>vodíku</i>	13,8033	Héliový plynový teploměr	
Trojný bod <i>neonu</i>	24,5561		
Trojný bod <i>kyslíku</i>	54,3584		
Trojný bod <i>argonu</i>	83,8058		
Trojný bod <i>rtuti</i>	234,3156		
Trojný bod <i>vody</i>	273,16		
Tání <i>galia</i>	302,9146		Platinový odporový teploměr
Tuhnutí <i>india</i>	429,7485		
Tuhnutí <i>cínu</i>	505,078		
Tuhnutí <i>zinku</i>	692,677		
Tuhnutí <i>hliníku</i>	933,473		
Tuhnutí <i>stříbra</i>	1234,93		
Tuhnutí <i>zlata</i>	1337,33	Planckův vyzařovací zákon	
Tuhnutí <i>mědi</i>	1357,77		

V termodynamice lze teplotu zavést ze stavové rovnice *ideálního plynu*

$$p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T \quad (1.1.1)$$

resp.

$$U = 3/2 \cdot N \cdot k_B \cdot T.$$

V realitě je ideálnímu plynu nejbližší hélium. Problém je v tom, že při teplotách použitých v mé práci je hélium kapalné.

V kinetické teorii plynů lze teplotu odvodit z pohybu molekul

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T, \quad (1.1.2)$$

zde však narážíme na problém, jak stanovit střední kvadratickou rychlost.

Pro měření vysokých teplot se v praxi skutečně dá použít Planckův zákon vyzařování *absolutně černého tělesa*:

$$dI = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \cdot \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} d\omega. \quad (1.1.3)$$

Je zřejmé, že *intenzita* záření je významná jen pro vyšší teploty, kdy je člen v exponentu malý, tedy celý jmenovatel zlomku je malý. Pro teplotu 4 K je celková intenzita záření:

$$I_{celk} = \int \frac{dI}{d\omega} d\omega = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{60 \hbar^3 c^2} = \sigma T^4 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Wm}^{-2}. \quad (1.1.4)$$

Pro srovnání: vyzařování na pokojové teplotě (300 K) má intenzitu 460  $\text{Wm}^{-2}$  a pro teplotu tání zlata (1337 K) je 181  $\text{kWm}^{-2}$ .

Dále ještě zbývá technický problém, jak vyrobit *absolutně černé těleso* tak, aby vyzařovalo skutečně *rovnoměrně* ve všech oborech spektra.

*Tlak nasycených par* se pro jiné kapaliny než hélium k měření teploty použít nedá, neboť nad hladinou jsou většinou i jiné plyny, které tento jev ovlivňují, leč v případě hélia máme jistotu, že nad hladinou jsou *pouze* héliové páry jednoduše proto, že všechny ostatní plyny při těchto teplotách *vymrzou*. Vztah mezi tlakem nasycených par a teplotou je sice jednoznačný, ale neexistuje k němu jednoduché teoretické vysvětlení, podávající prostou teoretickou závislost; definiční vztah (2.1.1) použitý ve stupnici ITS-90 je právě proto tak složitý.

## 1.2. Odpor polovodiče

Problém vodivosti v kovech, slitinách a polovodičích je sice popsán teoreticky dostatečně na *kvalitativní* odhad chování, ale už nestačí na *kvantitativní* výpočty nutné pro přímé určení funkční závislosti odporu na teplotě [8]. Proto je nutné provádět kalibraci experimentálně.

Detailní porozumění principům elektrické vodivosti *není* sice bezpodmínečně nutné pro použití odporových teploměrů k měření teploty, leč důkladné porozumění teorii by bylo velmi užitečné i k pochopení pozorovaných jevů [8].

Podle učebnice [5] je elektrická vodivost polovodičového materiálu dána vztahem

$$\sigma = (n \cdot e \cdot \mu_e + p \cdot e \cdot \mu_h), \quad (1.2.1)$$

kde  $n$  je koncentrace *elektronů*,  $p$  je koncentrace *děr*,  $\mu_e$  je pohyblivost elektronů a  $\mu_h$  je pohyblivost děr:

$$\mu_e = \frac{e \cdot \tau_e}{m_e}$$



$$\mu_h = \frac{e \cdot \tau_h}{m_h},$$

kde  $\tau_e$  a  $\tau_h$  jsou *relaxační doby* pro elektrony, resp. díry a  $m_e$  a  $m_h$  jsou *efektivní hmotnosti* elektronů a děr na hraně vodivostního pásu.

Koncentrace nositelů náboje  $n_i$  a  $p_i$  ve *vlastním polovodiči* jsou dány vztahem:

$$n_i = p_i = (n_i p_i)^{\frac{1}{2}} = 2 \left( \frac{k_B T}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} m_e^{\frac{3}{4}} m_h^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}. \quad (1.2.2)$$

Pohyblivosti musí být měřeny pro každý materiál zvlášť a projevuje se u nich exponenciální závislost na teplotě vycházející z teplotní závislosti  $\tau$ , která je však podle [5] slabá ve srovnání se členem (1.2.2).

Pro *vlastní polovodič* nám vychází teplotní závislost

$$\rho = A \cdot T^{-2/3} \cdot e^{E_g/2kT} \quad (1.2.3)$$

přičemž pro teploty, které nás zajímají, je člen  $T^{-2/3}$  ve srovnání s exponenciálou malý, takže můžeme psát ([8])

$$\rho \sim e^{E_g/2kT}. \quad (1.2.4)$$

Přidáním příměsí z V. A nebo III. A skupiny docílíme obohacení polovodiče o *elektrony* nebo *díry*. Například pro vodivostní typ  $N$  dostáváme koncentraci elektronů

$$n \approx \frac{N_a - N_d}{1 + B N_a e^{\beta/kT}}, \quad (1.2.5)$$

kde  $N_a$  je počet akceptorových atomů,  $N_d$  je počet donorových atomů,  $B$  a  $\beta$  jsou konstanty závislé na konkrétním druhu příměsového atomu [8]. Z toho vychází vztah pro vodivost:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \approx \frac{(N_a - N_d)e^2\tau}{m_e(1 + B N_a e^{\beta/kT})}. \quad (1.2.6)$$

Stále zde máme závislost na relaxační době  $\tau$ , jejíž změna s teplotou je podle [5] zanedbatelná.

## 2. Popis měření

Má práce spočívala v hledání kalibračních teplotních křivek pro polovodičové odporové teploměry. V kryostatu byly umístěny polovodičové rezistory z  $\text{RuO}_2$  ponořené do lázně kapalného hélia. Rezistory jsou vyráběny z pasty tvořené krystalky  $\text{RuO}_2$  a některých dalších rutenátů doplněných pojivem nanesených na destičce amorfního  $\text{SiO}_2$  a po výpalu překryté izolačním lakem.

Při prvním měření byly měřeny charakteristiky 3 rezistorů (byly připojeny 4, ale během měření se ukázalo, že jeden jsem špatně připájel a tak se manipulací uvnitř kryostatu uvolnil), při druhém a třetím měření byly měřeny vždy 4 rezistory najednou. Metodou *odsávání nasycených par* byla lázeň ochlazována z teploty 4,2 K až na 1,4 K (konkrétně 1,38 K u prvního měření, 1,35 K u druhého a 1,36 K u třetího měření).

### 2.1. Vztažný teploměr

Jako *vztažný teploměr* byl zvolen *tlak nasycených par*. Pro přepočítání mezi tlakem a teplotou byl použit vztah (3) uvedený v [1]

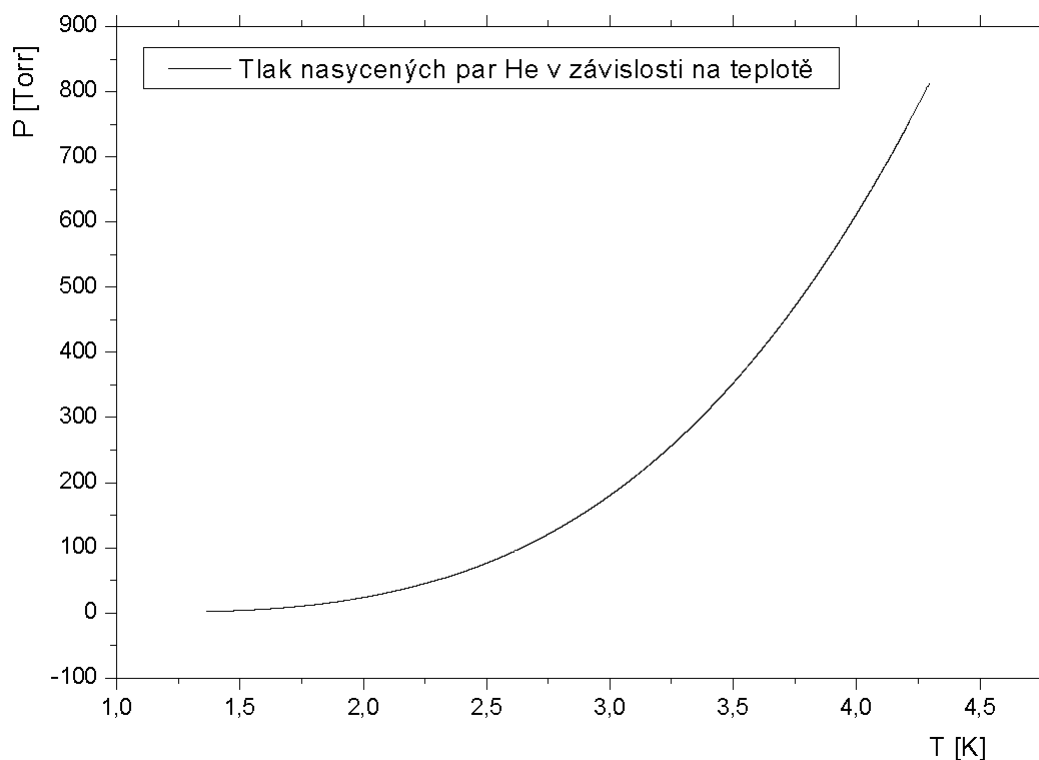
$$T = A_0 + \sum_{k=1}^9 A_k \left( \frac{\ln p - B}{C} \right)^k, \quad (2.1.1)$$

kde  $T$  je teplota podle normy ITS-90 v *Kelvinech*,  $p$  je tlak nasycených par nad hladinou v *pascalech*,  $B$ ,  $C$  a  $A_0$  až  $A_9$  jsou konstanty uvedené v tabulce 2.1.1 (viz *tabelau III* v [1])

Tabulka 2.1.1.: konstanty ve vztahu 2.1.1 (*tabelau III* v [1])

	$^3\text{He}$ od 0,65 K do 3,2 K	$^4\text{He}$ od 1,25 K do 2,1768 K	$^4\text{He}$ od 3,1768 K do 5,0 K
$A_0$	1,053447	1,392408	3,146631
$A_1$	0,980106	0,527153	1,357655
$A_2$	0,676380	0,166756	0,413923
$A_3$	0,372692	0,050988	0,091159
$A_4$	0,151656	0,026514	0,016349
$A_5$	-0,002268	0,001975	0,001823
$A_6$	0,006596	-0,017976	-0,004325
$A_7$	0,088966	0,005409	-0,004973
$A_8$	-0,004770	0,013259	0
$A_9$	-0,054943	0	0
$B$	7,3	5,6	10,3
$C$	4,3	2,9	1,9

V *grafu 2.1.1.* lze pozorovat, že napojení křivek v bodě  $T_\lambda = 2,1768$  K je hladké. Tuto skutečnost jsem matematicky neověřoval.

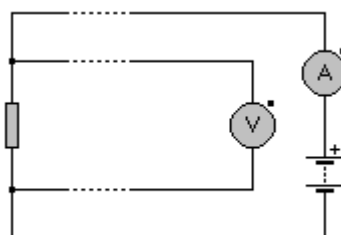


Graf 2.1.1.: Tlak nasycených par hélia v závislosti na teplotě. Závislost je vykreslena podle funkce 2.1.1

Touto metodou byla získána závislost odporů proměřovaných rezistorů na teplotě, která je rostoucí se snižující se teplotou (viz výsledky).

## 2.2. Osazení rezistorů

Všechny užití rezistory byly v provedení SMD. Na každý jsem připájel dva tenké měděné drátky o průměru 0,1 mm a délky cca 1 – 2 cm. Rezistory jsem připájel na kuprexitovou destičku s rozměry přibližně 38 × 6,8 mm, a ke každému jsem na destičku připájel 4 manganinové drátky (na každý pól rezistoru 2 drátky), které pak byly vedeny k průchodu do kryostatu, kde bylo každý manganinový drátek (opět přes kuprexitovou destičku) připájen k měděnému kabelu. Kabel byl zakončen 5 kolíkovou zástrčkou (1 kanál zůstal nevyužitý), která už mohla být připojena do vlastního měřicího přístroje.



Obrázek 2.2.1.: Schéma čtyřbodové metody měření odporu.

Pro měření odporů byla použita *čtyřbodová metoda*, jejíž princip je znázorněn na *obrázku 2.2.1*, neboť umožňuje eliminovat vliv přírodních vodičů. V mém případě tedy změřený odpor ovlivňovaly jen krátké měděné drátky mezi první destičkou a rezistorem.

Pro měření odporu byl použit dvoukanálový měřicí přístroj automatický nízkofrekvenční můstek *Neocera temperature controller LTC-21* s výstupem na sběrnici GPIB, přes kterou byl připojen k počítači a ovládán pomocí programu vytvořeného v prostředí *LabVIEW*. Závislost naměřených dat na velikosti excitačního napětí je minimální, jak bude popsáno v podkapitole 2.8.

Jak bylo uvedeno, měřicí přístroj je dvoukanálový, což představovalo komplikaci v mém záměru měřit vždy po 4 rezistorech najednou. Z toho důvodu se nebylo možno vyhnout nutnosti s nějakým „rozumným“ intervalem kanály prohazovat, jenže potom bylo třeba určitou vhodnou dobu počkat, neboť měřicí přístroj vracel hodnotu zprůměrovanou přes několik posledních měření, takže pokud vlivem rozpojování a spojování kabelů naměřil nějaké nesmyslné hodnoty, bylo nutno počkat, až přestanou mít vliv, a teprve potom zahájit zápis dat na počítači. Tato drobná komplikace se projevila ve všech charakteristikách tím, že jsou naměřeny jen v oddělených úsecích, mezi kterými data chybí. Jedinou výjimku tvoří rezistor I.A (tzn. rezistor A z *první* série), který byl díky poruše rezistoru I.C měřen „kontinuálně“.

### 2.3. Cyklování

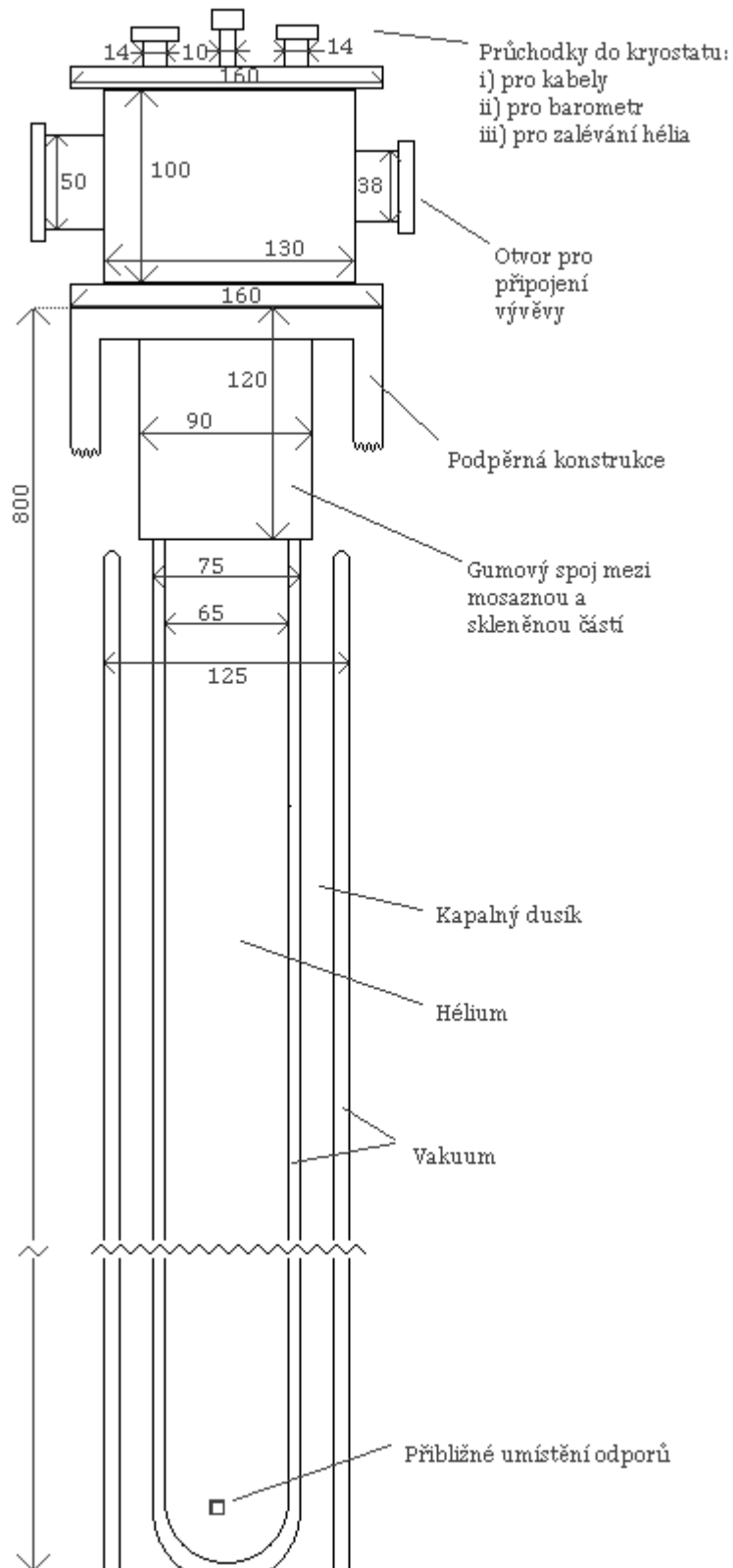
Před započítím ochlazování rezistorů na héliové teploty je třeba je takzvaně *cyklovat*. Což spočívá ve střídavém ochlazování rezistorů na teplotu kapalného dusíku a ohřívání na pokojovou teplotu. V tomto teplotním rozsahu mimo jiné dochází k výrazným změnám rozměrů, což je nebezpečné zejména spojům různých typů materiálů (například mezi elektrodou a polovodičem, nebo mezi polovodičem a korundovou podložkou). Tímto cyklickým ochlazováním se materiál přizpůsobuje této změně napětí a, jedná-li se o výrobek se skrytou vadou, je naděje na to, že se vada projeví ještě před vložením do kryostatů.

Dalším produktem cyklování je kontrola *teplotní stability*, Věřím, že pokud se odpor chová stabilně pro dusíkové teploty při změnách o dvě stě stupňů, bude se takto stabilně chovat i pro teploty héliové.

Prakticky probíhalo toto měření tak, že destička s připravenými rezistory byla ponořena do nádoby s kapalným dusíkem, kde se poměrně rychle ochladila (kontakt s kapalinou je při vyrovnávání teplot vždy efektivnější než kontakt s plynem), potom byly změřeny odpory všech rezistorů a destička byla vyndána. Celý postup jsem opakoval padesátkrát pro všechny 3 sady teploměrů.

Výsledné grafy ukazující teplotní stabilitu použitých rezistorů jsou v přílohách na CD. Mohu konstatovat, že při mém měření žádný z použitých rezistorů nevykazoval nějaké „ošklivé“ chování.

## 2.4. Kryostat



Obrázek 2.4.1.: Přibližný náčrtek použitého kryostatu. Všechny rozměry jsou v mm s chybou zhruba 5 mm u malých rozměrů a 20 mm u velkých.

Měření za héliových teplot bylo prováděno ve skleněném kryostatu (viz obrázek 2.4.1). Kryostat je stíněný vrstvou *kapalného dusíku* a dvěma vakuovanými vrstvami, proti záření je stíněn napařením vrstvy stříbra na vnitřních stěnách izolačního prostoru, ve které jsou po obou stranách vysoké průzory. Kryostat má mosaznou hlavici, z níž vedou vývody na odsávání, a ve kterém jsou průchodky pro propojení vnitřku s vnějším světem.

Kryostat je odčerpáván sériově propojenou dvojicí vývěv. První je *Rootsova vývěva* Alcatel RSV 301 (300 m<sup>3</sup>/hod), druhá je rotační vývěva Edwards (28 m<sup>3</sup>/hod). Rootsova pumpa byla volena, protože má relativně vysoký průtok i za nižších tlaků. Vnější průměr nejmenší trubky v odsávacím systému je 25 mm. Rychlost čerpání se ovlivňuje povolováním ventilů, přičemž jsem se snažil, aby rychlost čerpání byla stálá a pomalá. Reálný průběh čerpání ve skutečnosti spíše připomíná schodovou funkci, neboť při každém, i sebemenším, povolení ventilu rychlost prudce vzroste a pak pozvolna klesá. Zde jsem musel volit kompromis mezi přesností měření, jež vyžaduje pomalejší odsávání, a dosaženou teplotou, neboť většinou spotřebu kapalného hélia tvoří tepelný přítok zvenčí. Pokud bylo dosaženo  $\lambda$ -přechodu, může už být odsávání urychleno, protože *přenos tepla v supratekuté kapalině* je tak rychlý, že nehrozí nebezpečí vzniku *teplotního gradientu*.

## 2.5. Měření tlaku

Jako vztažný teploměr pro celé měření byl použit vztah mezi teplotou a tlakem nasycených par nad hladinou, (2.1.1).

Tlak byl měřen *tlakoměrem MKS 690A* připojeným ke kryostatu kapilárou (viz obrázek 2.4.1). Tím, že je tlak měřen kapilárou vyvedenou přímo z kryostatu, není ovlivněn rychlostí proudění plynu. Převýšení mezi tlakoměrem a kryostatem činí asi 50 cm, přičemž samotná výška hladiny se během experimentu měnila, neboť teplota byla snižována odčerpáváním par, což spotřebovává hélium v lázni. Tento rozdíl hladin však díky nízké hustotě plynného hélia (1,2 kg/m<sup>3</sup> [4]) nehraje podstatnou úlohu pro prováděné měření.

Podle výrobce použitý měří tlakoměr tlak absolutně. Tlakoměr byl připojen k *dekodéru signálu MKS 670*, který komunikoval s počítačem po sběrnici GPIB. Tlak byl měřen v jednotkách *Torr* („milimetr rtuťového sloupce“, 1 Torr = 133,322 Pa) a v těchto jednotkách je také v celé mé práci udáván.

## 2.6. Program pro sběr dat

Celá aparatura byla připojena k počítači přes protokol GPIB. Sběr dat byl prováděn programem napsaným v systému *Labview*.

Jádrem programu je smyčka, která vždy pošle na příslušnou adresu sběrnice GPIB příkaz ke čtení; pauza k vyhodnocení příkazu je 10 ms a následuje dotaz na hodnotu odeslanou měřicím přístrojem. Ke všem těmto krokům byly využity

vestavěné komponenty systému *Labview* (program si lze podrobně prohlédnout na příloženém CD (je nutné mít nainstalováno *Labview*)). Zásílané příkazy zní:

```
@020?\           odečtení hodnoty tlaku
QSAMP?1;         odečtení odporu rezistoru připojeného k prvnímu kanálu můstku
QSAMP?2;         odečtení odporu rezistoru připojeného k druhému kanálu
```

Popsaný postup se aplikoval na čtení tlaku z tlakoměru, na hodnotu odporu připojeného k prvnímu kanálu *můstku LTC-21* a potom k druhému kanálu. Jednotlivé kroky cyklu byly odděleny buď konstantním časovým zpožděním, nebo čekací smyčkou ovládanou přímo uživatelem sloužící pro pozastavení měření při přepínání připojených rezistorů.

Získané hodnoty byly pomocí komponent systému *Labview* převedeny na text a uloženy do textového souboru ve formě tabulky. Ačkoli konvertující komponenta nabízela široké možnosti nastavení formátu, nepodařilo se mi nastavit ji tak, aby jako desetinnou čárku používala skutečnou čárku. Tuto drobnost bylo nutno doladit dalším programem.

Příslušný soubor je přiložen na CD a v SISu.

## 2.7. Program pro výpočet teploty

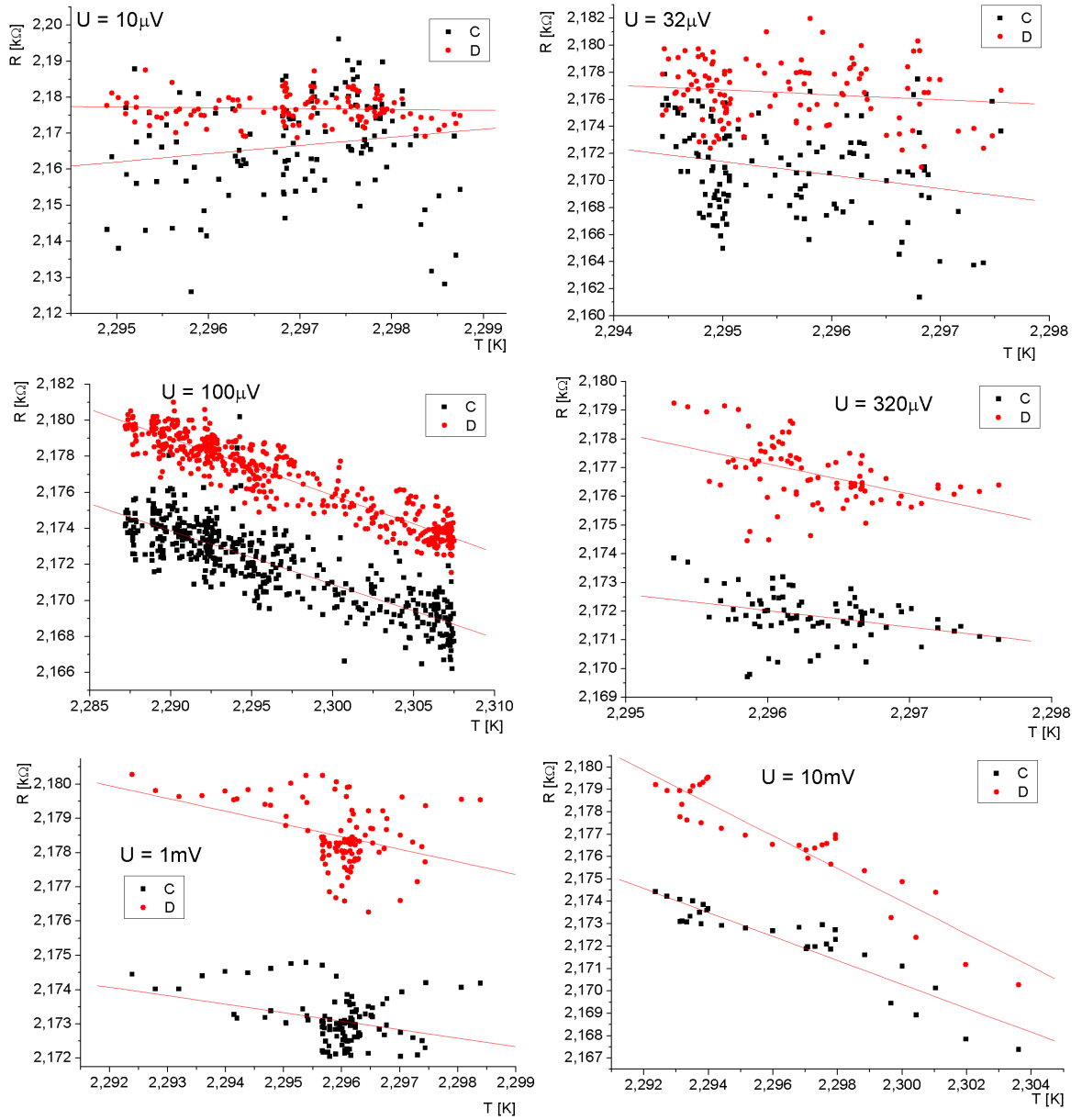
Vstupem tohoto programu je textový soubor vytvořený programem popsáním výše. Jeho hlavním úkolem je podle vzorce (2.1.1) vypočítat teplotu z hodnot tlaku. Dalšími úkoly jsou úkony formátovací (nahrazení desetinných teček desetinnými čárkami a rozřazení sloupečků s odpory rezistorů). Výstupem programu je opět textový soubor, tentokrát již plně připravený pro vložení do systému *Origin*.

Program jsem napsal v jazyce *Delphi* a je včetně zdrojového kódu přiložen na CD a v SISu.

## 2.8. Závislost měřených hodnot na excitaci

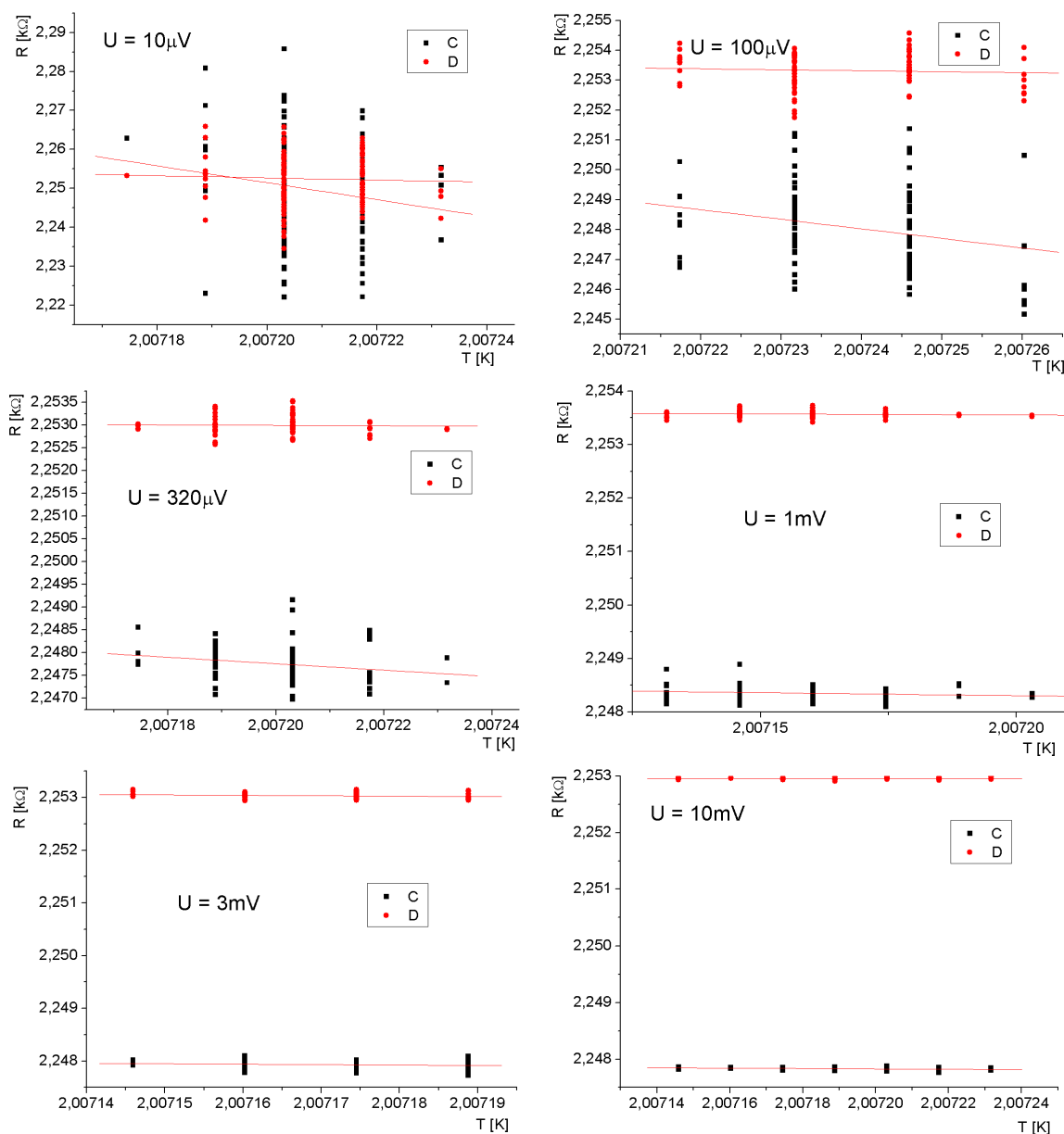
Při měření při tak nízkých teplotách může být problémem i parazitní tepelný příkon dodávaný měřením odporů. Na použitém měřicím přístroji bylo možno si volit *úroveň excitace*, tzn. *napětí*, které je použito pro vybuzení proudu v měřeném rezistoru (viz schéma na *obrázku 2.2.1*). Udělal jsem tedy měření závislosti odporu rezistorů na tomto excitačním napětí při 2 „pevných“ teplotách – jedna pod  $\lambda$ -přechodem, druhá nad ním. Toto měření bylo prováděno jen pro rezistory III.C a III.D, neboť lze očekávat, že chování ostatních bude podobné.

Jelikož nebylo snadné udržet stálou teplotu po relevantně dlouhou dobu, musel jsem při každé zvolené úrovni excitace sbírat více hodnot odporů a posléze je vykreslit jako funkce teploty s proložením lineární závislosti (závislost odporu na teplotě sice lineární není, ale je *spojitá*, takže ji lze na jistém okolí zvoleného bodu  $T_0$  aproximovat lineární funkcí). Jako naměřenou hodnotu odporu při dané excitaci jsem pak vzal hodnotu proložené lineární funkce v bodě  $T_0$  (ten byl volen tak, aby ve všech nabíraných množinách dat byl uvnitř proměřované oblasti)



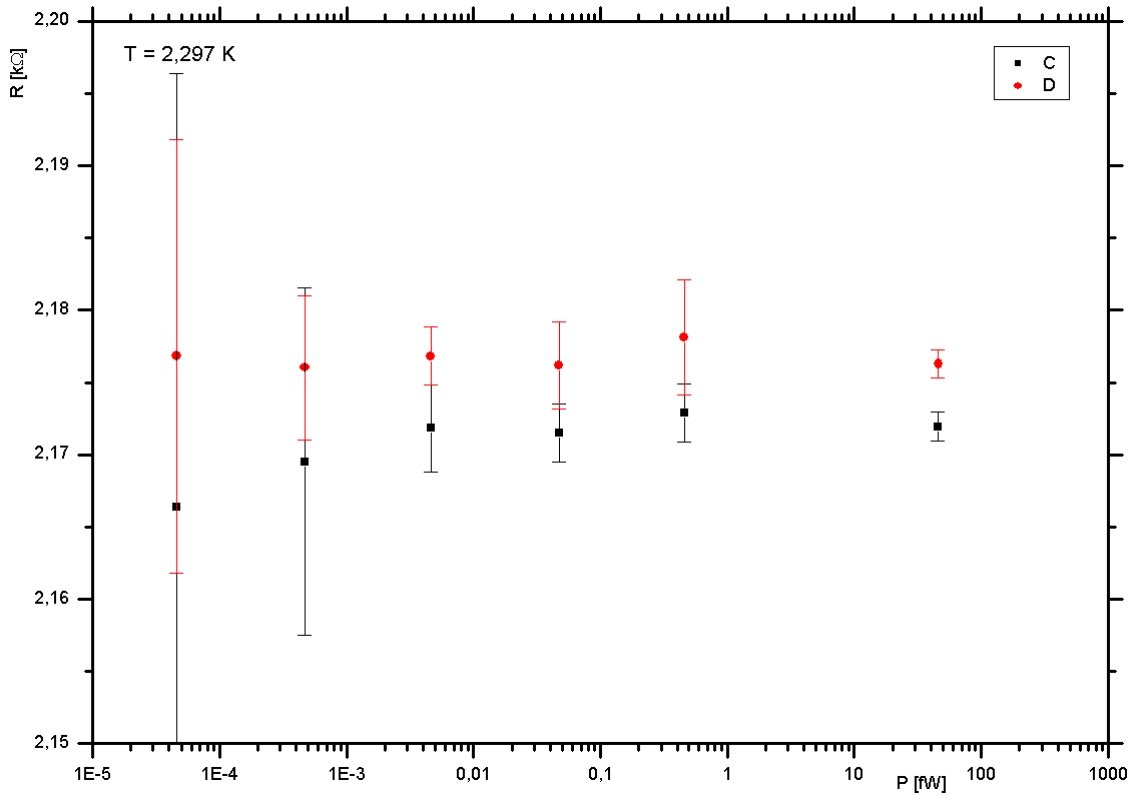
Grafy 2.8.1. – 2.8.6.: Naměřené teplotní závislosti odporů při různých excitačních napětích. V rámci možností byla teplota vždy stejná a to zhruba 2,297 K



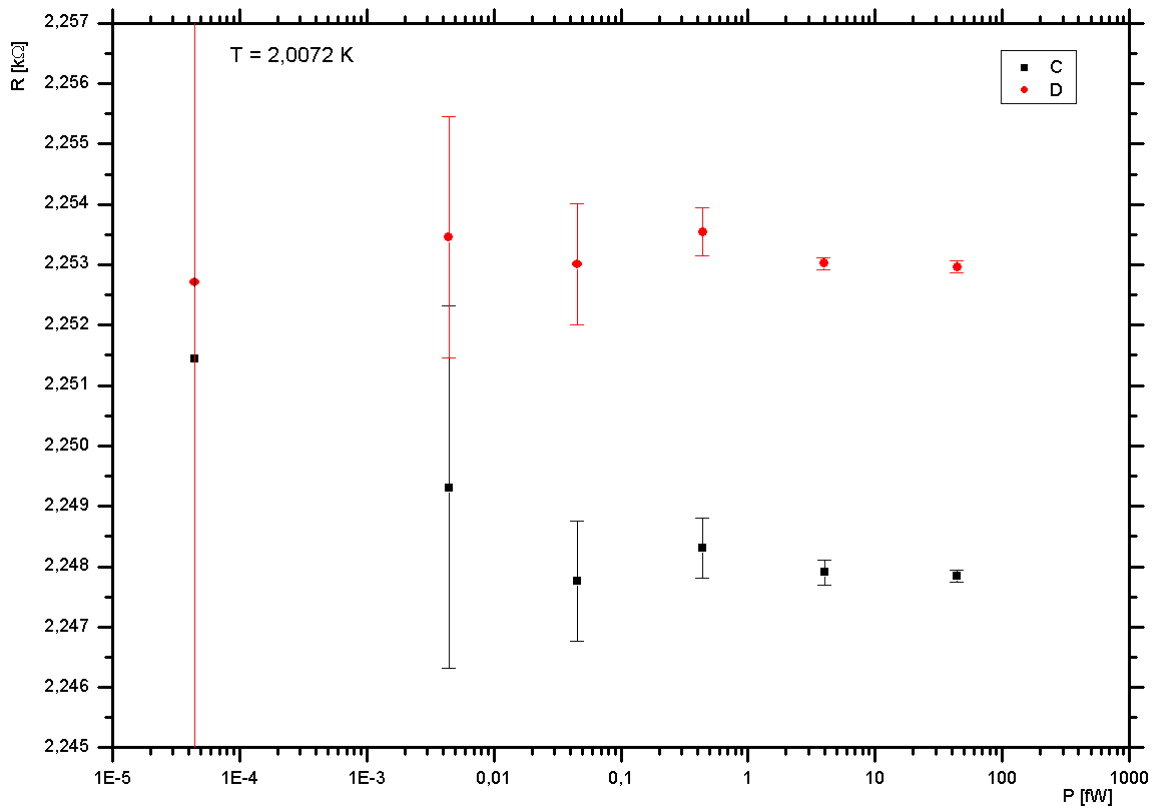


Grafy 2.8.7. – 2.8.12.: Naměřené teplotní závislosti odporů při různých excitačních napětích. V rámci možností byla teplota vždy stejná a to zhruba 2,0072 K.

V grafech 2.8.1. až 2.8.12. jsou vždy dvě sady hodnot odporů a to pro rezistory III.C a III.D. Všemi jsem proložil lineární funkci a pak jsem vypočítal hodnotu *očekávaného odporu* při požadované teplotě  $T_0$  (ta byla v obou případech volena tak, aby pokud možno ležela uvnitř intervalů nabíraných teplot). Závislost *očekávaného odporu* rezistorů III.C a III.D na *příkonu*, který jim dodává měřicí aparatura, je na následujících *grafech*.



Graf 2.8.13.: Závislost naměřeného odporu na příkonu způsobeném měřením při teplotě  $T_0 = 2,297$  K, tedy nad  $\lambda$ -přechodem.



Graf 2.8.14.: Závislost naměřeného odporu na příkonu způsobeném měřením při teplotě  $T_0 = 2,0072$  K, tedy pod  $\lambda$ -přechodem.

Vzhledem k těmto chybám a k tomu, že na *grafech 2.8.13.* a *2.8.14.* není pozorovatelná určitelná zobecnitelná jednoduchá tendence, lze chybu způsobenou parazitním tepelným příkonem procesu měření považovat za zanedbatelnou alespoň do příkonu 100 fW.

Na *grafech 2.8.1 až 2.8.12.* je však patrné, že při větší excitaci byl odpor měřen přesněji.

Na *grafech 2.8.5.* a *2.8.6.* je dokonce patrná spirálovitá struktura, která pravděpodobně vznikla jako oscilace tlaku při pokusu o udržení konstantní teploty (viz podkapitola 3.5).

Z hlediska experimentátora je zajímavá též skutečnost, že udržet konstantní teplotu pod  $\lambda$ -přechodem bylo mnohem snazší než nad ním; jelikož odpadl tepelný šum lázně vyrovnaný supratekutým prouděním.

## 2.9. Čebyševovy polynomy

Čebyševovy polynomy tvoří ortogonální bázi prostoru  $L^2_{\rho}([-1;1])$ , přičemž váha  $\rho = (1 - x^2)^{-1/2}$ , a jejich generující rovnice vypadá takto:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \quad (2.9.0)$$

Lze je vyjádřit rekurentním vztahem

$$t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x), \quad (2.9.1)$$

kde  $t_n(x)$  značí  $n$ -tý Čebyševův polynom a první 2 Čebyševovy polynomy jsou definovány takto:

$$t_0(x) = 1 \quad (2.9.2)$$

$$t_1(x) = x. \quad (2.9.3)$$

Lze též použít alternativní definici:

$$t_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]. \quad (2.9.4)$$

Důkaz tohoto tvrzení jsem neprováděl. Ze vztahu (2.9.4) je navíc zřejmé, že Čebyševovy polynomy jsou definovány *pouze* na intervalu  $[-1;1]$ .

Prvních 5 Čebyševových polynomů, které budu v této práci používat, jsou tyto:

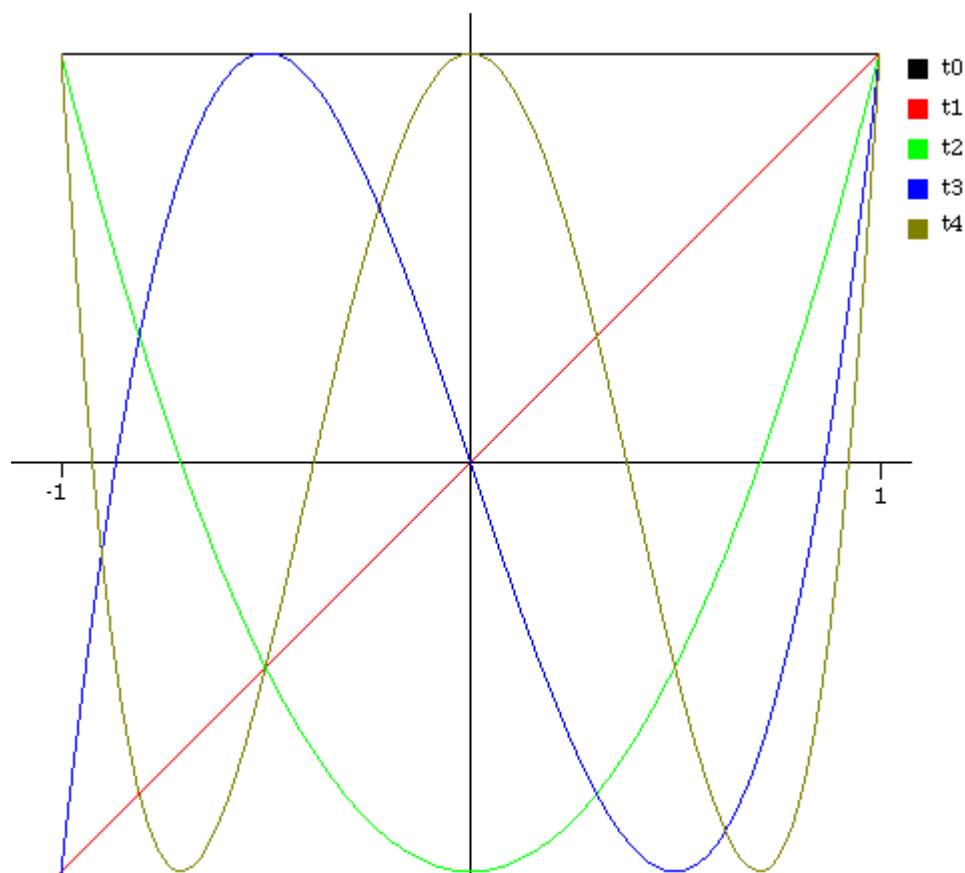
$$t_0(x) = 1 \quad (2.9.2)$$

$$t_1(x) = x \quad (2.9.3)$$

$$t_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (2.9.5)$$

$$t_3(x) = 4x^3 - 3x \quad (2.9.6)$$

$$t_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad (2.9.7)$$



Obrázek 2.9.1.: Prvních 5 Čebyševových polynomů. Za povšimnutí stojí střídání sudých a lichých funkcí.

Jak už bylo řečeno, Čebyševovy polynomy tvoří ortogonální bázi *pouze* na intervalu  $[-1; 1]$ , takže chceme-li je použít jako aproximační funkce nějakých fyzikálních dat, musíme nezávislou proměnnou *namapovat* na interval  $[-1; 1]$  respektive  $[0; 1]$ .

Jelikož při aproximaci Čebyševovými polynomy budu používat jako nezávislou proměnnou *odpor*  $R$ , musím jeho hodnoty zobrazit nejlépe nějakou lineární funkcí na interval  $[0; 1]$ . Lze použít například toto zobrazení

$$x(R) = \frac{R - R_{\min}}{R_{\max} - R_{\min}}, \quad (2.9.8)$$

kde  $R_{\min}$  je nejmenší hodnota, které odpor na naměřeném intervalu nabývá a  $R_{\max}$  je největší hodnota, kterou nabývá. Tato funkce je *prostá*, *lineární*, *monotónní rostoucí* a zobrazuje interval  $[R_{\min}; R_{\max}]$  na interval  $[0; 1]$ .

## 2.10. Jaký řád rozvoje použít?

Tato otázka není jednoznačně zodpověditelná. Pokud bychom chtěli proloženou funkcí kompletně rekonstruovat naměřená data, museli bychom použít tolikátý řád rozvoje, kolik bylo naměřeno bodů mínus jeden (tedy asi 60 000). Jelikož chceme určité množství informace ušetřit, tak je naopak výhodné vzít rozvoj do nižšího řádu. Při příliš velkém počtu koeficientů se snadno stane, že průběh funkce

začne kopírovat chyby měření, a dalším efektem je, že hned za oblastí naměřených dat může proložená funkce značně změnit svůj charakter.

K rozhodnutí této otázky jsem udělal pokus – zkusil jsem proložit naměřená data jednoho rezistoru Čebyševovými polynomy různého řádu. Náhodně jsem pro tento pokus zvolil rezistor III.D.

Tabulka 2.10.1.: Koeficienty aproximace Čebyševovými polynomy naměřených odporů rezistoru III.D:

řád parametr	1	2	3	4	5	6
<i>A</i>	2270,6	2845,9	2607,0	2840,3	10740,9	-7364,5
<i>chyba A</i>	0,8	0,8	4,0	21,3	124,4	670,6
<i>B</i>	6110,5	5235,4	5634,6	5232,1	-8741,1	23844,3
<i>chyba B</i>	1,3	1,2	6,6	36,7	219,8	1206,2
<i>C</i>		417,6	195,8	449,1	10012,3	-13584,1
<i>chyba C</i>		0,5	3,7	23,0	150,2	871,9
<i>D</i>			71,1	-36,9	-4921,7	8543,5
<i>chyba D</i>			1,2	9,8	76,5	496,1
<i>F</i>				25,2	1735,2	-4056,8
<i>chyba F</i>				2,3	26,7	212,5
<i>G</i>					-322,8	1387,3
<i>chyba G</i>					5,0	62,5
<i>H</i>						-269,9
<i>chyba H</i>						9,8

Tabulka 2.10.2.: Dosažené hodnoty  $\chi^2$  při aproximaci jednotlivými řády:

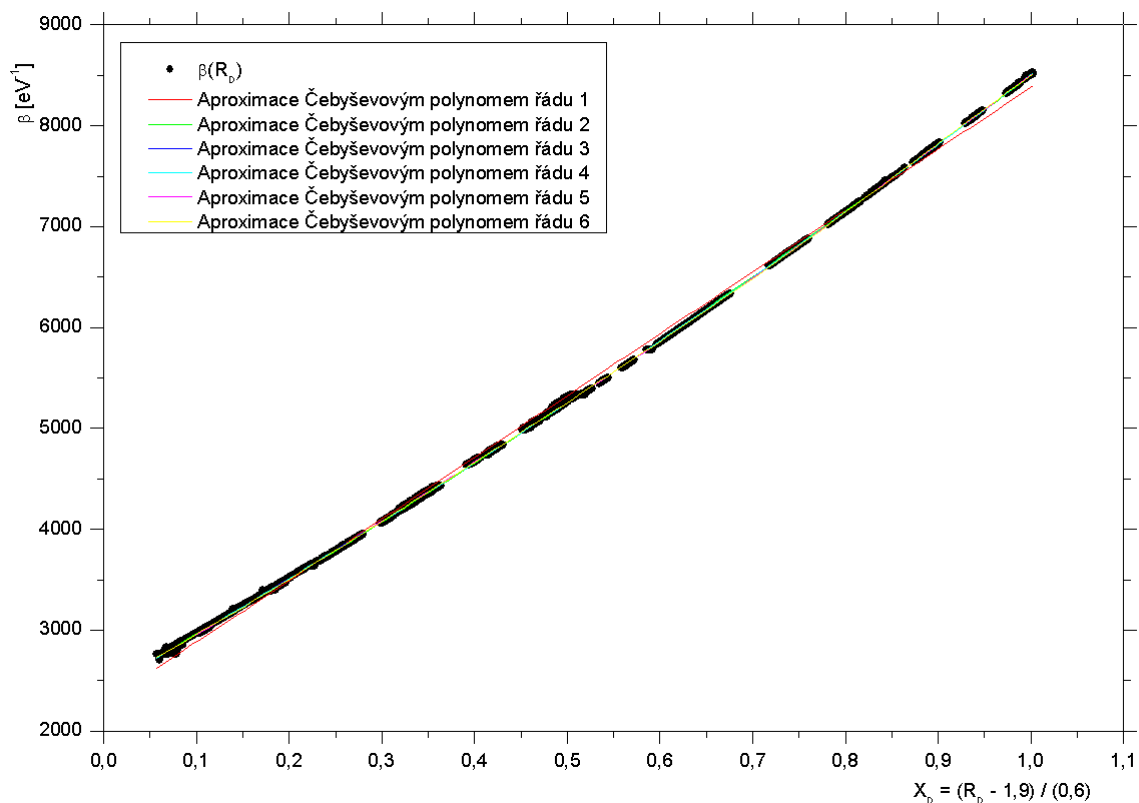
řád	$\chi^2$
1	4492
2	209
3	185
4	185
5	162
6	157

Pro aproximaci byl použit Čebyševův polynom řádu 7, jehož tvar je:

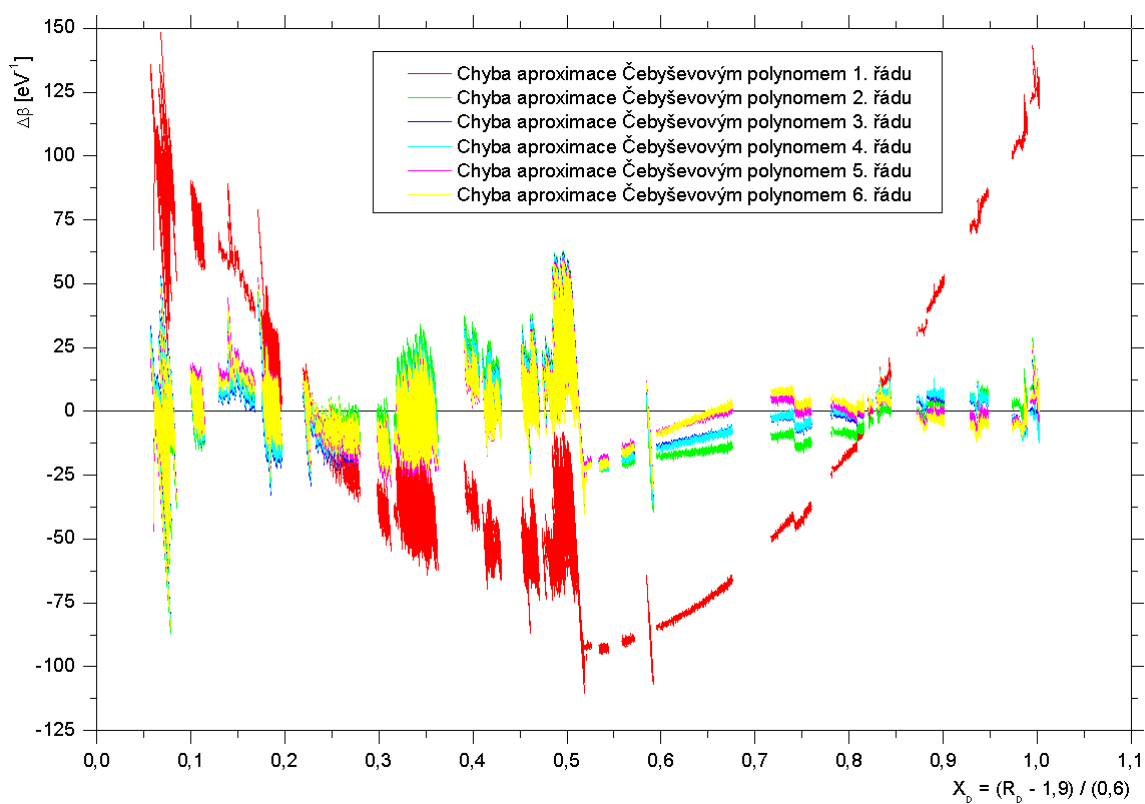
$$\beta(x) = A + B \cdot x + C \cdot (2x^2 - 1) + D \cdot (4x^3 - 3x) + F \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) + G \cdot (16x^5 - 20x^3 + 5x) + H \cdot (32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1),$$

kde  $x$  je

$$x \equiv X_D = \frac{R_D - R_{min}}{R_{max} - R_{min}} = \frac{R_D - 1,9}{0,6}$$



Graf 2.10.1.: Proložení Čebyševova polynomu různého řádu daty rezistoru III.D.



Graf 2.10.2.: Rozdíl mezi naměřenými odpory rezistoru III.D a hodnotami proložených Čebyševových polynomů.

Z tabulky 2.10.1. je vidět, že do čtvrtého řádu včetně mají parametry  $A$  a  $B$  hodnotu mezi 2000 a 3000 resp. mezi 5000 a 6000, zatímco od pátého řádu se tyto hodnoty začaly prudce měnit. Jelikož lze očekávat, že každý další řád by měl přispět menším dílem k těm předchozím, a že „zapomenutím“ nějakého vyššího koeficientu by se proložená funkce neměla moc změnit, rozhodl jsem se, že pro další prokládání budu používat Čebyševovy polynomy **4. řádu**, které jsou dány (podle podkapitoly 2.9) vztahem

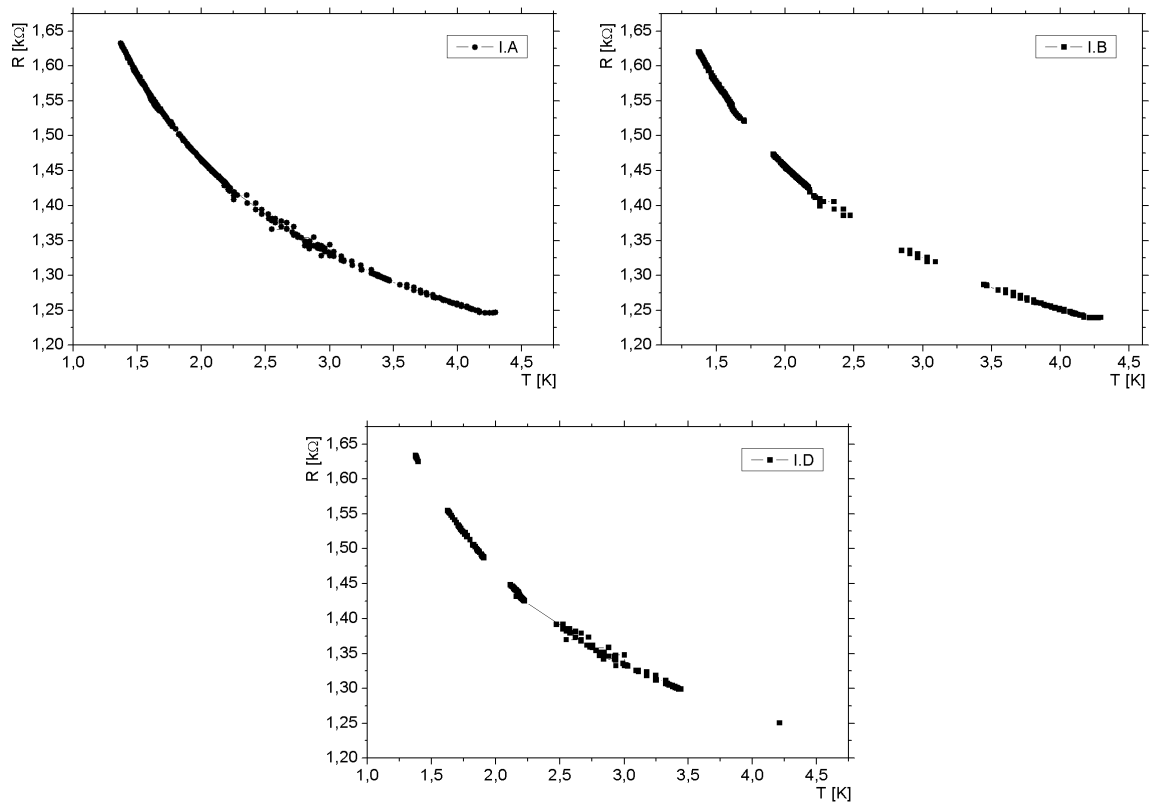
$$\beta(x) \cong A + B \cdot x + C \cdot (2x^2 - 1) + D \cdot (4x^3 - 3x) + F \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1). \quad (2.10.1)$$

## 3. Výsledky

### 3.1. Naměřená data

Jak již bylo zmíněno, v celé své práci jsem měřil závislost *odporu* rezistorů na *teplotě*. Grafy závislostí jednotlivých odporů na teplotě jsou:

**První série:**

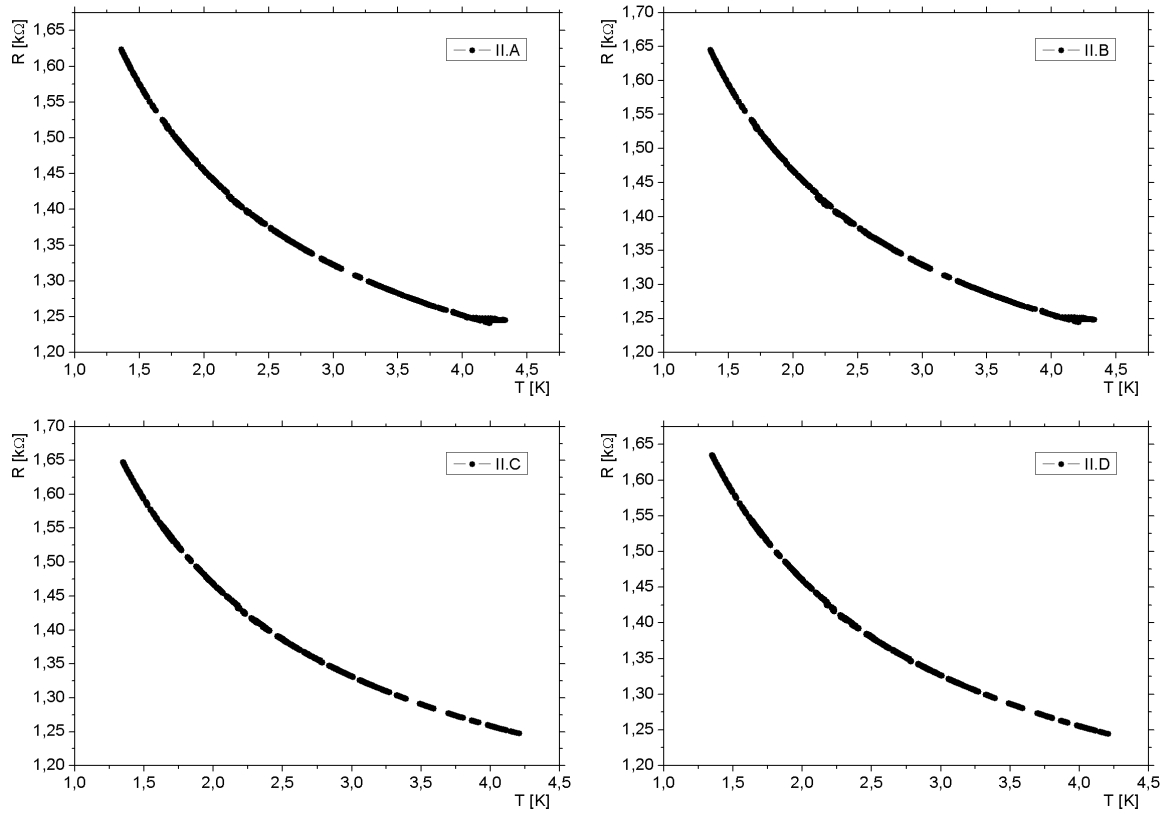


Grafy 3.1.1. – 3.1.3.: Naměřené závislosti odporů teploměrů I.A, I.B a I.D na teplotě lázně. Odpor rezistoru I.C nebyl měřen kvůli poruše připojení.

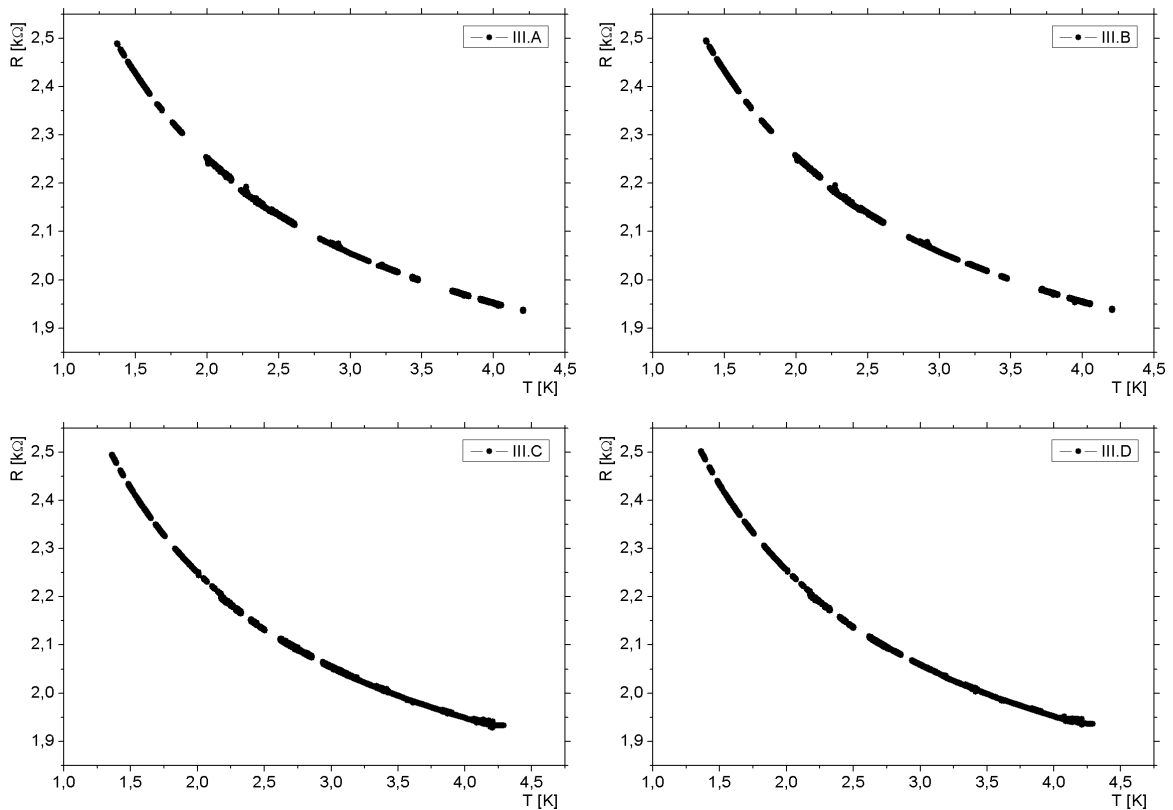
Všechna nezpracovaná přímo naměřená data v textovém formátu jsou na příloženém CD ve složce „Surová data“.



## Druhá série:



Grafy 3.1.4. – 3.1.7.: Naměřené závislosti odporů rezistorů II.A, II.B, II.C a II.D na teplotě heliové lázně.

**Třetí série:**

Grafy 3.1.8. – 3.1.11.: Naměření závislosti odporů rezistorů III.A, III.B, III.C a III.D na teplotě héliové lázně.

Ve všech *grafech* s výjimkou *grafu 3.1.1.* lze pozorovat nespojitost naměřené křivky. To je způsobeno tím, že při každém měření byly měřeny 4 rezistory (resp. 3 v první sérii), ale použitý měřicí přístroj *Neocera LTC-21* měl pouze 2 měřicí kanály. Z tohoto důvodu bylo nutno vždy po vhodně zvolené době vyměnit dvojice rezistorů. Zpravidla byly ve dvojicích rezistory A, B a C, D.

Mezery v křivkách však nejsou komplementární, neboť při měření druhé i třetí série jsem hélium zaléval dvakrát. To proto, abych mohl při prvním zalití ochlazovat pomalu a tím omezil chybu způsobenou nízkou rychlostí přenosu tepla v normální kapalině, zatímco při druhém zalití jsem ochlazoval rychle proto, abych dosáhl co nejnižší teploty. Rychlejší ochlazování znamená, že lze dosáhnout nižší teploty, ale zároveň to zvětšuje nejistoty měření odporů nad  $\lambda$ -přechodem. Pod  $\lambda$ -přechodem na rychlosti čerpání nezávisí, neboť kapalina je *supratekutá* a vytvoří nesmírně efektivní *konvektivní útvary* na vyrovnávání teplot.

### 3.2. Proložení exponenciální funkcí

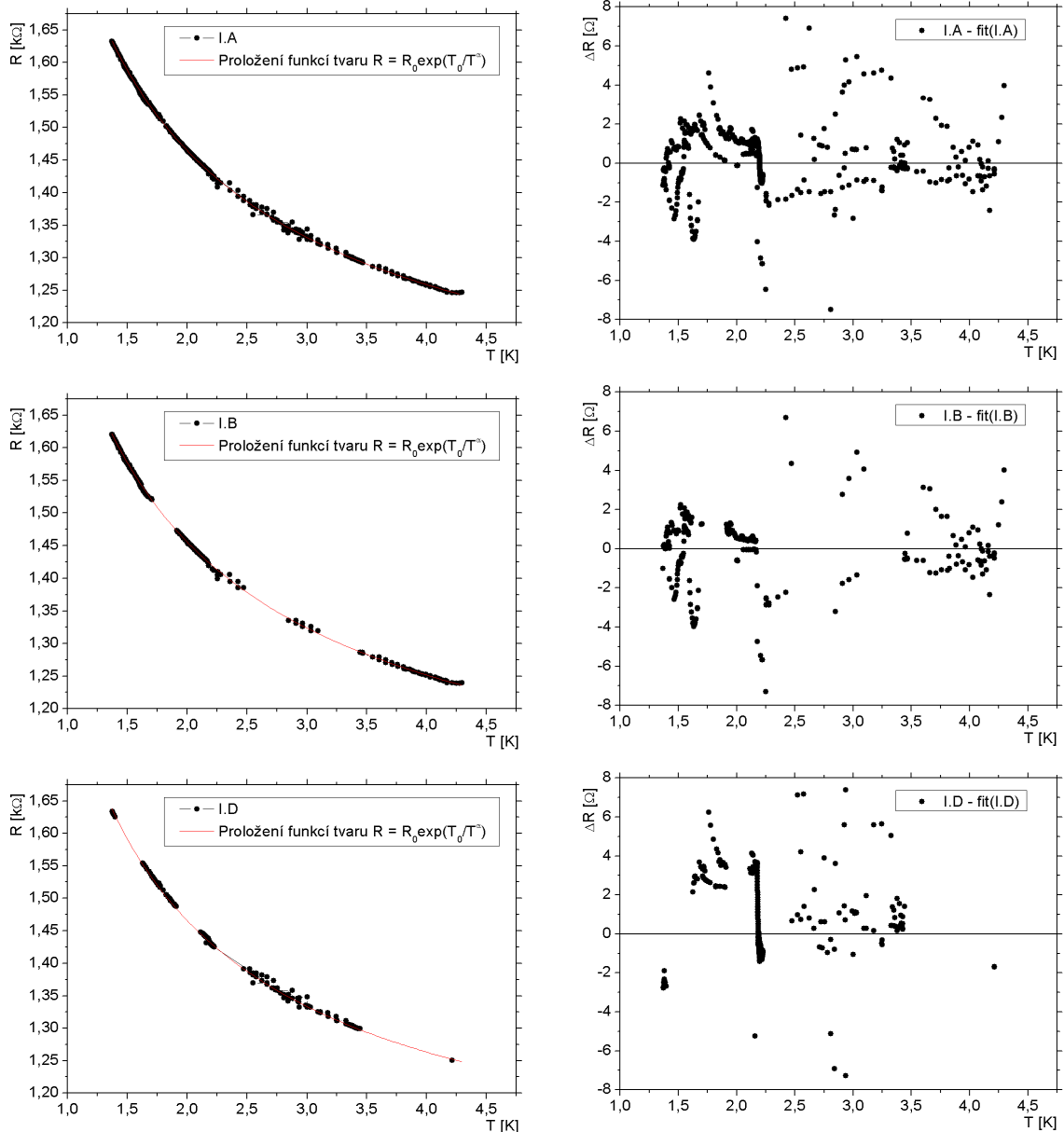
Cílem celé mé práce je *kalibrovat* rezistory tak, aby se v budoucnu daly použít jako *odporové teploměry* pro měření teplot v použitém rozsahu. Nejprve jsem pro tento účel zvolil funkci užívanou ve velmi nízkých teplotách v souladu s předpovědí *Mottova-Andersonova* mechanismu vodivosti v granulárních systémech:

$$R(T) = R_0 \cdot e^{\frac{T_0}{T^a}}, \quad (3.2.1)$$

kde  $R_0$  odpovídá aproximaci odporu při vysokých teplotách,  $T_0$  je referenční „teplota“ (pozor: nemá rozměr teploty; funkce byla zadána takto z důvodu rychlejší konvergence algoritmu) a  $a$  je exponent strmosti této teploty.

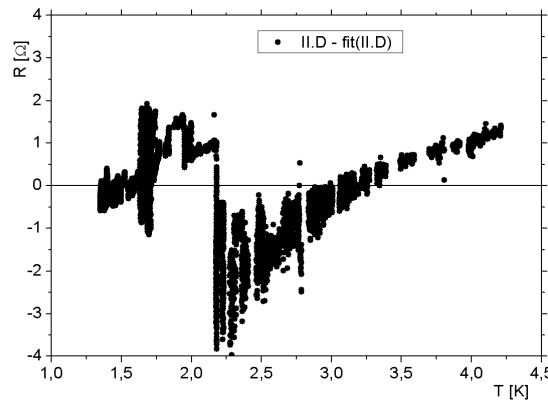
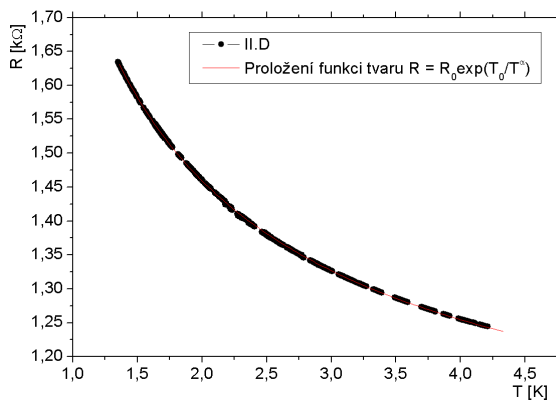
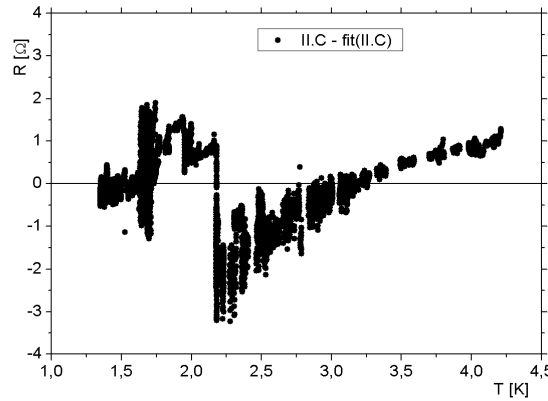
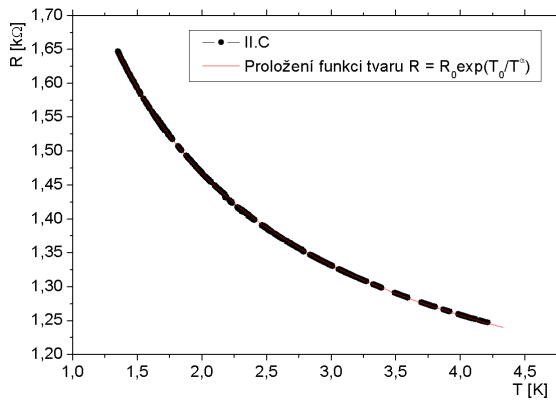
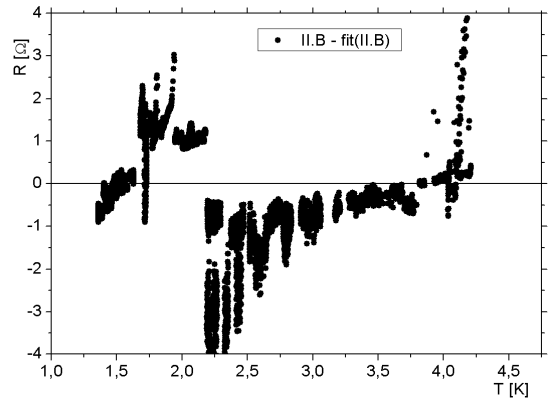
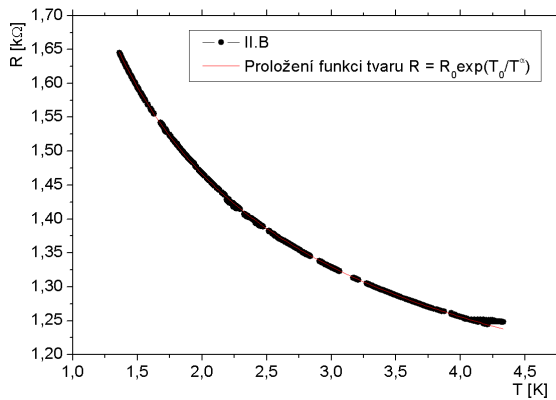
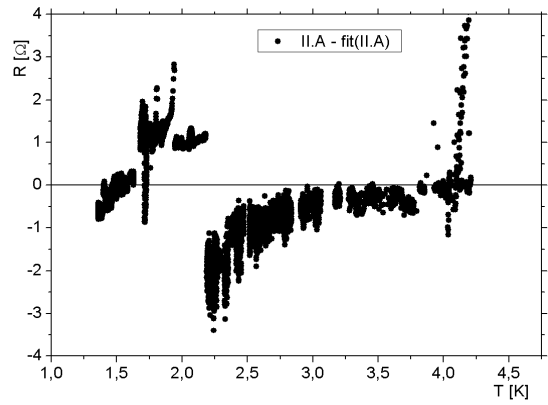
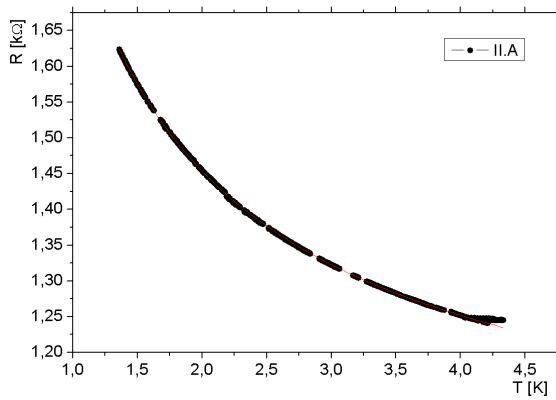
Prokládání naměřených dat touto funkcí jsem zpracovával pomocí vestavěných knihoven v programu *Origin*. Zjednodušeně řečeno, tyto algoritmy pracují tak, že hledají minimum sumy kvadratických odchylek mezi naměřenými daty a hodnotou funkce pro hledané parametry. Podrobněji viz [2].

### První série:



Grafy 3.2.1. – 3.2.6.: Výsledky proložení funkce (3.2.1) naměřenými daty pro rezistory I.A, I.B a I.C. Na sudých grafech (v pravém sloupečku) jsou rozdíly naměřených odporů a proložené funkce.

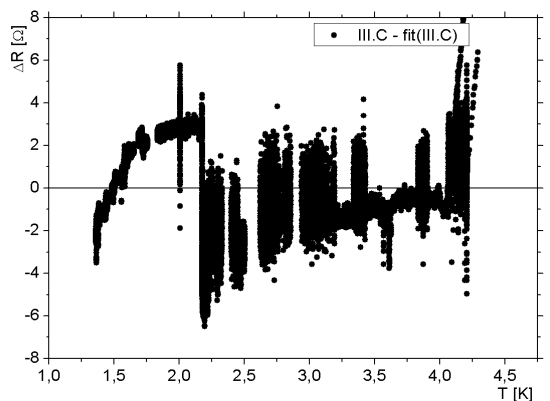
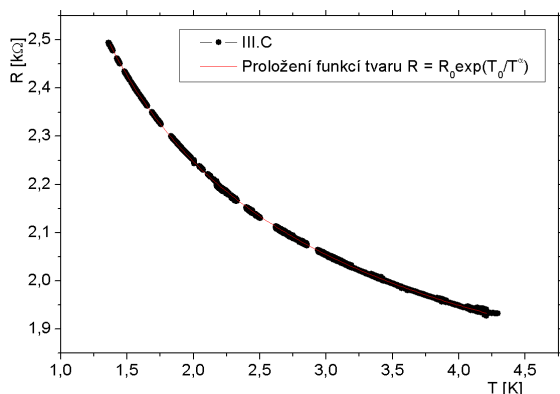
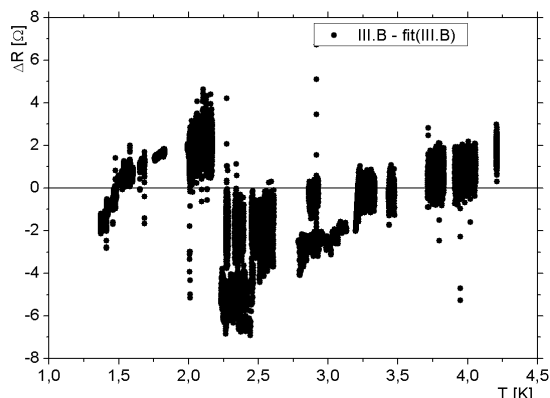
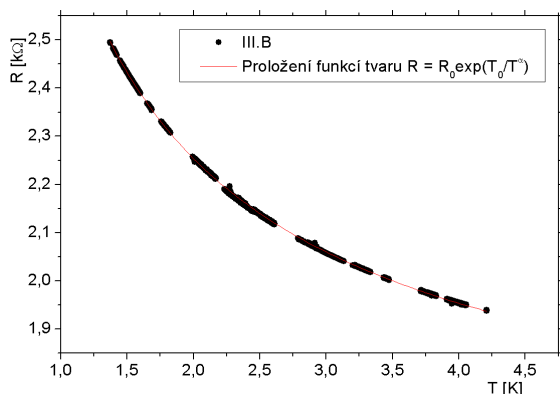
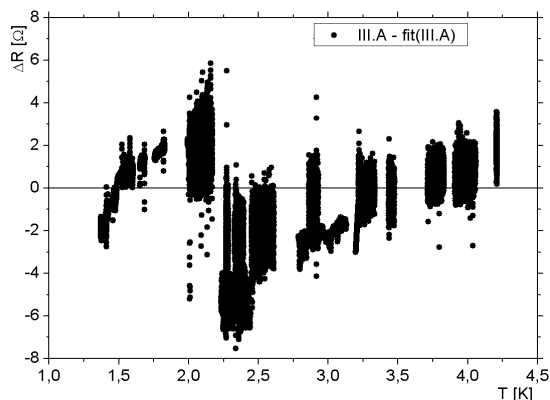
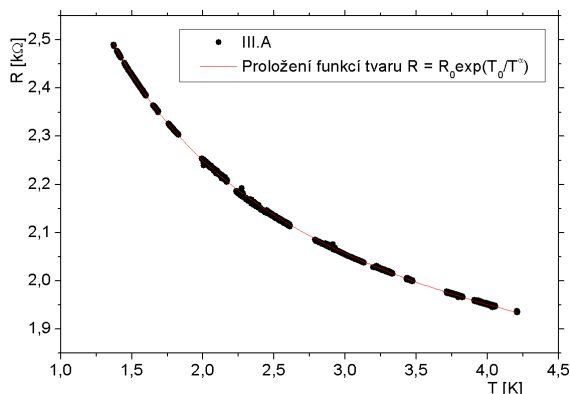
Druhá série:

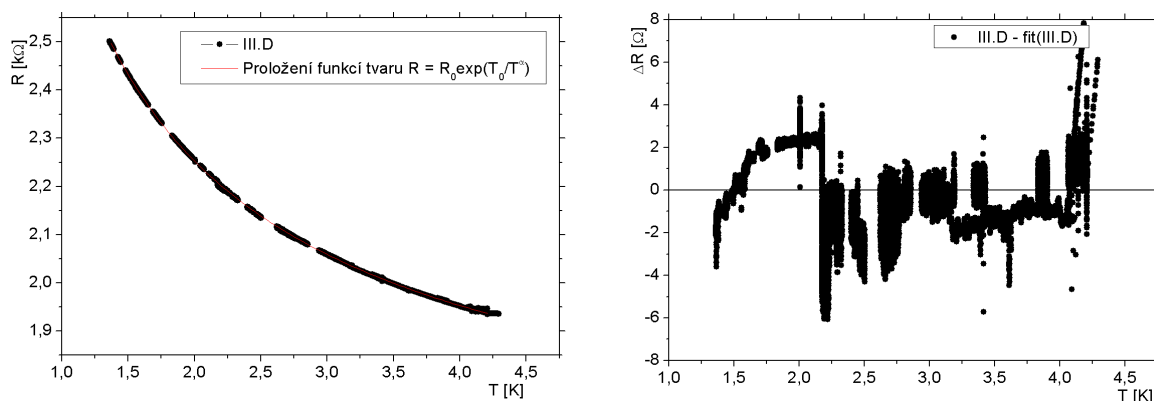


Grafy 3.2.7. – 3.2.14.: Výsledky proložení funkcí (3.2.1) daty 2. série. Sudé grafy opět značí rozdíl naměřených dat a hodnoty proložené funkce v daném bodě.

Za zmínku stojí skutečnost, že proložení funkce (3.2.1) daty druhé série je tak přesné, že kromě statistického šumu je na *grafech odchylky* (pravý sloupeček) zřetelně vidět teplotní skok při  $\lambda$ -přechodu. Na *grafech 3.2.8 a 3.2.10* je též zřetelný počáteční nárůst chyby způsobený tím, že ihned po uzavření kryostatu začal vlivem odpařování hélia stoupat tlak bez poklesu teploty, což je chyba, kterou nelze postihnout při přepočtu tlaku na teplotu. Data od rezistorů II.C a II.D už touto chybou postižena nejsou, protože byly připojeny k měřicímu přístroji až po zahájení odčerpávání.

**Třetí série:**





Grafy 3.2.15. – 3.2.22.: Výsledky proložení funkce (3.2.1) daty třetí série. V levém sloupečku jsou naměřená data a proložená funkce a v pravém jsou rozdíly mezi naměřenými daty a proloženou funkcí.

### Výsledky:

Tabulka 3.2.1.: Parametry funkce (3.2.1) proložené jednotlivými sadami rezistorů.

rezistor	$R_0$ [kΩ]	chyba $R_0$ [kΩ]	$T_0$ [K <sup>1/α</sup> ]	chyba $T_0$ [K <sup>1/α</sup> ]	$a$	chyba $a$
I.A	0,8953	0,0025	0,7104	0,0025	0,5303	0,0031
I.B	0,8796	0,0041	0,7185	0,0042	0,5134	0,0050
I.D	0,9465	0,0047	0,6620	0,0043	0,5989	0,0071
II.A	0,9043	0,0005	0,6925	0,0005	0,5452	0,0007
II.B	0,8970	0,0005	0,7186	0,0006	0,5479	0,0007
II.C	0,8901	0,0003	0,7221	0,0003	0,5313	0,0004
II.D	0,8911	0,0004	0,7116	0,0004	0,5288	0,0005
III.A	1,4126	0,0005	0,6704	0,0003	0,5266	0,0004
III.B	1,4106	0,0004	0,6742	0,0003	0,5248	0,0004
III.C	1,4239	0,0005	0,6629	0,0003	0,5389	0,0004
III.D	1,4224	0,0004	0,6670	0,0003	0,5365	0,0004

Chceme-li tyto výsledky použít pro měření teploty pomocí zde zpracovávaných rezistorů, musíme parametry uvedené v tabulce 3.2.1 dosadit do invertované funkce (3.2.1):

$$T(R) = T_0^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left[ \ln \frac{R}{R_0} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.2.7)$$

### 3.3. Proložení Čebyševovými polynomy

Jako další aproximační funkce byla zvolena funkce (2.10.1), která je součtem prvních 5 Čebyševových polynomů (viz podkapitoly 2.9 a 2.10).

$$\beta(x) \cong A + B \cdot x + C \cdot (2x^2 - 1) + D \cdot (4x^3 - 3x) + F \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1), \quad (2.10.1)$$

kde  $\beta$  je inverzní teplota neboli studenost definovaná

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (3.3.1)$$

přičemž  $k_B$  je Boltzmanova konstanta ( $1,380\,662 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  [3]) a  $T$  je termodynamická teplota vypočtená postupem popsáním v podkapitole 2.1. (Poznámka: studenost  $\lambda$ -přechodu je  $\beta_\lambda = 5331 \text{ eV}^{-1}$ ).

Jak bylo řečeno v podkapitole 2.9, musí být argument Čebyševových polynomů  $x$  reálné číslo z intervalu  $[0; 1]$ , které vznikne lineárním zobrazením odporu  $R$  do tohoto intervalu.

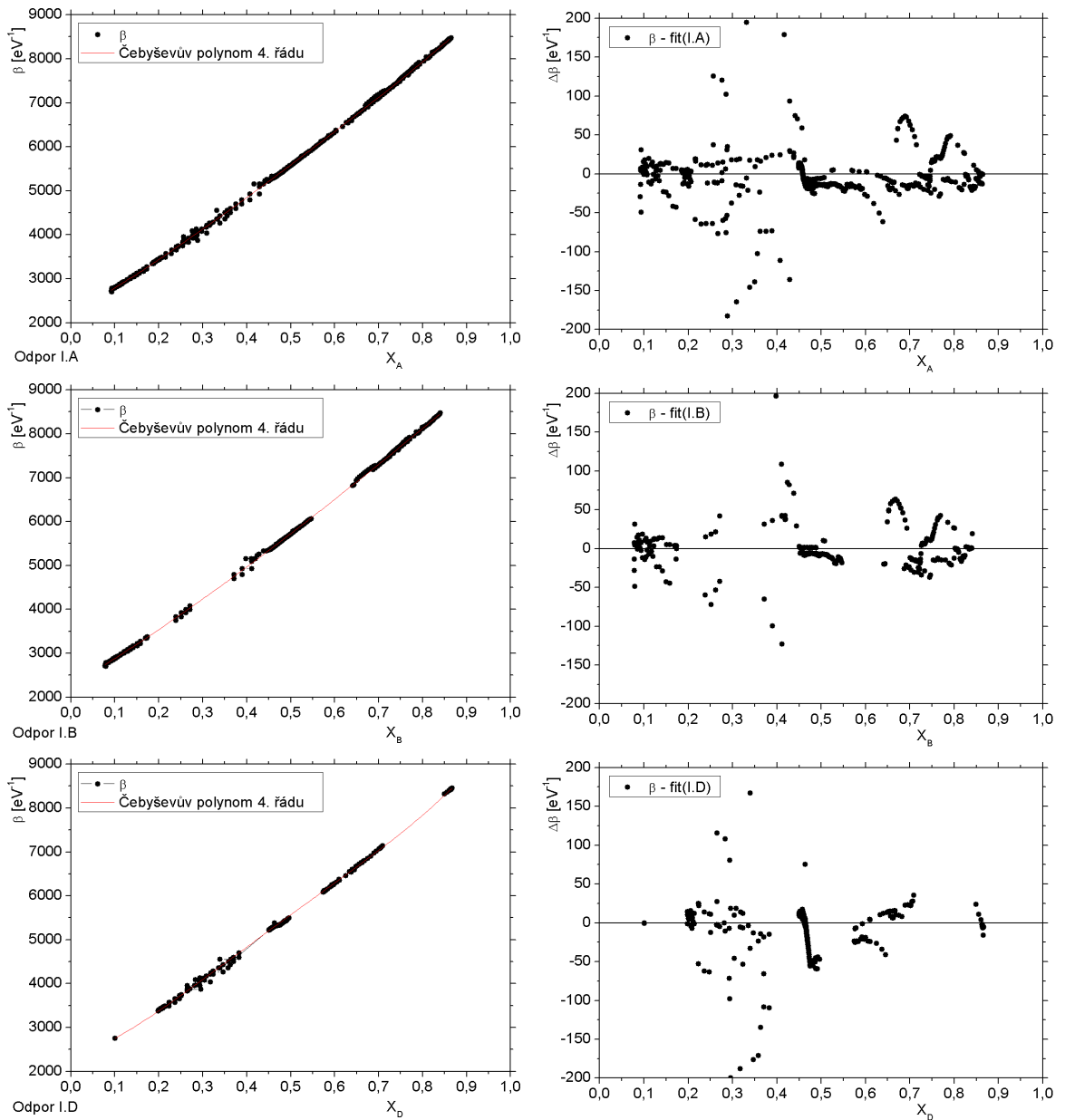
$$x(R) = \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}}. \quad (3.3.2)$$

Tabulka 3.3.1.: Maximální, minimální a použité odpory rezistorů I.A až III.D:

rezistor	Naměřené		Zvolené	
	$R_{min}$ [kΩ]	$R_{max}$ [kΩ]	$R_{min}$ [kΩ]	$R_{max}$ [kΩ]
I.A	1,25	1,63	1,20	1,70
I.B	1,24	1,62		
I.C	data neexistují			
I.D	1,25	1,63		
II.A	1,24	1,62	1,20	1,70
II.B	1,24	1,65		
II.C	1,25	1,65		
II.D	1,24	1,64		
III.A	1,93	2,49	1,90	2,50
III.B	1,94	2,50		
III.C	1,93	2,49		
III.D	1,93	2,50		

Hranice intervalu  $[R_{max}; R_{min}]$  pro výpočet  $x$  ve vztahu (3.3.2) jsem zvolil trochu větší, aby hraniční hodnoty byly stejné vždy pro každou sérii.

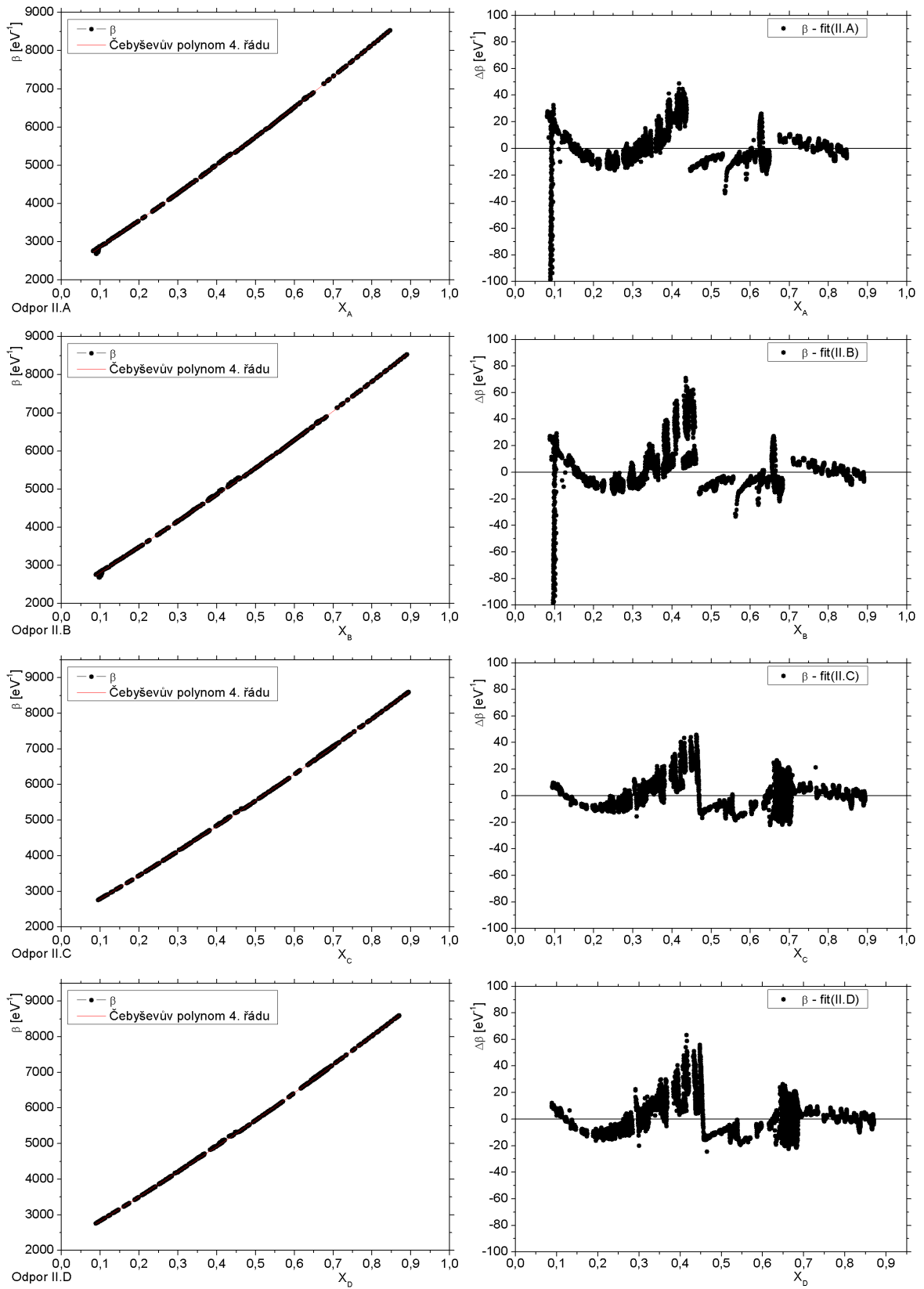
**První série:**



Grafy 3.3.1 – 3.3.6.: V levém sloupečku jsou naměřené hodnoty studenosti v závislosti na proměnné  $x$  vypočtené ze vztahu (3.3.2) pro každý rezistor. V pravém sloupečku jsou rozdíly naměřené studenosti a studenosti vypočtené z proložené funkce.

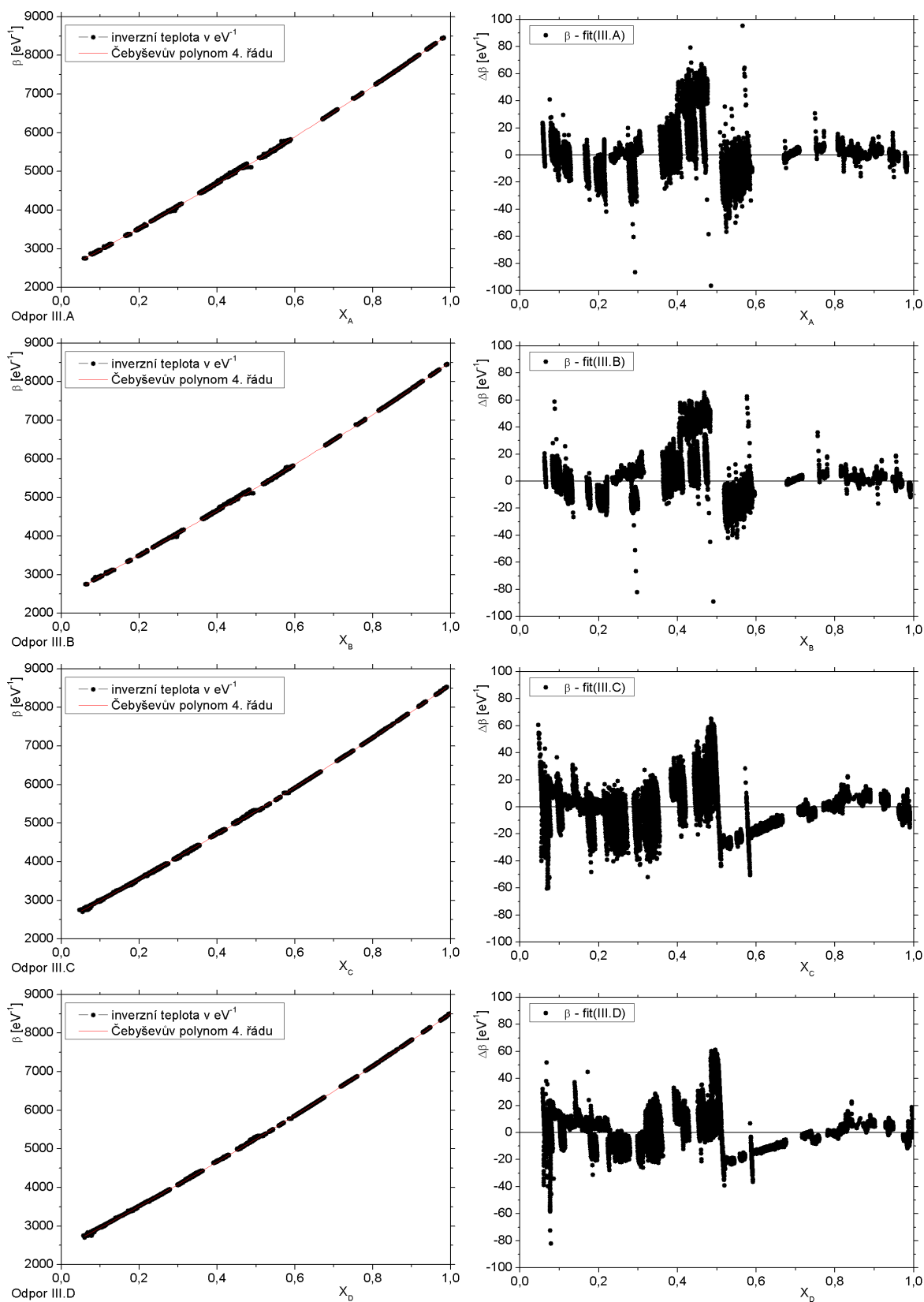


Druhá série:



Grafy 3.3.7 – 3.3.14.: Grafy studeností v závislosti na proměnné  $x$  druhé série rezistorů. Vpravo jsou opět rozdíly mezi naměřenou a vypočtenou studeností.

**Třetí série:**



Grafy 3.3.15 – 3.3.22.: Grafy závislosti studenosti na odporech jednotlivých rezistorů třetí série. V pravém sloupečku jsou rozdíly mezi naměřenými a proloženými hodnotami studenosti.

Tabulka 3.3.2.: Parametry proložení naměřených studeností pomocí Čebyševových polynomů:

rezistor	A [eV <sup>-1</sup> ]	B [eV <sup>-1</sup> ]	C [eV <sup>-1</sup> ]	D [eV <sup>-1</sup> ]	F [eV <sup>-1</sup> ]
I.A	4801,0	2751,2	2850,9	-957,8	245,1
chyba	475,1	814,0	518,8	219,6	56,4
I.B	2957,6	6186,2	660,7	20,0	-44,6
chyba	867,2	1485,5	954,0	406,1	106,3
I.D	13306,2	-11976,0	12415,7	-5153,7	1395,1
chyba	879,6	1507,2	956,1	403,8	103,3
II.A	1045,3	9474,0	-1281,4	768,3	-173,5
chyba	73,0	125,1	80,3	34,3	9,0
II.B	604,3	9800,3	-1706,4	900,1	-196,1
chyba	65,1	111,7	70,8	30,0	7,5
II.C	1762,0	7838,2	-465,9	417,0	-102,4
chyba	45,2	77,6	48,8	20,5	5,0
II.D	1320,8	8834,7	-973,6	644,4	-154,7
chyba	51,6	88,6	56,2	23,8	5,9
III.A	2279,0	6264,9	-145,6	208,2	-17,7
chyba	23,7	40,7	25,6	10,8	2,5
III.B	2307,2	6140,9	-102,1	192,8	-18,8
chyba	21,5	37,1	23,2	9,8	2,3
III.C	2924,4	5185,5	523,9	-76,7	43,0
chyba	25,2	43,5	27,4	11,7	2,8
III.D	2840,3	5232,1	449,1	-36,9	25,2
chyba	21,3	36,7	23,0	9,8	2,3

### 3.4. Proložení Čebyševovými polynomy druhého řádu

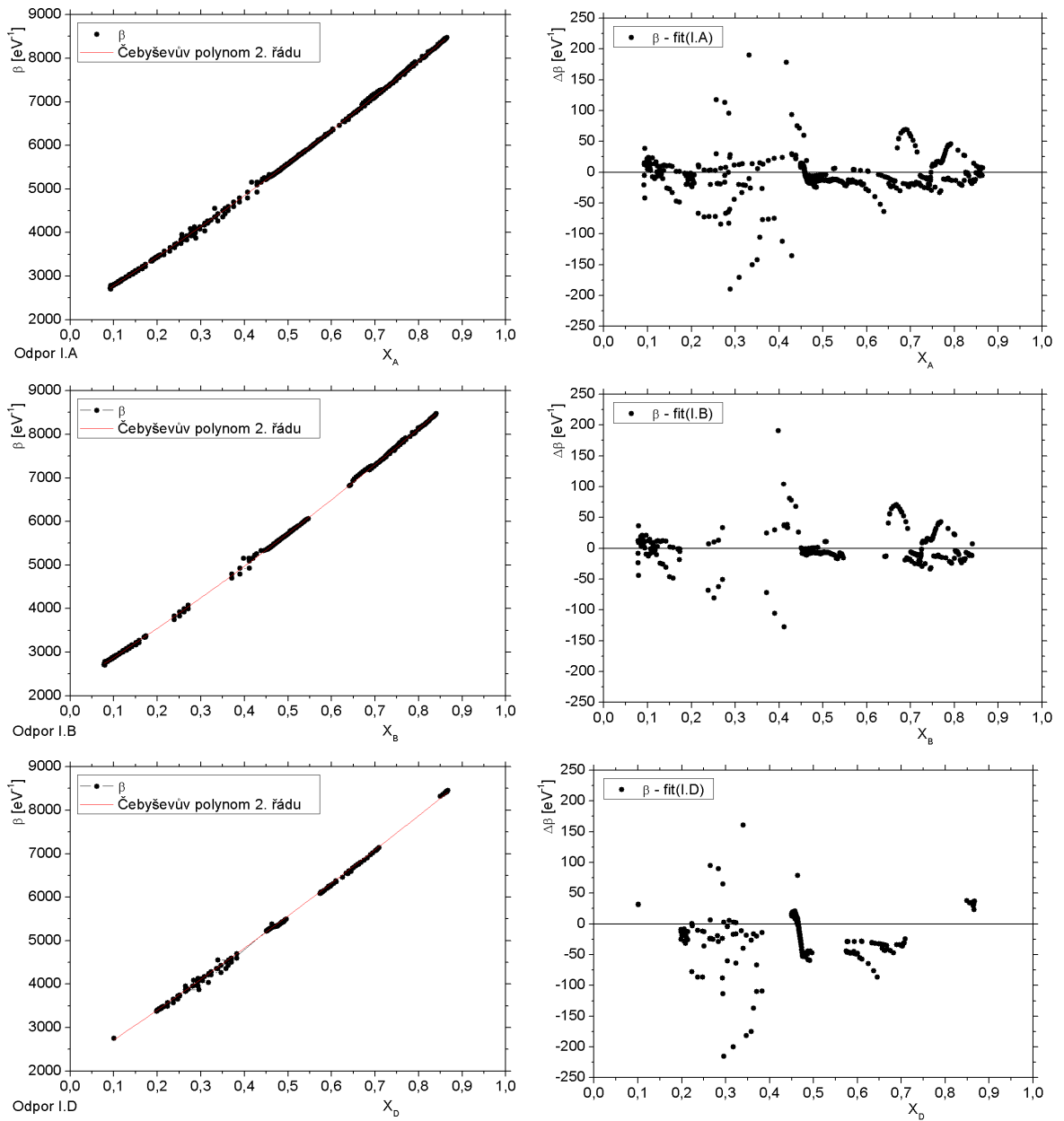
Z tabulky 2.10.2. je vidět, že funkce chyby  $\chi^2$  rychle klesla už u řádu 2 a potom už se razantně neměnila. Navíc, proložení naměřených dat funkcí (3.2.1) získáme pouze 3 parametry, zatímco prokládáním Čebyševovými polynomy podle podkapitoly 3.3 získáme parametrů 5. Z tohoto důvodu jsem se rozhodl provést ještě proložení Čebyševovými polynomy 2. řádu, jehož výsledky by mohly sloužit především při nepřilíš přesném měření teplot.

Čebyševův polynom 2. řádu je:

$$\beta(x) \cong A + B \cdot x + C \cdot (2x^2 - 1), \quad (3.4.1),$$

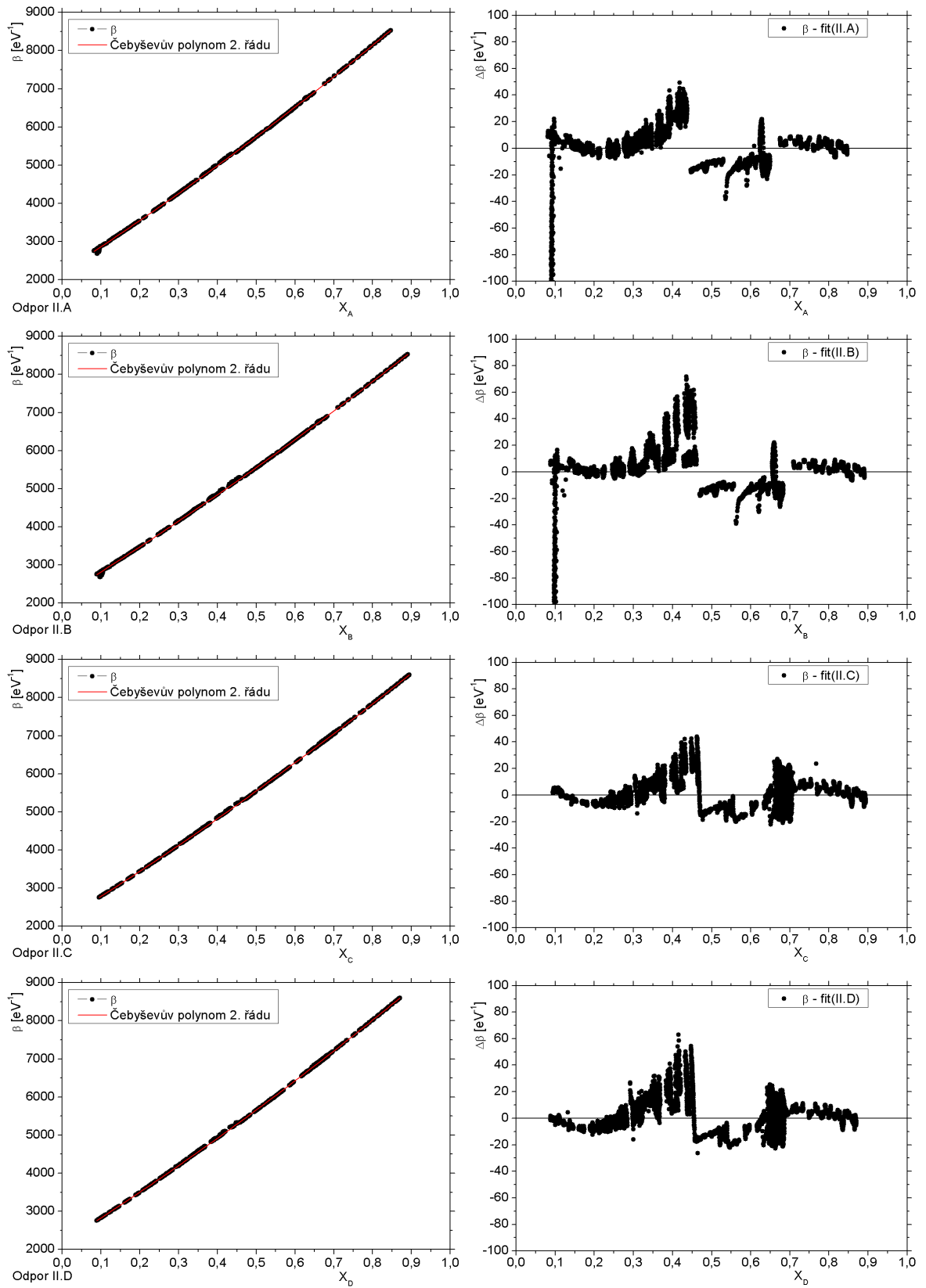
kde  $x$  je proměnná vypočtená z odporu  $R$  podle vztahu (3.3.2) a příslušné minimální a maximální hodnoty  $R$  pro jednotlivé rezistory jsou v tabulce 3.3.1.

**První série:**



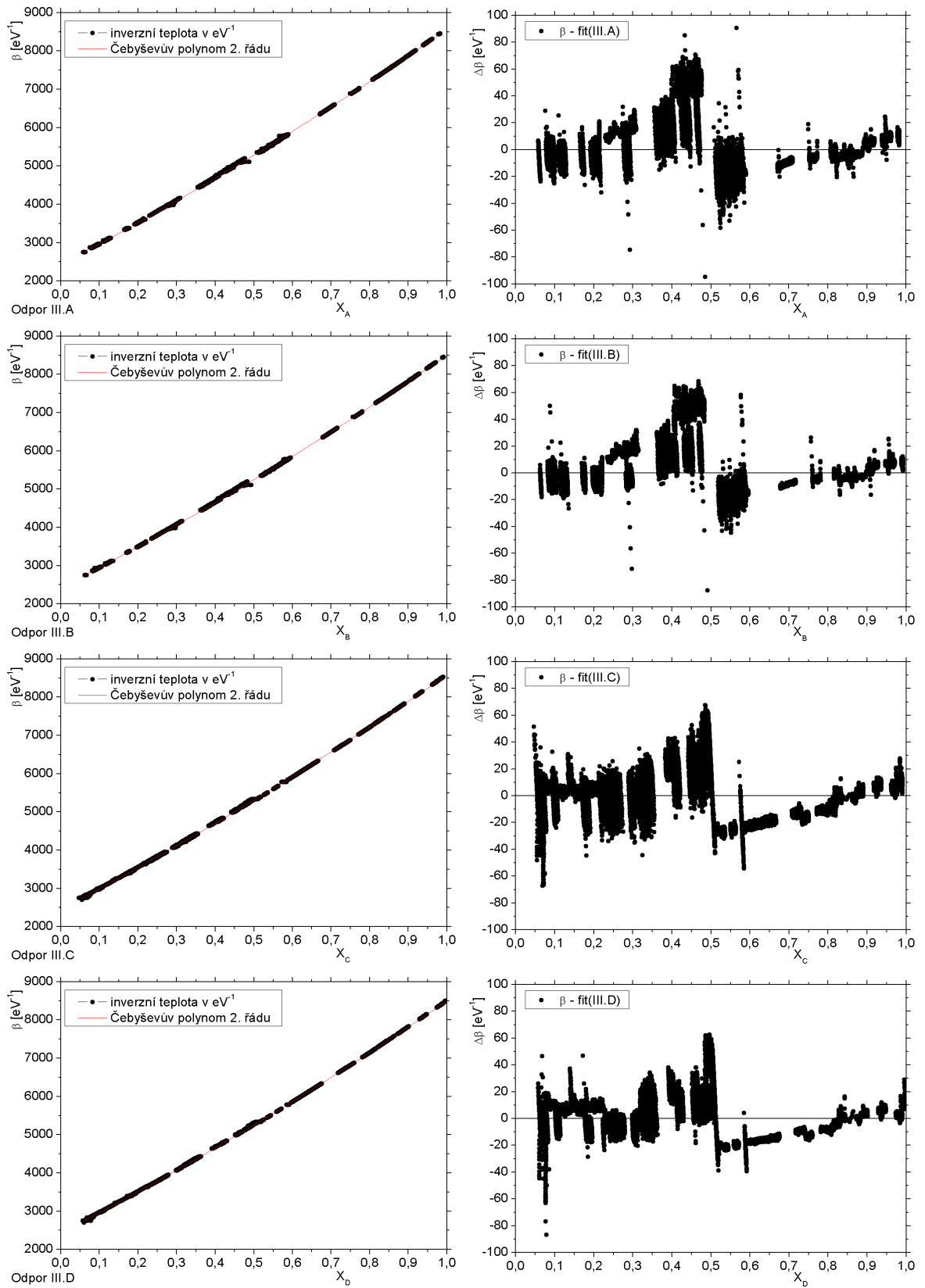
Grafy 3.4.1 – 3.4.6.: V levém sloupci jsou grafy studenosti v závislosti na odporu jednotlivých rezistorů proložené Čebyševovým polynomem 2. řádu. V pravém sloupci jsou rozdíly mezi naměřenými studenostmi a studenostmi vypočtenými ze vztahu (3.4.1)

Druhá série:



Grafy 3.4.7 – 3.4.14.: V levém sloupci jsou naměřená data 2. série. V pravém jsou rozdíly mezi naměřenými daty a proloženými funkcemi, jež jsou tvaru (3.4.1).

**Třetí série:**



Grafy 3.4.15 – 3.4.22.: Naměřenými daty byl proložen Čebyševův polynom druhého řádu (3.4.1). Rozdíly mezi naměřenými a proloženými hodnotami jsou v pravém sloupci.

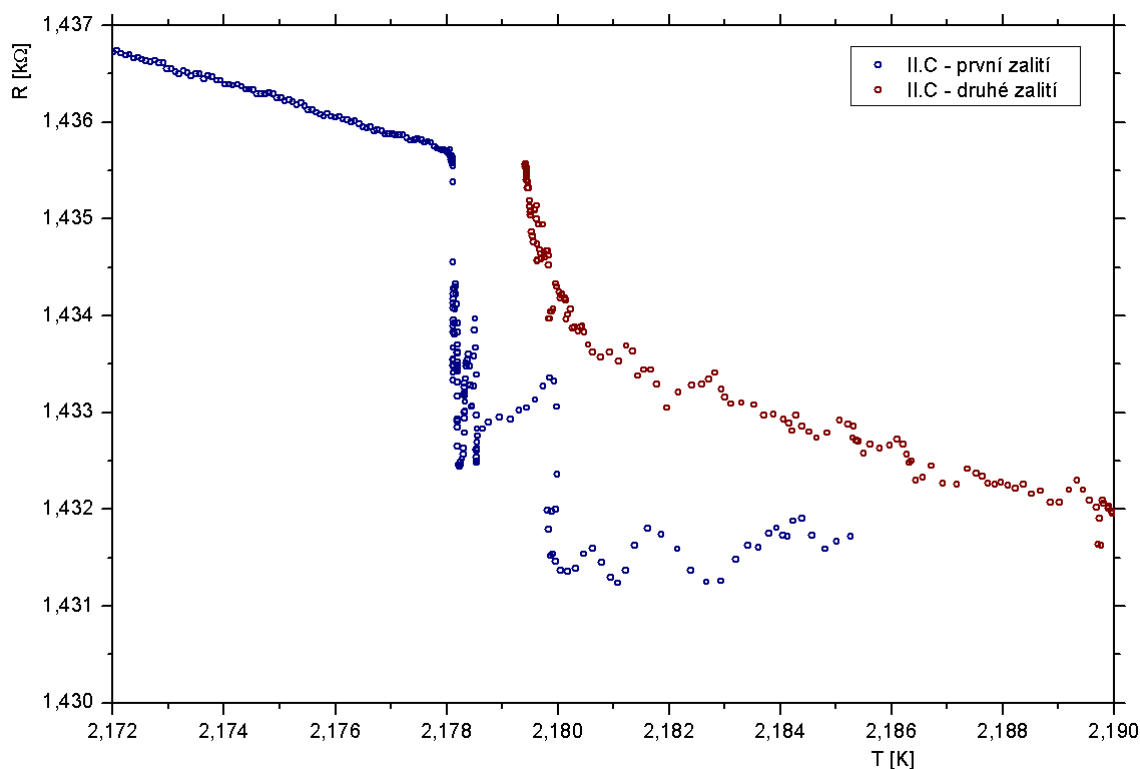
Tabulka 3.4.1.: Výsledné parametry funkce (3.4.1) proložené naměřenými daty:

parametr rezistor	A [eV <sup>-1</sup> ]	chyba A [eV <sup>-1</sup> ]	B [eV <sup>-1</sup> ]	chyba B [eV <sup>-1</sup> ]	C [eV <sup>-1</sup> ]	chyba C [eV <sup>-1</sup> ]
I.A	2735,3	11,4	6290,5	15,9	590,8	7,9
I.B	2881,2	18,3	6329,5	25,8	647,4	13,8
I.D	2457,3	26,7	6630,9	36,7	410,2	18,2
II.A	2777,1	2,0	6503,9	2,9	568,3	1,4
II.B	2674,7	2,0	6253,8	2,9	485,5	1,4
II.C	2668,7	1,3	6281,5	1,9	518,6	0,8
II.D	2744,7	1,4	6393,9	2,1	562,5	1,0
III.A	2887,8	0,9	5236,9	1,3	443,8	0,6
III.B	2864,5	0,8	5200,3	1,2	440,2	0,6
III.C	2879,7	0,9	5279,5	1,4	421,1	0,7
III.D	2845,9	0,8	5235,4	1,2	417,6	0,5

### 3.5. Další jevy pozorované v naměřených datech

V naměřených závislostech se projeví různé vedlejší jevy, jejichž studium není součástí této práce. Jejich praktický dopad je pouze ten, že vnášejí nějakou systematickou chybu nebo šum do naměřených dat, avšak právě díky tomu, že ne vše se chová tak, jak si to představujeme, je věda tak dobrodružná.

#### Skok na $\lambda$ -přechodu



Graf 3.5.1.: Odpor rezistoru II.C vůči teplotě v okolí  $\lambda$ -přechodu ( $T_\lambda = 2,1768$  K). Barevně jsou odlišeny 2 zalití kapalným héliem.

Naměřený *teplotní skok* při  $\lambda$ -přechodu je pravděpodobně dán tím, že se prudce zvýší efektivita přenosu tepla mezi hladinou a objemem kapaliny vlivem přechodu hélia do *supratekutého stavu*.

Přenos tepla se děje obecně třemi mechanismy: *vedení, proudění a záření*. Při sledovaných teplotách lze přenos tepla zářením mezi jednotlivými částmi objemu hélia zanedbat, neboť *intenzita záření* je přímo úměrná rozdílu *čtvrtých mocnin teploty*;

$$I = \sigma \cdot T_1^4 - T_2^4. \quad (3.5.1)$$

Přenos tepla *prouděním* naprosto převládne v oblasti pod  $\lambda$ -přechodem v supratekutém heliu. Jakýkoli rozdíl teplot je zde vyrovnán velmi rychlým bezviskózním prouděním.

Nad  $\lambda$ -přechodem se teplo přenáší *vedením i prouděním*. Za předpokladu, že se teplo přenáší *pouze* vedením, lze učinit následující pokus o opravu:

Pokusil jsem se započítat *rychlost přenosu tepla vedením* v heliu; uvažoval jsem rovnovážný stav. *Tepelná vodivost*  $\kappa$  je dána vztahem:

$$\kappa = \frac{dQ/dt}{h\Delta T}, \quad (3.5.2)$$

kde  $dQ$  je *teplo* spotřebované na vypaření hélia potřebného pro udržení tlaku nasycených par za časový úsek  $dt$ ,  $h$  je hloubka rezistorů v kapalině, čili dráha, po které se musí teplo převést,  $\Delta T$  je rozdíl teplot mezi hladinou a rezistory v hloubce  $h$ .

Z tohoto vztahu lze vyjádřit hledanou  $\Delta T$ :

$$\Delta T = \frac{1}{h\kappa} \frac{dQ}{dt}. \quad (3.5.3)$$

Dále lze užitím vztahu pro *měrnou tepelnou kapacitu*  $c_V$

$$dQ = m \cdot c_V \cdot dT, \quad (3.5.4)$$

ve kterém lze *hmotnost*  $m$  vyjádřit jako

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot h \cdot A = \rho \cdot h \cdot \pi \cdot R^2 \quad (3.5.5)$$

získat vztah pro rozdíl teplot mezi hladinou a hloubkou  $h$

$$\Delta T = \frac{1}{h\kappa} \frac{dQ}{dt} = \frac{mc_V}{h\kappa} \frac{dT}{dt} = \frac{\pi h R^2 \rho c_V}{h\kappa} \frac{dT}{dt} = \frac{\pi R^2 \rho c_V}{\kappa} \frac{dT}{dt}, \quad (3.5.6)$$

kde  $\rho$  je *hustota* kapaliny a  $R$  je *poloměr* kryostatu (viz obr. 2.4.1).

Ukázaný postup lze použít jen za předpokladu přenosu tepla *vedením* (což není pravda) a za předpokladu, že celý systém je stále v rovnováze (což také není pravda). Všimněme si, že ve výsledném vztahu (3.5.6) nevystupuje  $h$ .

Konstanty  $\kappa$ ,  $\rho$  a  $c_V$  jsou funkcemi *teploty* a opsal jsem je z tabulek [4].

Snaha však byla marná, neboť časový krok  $dt$  byl měřen diskrétně stejně jako  $dT$ . To způsobilo, že po jejich podělení se natolik zvýšil šum způsobený statistickými chybami, že oprava byla nepoužitelná (resp. opravené hodnoty byly zatíženy šumem větším než jejich velikost, mnoho z nich zasahovalo dokonce do záporné teploty a tak

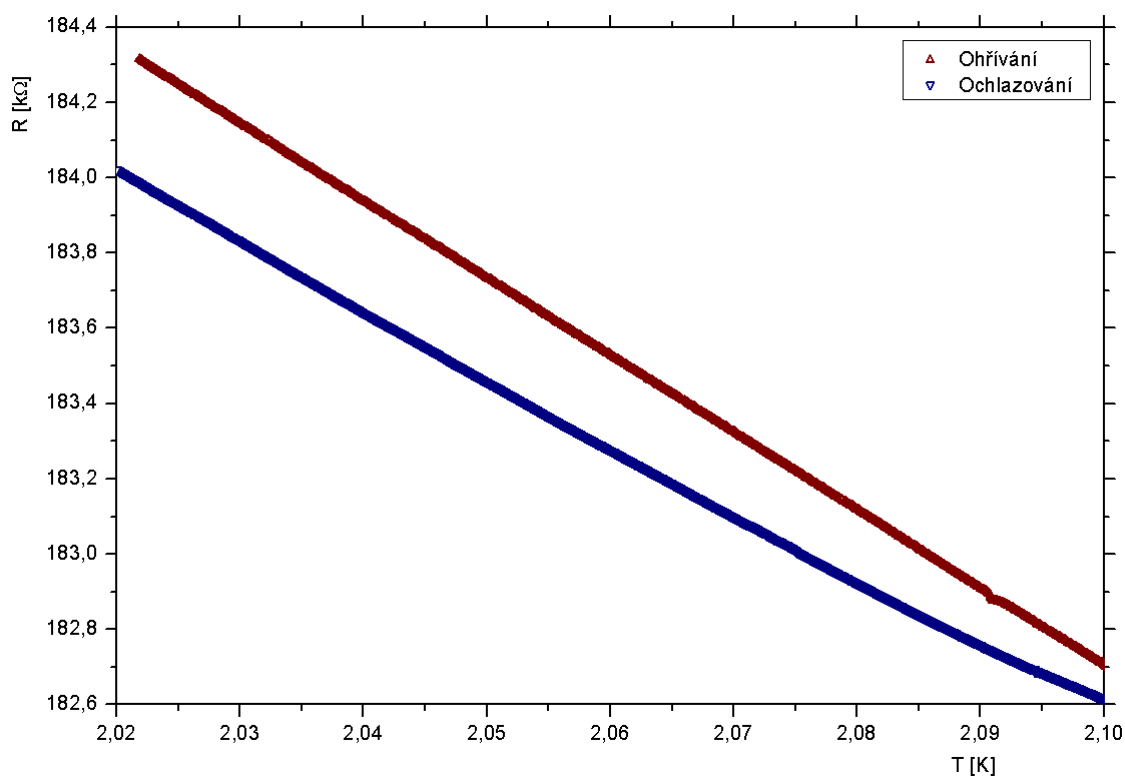


podobně). Pochopitelně jsem se pokusil data vyhladit, ale ani to nepomohlo, pouze to vneslo další chyby (postup funkce se stal schodovým).

### Ohřívání × ochlazování

*Ideální postup měření* by byl ten, že bych měřil při konstantní teplotě v termodynamické rovnováze. To není v praxi proveditelné, neboť héliová lázeň je stále ohřívána zvenčí, takže pumpy musí běžet i když se zrovna neochlazuje. Jak je těžké udržet alespoň přibližně stálou teplotu, jsem si vyzkoušel při měření vlivu excitace (podkapitola 2.8).

Ve skutečnosti jsem tedy měření prováděl tak, že jsem stále lázeň ochlazoval. Nad  $\lambda$ -přechodem to způsobí *zpoždění* teploty v hloubce rezistorů oproti teplotě hladiny, pod  $\lambda$ -přechodem *rychlost* ochlazování vliv nemá. Ale překvapivě má vliv *znaménko* změny teploty.

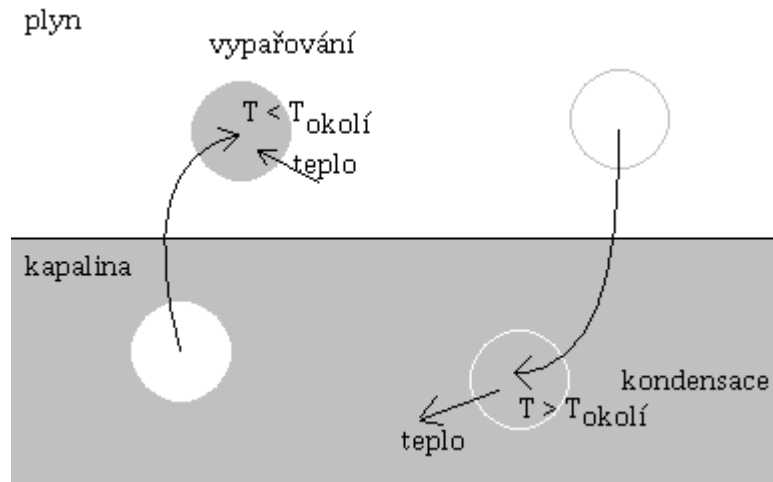


Graf 3.5.2.: Rozdíl mezi ochlazováním (modrá) a ohříváním (červená). Celá oblast je pod teplotou  $\lambda$ -přechodu. Zde zobrazená data naměřil Dr. Simone Babouin na uhlíkových rezistorech Allen-Bradley

Jelikož je celá oblast zobrazená na *grafu 3.5.2.* pod teplotou  $\lambda$ -přechodu, nelze uvažovat vliv rozdílné rychlosti proudění, jak by se projevoval nad ním.

V *normální* kapalině totiž platí, že když se ochlazuje (na hladině), vzniká nestabilní situace (chladnější látka má větší hustotu), která vyvolá proudění vyrovnávající teploty. Pokud kapalinu ohříváme, je situace po hustotní stránce stabilní a teplo se šíří skoro jen vedením. V *supratekuté* kapalině tato úvaha neplatí.

Mám za to, že zde hraje roli proces *vypařování*, resp. *kondensace*. V případě *vypařování* jisté množství (mezoskopický počet atomů) hélia přejde z kapaliny do plynu a změní své *skupenství* za spotřeby tepla, čímž se ochladí. Vyrovnáním teploty si vezme teplo ze *svého* okolí, tedy z plynu. Plyn se ochladí a od něj se ochladí kapalina. V případě *kondensace* přejde jistý objem hélia z plynu do kapaliny, z kondensuje, čímž uvolní teplo, a vyrovnáváním teplot ohřeje přímo kapalinu.

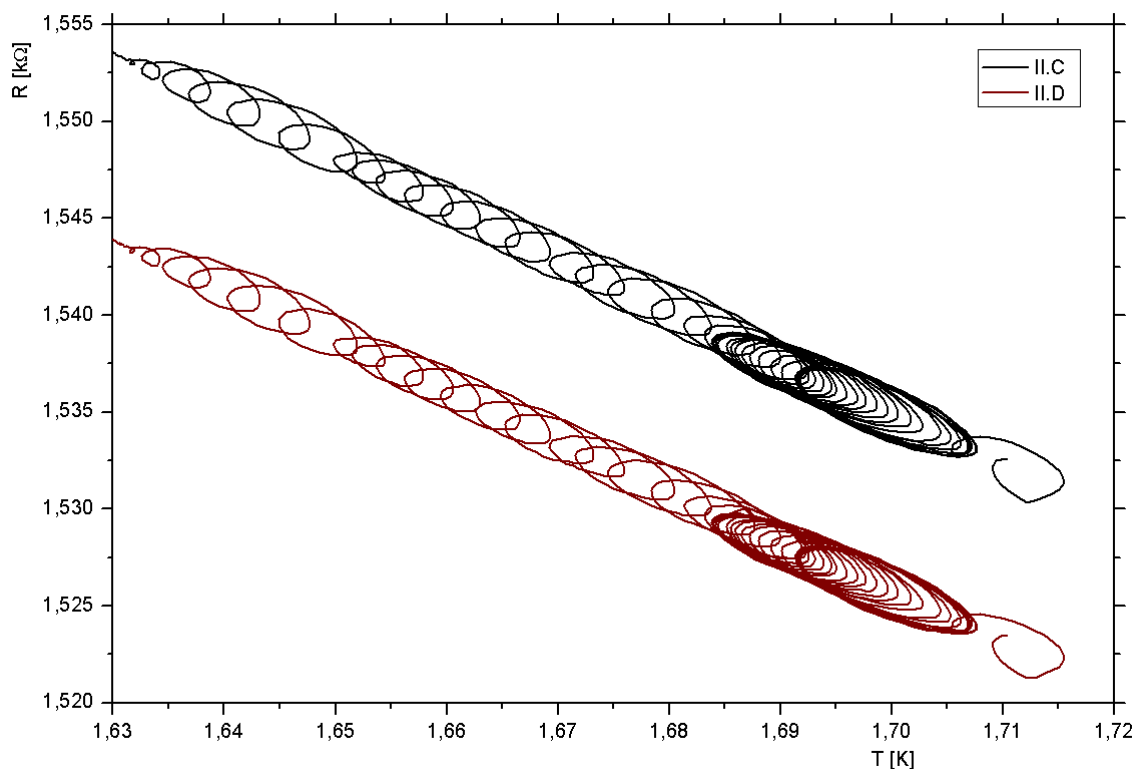


Obrázek 3.5.1.: Vypařování a kondensace v blízkosti hladiny. Při vypařování se ochlazuje plyn, při kondensaci se ohřívá kapalina.

Ač je kapalina v *supratekutém* stavu, má *hladinu* – přes ni se teplo šíří pomaleji. Při ohřívání je tedy *odezva* rychlejší, takže teplota *vypočtená z tlaku* bude vyšší než teplota *vypočtená z odporu* (srov. graf 3.5.2).

Další možnost, proč došlo k rozdílu mezi ochlazováním a ohříváním je hystereze uhlíkových rezistorů typu Allen-Bradley

## Oscilace v plynovém sloupci



Graf 3.5.3.: Oscilace tlaku ve sloupci plynu nad hladinou. Teplota ve skutečnosti neoscilovala, jev vznikl tím, že jako vztažný teploměr používám tlak nasycených par.

Jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.4, jsou ke kryostatu připojeny dvě vývěvy. Situace na grafu 3.5.3 vznikla, když jsem spustil druhou vývěvu. Pravděpodobně vznikla rezonance mezi vlastní frekvencí oscilací v plynovém válci nad hladinou a jejími otáčkami.

Podobné situaci u dalších měření jsem předešel tak, že jsem od začátku měl zapnuty obě pumpy, a skutečně už dále jsem podobný jev nepozoroval.

## 4. Diskuse

### 4.1. Chyby měřicích přístrojů

Tabulka 4.1.1.: Chyby použitých měřicích přístrojů udávané výrobcem

Přístroj	chyba udávaná výrobcem
<i>Neocera Temperature Controler LTC-21 (můstek)</i>	0,25 %
<i>MKS 690A (tlakoměr)</i>	0,12 % $\pm$ nulový koeficient

Chyba *Temperature Controleru* je silně závislá na zvolené velikosti excitace. Jak bylo zjištěno (podkapitola 2.8), velikost excitace má malý systematický vliv na naměřený odpor, kterýžto se schová v šumu. Také má poměrně silný vliv na šum naměřených dat (porovnejme *druhou* a *třetí* sérii). Žel jsem si nepoznamenal, jakou excitaci jsem nakonec u jednotlivých měření zvolil. Zjevně méně než 100 mV.

### 4.2. Vodiče

K připojení rezistorů byla použita *měď* a *manganin* (viz podkapitola 2.2). Měď má velmi malý měrný odpor ( $0,018 \mu\Omega \cdot \text{m}$  při  $0^\circ\text{C}$  [3]), který navíc při nižších teplotách klesá. Manganinová vlákna byla použita pro tu část spojení, kde se eliminuje vliv odporu vodičů (viz *obrázek 2.2.1*). Manganin se používá z toho důvodu, že má velmi malou tepelnou vodivost. Další přírodní kabely na pokojové teplotě jsou z mědi a opět je jejich vliv eliminován zapojením.

Všechny spoje jsem pájel standardní pájecí směsí *cínu* a *olova*, přičemž poznamenejme, že olovo přechází do *supravodivého* stavu při teplotě 7,2 K a cín při teplotě 5,3 K resp. 3,7 K (tetragonální).

### 4.3. Výměna tepla mezi rezistory a lázní

Rezistory nebyly izolovány nějakým dalším obalem, takže byly v dobrém kontaktu s lázní. Problém by mohl nastat vlivem *Kapicova odporu* (totální odraz akustických fononů na rozhraní), ovšem ten je významnější až pro mnohem nižší teploty (řádově pod 1 K).

### 4.4. Šum

Na *grafech 3.2.1 až 3.4.22* je šum vidět, avšak vzhledem k velkému množství nabíraných bodů je na výsledných kalibračních funkcích jeho vliv omezen.

Šum je kumulovaný jednak z *tepelného šumu* na samotných odporech, ale také z šumu na přírodních vodičích, v lázni a i v měřicích přístrojích. Zajímavý je určitý malý, ale znatelný, *pokles šumu* při přechodu přes  $\lambda$ -přechod, který jasně ukazuje na tepelný šum lázně související s vyrovnáváním teploty rezistorů s lázní.

## 4.5. Záření

Tím, že má kryostat po stranách průzory, do něj může pronikat světlo, které s sebou přináší nežádoucí tepelný přítok. Ten je významnější na odporech než v lázni, neboť odpory mají *černou barvu*. Příkon záření na odporech lze odhadnout takto:

$$\begin{aligned} P &= I \cdot S \cdot \Delta Q / Q_0 = \sigma \cdot T^4 \cdot S \cdot \Delta Q / Q_0 = \\ &= 5,6 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 7,5 \cdot 10^{-2} = 75 \mu W. \end{aligned}$$

Při měření jsem se snažil do kryostatu moc nesvítit, a když to bylo nutné (kvůli kontrole hladiny), tak jen krátce.

Vliv dalšího elektromagnetického záření považuji za zanedbatelný, stejně tak vliv *zemského magnetického pole* a částicové složky *radioaktivního pozadí*.

## 4.6. Vibrace

Připojené pumpy jsou silným zdrojem vibrací (jejich vliv je ukázán na *grafu 3.5.3*), které se přenášejí plynem a po trubkách do kryostatu. Samozřejmě jsem se je pokoušel různě odstínit věšením závaží a textilů na trubky vedoucí k pumpám, ale nějaká absolutní obrana není dostupná. Významná redukce vibrací by vyžadovala použití dlouhé flexibilní potrubí zatlučené kotvením na velké hmotnosti.

Samotné odpory jsou k vibracím necitlivé, horší je to s měřením tlaku (viz *graf 3.5.3*). Nějaký systematický vliv neočekávám (ale nemohu ho vyloučit), spíše si myslím, že vibrace byly zdrojem šumu.

## 4.7. Hydrostatický tlak plynu

Výška *tlakoměru nad hladinou* hélia byla *přibližně 50 cm*. Hustota plynného hélia při teplotě  $2,2 \text{ K}$  a tlaku  $5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  je  $1,2 \text{ kg/m}^3$  [4]. Tomu odpovídající hydrostatický tlak je

$$P_H = \rho \cdot g \cdot h = 5,8 \text{ Pa} = 0,04 \text{ Torr}. \quad (4.7.1)$$

Tento výsledek nelze brát příliš vážně, neboť zde dosazené hodnoty jsou jen pro jeden bod a navíc se výška tlakoměru nad hladinou během experimentu *měnila* a měnila se i teplota plynu s výškou v kapiláře. Je však zřejmé, že hydrostatický tlak způsobil chybu určení teploty v řádu *mK*.

## Závěr

Provedl jsem kalibraci jedenácti polovodičových odporových teploměrů. Nejprve jsem prokládal naměřenými daty funkci (3.2.1)

$$R(T) = R_0 \cdot e^{\frac{T_0}{T^a}} \quad (3.2.1)$$

s koeficienty

Tabulka 3.2.1.: Parametry funkce (3.2.1) proložené jednotlivými sadami rezistorů.

rezistor	$R_0$ [kΩ]	chyba $R_0$ [kΩ]	$T_0$ [K <sup>1/a</sup> ]	chyba $T_0$ [K <sup>1/a</sup> ]	$a$	chyba $a$
I.A	0,8953	0,0025	0,7104	0,0025	0,5303	0,0031
I.B	0,8796	0,0041	0,7185	0,0042	0,5134	0,0050
I.D	0,9465	0,0047	0,6620	0,0043	0,5989	0,0071
II.A	0,9043	0,0005	0,6925	0,0005	0,5452	0,0007
II.B	0,8970	0,0005	0,7186	0,0006	0,5479	0,0007
II.C	0,8901	0,0003	0,7221	0,0003	0,5313	0,0004
II.D	0,8911	0,0004	0,7116	0,0004	0,5288	0,0005
III.A	1,4126	0,0005	0,6704	0,0003	0,5266	0,0004
III.B	1,4106	0,0004	0,6742	0,0003	0,5248	0,0004
III.C	1,4239	0,0005	0,6629	0,0003	0,5389	0,0004
III.D	1,4224	0,0004	0,6670	0,0003	0,5365	0,0004

Potom jsem použil Čebyševovy polynomy a prokládal jimi závislost *studenosti* (3.3.1) na *odporu*:

$$\beta(x) \cong A + B \cdot x + C \cdot (2x^2 - 1) + D \cdot (4x^3 - 3x) + F \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) \quad (2.10.1)$$

přičemž *studenost* (neboli *inverzní teplota*) je definována vztahem

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (3.3.1)$$

a bezrozměrná proměnná  $x$  je definována

$$x(R) = \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}}, \quad (3.3.2)$$

konstanty  $R_{max}$  a  $R_{min}$  pro každý rezistor jsou uvedeny v *tabulce 3.3.1*.

Tabulka 3.3.1': Zkrácená verze tabulky 3.3.1.

série rezistorů	$R_{min}$ [kΩ]	$R_{max}$ [kΩ]
I	1,2	1,7
II	1,2	1,7
III	1,9	2,5

Tabulka 3.3.2.: Parametry proložení naměřených studeností pomocí Čebyševových polynomů:

rezistor	A [eV <sup>-1</sup> ]	B [eV <sup>-1</sup> ]	C [eV <sup>-1</sup> ]	D [eV <sup>-1</sup> ]	F [eV <sup>-1</sup> ]
I.A	4801,0	2751,2	2850,9	-957,8	245,1
chyba	475,1	814,0	518,8	219,6	56,4
I.B	2957,6	6186,2	660,7	20,0	-44,6
chyba	867,2	1485,5	954,0	406,1	106,3
I.D	13306,2	-11976,0	12415,7	-5153,7	1395,1
chyba	879,6	1507,2	956,1	403,8	103,3
II.A	1045,3	9474,0	-1281,4	768,3	-173,5
chyba	73,0	125,1	80,3	34,3	9,0
II.B	604,3	9800,3	-1706,4	900,1	-196,1
chyba	65,1	111,7	70,8	30,0	7,5
II.C	1762,0	7838,2	-465,9	417,0	-102,4
chyba	45,2	77,6	48,8	20,5	5,0
II.D	1320,8	8834,7	-973,6	644,4	-154,7
chyba	51,6	88,6	56,2	23,8	5,9
III.A	2279,0	6264,9	-145,6	208,2	-17,7
chyba	23,7	40,7	25,6	10,8	2,5
III.B	2307,2	6140,9	-102,1	192,8	-18,8
chyba	21,5	37,1	23,2	9,8	2,3
III.C	2924,4	5185,5	523,9	-76,7	43,0
chyba	25,2	43,5	27,4	11,7	2,8
III.D	2840,3	5232,1	449,1	-36,9	25,2
chyba	21,3	36,7	23,0	9,8	2,3

V rámci zjednodušení výsledné závislosti a zmenšení počtu koeficientů nutných pro popsání teploměru jsem se rozhodl provést ještě kalibraci Čebyševovými polynomy druhého řádu:

$$\beta(x) \cong A + B \cdot x + C \cdot (2x^2 - 1). \quad (3.4.1)$$

Tabulka 3.4.1.: Výsledné parametry funkce (3.4.1) proložené naměřenými daty:

parametr rezistor	A [eV <sup>-1</sup> ]	chyba A [eV <sup>-1</sup> ]	B [eV <sup>-1</sup> ]	chyba B [eV <sup>-1</sup> ]	C [eV <sup>-1</sup> ]	chyba C [eV <sup>-1</sup> ]
I.A	2735,3	11,4	6290,5	15,9	590,8	7,9
I.B	2881,2	18,3	6329,5	25,8	647,4	13,8
I.D	2457,3	26,7	6630,9	36,7	410,2	18,2
II.A	2777,1	2,0	6503,9	2,9	568,3	1,4
II.B	2674,7	2,0	6253,8	2,9	485,5	1,4
II.C	2668,7	1,3	6281,5	1,9	518,6	0,8
II.D	2744,7	1,4	6393,9	2,1	562,5	1,0
III.A	2887,8	0,9	5236,9	1,3	443,8	0,6
III.B	2864,5	0,8	5200,3	1,2	440,2	0,6
III.C	2879,7	0,9	5279,5	1,4	421,1	0,7
III.D	2845,9	0,8	5235,4	1,2	417,6	0,5

## Seznam použité literatury

- [1] Échelle internationale de température de 1990, BIPM, Paris 1989
- [2] Jiří English, Zpracování výsledků fyzikálních měření, MatfyzPress 2002
- [3] Matematické fyzikální a chemické tabulky, Praha 1966
- [4] Thomas M. Flynn, Cryogenic Engineering, CRC Press, Boca Raton 2005
- [5] Ch. Kittel: Úvod do fyziky pevných látek, Academia, Praha 1985
- [6] R. S. Šafrata, Z. Janů, M. Rotter, M. Koláč, B. Sedlák, L. Skrbek a M. Trhlík: Fyzika nízkých teplot, MatfyzPress Praha 1998
- [7] Jaroslav Vepřek: Elektrická měření nízkých teplot, SNTL, Praha 1977
- [8] T. J. Quinn: Temperature, Academic Press, London 1990