Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Milan Vaňkát

Spinory v Minkowského časoprostoru

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2010

Děkuji RNDr. Svatopluku Krýslovi Ph.D. za vedení práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Milan Vaňkát

Název práce: Spinory v Minkowského časoprostoru
Autor: Milan Vaňkát
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl Ph.D.
e-mail vedoucího: Svatopluk.Krysl@mff.cuni.cz

Abstrakt

Předkládaná práce shrnuje základní koncepce teorie spinorů a zasazuje spinory do obecnějšího kontextu speciální teorie relativity. V postupných krocích zavádíme spinový prostor a spinorovou algebru. Pomocí Infeld - van der Waerdenových symbolů následně vnoříme tenzorovou algebru do spinorové. Z aplikací teorie se práce omezuje na přeformulování základních objektů elektrodynamiky do spinorů.

Hlavní důraz je kladen na srozumitelnost textu. I proto se první dvě kapitoly věnují grupě Lorentzových transformací a podrobné konstrukci nakrytí grupy komplexních matic s jednotkovým determinantem na vlastní Lorentzovu grupu. Dokázána je mj. věta o rozkladu libovolné Lorentzovy transformace na rotaci, boost a rotaci.

V textu důsledně rozlišujeme mezi souřadnicovým a bezsouřadnicovým (geometrickým) zápisem, zápisem ve složkách a metodou abstraktních indexů.

Klíčová slova: Lorentzova grupa, spinor, Infeld - van der Waerdenovy symboly

Title: Spinors in Minkowski space time
Author: Milan Vaňkát
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Svatopluk.Krysl@mff.cuni.cz

Abstract

In the bachelor thesis, we explain the theory of spinors and present them in a more general context of the special theory of relativity. First, the concepts of spin space and spinor algebra are gradually introduced. In the following step we immerse the corresponding worldtensor algebra using Infeld - van der Waerden symbols in the spinor algebra. Concernig applications of the theory, the basic objects of electrodynamics are reformulated into spinors.

Comprehensibility of the thesis is emphasized. In the first two chapters we discuss the Lorentz transformation and covering map of the complex unimodular group to the Lorentz group. A proof of a decomposition of an arbitrary Lorentz transformation in rotation, boost and rotation is included.

In the thesis we consistently distinguish between coordinate and coordinate–free (geometrical) notation, components notation and abstract index notation.

Keywords: Lorentz group, spinor, Infeld - van der Waerden symbols

Obsah

Úvod

Stejně jako žádný učený z nebe nespadl, nespadla z nebe ani žádná úplná matematická teorie. Tak jako každý člověk – a nejen ten učený – jedinečně odráží dobu, v níž žije, zrcadlí i teorie spinorů fyziku 20. století a vývoj lidského poznání vůbec.

Předkládaný text lze číst hned na několika úrovních. Těžištěm zájmu nemusí být jen samotný obsah - grupa Lorentzových transformací a úvod k teorii spinorů, ale i forma – konkrétní aplikace formalismů současné fyziky. Důsledně je rozlišován souřadnicový a bezsouřadnicový zápis, zápis ve složkách a metoda abstraktních indexů.

Povzneseme-li se od obsahu ještě výše, jeví se teorie spinorů jako příklad věčného prolínání fyzikálních představ, chladné matematické logiky a experimentu. Stejně jako přeformulování Newtonovy mechaniky do hamiltonovského hávu otevřelo dveře ke kvantové mechanice, staví spinory most mezi klasickou relativistickou fyzikou a nanejvýš kvantovou vlastností mikrosvěta – spinem. Ve zkratce tak čtenáře čeká cesta od Michelsonova-Morleyova až ke Sternovu-Gerlachovu experimentu.

Z perspektivy zaměření práce – bakalářská práce, či z pohledu erudovanosti autora – nízké není možné očekávat rozsáhlé monografické dílo ani podrobný rozbor výše zmíněných experimentů. Přesto autor věří, že by výsledný text mohl případným zájemcům pomoci v seznamování se se základními ideami teorie.

Kapitola 1 – Lorentzova transformace přímo rozšiřuje látku probíranou na přednášce ze speciální teorie relativity pro 2. ročník. Vedle zavedení Lorentzových grup $O(1,3)$, $SO(1,3)_+$, grupy rotací $\mathcal{R}$ a grupy speciálních Lorentzových transformací $\mathcal{B}$ (boostů) obsahuje i důkaz věty o rozkladu libovolné Lorentzovy transformace $SO(1,3)_+$ na rotaci, boost a rotaci.

Kapitola 2 je věnována podrobné konstrukci zobrazení $\Upsilon : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(1,3)_+$. Dokazují se základní vlastnosti nakrytí – grupový homomorfismus, fundamentální dvouhodnotovost i zachování podgrup $\Upsilon : SU(2) \to \mathcal{R}$. Jako nosiče reprezentace $SL(2,\mathbb{C})$ slouží 2×2 komplexní hermitovské matice, spinory jako takové přináší až kapitola následující.

Kapitola 3 představuje těžiště práce. Definuje se spinový prostor a pomocí abstraktních indexů spinorová algebra. Nakrytí Υ získává nový význam v kanonické korespondenci hermitovských spinorů a tenzorů. Elegantní spinorovou formulaci obléknou vedle čtyřvektorů, Minkowského tenzoru a tenzoru elektromagnetického pole i Lorentzova síla a Maxwellovy rovnice. V závěrečné části vysvitnou spinory na světlo světa, a to doslova – spinovým vektorům (resp. jejich třídám) se podaří jednoznačně přiřadit body na světelném kuželi (tzv. vlajky).

Kapitola 1

Lorentzova transformace

Středem zájmu úvodní kapitoly je Lorentzova transformace jako matematický objekt (oddíly 1.3 $\leftrightarrow$ 1.6), případně obecněji prostoročas jako matematická struktura (oddíl 1.2). Úvodní část 1.1 zavádí potřebný formalismus a přidává i fyzikální motivaci – princip kovariance a Zeemanův teorém.

1.1 Princip kovariance

Vytvořit trojrozměrný souřadný systém je nanejvýš jednoduché (na rozdíl od čtyřrozměrného). Stačí vztyčit popořadě palec ($\vec{e}_1$), ukazováček ($\vec{e}_2$) a prostředníček ($\vec{e}_3$) do tří vzájemně kolmých směrů. Vektorem $\vec{r}$ pak může být pomyslná šipka spojující počátek soustavy souřadné (ruku) a kulečníkovou kouli ležící na billiardu opodál. Snadným experimentem zjistíme, že při rotaci souřadného systému (otočení zapěstí, $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{3} \mapsto \{\vec{e'}_i\}_{i=1}^{3}$) zůstává svět kolem nás stále týž, polohu koule nevyjímaje: $\vec{r} = r^i \vec{e}_i = r'^i \vec{e'}_i$ [1]. Na aktuální poloze ruky zjevně nezávisí ani výsledek srážky dvou kulečníkových koulí, celkové hybnosti před ($\vec{p}_{IN}$) a po srážce ($\vec{p}_{OUT}$) se rovnají po složkách, bez ohledu na to, vůči které bázi rovnost vyjadřujeme. Požadavek, aby nejen zákon zachování hybnosti, ale fyzikální zákony vůbec měly tvar nezávislý na konkrétním natočení souřadného systému nazveme *princip kovariance vůči rotacím.*

Speciální teorie relativity v první řadě precizuje pojem souřadného systému - z klasické mechaniky přejímá *inerciální souřadný systém* (ISS). Ke třem

[1] S použitím *sumační konvence* – automaticky se sčítá přes dva indexy, z nichž jeden je nahoře a jeden dole, aniž by se explicitně vypisoval znak $\sum$.

prostorovým rozměrům přibývá rozměr čtvrtý – čas ($\mathbf{e}_0$). Pro odlišení od klasických (tří)vektorů – sázených se šipkou budou v textu (čtyř)vektory prostoročasu sázeny tučně. Bázi souřadného systému $\mathcal{S}$ tak tvoří $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \equiv \{\mathbf{e}_0\} \cup \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{3} \equiv \{\mathbf{e}_\mu\}_{\mu=0}^{3}$ [2]. Dále uvažujeme výhradně inerciální systémy souřadné, podmínky kladené na bázi ISS upřesňuje oddíl 1.2.

Bodem (polohovým vektorem) $\mathbf{x}$ prostoročasu rozumíme *událost* – například ťuknutí tužkou do stolu. Vzhledem k danému souřadnému systému $\mathcal{S}$ je událost určena svou polohou (x^i) a časovou souřadnicí (x^0). Časovou souřadnici měříme stejně jako prostorové souřadnice v jednotkách délky. Uvažujme tedy $x^0 = ct$, kde c značí rychlost světla ve vakuu a t čas. Platí

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu \equiv x^0\mathbf{e}_0 + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 \text{ a} \tag{1.1}$$

$$x \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T. \tag{1.2}$$

Při přechodu do jiného inerciálního souřadného systému $\mathcal{S}'$ (pohybujícího se vůči $\mathcal{S}$ rovnoměrně přímočaře) zůstává svět (dění) kolem nás stále týž, tj.

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x'^\mu \mathbf{e}'_\mu. \tag{1.3}$$

Obecný tvar transformace $x'(x)$, resp. $x(x')$ je vymezen výsledkem Michelsonova-Morleyova experimentu. Rychlost světla musí být v obou souřadných systémech stejná, rovna jedné (viz zavedení x^0). Podrobněji, označíme-li $\mathbf{x}, \mathbf{x_0}$ dvě různé události na trajektorii (světočáře) téhož fotonu, platí v $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{S}'$ rovnosti

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^0 - x_0^0)^2 = 0 \tag{1.4a}$$

$$(x'^1 - x_0'^1)^2 + (x'^2 - x_0'^2)^2 + (x'^3 - x_0'^3)^2 - (x'^0 - x_0'^0)^2 = 0 \tag{1.4b}$$

Jinými slovy transformace $x'(x)$, resp. $x(x')$ nutně zobrazuje světelný kužel (s vrcholem v libovolném bodě) opět na světelný kužel. Zároveň je přirozené předpokládat, že se oba pozorovatelé shodují na směru času (letíli foton do budoucnosti nebo do minulosti), a proto

$$x^0 > x_0^0 \iff x'^0 > x_0'^0. \tag{1.5}$$

Uvedené podmínky postačují k vyslovení *Zeemanova teorému*.

[2] V souladu s obecnou konvencí vyhrazující písmena latinky prostorovým souřadnicím, zatímco řecká písmena odkazují na libovolný rozměr prostoročasu

Věta – Zeemanův teorém. *Nechť* $x'(x)$, *resp.* $x(x')$ *jsou vzájemně inverzí zobrazení* $\mathbb{R}^4$ *na sebe sama. Nechť pro kažké* $x, x_0 \in \mathbb{R}^4$ *ležící na světočáře fotonu* (1.4a) *platí:*

i. $x'(x), x'_0(x_0)$ *splňují* (1.4b)

ii. $x^0 > x^0_0 \iff x'^0(x) > x'^0_0(x_0)$

Nechť $x(x')$ *splňuje analogické předpoklady. Potom* $x'(x)$ *lze vyjádřit jako složené zobrazení* $x'(x) = S \circ T \circ \Lambda$, *kde:*

1. $S(x) = kx, \quad k > 0,$

2. $T(x) = x + y_0,\ y_0 \in \mathbb{R}^4$ *a*

3. $\Lambda(x) = \Lambda x \equiv \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & A^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$

Matice Λ *vyhovuje definiční podmínce obecné Lorentzovy grupy* (1.14a) *a navíc prvek* $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

Důkaz. Důkaz Zeemanova teorému lze najít v [1, str. 66]. □

Zobrazení S, resp. T odpovídají škálování os, resp. posunu počátku souřadnic (prostorového i časového). Dohodnou-li se pozorovatelé v $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ na společné soustavě jednotek (tj. $k = 1$) a zvolí-li souřadné systémy tak, že počátky souřadnic splývají (tj. $y_0 = (0,0,0,0)^T$, prostorové počátky souřadnic se míjejí – koincidují – v čase $x^0 = 0 = x'^0$), jsou zobrazení S i T identitou. Transformace $x'(x)$ se tím pádem redukuje na lineárním zobrazení Λ, tj.

$$x'(x) = \Lambda x \equiv \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Případně ve složkách

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{1.7}$$

Michelsonův-Morleyův experiment ukázal rovnocennost všech inerciálních soustav vzhledem k rychlosti šíření světla. Vhodnou transformací souřadnic mezi ISS je pak (díky Zeemanovu teorému) transformace Λ, tzv.

Lorentzova transformace. Einsteinem objevená speciální teorie relativity ve vytyčené cestě pokračuje a formuluje fyzikální zákony ve shodě s *principem kovariance vůči Lorentzovým transformacím.*

1.2 Prostoročas

Zeemanův teorém zkoncentroval požadavek konstantní rychlosti světla do definiční podmínky (1.14a). Jejím zkoumáním se zabývá zbytek kapitoly. Nejprve – nyní již rigorózně – definujeme prostoročas.

Minkowského prostoročas, zkráceně *prostoročas* nazveme čtyřrozměrný reálný vektorovový prostor $\mathbf{V}$ se symetrickou, nedegenerovanou, bilineární formou $\boldsymbol{\eta}$ signatury $(1,3)$.

V řeči symbolů představuje *Minkowského prostoročas* dvojici $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta})$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} \end{aligned} \tag{1.8}$$

splňující axiomy:

i. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{\eta}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a\boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (*linearita*)

ii. $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (*symetrie*)

iii. $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V \implies \mathbf{v} = 0$ (*nedegenerovanost*)

V bodech (i) až (iii) splývají požadavky kladené na zobrazení $\boldsymbol{\eta}$ s axiomy *skalárního součinu.* Chybí pouze předpoklad $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
Z analogie s lineární algebrou proto víme, že existuje úplná ortogonální báze (získaná např. pomocí *Gramm-Schmidtovy ortogonalizace*). Požadavek na signaturu $\boldsymbol{\eta}$ uplatníme ve chvíli, kdy zkonstruovanou bázi normalizujeme.

iv. $\exists \{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha=0}^{3}$ báze ve $\mathbf{V}$: $\quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 0 \ldots 3$ (*signatura*)

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Souřadný systém určený ortonormální bází vzhledem k $\boldsymbol{\eta}$ (tj. $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 0 \dots 3$) nazveme *inerciální*.

V definici (1.8) shledáváme, že zobrazení $\boldsymbol{\eta}$ je tenzorem řádu $\binom{0}{2}$ (multilinearitu zaručují body (i) a (ii)). Tenzor $\boldsymbol{\eta}$ bývá na počest německého matematika Hermanna Minkowského nazýván *Minkowského metrický tenzor.*

Rovnice $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$ pak není ničím jiným než souřadnicovým vyjádřením Minkowského tenzoru v bázi $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Označíme-li $\{\boldsymbol{\varepsilon}^\beta\}_{\beta=0}^3$ prvky duální báze, $\boldsymbol{\varepsilon}^\beta(\mathbf{e}_\alpha) = \delta_\alpha^\beta$, můžeme pro Minkowského metrický tenzor psát

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\beta = \eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^\beta. \tag{1.10}$$

V souřadnicích dále vyčíslíme působení metrického tenzoru na prvky $\mathbf{V}$ následovně

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = v^T \eta w \qquad \mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{w} = w^\beta \mathbf{e}_\beta. \tag{1.11}$$

Kvadratickou formu indukovanou Minkowského metrickým tenzorem označíme $\boldsymbol{Q}$ a nazveme *čtyřinterval.*

$$\boldsymbol{Q}(\mathbf{v}) \equiv \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \eta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = v^T \eta v. \tag{1.12}$$

Ze znalosti čtyřintervalu lze Minkowského tenzor jednoznačně rekonstruovat, neboť platí

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{Q}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{Q}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{Q}(\mathbf{v} - \mathbf{w})\right]. \tag{1.13}$$

Pomocí čtyřintervalu rozlišujeme vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *prostorupodobné* s $\boldsymbol{Q}(x) > 0$, *světelné* s $\boldsymbol{Q}(x) = 0$ a *časupodobné* s $\boldsymbol{Q}(x) < 0$. Nadplochu $\{\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \boldsymbol{Q}(\mathbf{x}) = 0\}$ nazveme *světelný kužel.*

1.3 Obecná Lorentzova grupa $O(1,3)$

Obecnou Lorentzovu grupu $O(1,3)$ definujeme jako množinu všech matic $\Lambda \in GL(4, \mathbb{R})$[3] vyhovujících podmínce

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad \text{, tj.} \tag{1.14a}$$

$$O(1,3) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}. \tag{1.15}$$

[3] $GL(4, \mathbb{R})$ představuje reálné regulární matice 4×4. Viz přehled grup v Dodatku.

Nejprve dokažme, že množina $O(1,3)$ tvoří grupu vůči operaci maticového násobení.

Připomeňme nejprve definici grupy.

Definice. *Množina $\mathbb{G}$ s operací $\odot$ tvoří grupu, jsou-li pro každé $g, h, k \in \mathbb{G}$ splněny axiomy:*

(G1) $g \odot h \in \mathbb{G}$ (uzavřenost)

(G2) $(g \odot h) \odot k = g \odot (h \odot k)$ (asociativita)

(G3) $\exists e \in \mathbb{G} \quad e \odot g = g \odot e = g$ (jednotkový prvek)

(G4) $\exists g^{-1} \in \mathbb{G} \quad g \odot g^{-1} = g^{-1} \odot g = e$ (inverzní prvek)

Asociativita (G2) je zaručena asociativitou maticového násobení. Uzavřenost (G1) dokážeme přímo $(\Lambda_1\Lambda_2)^T\eta\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T\Lambda_1^T\eta\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T(\Lambda_1^T\eta\Lambda_1)\Lambda_2$ $= \Lambda_2^T\eta\Lambda_2 = \eta$. Jednotkový prvek e zastupuje jednotková matice $\mathbb{1}$, v (G3) zbývá ověřit příslušnost matice identity k obecné Lorentzově grupě: $\mathbb{1}^T\eta\mathbb{1} = \eta$.

Inverzi (G4) libovolné Lorentzovy transformace Λ lze vypočíst z definiční podmínky (1.14a) použitím $\eta^2 = \mathbb{1}$, příp. $\eta^T = \eta$:

$$\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^T\eta \tag{1.16}$$

Důkaz grupové struktury $O(1,3)$ uzavírá tvrzení $\Lambda^{-1} \in O(1,3)$:
$(\Lambda^{-1})^T\eta\Lambda^{-1} = (\eta\Lambda^T\eta)^T\eta\eta\Lambda^T\eta = \eta\Lambda\eta\eta\eta\Lambda^T\eta = \eta\Lambda(\eta^2)(\eta\Lambda^T\eta) = \eta\Lambda\Lambda^{-1} = \eta.$

Definiční podmínku (1.14a) a formuli pro inverzní matici (1.16) můžeme ekvivalentě vyjádřit ve složkách:

$$(\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma})^T\eta_{\gamma\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\delta}{}_{\beta}\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \quad \forall\, \alpha, \beta = 0, \ldots, 3 \tag{1.14b}$$

Složky matice Λ^{-1} bývá zvykem označovat $(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \Lambda_{\beta}{}^{\alpha}$:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_0{}^0 & \Lambda_1{}^0 & \Lambda_2{}^0 & \Lambda_3{}^0 \\ \Lambda_0{}^1 & \Lambda_1{}^1 & \Lambda_2{}^1 & \Lambda_3{}^1 \\ \Lambda_0{}^2 & \Lambda_1{}^2 & \Lambda_2{}^2 & \Lambda_3{}^2 \\ \Lambda_0{}^3 & \Lambda_1{}^3 & \Lambda_2{}^3 & \Lambda_3{}^3 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Předpis pro inverzi (1.16) přepíšeme ve složkách do podoby:

$$\begin{aligned} &{\Lambda_0}^0 = {\Lambda^0}_0 \\ &{\Lambda_0}^i = -{\Lambda^0}_i \text{ a } {\Lambda_i}^0 = -{\Lambda^i}_0 \\ &{\Lambda_i}^j = {\Lambda^i}_j \end{aligned} \tag{1.18}$$

Zadanou matici Lorentzovy transformace $\Lambda = [{\Lambda^\mu}_\nu]$ lze interpretovat dvěma rovnocennými způsoby.

Doposud jsme uvažovali tzv. *pasivní interpretaci* – přepočítávají se složky vektorů ze souřadného systému $\mathcal{S} \equiv \{\mathbf{e}_\mu\}$ do $\mathcal{S}' \equiv \{{\mathbf{e}'}_\mu\}$, ale vektory samotné se nemění [4]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x'^\nu {\mathbf{e}'}_\nu \\ &\mathbf{e}_\mu = {\Lambda^\nu}_\mu {\mathbf{e}'}_\nu \qquad {\mathbf{e}'}_\nu = {\Lambda_\nu}^\xi \mathbf{e}_\xi \\ &x'^\nu = {\Lambda^\nu}_\mu x^\mu \qquad x^\xi = {\Lambda_\nu}^\xi x'^\nu \end{aligned} \tag{1.19}$$

Stejně dobře může být vztah $x' = \Lambda x$ souřadnicovým vyjádřením (v bázi $\{\mathbf{e}_\mu\}$) lineárního zobrazení $\mathbf{\Lambda}$ Minkowského prostoru $\mathbf{V}$ na sebe sama, pak mluvíme o *aktivní interpretaci*:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} : \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \\ \mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu &\mapsto \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}) = x'^\nu \mathbf{e}_\nu = {\Lambda^\nu}_\mu x^\mu \mathbf{e}_\nu \end{aligned} \tag{1.20}$$

Dvojí interpretace se přenáší i na definiční podmínku Lorentzovy grupy. Splnění (1.14b) znamená ortonormalitu sloupců matice Λ, resp. Λ^{-1} vůči $\boldsymbol{\eta}$, a tedy v případě pasivní interpretace – (1.19) – ortonormalitu báze $\{\mathbf{e}_\mu\}$, resp. $\{{\mathbf{e}'}_\mu\}$ vůči Minkowského skalárnímu součinu. Lorentzova transformace (ve shodě s úvodní motivací) spojuje inerciální systémy souřadné.

V případě aktivní interpretace zachovává Lorentzova transformace Λ, díky definiční podmíce (1.14b), Minkowského skalární součin:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}), \mathbf{\Lambda}(\mathbf{w})) &= \boldsymbol{\eta}({\Lambda^\gamma}_\alpha v^\alpha \mathbf{e}_\gamma, {\Lambda^\delta}_\beta w^\beta \mathbf{e}_\delta) = \\ &= {\Lambda^\gamma}_\alpha {\Lambda^\delta}_\beta v^\alpha w^\beta \boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta) = \\ &= ({\Lambda^\gamma}_\alpha {\Lambda^\delta}_\beta \eta_{\gamma\delta}) v^\alpha w^\beta = \eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

[4] Matematicky vzato – viz $\mathbf{e}_\mu = {\Lambda^\nu}_\mu {\mathbf{e}'}_\nu$ – představuje Λ *matici přechodu* z $\mathcal{S}'$ do $\mathcal{S}$. V textu se nicméně podržíme zažité konvence označovat *maticí Lorentzovy transformace* z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}'$ matici vystupující ve vztahu $x' = \Lambda x \leftrightarrow x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu$.

Zároveň jsme se tak dopracovali k ekvivalentní bezsouřadnicové[5] definici obecné Lorentzovy grupy jako grupy všech lineárních zobrazení zachovávajících danou strukturu $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta})$ – Minkowského prostoročas.

$$O(1,3) = \{\boldsymbol{\Lambda} \in GL(\mathbf{V}) \mid \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{w})) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}\} \tag{1.21}$$

1.4 Lorentzova grupa $SO(1,3)_+$

Pokračujme ve zkoumání definiční podmínky obecné Lorentzovy grupy. Indexům $\alpha = \beta = 0$ podmínky (1.14b) odpovídá rovnice:

$$-(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = -1, \tag{1.22}$$

odkud nutně plyne

$$|\Lambda^0{}_0| \geq 1. \tag{1.23}$$

Výpočtem determinantu levé a pravé strany (1.14a) dále nahlédneme

$$\det \Lambda = \pm 1. \tag{1.24}$$

Podmnožinu matic $O(1,3)$ s jednotkovým determinantem a $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ nazveme *vlastní Lorentzovou grupou*, zkráceně *Lorentzovou grupou* $SO(1,3)_+$.

$$SO(1,3)_+ = \{\Lambda \in O(1,3) \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1,\ \det \Lambda = 1\} \tag{1.25}$$

Z fyzikálního hlediska vybírají dodatečné podmínky ty Lorentzovy transformace, které spojují shodně orientované (pravo- či levotočivé) systémy souřadné se shodným směrem času (viz diskuse u Zeemanova teorému v oddíle 1.1).

Dokažme, že množina $SO(1,3)_+$ tvoří grupu vůči maticovému násobení (podgrupu $O(1,3)$).

Asociativitu (G2) i jednotkový prvek (G3) dědí $SO(1,3)_+$ z $O(1,3)$. Zřejmě platí: $\det \mathbb{1} = 1$ a $\mathbb{1}^1{}_1 = 1$. Návod na výpočet inverze (G4) poskytuje i nadále formule (1.16), příp. (1.18). Pro danou $\Lambda \in SO(1,3)_+$ leží Λ^{-1} v $SO(1,3)_+$ díky $\det \Lambda^{-1} = \frac{1}{\det \Lambda} = 1$ a $\Lambda^0{}_0 = \Lambda_0{}^0 \geq 1$.

Zbývá dokázat uzavřenost (G1). Vezměme proto Λ, Π – dva libovolné prvky $SO(1,3)_+$. O součinu $\Lambda\Pi$ víme, že je prvkem $O(1,3)$. Podmínku

[5] Operace maticového násobení přejde ve skládání zobrazení, jednotková matice ve zobrazení identita, inverzní matice v inverzní zobrazení.

$\det(\Lambda\Pi) = 1$ zaručuje věta o determinantu součinu $\det(\Lambda\Pi) = \det\Lambda\ \det\Pi$. Na ověření zbylé podmínky $(\Lambda\Pi)^0{}_0 \geq 1$ se nejprve vybavme pomocným tvrzením:

Tvrzení: $\Lambda \in O(1,3) \implies \Lambda^T \in O(1,3)$.

Důkaz: Postupným přeformulováním rovnice (1.16): $\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^T\eta$ dostáváme $\mathbb{1} = \Lambda\eta\Lambda^T\eta$, a tedy $\eta = \Lambda\eta\Lambda^T$, čímž nacházíme hledané $(\Lambda^T)^T\eta(\Lambda^T) = \eta$. Důsledkem dokázaného podléhají i řádky matice Lorentzovy transformace podmínkám ortonormality analogickým (1.14b).

$(\Lambda\Pi)^0{}_0 = \Lambda^0{}_\mu\Pi^\mu{}_0 = \Lambda^0{}_0\Pi^0{}_0 + \Lambda^0{}_i\Pi^i{}_0$. Člen $\Lambda^0{}_i\Pi^i{}_0$ nyní odhadneme pomocí *Cauchy-Schwartzovy nerovnosti*:

$$|\Lambda^0{}_i\Pi^i{}_0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Pi^i{}_0)^2} = \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\Pi^0{}_0)^2 - 1} \leq \Lambda^0{}_0\Pi^0{}_0$$

V rovnosti výše využíváme podmínky ortogonality (1.22), resp. její analogie pro řádky. Součin $\Lambda^0{}_0\Pi^0{}_0$ je kladný dle předpokladu $\Lambda, \Pi \in SO(1,3)_+$ (dokonce $\Lambda^0{}_0\Pi^0{}_0 \geq 1$). Ve spojení s právě dokázanou nerovností zjišťujeme $(\Lambda\Pi)^0{}_0 \geq 0$. Vzhledem k tomu, že prvky $O(1,3)$ podléhají nerovnosti (1.23), součin $\Lambda\Pi$ nevyjímaje, nezbývá než $(\Lambda\Pi)^0{}_0 \geq 1$.

Perličkou pro matematiky je nalezení geometrické – bezsouřadnicové verze definice (1.25). Podmínku $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ lze převést na požadavek invariance tříd ekvivalence časupodobných vektorů („minulé a budoucí“, podrobněji viz [1, str. 16]) vůči transformaci $\boldsymbol{\Lambda}$. Jednotkovému determinantu odpovídá zachování *formy objemu* $\boldsymbol{\omega}$ definované v konkrétní (avšak libovolně zvolené) ortonormální bázi vztahem $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^2 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}^3$.

Bez důkazu uveďme i poznámku, že $SO(1,3)_+$ je komponentou souvislosti $O(1,3)$ obsahující identitu.

1.5 Podgrupy $\mathcal{R}$ a $\mathcal{B}$

V nadcházejícím oddíle přiblížíme doposud ryze matematickou definici Lorentzovy grupy intuitivním představám o speciální teorii relativity. Konkrétně uvidíme, že prvky $\Lambda^0{}_\alpha$, resp. $\Lambda^\alpha{}_0$ mají jasný fyzikální význam. Po definování podgrup rotací $\mathcal{R}$ a boostů $\mathcal{B}$ ve směru osy x_1 nás pak fyzikální intuice navede, jak sestavit důkaz věty o rozkladu libovolného prvku $SO(1,3)_+$ na rotaci, boost a rotaci.

Uvažujme částici (chcete-li kosmickou loď) pohybující se rovnoměrně přímočaře. Souřadný systém s ní spojený označíme $\mathcal{S}'$. Dále vezměme $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$ dvě libovolné události na světočáře částice. V soustavě $\mathcal{S}'$ má čtyřvektor $\mathbf{\Delta x} := \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$ vyjádření: $\Delta x' = (\Delta x'^0, 0, 0, 0)^T$. Bez újmy na obecnosti $\Delta x'^0 > 0$.

Pohyb částice (kosmické lodi) pozorujeme ze souřadného systému $\mathcal{S}$ - laboratoř (příp. Země), přičemž Lorentzova transformace z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}'$ je dána maticí $\Lambda \in SO(1,3)_+$. Souřadnice čtyřvektoru $\mathbf{\Delta x}$ v soustavě $\mathcal{S}$ vypočteme pomocí Λ^{-1}: $\Delta x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu \Delta x'^\nu$, $\Delta x = (\Lambda_0{}^0 \Delta x'^0, \Lambda_0{}^1 \Delta x'^0, \Lambda_0{}^2 \Delta x'^0, \Lambda_0{}^3 \Delta x'^0)^T$.

Z pohledu pozorovatele v $\mathcal{S}$ nás zajímá klasická rychlost $\vec{v}$ částice (souřadného systému $\mathcal{S}'$) vůči $\mathcal{S}$.

$$v^i = \frac{\Delta x^i}{\Delta x^0} = \frac{\Lambda_0{}^i \Delta x'^0}{\Lambda_0{}^0 \Delta x'^0} = -\frac{\Lambda^0{}_i}{\Lambda^0{}_0} \tag{1.26}$$

Klasickou (eukleidovskou) velikost vektoru $\vec{v}$ označíme $\beta := |\vec{v}|_{\mathbb{E}^3}$. Z nulté podmínky ortogonality (1.22) plyne:

$$\beta^2 = |\vec{v}|^2_{\mathbb{E}^3} = \frac{\sum_{i=1}^3 (\Lambda^0{}_i)^2}{{\Lambda^0{}_0}^2} = 1 - \frac{1}{{\Lambda^0{}_0}^2} \tag{1.27}$$

Dále definujeme-li $\gamma := \Lambda^0{}_0$, přejde (1.27) ve známý tvar:

$$\gamma := \Lambda^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.28}$$

Volíme kladnou větev odmocniny, aby Λ patřila do $SO(1,3)_+$.

Na závěr zaveďme $\vec{d} := \frac{1}{\beta}\vec{v}$. Fyzikálně se jedná o směr, pod nímž pozorovatel z $\mathcal{S}$ (laboratoř, příp. Země) vidí vzdalovat se systém $\mathcal{S}'$ (částici, resp. kosmickou loď). A analogicky $\vec{d'}$ – směr, pod kterým se kosmonautovi (souř. systému $\mathcal{S}'$) vzdaluje $\mathcal{S}$ (Země). Z definice nahlédneme $|\vec{d}|_{\mathbb{E}^3} = |\vec{d'}|_{\mathbb{E}^3} = 1$.

Při značení definovaném výše můžeme libovolnou Lorentzovu transformaci $\Lambda \in SO(1,3)_+$ zapsat ve tvaru (využíváme rovnic (1.26) a (1.18)):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \cdots & -\beta\gamma\vec{d} & \cdots \\ \vdots & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \beta\gamma\vec{d'} & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \vdots & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Vrátíme-li se k úvodu našich úvah, zjistíme, že $\Delta x^0 = \Lambda_0{}^0 \Delta x'^0 = \gamma \Delta x'^0$ není ničím jiným než vzorečkem pro dilataci času. V tomto světle je nerovnost (1.23) zápisem věty: *V pohybující se soustavě souřadné plyne čas pomaleji.*

Zkoumejme speciální případ Lorentzovy transformace, kdy k dilataci času nedochází – $\gamma = \Lambda^0{}_0 = 1$. Takto definovanou množinu označíme $\mathcal{R}$ a nazveme *grupou rotací* :

$$\mathcal{R} = \{\Lambda \in SO(1,3)_+ \mid \Lambda^0{}_0 = 1\} \tag{1.30}$$

Z rovnic (1.27) a (1.29) vidíme, že pro rotace $\Lambda \in \mathcal{R}$ je rychlost β nulová, a proto $\Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0$ (tvrzení nahlédneme i přímo z podmínky ortogonality (1.22)). Souřadné systémy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ spočívají vzájemně v klidu ($\beta = 0$), čas plyne v obou soustavách stejně. Obecněji, časová složka libovolného čtyřvektoru se při transformaci mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ zachovává. Díky blokové diagonalitě matice $\Lambda \in \mathcal{R}$ se prostorové souřadnice transformují odděleně od časové složky: $x'^i = \Lambda^i{}_j x^j$.

Označme $[\Lambda^i{}_j]$ matici vzniklou z Λ odříznutím nultého řádku a sloupce. Rozvojem determinantu Λ snadno zjistíme, že $\det[\Lambda^i{}_j] = 1$. Předpis pro inverzi (1.16) (příp. (1.18)) se navíc redukuje na $[\Lambda^i{}_j]^{-1} = [\Lambda^i{}_j]^T$. Poslední dvě pozorování nám umožňují zavést ekvivalentní definici množiny $\mathcal{R}$:

$$R \in \mathcal{R} \iff R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 \\ 0 & R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 \\ 0 & R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 \end{pmatrix} \quad [R^i{}_j] \in SO(3)^6 \tag{1.31}$$

Prvky $R \in \mathcal{R}$ tak přirozeně ztotožníme s prvky $[R^i{}_j] \in SO(3)$. Skládání rotací $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, tj. jejich maticové násobení $R_1 R_2$ nadto odpovídá skládání (násobení) příslušných reprezentantů $[R^i{}_j] \in SO(3)$. Díky tomu lze $\mathcal{R}$ a $SO(3)$ ztotožnit nejen jako množiny, ale i jako grupy – včetně násobení a inverze [7]. Vzhledem k tomu, že $SO(3)$ tvoří grupu, dědí tutéž strukturu i $\mathcal{R}$. Nadto získává smysl nazývat $\mathcal{R}$ *grupou rotací*, neboť grupa $SO(3)$ reprezentuje klasické rotace „našeho“ (=eukleidovského) trojrozměrného prostoru.

Skládáme-li Lorentzovu transformaci $\Lambda \in SO(1,3)_+$ s rotací R systému $\mathcal{S}$: ΛR, resp. s rotací systému $\mathcal{S}'$: $R\Lambda$, nemění se nultý sloupec, resp. nultý řádek matice Λ. Přidržíme-li se fyzikální analogie z úvodu oddílu, říká tento

[6] Definice $SO(3)$ i ostatních grup jsou shrnuty v Dodatku.

[7] Jedná se o *izomorfismus grup* $\mathcal{R}$ a $SO(3)$.

fakt: i přestože se Země točí [8] (rotace $\mathcal{S}$), vzdaluje se kosmonautovi ve stále stejném směru ($\vec{d'}$ se zachovává). Jinými slovy interpretace $\vec{d}, \vec{d'}$ je konzistentní s interpretací grupy $\mathcal{R}$.

V souladu s principem ekvivalence se v obou případech nemění ani γ-faktor.

Druhý speciální případ Lorentzovy transformace nastává, pokud $\vec{d} = -\vec{d'} = (1,0,0)$ – boost ve směru osy x_1 ($\parallel x'_1$). Matice transformace pak nabývá tvaru:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ 0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ 0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ 0 & 0 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

V druhé rovnosti používáme podmínek ortogonality (1.14b) a jejich analogie pro řádky. Analogickým postupem jako u grupy rotací (aplikací (1.27) a věty o determinantu blokově diagonální matice) odhalíme, že matice $[\Lambda^i{}_j]$ vzniklá z Λ vyříznutím nultého a prvního řádku a sloupce patří do grupy $SO(2)$. Zaměřme se nyní na speciální případ, kdy obecnou matici $[\Lambda^i{}_j] \in SO(2)$ nahradíme konkrétním prvkem $SO(2)$ – identitou.

Volbou $[\Lambda^i{}_j] = \mathbb{1}$ obdržíme *grupu speciálních Lorentzových transformací*, zkráceně *grupu boostů* $\mathcal{B}$. Jedná se o jednoparametrickou podgrupu grupy $SO(1,3)_+$. Její prvky přirozeně očíslujeme $\Lambda(\beta)$, $\beta \in (-1,1)$. Definujme

$$\mathcal{B} = \{\Lambda \in SO(1,3)_+ \mid \exists \beta \in (-1,1) \quad \Lambda = \Lambda(\beta)\}, \text{ kde} \tag{1.33}$$

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.34}$$

Složením dvou transformací z $\mathcal{B}$ nalezneme relativistický vzorec pro sčítání rychlostí:

$$\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) = \Lambda\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right) \tag{1.35}$$

[8]"Točící se"souřadný systém nespadá na rozdíl od "pootočeného"do hájemství STR. Precizněji: Kosmonaut dopoledne transformoval souřadnice zasílané ze Země prostřednictvím Λ, tj. $x' = \Lambda x$. Po (dlouhém) poledním odpočinku se mu sice Země vzdalovala ve stále stejném směru, nicméně při transformaci musel započíst proběhnuvší otočení Země: $x' = \Lambda R x$. Po (krátkou) dobu obou měření se Země jevila nehybná.

Vyšetřováním průběhu funkce $f(\beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ lze ukázat $f(\beta_1, \beta_2) \in (-1, 1)$ pro $\beta_1, \beta_2 \in (-1, 1)$, tj. uzavřenost $\mathcal{B}$.

Ještě jednodušší je vztah pro inverzní prvek (dosazením do formule (1.16)):

$$\Lambda(\beta)^{-1} = \Lambda(-\beta) \tag{1.36}$$

Očíslování prvků $\mathcal{B}$ pomocí parametru β je jen jednou z možných voleb parametrizace $\mathcal{B}$. Snadno nahlédneme, že libovolná 1 : 1 regulární funkce definovaná na $(-1, 1)$ je možnou parametrizací $\mathcal{B}$. Proveďme například substituci:

$$\beta = \tanh\theta, \quad \Lambda(\beta) \equiv L(\theta) \tag{1.37}$$

Hyperbolický tangens skutečně zobrazuje vzájemně jednoznačně intervaly $(-1, 1)$ a $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
&\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\theta}} = \frac{|\cosh\theta|}{\sqrt{\cosh^2\theta - \sinh^2\theta}} = \cosh\theta \\
&\gamma\beta = \sinh\theta
\end{aligned}$$

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

Navíc se – díky součtovým vzorcům pro $\sinh\theta$ a $\cosh\theta$ – zjednoduší skládání rychlostí (1.35):

$$\begin{aligned}
&\frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2} = \frac{\sinh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \cosh(\theta_1)\sinh(\theta_2)}{\cosh(\theta_1)\cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1)\sinh(\theta_2)} = \\
&= \frac{\sinh(\theta_1+\theta_2)}{\cosh(\theta_1+\theta_2)} = \tanh(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}$$

$$L(\theta_1)L(\theta_2) = L(\theta_1+\theta_2) \tag{1.39}$$

$$L(\theta)^{-1} = L(-\theta) \tag{1.40}$$

Od parametrizace fyzikálně názorné $\mathcal{B} = \{\Lambda(\beta) \mid \beta \in (-1, 1)\}$ přecházíme k parametrizaci matematicky elegantní $\mathcal{B} = \{L(\theta) \mid \theta \in (-\infty, +\infty)\}$.

Cesta ke geometrické definici podgrup $\mathcal{R}$ a $\mathcal{B} \subset SO(1,3)_+$ vede přes izomorfismus s vhodnou známou grupou. V případě $\mathcal{R}$ je touto grupou $SO(3)$ – grupa transformací zachovávajících klasický eukleidovský metrický tenzor signatury $(0,3) = (3)$. Protějškem $\mathcal{B}$ je pak $SO(1,1)$ – grupa zachovávající metriku signatury $(1,1)$. Samozřejmě nelze bezsouřadnicově definovat grupu boostů *ve směru osy* x_1. Podgrupou $SO(1,3)_+$ izomorfní $SO(1,1)$ je grupa boostů v libovolném (pevném) směru.

1.6 Rozklad $SO(1,3)_+$

Věta – rozklad Λ. *Pro libovolnou Lorentzovu transformaci $\Lambda \in SO(1,3)_+$ existuje speciální Lorentzova transformace $\Lambda(\beta) \in \mathcal{B}$ a dvojice rotací $R, R' \in \mathcal{R}$ takových, že $\Lambda = R'\Lambda(\beta)R$.*

Důkaz. V první řadě můžeme Λ zapsat ve tvaru (1.29). Důkaz provedeme přímo – zkonstruujeme matice $R^{-1}, R'^{-1} \in \mathcal{R}$ takové, že $R'^{-1}\Lambda R^{-1} \in \mathcal{B}$.

Připomeňme, že $\Lambda(\beta)$ je boost ve směru osy x_1 a $\vec{d}$ směr, v němž se pozorovateli na Zemi($\mathcal{S}$) vzdaluje kosmická loď($\mathcal{S}'$). Očekáváme proto [9] $R(0,\vec{d})^T = (0,1,0,0)^T$, tj. $R^{-1}(0,1,0,0)^T = (0,\vec{d})^T$. Matici R^{-1} proto zvolíme ve tvaru:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vec{d} & \vec{e} & \vec{f} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Vektory $\vec{e}$ a $\vec{f}$ vybereme tak, aby uspořádaná trojice $\{\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\}$ tvořila pravotočivou ortonormální bázi $\mathbb{E}_3$. Tento požadavek je ekvivalentní podmínce $[(R^{-1})^i{}_j] \in SO(3)$, tj. $R^{-1} \in \mathcal{R}$.

Po provedení $\Lambda(\beta)R$ [9] se kosmonautovi vzdaluje Země ve směru $(-1,0,0)^T$, tak je motivovaná definice $\mathcal{B}$. Předpokládáme ale $\vec{d'}$, tj. $R'(0,-1,0,0)^T = (0,\vec{d'})^T$, neboli $R'^{-1}(0,\vec{d'})^T = (0,-1,0,0)^T$. R'^{-1} uhodneme ve tvaru:

[9]...pokud věta o rozkladu platí, tj. pokud vhodné $R, R', \Lambda(\beta)$ pro zadanou Λ vůbec existují, nutně splňují...

$$R'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & -\vec{d'} & \cdots \\ 0 & \cdots & \vec{e'} & \cdots \\ 0 & \cdots & \vec{f'} & \cdots \end{pmatrix}$$

Vektory $\vec{e'}, \vec{f'}$ doplňují $-\vec{d'}$ na ortonormální pravotočiovou bázi $\mathbb{E}_3$, a tedy $R^{-1} \in \mathcal{R}$.

Vyčísleme nyní součin $R'^{-1}\Lambda R^{-1}$:

$$R'^{-1}\Lambda R^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\Lambda^i{}_j d^j d'_i & -\Lambda^i{}_j e^j d'_i & -\Lambda^i{}_j f^j d'_i \\ 0 & \Lambda^i{}_j d^j e'_i & \Lambda^i{}_j e^j e'_i & \Lambda^i{}_j f^j e'_i \\ 0 & \Lambda^i{}_j d^j f'_i & \Lambda^i{}_j e^j f'_i & \Lambda^i{}_j f^j f'_i \end{pmatrix}$$

Dle definice $d^j = -\frac{1}{\beta\gamma}\Lambda^0{}_j$ a $d'_i = \frac{1}{\beta\gamma}\Lambda^i{}_0$. Aplikací podmínek ortogonality (1.14b) se maticový element $\alpha = \beta = 1$ dále zjednoduší:

$$\begin{aligned} -\Lambda^i{}_j d^j d'_i &= \frac{1}{(\beta\gamma)^2}\sum_{i,j=1}^{3}\Lambda^i{}_j\Lambda^i{}_0\Lambda^0{}_j = \frac{1}{(\beta\gamma)^2}\sum_{j=1}^{3}\Lambda^0{}_j\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_j \\ &= \frac{1}{(\beta\gamma)^2}\Lambda^0{}_0\left(\sum_{j=1}^{3}(\Lambda^0{}_j)^2\right) = \frac{1}{(\beta\gamma)^2}\gamma|\beta\gamma\vec{d}|^2_{\mathbb{E}^3} = \gamma \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že množina $SO(1,3)_+$ tvoří grupu (a $\mathcal{R} \subset SO(1,3)_+$), leží i $R'^{-1}\Lambda R^{-1}$ v $SO(1,3)_+$. Pomocí podmínek ortogonality nyní zjišťujeme:

$$R'^{-1}\Lambda R^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^i{}_j e^j e'_i & \Lambda^i{}_j f^j e'_i \\ 0 & 0 & \Lambda^i{}_j e^j f'_i & \Lambda^i{}_j f^j f'_i \end{pmatrix} = \Lambda(\beta)\tilde{R} \tag{1.41}$$

S Lorentzovou transformací tvaru (1.41) jsme se již setkali v části o speciálních Lorentzových transformacích. Víme proto

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^i{}_j e^j e'_i & \Lambda^i{}_j f^j e'_i \\ 0 & 0 & \Lambda^i{}_j e^j f'_i & \Lambda^i{}_j f^j f'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R}^2{}_2 & \tilde{R}^2{}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{R}^3{}_2 & \tilde{R}^3{}_3 \end{pmatrix} \quad [\tilde{R}^i{}_j] \in SO(2)$$

Fyzikálně: Pozorovatel na Zemi a kosmonaut ještě potřebují seřídit osy x_2 a x_3. $\tilde{R}$ zřejmě patří do $\mathcal{R}$.

Všehovšudy jsme našli matice $R^{-1}, R'^{-1}, \tilde{R} \in \mathcal{R}$ a $\Lambda(\beta) \in \mathcal{B}$ takové, že $R'^{-1}\Lambda R^{-1} = \Lambda(\beta)\tilde{R}$. $\mathcal{R}$ ale tvoří grupu, a tudíž existují inverze k R^{-1} a R'^{-1} patřící do $\mathcal{R}$. Díky uzavřenosti grupy je součin $\tilde{R}R$ prvkem $\mathcal{R}$. Pro zadanou matici $\Lambda \in SO(1,3)_+$ platí: $\Lambda = R'\Lambda(\beta)(\tilde{R}R)$. $\square$

Kapitola 2

Nakrytí $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$

Nakrytí $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$ tvoří pilíř korespondence mezi tenzory a hermitovskými spinory. Základní kámen budoucího kanonického (bezsouřadnicového) ztotožnění (oddíl 3.3) pokládá kapitola 2 ještě v konkrétní bázi. Zvolením pevného (ortonormálního) souřadného systému se Minkowského prostor $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta})$ redukuje na $(\mathbb{R}^4, \eta)$.

Východiskem úvah je jednoznačná korespondence (*izomorfismus*) prostoru $(\mathbb{R}^4, \eta)$ a prostoru 2×2 komplexních hermitovských matic $(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C}), \det)$. Na první pohled umělá "substituce" $\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ za $\mathbb{R}^4$ odhalí pozoruhodnou souvislost mezi vlastní Lorentzovou grupou $SO(1,3)_+$ a grupou $SL(2,\mathbb{C})$, 2×2 komplexních matic s jednotkovým determinantem.

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det\, A = 1\} \tag{2.1}$$

Lorentzovy transformace chápeme v kapitole 2 jako lineární zobrazení.

2.1 Izomorfismus $(\mathbb{R}^4, \eta)$ a $(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C}), \mathbf{det})$

Začněme zkoumáním množiny 2×2 hermitovských matic $\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$.

$$\mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) = \{h \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid h^\dagger = h\}, \text{kde} \tag{2.2}$$

$M_{n\times n}(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ označuje reálné (komplexní) matice rozměru $n\times n$

Z vlastností komplexního sdružení, $(h_1 + h_2)^\dagger = h_1^\dagger + h_2^\dagger = h_1 + h_2$ a $(ch)^\dagger = ch^\dagger$ pro $h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ a $c \in \mathbb{R}$, nahlédneme, že hermitovské matice tvoří *reálný* vektorový prostor. Dle definice můžme libovolný prvek

$h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ vyjádřit ve tvaru:

$$h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) \iff h = \begin{pmatrix} a & \bar{z} \\ z & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \tag{2.3}$$

Prostor $\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ má proto dimenzi 4, stejně jako Minkowského prostor. Možnou volbu báze představují matice $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=0}^3$:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Snadno se přesvědčíme, že jsou matice $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=0}^3$ lineárně nezávislé.

Tato volba báze je přirozená například proto, že odděluje matici identity σ_0 a matice s nulovou stopou σ_i [1]. Význam normalizačního faktoru $\frac{1}{\sqrt{2}}$ osvětlí oddíl 3.3. Bez faktoru $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se matice σ_i rovnají *Pauliho maticím*, v kontextu spinorů pak bývají (normalizované) matice $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=0}^3$ nazývány *Infeld - van der Waerdenovy symboly*.

Libovolný prvek $h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ rozvineme do zvolené báze:

$$h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) \iff \begin{aligned} & h = x^\alpha \sigma_\alpha \\ & x^0, x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sugestivní označení koeficientů rozvoje x^α napovídá, že jsme na stopě hledanému izomorfismu (vzájemně jednoznačnému lineárnímu zobrazení) mezi reálnými vektorovými prostory $\mathbb{R}^4$ a $\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$. Izomorfismus označíme j a explicitně definujeme:

$$\begin{aligned} j^{-1} : \mathbb{R}^4 &\to \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) \\ x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T &\mapsto j^{-1}(x) = x^\alpha \sigma_\alpha \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} j : \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) &\to \mathbb{R}^4 \\ h = \begin{pmatrix} a & \bar{z} \\ z & b \end{pmatrix} &\mapsto j(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b, z + \bar{z}, i(\bar{z} - z), a - b)^T \end{aligned} \tag{2.7}$$

[1] Takto definované matice navíc splňují komutační relace $[\frac{\sigma_i}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma_j}{\sqrt{2}}] := \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_j}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_j}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{\sqrt{2}}$.

Nad každým vektorovým prostorem můžeme vybudovat *tenzorovou algebru* multilinárních zobrazení. [2] Izomorfismus mezi vektorovými prostory pak jednoznačně definuje izomorfismus mezi příslušnými tenzorovými mocninami $\binom{r}{s}$. Jinými slovy ztotožnění vektorových prostorů umožňuje ztotožnit jejich tenzorové algebry.

Význam nalezeného izomorfismu j spočívá v tom, že nad $\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ lze čtyřinterval vyčíslit jednoduše výpočtem determinantu:

$$Q(x) = x^T \eta x = -2\ \det(j^{-1}(x)), \tag{2.8}$$

neboť

$$\begin{aligned}
-2\ \det(j^{-1}(x)) &= -2\ \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}\right) = \\
&= -\ \det\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \\
&= -\left[(x^0)^2 - (x^3)^2 - \left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)\right] = \\
&= -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = Q(x).
\end{aligned}$$

Ze znalosti izomorfismu j dále zkonstruujme indukovaný izomorfismus I mezi příslušnými prostory lineárních zobrazení do sebe sama – $\mathrm{End}(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C}))$ a $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$.

$$\begin{aligned}
I : \mathrm{End}(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})) &\to \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) \\
[\Gamma : h \mapsto \Gamma(h)] &\mapsto \left[I(\Gamma) : x \mapsto I(\Gamma)(x) := (j \circ \Gamma \circ j^{-1})(x)\right], \text{ kde} \\
h, \Gamma(h) \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) &\qquad x, I(\Gamma)(x) \in \mathbb{R}^4
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Fakticky jsme tak převedli studium obecných Lorentzových transformací $O(1,3)$ (zachovávajících čtyřinterval vektorů[3], tj. podléhajících podmínkám ortonormality (1.14a)) na studium lineárních transformací hermitovských matic zachovávajících determinant.

Příkladem takové lineární transformace $\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ je zobrazení Y_A definované:

$$Y_A : h \mapsto Y_A(h) := AhA^\dagger \quad A \in SL(2,\mathbb{C}), h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) \tag{2.10}$$

[2]Speciálním případem tenzorů jsou bilineární formy (např. Minkowského tenzor nad Minkowského prostorem) – tenzory typu $\binom{0}{2}$, a dále lineární zobrazení z V do V (*endomorfismy*, např. aktivně interpretované Lorentzovy transformace Minkowského prostoru) – tenzory typu $\binom{1}{1}$.

[3]Invariance čtyřintervalu je ekvivalentní invarianci Minkowského skalárního součinu díky vyjádření $\boldsymbol{\eta}$ pomocí $\boldsymbol{Q}$ – (1.13).

Ověřme, že Y_A patří do $\mathrm{End}(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C}))$. $(AhA^\dagger)^\dagger = (A^\dagger)^\dagger(Ah)^\dagger = Ah^\dagger A^\dagger = AhA^\dagger$, a tedy opravdu $Y_A : \mathfrak{h}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$. Z definice $SL(2,\mathbb{C})$ přímo plyne $\det Y_A(h) = \det AhA^\dagger = \det A \det h \det A^\dagger = 1(\det h)1 = \det h$.

Nic nám ovšem nebrání zabývat se samotným zobrazením Y:

$$\begin{array}{rcl} Y : GL(2,\mathbb{C}) & \to & \mathrm{End}(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})) \\ A & \mapsto & (Y_A : h \mapsto AhA^\dagger) \end{array} \tag{2.11}$$

Případně definujme zobrazení $\Upsilon := I \circ Y$:

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon : GL(2,\mathbb{C}) & \to & \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) \\ A & \mapsto & (\Upsilon_A : x \mapsto j(Aj^{-1}(x)A^\dagger)) \end{array} \tag{2.12}$$

Před dalším pokračováním učiňme několik důležitých pozorování.

- Schéma nakrytí je znázorněno na Obrázku 2.1. Jednotlivé části schématu budeme postupně objasňovat a dokazovat.

- $A \in SL(2,\mathbb{C}) \implies \Upsilon_A \in O(1,3)$. Viz výše Y_A zachovává determinant $j^{-1}(x)$, a proto i Υ_A zachovává čtyřinterval. Pro dané $x \in \mathbb{R}^4$ a $A \in SL(2,\mathbb{C})$ platí: $Q(\Upsilon_A(x)) = -2 \det(j^{-1}[\Upsilon_A(x)]) = -2 \det(Y_A[j^{-1}(x)])$ $= -2 \det(j^{-1}(x)) = Q(x)$.

- $SL(2,\mathbb{C})$ *je grupa.* Uzavřenost plyne z věty o determinantu součinu matic. Existence inverzního prvku je zaručena nenulovým (jednotkovým) determinantem a $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$.

- $SL(2,\mathbb{C})$*,* $O(1,3)$ *i* $SO(1,3)_+$ *mají dimenzi 6.* [4] Tvrzení zdůvodníme jen intuitivně. Dimenze $M_{2\times 2}(\mathbb{C}) = 8$, přičemž podmínka $\det A = 1 + 0i$ odebírá dva stupně volnosti. V případě Lorentzových transformací odečítáme od $16 = \dim(\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)) = \dim(M_{4\times 4}(\mathbb{R}))$ 10 nezávislých podmínek ortogonality (1.14a). Fyzikáně: 2 stupně volnosti na směr boostu, 1 na rychlost β a 3 úhly vzájemného natočení souřadných soustav.

- $\Upsilon_A = \Upsilon_{-A}$. Zatímco I je izomorfismus (vzájemně jednoznačný), plyne z definice Y (2.11): $Y_A = Y_{-A}$.

[4] Rigorózněji: $SL(2,\mathbb{C})$, $O(1,3)$ i $SO(1,3)_+$ jsou *Lieovy grupy* dimenze 6.

2.2 Nakrytí $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$

Z předchozích pozorování víme, že obrazy prvků grupy $SL(2,\mathbb{C})$ leží v obecné Lorentzově grupě $O(1,3)$, tj. $\Upsilon(SL(2,\mathbb{C})) \subset O(1,3)$. V následující větě vyjasníme vztah $SL(2,\mathbb{C})$ a $SO(1,3)_+$.

Věta – nakrytí $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$. *Zobrazení Υ definované předpisem* (2.12) *splňuje:*

i. Υ *zobrazuje* $SL(2,\mathbb{C})$ na *vlastní Lorentzovu grupu* $SO(1,3)_+$.

ii. Υ *respektuje grupovou strukturu* $SL(2,\mathbb{C})$, *resp.* $SO(1,3)_+$, *tj.* $\Upsilon_{AB} = \Upsilon_A\Upsilon_B$ *a* $\Upsilon_{A^{-1}} = \Upsilon_A^{-1}$.

iii. Υ *zobrazuje* $SL(2,\mathbb{C})$ na *vlastní Lorentzovu grupu* $SO(1,3)_+$ *právě 2:1. Pro každou vlastní Lorentzovu transformaci existují právě dva vzory v* $SL(2,\mathbb{C})$.

Platnost bodů *i* a *ii* nás opravňuje nazvat Υ *grupovým homomorfismem* $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$.

Důkaz. Začněme bodem *ii*.

Nejprve dokažme, že Υ komutuje s grupovým násobením $\Upsilon_{AB} = \Upsilon_A\Upsilon_B$. Předně platí $Y_{AB}(h) = ABh(AB)^+ = A(BhB^+)A^+ = Y_A \circ Y_B(h)$. Z definice Υ a I pak plyne

$$\Upsilon_{AB} = I \circ Y_{AB} = j \circ Y_{AB} \circ j^{-1} = j \circ Y_A \circ j^{-1} \circ j \circ Y_B \circ j^{-1} = \Upsilon_A \circ \Upsilon_B$$

Υ_A, Υ_B jsou ale lineární zobrazení nad $\mathbb{R}^4$, jejich skládání se realizuje jako maticové násobení: $\Upsilon_{AB} = \Upsilon_A \circ \Upsilon_B = \Upsilon_A\Upsilon_B$.

Dále ověřme $\Upsilon_{A^{-1}} = \Upsilon_A^{-1}$. Z předchozího víme $\Upsilon_A\Upsilon_{A^{-1}} = \Upsilon_{AA^{-1}} = \Upsilon_{\mathbb{1}}$, zbývá ukázat $\Upsilon_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$. Použijeme osvědčené matematické metody – odvodíme Υ_A pro obecnou matici A a dosadíme. Obecný předpis pro Υ zúročíme i později. Přímou aplikací výše uvedených definic obdržíme:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$$

$$\Upsilon_A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\bar\alpha+\beta\bar\beta+\gamma\bar\gamma+\delta\bar\delta}{2} & \mathrm{Re}(\alpha\bar\beta+\gamma\bar\delta) & \mathrm{Im}(\alpha\bar\beta+\gamma\bar\delta) & \frac{\alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta+\gamma\bar\gamma-\delta\bar\delta}{2} \\ \mathrm{Re}(\bar\alpha\gamma+\bar\beta\delta) & \mathrm{Re}(\bar\alpha\delta+\bar\beta\gamma) & \mathrm{Im}(\alpha\bar\delta-\beta\bar\gamma) & \mathrm{Re}(\bar\alpha\gamma-\bar\beta\delta) \\ \mathrm{Im}(\bar\alpha\gamma+\bar\beta\delta) & \mathrm{Im}(\bar\alpha\delta+\bar\beta\gamma) & \mathrm{Re}(\alpha\bar\delta-\beta\bar\gamma) & \mathrm{Im}(\bar\alpha\gamma-\bar\beta\delta) \\ \frac{\alpha\bar\alpha+\beta\bar\beta-\gamma\bar\gamma-\delta\bar\delta}{2} & \mathrm{Re}(\alpha\bar\beta-\gamma\bar\delta) & \mathrm{Im}(\alpha\bar\beta-\gamma\bar\delta) & \frac{\alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta-\gamma\bar\gamma+\delta\bar\delta}{2} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Ověření $\Upsilon_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ je již pouhou formalitou.

Vraťme se k bodu i : $\Upsilon(SL(2,\mathbb{C})) = SO(1,3)_+$.

Začneme inkluzí $\Upsilon(SL(2,\mathbb{C})) \subset SO(1,3)_+$. V první řadě víme $\Upsilon(SL(2,\mathbb{C})) \subset O(1,3)$. Z předpisu (2.13) plyne ${\Upsilon_A}^0{}_0 > 0$, vzhledem k podmínce (1.23) proto nezbývá než ${\Upsilon_A}^0{}_0 \geq 1$. Přímočarým [5], byť pracným výpočtem, lze ukázat $\det \Upsilon_A = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma})^2$. Z předpokladu $A \in SL(2,\mathbb{C})$ víme, že $\alpha\delta - \beta\gamma = \det A = 1$, a proto $\det \Upsilon_A = 1$.

Na důkaz opačné inkluze $\Upsilon(SL(2,\mathbb{C})) \supset SO(1,3)_+$ se nejprve vyzbrojíme několika konkrétními příklady Υ_A.

$$\begin{aligned} A_2(\vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & \sin\frac{\vartheta}{2} \\ -\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad A_3(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \\ B_1(\theta) &= \begin{pmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2} \\ -\sinh\frac{\theta}{2} & \cosh\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \theta, \vartheta, \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Snadno ověříme, že $A_2(\vartheta), A_3(\varphi), B(\theta)$ jsou prvky $SL(2,\mathbb{C})$: $\det A_2(\vartheta) = \det A_3(\varphi) = \det B(\theta) = 1 \quad \forall \theta, \vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$. Odpovídající obrazy v $SO(1,3)_+$ nalezneme pomocí předpisu (2.13).

$$\Upsilon_{B_1(\theta)} = L(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$\Upsilon_{A_2(\vartheta)} = R_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\Upsilon_{A_3(\varphi)} = R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

[5] Chápeme-li $h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ jako sloupcové vektory $(h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22})^T$, lze převést $\det \Upsilon_A$ na $\det \tilde{Y}_A$, kde $\tilde{Y}_A = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} & \beta\bar{\alpha} & \beta\bar{\beta} \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} & \gamma\bar{\beta} & \delta\bar{\alpha} & \delta\bar{\beta} \\ \gamma\bar{\gamma} & \gamma\bar{\delta} & \delta\bar{\gamma} & \delta\bar{\delta} \end{pmatrix}$.

$R_2(\vartheta)$, resp. $R_3(\varphi)$ značí rotoci kolem osy x_2 o úhel ϑ, resp. kolem osy x_3 o úhel φ. $B_1(\theta), A_2(\vartheta)$ i $A_3(\varphi)$ zřejmě leží v $SL(2,\mathbb{C})$.

Chceme odvodit, že každá Lorentzova transormace $\Lambda \in SO(1,3)_+$ má vzor v $SL(2,\mathbb{C})$, tj. $\Upsilon(SL(2,\mathbb{C})) \supset SO(1,3)_+$. V tomto okamžiku přijde vhod věta o rozkladu $\Lambda = R'L(\theta)R$ dokázaná v předchozí kapitole. Pro libovolnou rotaci R navíc existují úhly $\varphi_1, \vartheta, \varphi_2$ (*Eulerovy úhly*) takové, že $R = R_3(\varphi_1)R_2(\vartheta)R_3(\varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \langle 0, 2\pi), \vartheta \in \langle 0, \pi)$[6]. Libovolnou vlastní Lorentzovu transformaci s pomocí Eulerových úhlů přepíšeme do tvaru:

$$\Lambda = R_3(\varphi_1')R_2(\vartheta')R_3(\varphi_2')L(\theta)R_3(\varphi_1)R_2(\vartheta)R_3(\varphi_2)$$

Vzor součinu těchto matic známe:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Upsilon_{A_3(\varphi_1')}\Upsilon_{A_2(\vartheta')}\Upsilon_{A_3(\varphi_2')}\Upsilon_{B_1(\theta)}\Upsilon_{A_3(\varphi_1)}\Upsilon_{A_2(\vartheta)}\Upsilon_{A_3(\varphi_2)} \\ &= \Upsilon_{A_3(\varphi_1')A_2(\vartheta')A_3(\varphi_2')B_1(\theta)A_3(\varphi_1)A_2(\vartheta)A_3(\varphi_2)}\end{aligned}$$

Každý ze součinitelů $A_3(\varphi_1'), \ldots, A_3(\varphi_2)$ patří do grupy $SL(2,\mathbb{C})$, v $SL(2,\mathbb{C})$ proto leží i součin $A_3(\varphi_1') \ldots A_3(\varphi_2)$.

Z věty o nakrytí zbývá ověřit bod *iii* : Υ zobrazuje $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$ právě 2 : 1. Dokážeme dokonce implikaci $\Upsilon_A = \Upsilon_B \implies A = \pm B$, tj. každý prvek $SO(1,3)_+$ má v $SL(2,\mathbb{C})$ právě dva vzory, které se liší (pouze) znaménkem.

Mějme $\Upsilon_A = \Upsilon_B$. Uvážíme-li $\mathbb{1} = \Upsilon_A(\Upsilon_A)^{-1} = \Upsilon_A(\Upsilon_B)^{-1} = \Upsilon_A\Upsilon_{B^{-1}} = \Upsilon_{AB^{-1}}$, potřebujeme dokázat pouze $\Upsilon_X = \mathbb{1} \implies X = \pm\mathbb{1}$. Tvrzení dokážeme přímým výpočtem z předpisu (2.13) s užitím podmínky $\det X = 1$. Označme $X = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Z rovnic ${\Upsilon_X}^0{}_0 - {\Upsilon_X}^3{}_3 = 0$ a ${\Upsilon_X}^0{}_3 - {\Upsilon_X}^3{}_0 = 0$ okamžitě plyne, že $\gamma = \beta = 0$ a $|\alpha| = |\delta| = 1$. Požadavek $\det X = 1$ pak nabývá podoby $\alpha = \bar{\delta}$. Například pomocí rovnice ${\Upsilon_X}^1{}_2 = 0$ nahlédneme, že $\alpha = \pm 1$, a tedy $X = \pm\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. $\square$

[6] Důkaz věty o Eulerových úhlech lze najít v [3].

2.3 Nakrytí $SU(2)$ na $SO(3) \simeq \mathcal{R}$

Nakrytí Υ respektuje grupové operace (násobení a inverze) na $SL(2,\mathbb{C})$, resp. $SO(1,3)_+$. Je proto nasnadě očekávat, že vzory podgrup $\mathcal{B}$, $\mathcal{R} \subset SO(1,3)_+$ budou podgrupami v $SL(2,\mathbb{C})$.

Boostům $\mathcal{B} = \{L(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ odpovídá v $SL(2,\mathbb{C})$ podgrupa $\{B_1(\theta), -B_1(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. Uzavřenost obou grup plyne ze součtových vzorců pro hyperbolický sinus a cosinus. Inverzní prvek získáme obrácením znaménka u θ.

Protějšek rotací $\mathcal{R}$ – grupu $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$ zavedeme nejprve samostatně.

$$SU(2) = \{A \in SL(2,\mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}\} \tag{2.18}$$

Definiční podmínka (2.18) vymezuje obecný tvar $A \in SU(2)$:

$$A \in SU(2) \iff A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{2.19}$$

Z definice (2.18) snadno nahlédneme, že $SU(2)$ tvoří grupu vůči maticovému násobení. Naopak dosazením ekvivalentní definice (2.19) do předpisu (2.13) zjistíme $\Upsilon_A{}^0{}_0 = 1$, tj. $\Upsilon(SU(2)) \subset \mathcal{R}$. Opačnou inkluzi jsme již dokázali výše – rozložením libovolné rotace pomocí Eulerových úhlů. Stačí ověřit, že $A_2(\vartheta)$ a $A_3(\varphi)$ jsou prvky $SU(2)$.

Z věty o nakrytí víme, že ke každé rotaci z $\mathcal{R}$ existují v $SU(2)$ právě dva vzory. Jako tečku za kapitolou 2 tento vztah vizualizujeme. Nejprve rozepišme definiční rovnici $SU(2)$ (2.19): $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$. Prvek $SU(2)$ si tak můžeme představit jako bod na trojrozměrné sféře: $SU(2) \simeq S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Před vizualizací grupy rotací připomeneme pojem *n-rozměrný reálný projektivní prostor* $\mathbb{RP}^n$. Zjednodušeně se $\mathbb{RP}^n$ rovná množině všech přímek v $\mathbb{R}^{n+1}$ procházejících počátkem [7].

Pro názornost uvažujme $\mathbb{RP}^2$. Postavíme-li přímkám v $\mathbb{R}^3$ do cesty horní polosféru S^2_+ se středem v počátku, lze přímky procházející počátkem($\mathbb{RP}^2$)

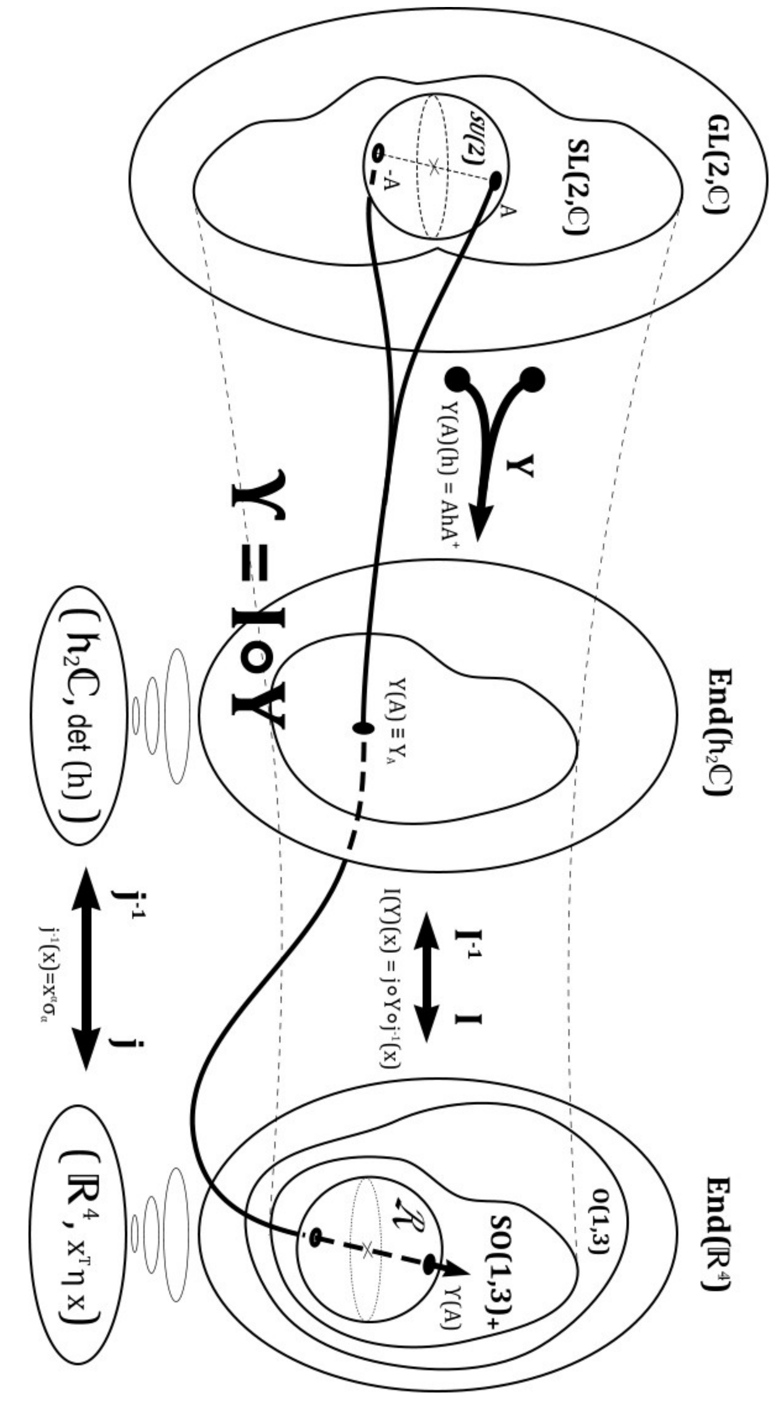
[7] Dle standardní matematické definice $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$, kde $v \sim w \iff \exists a \in \mathbb{R} \quad v = aw$ (pro $v, w \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$). Slovně: $\mathbb{RP}^n$ je množinou tříd ekvivalence vektorů z $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Prvek $\mathbb{RP}^n$ získáme ztotožněním (*faktorizací*) všech nenulových vektorů téhož směru. Prvky $\mathbb{RP}^n$ můžeme reprezentovat pomocí přímek v $\mathbb{R}^{n+1}$.

ztotožnit s body S^2_+ – příslušnými průsečíky. Pozor si musíme dát pouze na kraji polosféry (rovníku), dvojice protilehlých bodů odpovídají jedinému prvku. Získanou polokouli S^2_+ nakonec sešlápneme v kruh. Libovolný prvek $\mathbb{RP}^2$ tak lze (topologicky) ztotožnit s bodem kruhu (dvourozměrné koule), přičemž protilehlé body hranice kruhu (kružnice, S^1) splývají.

V případě grupy rotací $\mathcal{R}$ provedeme stejný postup, pouze po zpátku a o dimenzi výše. Libovolná rotace z $\mathcal{R}$ je dána osou otáčení (jednotkovým směrovým vektorem) a úhlem otočení $\varphi \in \langle -\pi, \pi)$. Množinu $\mathcal{R}$ si proto můžeme představit jako uzavřenou kouli o poloměru π, přičemž protilehlé prvky na sféře (S_2) ztotožníme (rotace kolem pevné osy o π a $-\pi$ má stejný výsledek). Zbývá vypnout vnitřek koule zpátky do čtvrtého rozměru do tvaru horní polosféry S^3_+. Výsledek symbolicky zapíšeme $\mathcal{R} \simeq SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Každá přímka v $\mathbb{R}^4$ procházející počátkem ($R \in \mathcal{R}$) protíná trojrozměrnou sféru S^3 právě ve dvou bodech – vzorech R v $SU(2)$.

$$\Upsilon : S^3 \simeq SU(2) \longmapsto \mathcal{R} \simeq \mathbb{RP}^3 \tag{2.20}$$



Obrázek 2.1: Nakrytí $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(1,3)_+$

Kapitola 3

Spinory v Minkowského časoprostoru

Spinory zobecňují klasické tenzory na efektivní formalismus pro popis částic se spinem. Kvantové aplikace stojí ovšem mimo intence práce. Částečnou protiváhu jinak především matematického obsahu poskytuje oddíl 3.4, v němž je do spinorů přeformulována elektrodynamika.

Podobně jako zavádíme tenzory nad Minkowského časoprostorem, definujeme i spinory (oddíl 3.2) nad spinovým prostorem (oddíl 3.1). Tenzorovou algebru následně do spinorové algebry vnoříme (oddíl 3.3).

Při pronikání do nové teorie čelí fyzik zpravidla dvěma úskalím – vstřebání nového formalismu a pochopení teorie samotné. Protože úskalí se snáze překonávají postupně nežli na ráz, zavedeme[1] formalismus abstraktních indexů nejprve na příkladu objektů z první kapitoly.

3.0 Formalismus abstraktních indexů

Doposud používaný formalismus rozlišoval mezi objektem samotným (např. geometricky chápaný vektor $\mathbf{x}$, Minkowského tenzor $\boldsymbol{\eta}$, Lorentzova transformace $\boldsymbol{\Lambda}$) a jeho souřadnicovým vyjádřením (např. vektor – sloupec x, matice η, matice Λ). Ze složek (vůči dané bázi $\{\mathbf{e}_\mu\}_{\mu=0}^{3}$) bylo navíc možné vyčíst typ tenzoru: $x^\mu = \boldsymbol{\varepsilon}^\mu(\mathbf{x})$ složka tenzoru typu $\binom{1}{0}$, $\eta_{\mu\nu} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$ – složka

[1] Záměrem je především „připravit půdu“ pro zbytek kapitoly. Ve vší obecnosti a rigoróznosti lze definici abstraktních indexů nalézt ve [2, str. 26].

tenzoru typu $\binom{0}{2}$, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{e}_{\nu}))$ - složka tenzoru typu $\binom{1}{1}$. [2]

Při bezsouřadnicovém zápisu naopak tenzory jednotlivých typů splývaly – $\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Lambda}$. Jejich rozlišení docílíme přidáním *abstraktních indexů*. Bezsouřadnicový zápis pak zdánlivě vypadá jako zápis ve složkách.

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}, \boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Lambda}$$

Abstraktní indexy – sázané na rozdíl od klasických složek tučně – nenabývají číselných hodnot, ani nepodléhají sumační konvenci. Jejich smyslem je určit pozici, na kterou vektor, resp. formu do tenzoru dosazujeme.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu_1}} \dots \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu_s}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\nu_1}} \dots \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu_r}} & \leftrightarrow & \mathbf{T}(\mathbf{v}, \dots, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\beta}) \\ \text{metoda abstraktních indexů} & \leftrightarrow & \text{klasický zápis} \end{array}$$

$\mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}}$($\leftrightarrow$ v původním zápisu $\mathbf{T}$) je tenzor typu $\binom{r}{s}$,

$\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu_1}} \dots \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu_s}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$ ($\leftrightarrow \mathbf{v}, \dots, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$) označují vektory a

$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\nu_1}} \dots \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu_r}} \in \mathbf{V}_{\boldsymbol{\nu}}$ ($\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{V}^*$) zastupují 1-formy na Minkowského prostoročase.

Po přidání abstraktních indexů můžeme tenzory nadále *sčítat* a *násobit skalárem*:

$$a\mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} + b\mathbf{U}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} := (a\mathbf{T} + b\mathbf{U})^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}}$$

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}}, \mathbf{U}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}},$$

kde $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}}$ označuje množinu všech tenzorů typu $\binom{r}{s}$, tj. $\binom{r}{s}$-tou tenzorovou mocninu vektorového prostoru $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$.

Tenzorový součin se jeví v abstraktních indexech zdánlivě komutativní:

$$\begin{array}{r} \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} \mathbf{U}^{\boldsymbol{\iota_1 \dots \iota_m}}{}_{\boldsymbol{\kappa_1 \dots \kappa_n}} = \mathbf{U}^{\boldsymbol{\iota_1 \dots \iota_m}}{}_{\boldsymbol{\kappa_1 \dots \kappa_n}} \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{T} \otimes \mathbf{U} \\ \forall\, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\nu_1 \dots \nu_r}}_{\boldsymbol{\mu_1 \dots \mu_s}},\ \forall\, \mathbf{U}^{\boldsymbol{\iota_1 \dots \iota_m}}{}_{\boldsymbol{\kappa_1 \dots \kappa_n}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\iota_1 \dots \iota_m}}_{\boldsymbol{\kappa_1 \dots \kappa_n}} \end{array}$$

Nekomutativitě tenzorového součinu odpovídá vztah (pro jednoduchost uvažujeme místo obecných tenzorů vektory a 1-formy):

$$\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu_1}} \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu_2}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\mu_1}} \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\mu_2}} \neq \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu_2}} \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu_1}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\mu_1}} \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\mu_2}} \ \leftrightarrow\ (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

[2] Připomeňme, že $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}\}_{\mu=0}^{3}$ je duální báze k bázi $\{\mathbf{e}_{\mu}\}_{\mu=0}^{3}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}(\mathbf{e}_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu}$.

Z obecného tenzoru můžeme vytvořit nový tenzor (stejného typu) tak, že změníme pořadí, ve kterém do tenzoru dosazujeme. Pro *permutaci abstraktních indexů* $\boldsymbol{\sigma} : \{\boldsymbol{\nu_1}, \ldots, \boldsymbol{\nu_r}\} \mapsto \{\boldsymbol{\nu_1}, \ldots, \boldsymbol{\nu_r}\}$ a tenzor $\mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \ldots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\nu_1 \ldots \nu_r}}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}}$ definujeme nový tenzor $\mathbf{T}^{\boldsymbol{\sigma(\nu_1) \ldots \sigma(\nu_r)}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\nu_1 \ldots \nu_r}}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}}$ vztahem:

$$\mathbf{T}^{\boldsymbol{\sigma(\nu_1) \ldots \sigma(\nu_r)}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu_1}} \ldots \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu_s}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\sigma(\nu_1)}} \ldots \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\sigma(\nu_r)}} := \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \ldots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu_1}} \ldots \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu_s}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\nu_1}} \ldots \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\nu_r}}$$

Analogicky zavádíme permutaci indexů pro dolní (kovariantní) indexy.

Názornost formalismu abstraktních indexů se uplatní, chceme-li ztotožnit vektory a 1-formy na Minkowského prostoru. Možnost kanonicky ztotožnit prostory $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$ a $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\mu}}$ poskytuje přítomnost metriky – Minkowského metrického tenzoru. *Zvyšováním*, resp. *snižováním indexů* nazveme jednotlivé směry tohoto izomorfismu.

$$\begin{array}{rccl} \textit{snižování indexů}: & \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} & \rightarrow & \mathbf{V}_{\boldsymbol{\mu}} \\ & \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} & \mapsto & \mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}} := \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}} \end{array} \tag{3.1}$$

Zvyšování indexů zapíšeme pomocí *kontravariantního Minkowského tenzoru* $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}}$. Tenzor $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}}$ definujeme tak, aby zvyšování indexů bylo inverzní operací ke snižování, tj. vztahem: $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\nu\xi}} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\xi}}$, kde $\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\xi}}$ je identické zobrazení. [3]

$$\begin{array}{rccl} \textit{zvyšování indexů}: & \mathbf{V}_{\boldsymbol{\mu}} & \rightarrow & \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} \\ & \mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}} & \mapsto & \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} := \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\nu}} \end{array} \tag{3.2}$$

Na závěr shrňme ($\leftrightarrow$ v porovnání s klasickým zápisem) několik základních příkladů.

$$\begin{array}{rcl} \text{vektor} & : & \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}} = x^{\nu} \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{\nu} \quad (\leftrightarrow \mathbf{x} = x^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}) \\ & & x^{\nu} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}} \quad (\leftrightarrow x^{\nu} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}(\mathbf{x})) \\ \text{vektorový prostor} & : & \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} \quad (\leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{V}) \\ \text{1-forma} & : & \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\mu}} = \alpha_{\nu} \boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}_{\boldsymbol{\mu}} \quad (\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \alpha_{\nu} \boldsymbol{\varepsilon}^{\nu}) \\ & & \alpha_{\nu} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{\nu} \quad (\leftrightarrow \alpha_{\nu} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}_{\nu})) \\ \text{duální prostor} & : & \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{V}_{\boldsymbol{\mu}} \quad (\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{V}^*) \end{array}$$

---

[3] Snadno ověříme vlastnosti: $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{w}_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} \quad \forall\, \mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{w}_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{V}_{\boldsymbol{\mu}}$ a $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}} = \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\nu\mu}}$. Na úrovni složek vůči ortonormální bázi platí: $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu\nu}} = \eta^{\alpha\beta} \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} \mathbf{e}^{\boldsymbol{\nu}}_{\beta}$, kde $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\ \forall \alpha, \beta = 0, \ldots, 3$, tj. $[\eta^{\alpha\beta}] = [\eta_{\alpha\beta}] = \eta$.

bilineární forma	:	$\boldsymbol{\eta_{\mu\nu}} = \eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}_{\boldsymbol{\mu}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta}_{\boldsymbol{\nu}} \quad (\leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = \eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta})$
		$\eta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\eta_{\mu\nu}}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\nu}}_{\beta} \quad (\leftrightarrow \eta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}))$
Minkowského skalární součin	:	$\boldsymbol{\eta_{\mu\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} \quad (\leftrightarrow \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$
lineární zobrazení	:	$\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta}_{\boldsymbol{\nu}} \quad (\leftrightarrow \boldsymbol{\Lambda} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta})$
		$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\nu}}_{\beta} \quad (\leftrightarrow \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{e}_{\beta})))$
		$\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}} : \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}} \mapsto \boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\nu}} \quad (\leftrightarrow \boldsymbol{\Lambda} : \mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}))$
obecný tenzor	:	$\mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \ldots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\nu_1}}_{\alpha_1} \ldots \mathbf{e}^{\boldsymbol{\nu_r}}_{\alpha_r}\boldsymbol{\varepsilon}^{\beta_1}_{\boldsymbol{\mu_1}} \ldots \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta_s}_{\boldsymbol{\mu_s}}$
		$(\leftrightarrow \mathbf{T} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s}\mathbf{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\alpha_r} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta_s})$
složky tenzoru		$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s} = \mathbf{T}^{\boldsymbol{\nu_1 \ldots \nu_r}}{}_{\boldsymbol{\mu_1 \ldots \mu_s}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha_1}_{\boldsymbol{\nu_1}} \ldots \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha_r}_{\boldsymbol{\nu_r}}\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu_1}}_{\beta_1} \ldots \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu_s}}_{\beta_s}$
		$(\leftrightarrow T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_s} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha_r}, \mathbf{e}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\beta_s}))$

3.1 Spinový prostor

V první kapitole jsme definovali Lorentzovu grupu $SO(1,3)_+$ jako grupu zachovávající danou strukturu – Minkowského prostoročas.[4] Svou invariantní strukturu má i grupa $SL(2,\mathbb{C})$, je jí *spinový prostor*.

Spinový prostor definujeme jako komplexní vektorovový prostor $\mathbf{S^A}$ se symplektickou formou $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}$ daných vlastností.

V řeči symbolů představuje *spinový prostor* dvojici $(\mathbf{S^A}, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}})$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}} : \mathbf{S^A} \times \mathbf{S^A} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}) &\mapsto \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}, \quad \forall \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}, \in \mathbf{S^A} \end{aligned} \tag{3.3}$$

splňující axiomy:

i. $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}(a\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} + b\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}})\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{B}} = a\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{B}} + b\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{B}}$ (*linearita*)

ii. $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}} = -\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BA}}$ (tj. $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = -\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BA}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}$) (*antisymetrie*)

iii. $\exists\, \boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S^A} : \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}} \neq 0$ (*nenulovost*)

iv. $\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{C}} = 0$ (*cyklické pravidlo*)

$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall\, \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S^A}$

[4] Přesněji jako komponentu souvislosti grupy $O(1,3)$ – definice (1.21) – obsahující identitu.

Na Minkowského prostoročase privilegoval Minkowského metrický tenzor ortonormální (inerciální) systémy souřadné. Analogické výsadní postavení mají na spinovém prostoru *spinové báze* $\{\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\} \equiv \{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ vyhovující podmínce $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} = 1$.

Existenci spinové báze a další vlastnosti spinového prostoru shrnuje následující věta.

Věta – Základní vlastnosti spinového prostoru.

1. *Spinový prostor je komplexní vektorový prostor dimenze 2.*

2. *Existuje spinová báze.*

3. *Nechť* $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{C}}\}_{B=1}^2$ *je spinová báze. Nechť* $[G^A{}_B] = \begin{pmatrix} G^1{}_1 & G^1{}_2 \\ G^2{}_1 & G^2{}_2 \end{pmatrix}$ *je maticí přechodu od* $\{\mathbf{s'}_B^{\mathbf{C}}\}_{B=1}^2$ *k* $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{C}}\}_{B=1}^2$*, tj.* $\mathbf{s}_B^{\mathbf{C}} = G^A{}_B\mathbf{s'}_A^{\mathbf{C}}$*. Pak* $\{\mathbf{s'}_B^{\mathbf{C}}\}_{B=1}^2$ *je spinová báze právě tehdy, když matice* $[G^A{}_B]$ *patří do grupy* $SL(2,\mathbb{C})$*.*

   (srov. s pasivní interpretací Lorentzovy transformace (1.19))

4. *Lineární transformace* $\mathbf{G^A{}_B}$*, zadaná vůči zvolené spinové bázi maticí* $[G^A{}_B] \in SL(2,\mathbb{C})$*, zachová symplektický součin, tj.* $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\mathbf{G^A{}_C}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}}\mathbf{G^B{}_D}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} \quad \forall\, \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S^A}$*.*

   (srov. s aktivní interpretací Lorentzovy transformace (1.20))

5. *Spinové vektory* $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ *a* $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S^A}$ *jsou lineárně závislé právě tehdy, když* $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = 0$*.*

Důkaz. 1. Dokažme, že spinové vektory $\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}$ a $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}$ z axiomu (iii.) tvoří bázi spinového prostoru. Začněme lineární nezávislostí. Z axiomu (i.) a (ii.) je zřejmé, že $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}$ je lineární i v druhém argumentu. Díky antisymetrii (ii.) navíc platí $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S^A}$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}$ a $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}$ jsou lineárně závislé, tj. existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}} = \lambda\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}$. Pak ale nutně $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\lambda\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}} = \lambda\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}} = 0$, což je hledaný spor. Zároveň jsme dokázali jeden směr ekvivalence v bodě 5.

Libovolný spinový vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S^A}$ můžeme rozvinout do báze $\{\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}\}$ díky cyklickému pravidlu a $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}} \neq 0$:

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}} = 0$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = \left(-\frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{C}}}{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{C}}}\right)\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}} + \left(-\frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}}}{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{C}}}\right)\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}$$

2. Opět vezměme spinové vektory $\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}$ a $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}}$ z axiomu (iii.). Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}} > 0$ (v opačném případě vektory prohodíme a přeznačíme). Dvojice $\{\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\}$ definovaná

$$\{\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}}}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}, \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\iota}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{B}}}}\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{A}} \right\}$$

tvoří spinovou bázi.

Před pokračováním v důkazu se zastavme u spinové báze. Obecnému spinovému vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ přísluší v bázi $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ rozvoj $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = \xi^B \mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}$. Koeficienty rozvoje $\xi^B \in \mathbb{C}$ příležitostně zapíšeme do sloupce $\left[\xi^A\right] \equiv \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$.

Označme $\{\mathbf{s}^B_{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ duální spinovou bázi ke spinové bázi $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ (platí $\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\mathbf{s}^C_{\mathbf{A}} = \delta_A^C$). Projektujeme-li obecný spinový vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ do bázových vektorů ($\xi^B = \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\mathbf{s}^B_{\mathbf{A}}$), a průměty následně zpátky složíme ($\xi^B \mathbf{s}_B^{\mathbf{C}}$), obdržíme původní vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}}$. Tento – na konečnědimenzionálních prostorech triviální – fakt nazýváme *relace úplnosti*:

$$\mathbf{s}^B_{\mathbf{A}}\mathbf{s}_B^{\mathbf{C}} = \mathbf{s}^1_{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}} + \mathbf{s}^2_{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{C}} = \delta_B^D \mathbf{s}^B_{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \tag{3.4}$$

Kronekerovo δ_B^A interpretujeme jako složky zobrazení identita $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$.

V souřadnicích dále vyjádříme symplektickou formu: $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}} = \epsilon_{CD}\mathbf{s}^C_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^D_{\mathbf{B}}$. Koeficienty $\epsilon_{CD} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}}$ zapíšeme do matice $[\epsilon_{CD}] \equiv \epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Příjemnou vlastností nově zavedeného formalismu je, že sebesložitější geometrické objekty a výrazy pro složky vůči dané bázi vypadají stejně. Přesvěčme se u sympektického součinu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{D}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}(\mathbf{s}^E_{\mathbf{A}}\mathbf{s}_E^{\mathbf{C}})(\mathbf{s}^F_{\mathbf{B}}\mathbf{s}_F^{\mathbf{D}})\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = \\ &= (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}_E^{\mathbf{C}}\mathbf{s}_F^{\mathbf{D}})(\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\mathbf{s}^E_{\mathbf{A}})(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\mathbf{s}^F_{\mathbf{B}}) = \epsilon_{EF}\xi^E\psi^F = \epsilon_{AB}\xi^A\psi^B \end{aligned}$$

Výraz pro symplektický součin dále upravíme.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = \epsilon_{AB}\xi^A\psi^B = \xi^1\psi^2 - \xi^2\psi^1 = \det\begin{pmatrix} \xi^1 & \psi^1 \\ \xi^2 & \psi^2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Pokračujme v důkazu věty o základních vlastnostech spinového prostoru.

3. Dle předpokladu tvoří $\{\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{B}\}_{B=1}^{2}$ spinovou bázi:

$$\begin{aligned}
1 &= \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}(G^{A}{}_{1}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{A})(G^{B}{}_{2}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{B}) = G^{A}{}_{1}G^{B}{}_{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{A}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{B} \\
&= G^{1}{}_{1}G^{2}{}_{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{2} + G^{2}{}_{1}G^{1}{}_{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{1} \\
&= (G^{1}{}_{1}G^{2}{}_{2} - G^{2}{}_{1}G^{1}{}_{2})\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{2} = \det G\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{2}
\end{aligned}$$

Z rovnosti $1 = \det G\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CD}}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}'^{\mathbf{D}}_{2}$ plyne požadovaná ekvivalence.

4. Lineární transformace $\mathbf{G}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{B}}$ se v dané bázi realizuje jako maticové násobení: $[G^{A}{}_{B}\xi^{B}] = [G^{A}{}_{B}][\xi^{B}]$, příp. $\mathbf{G}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}} = G^{C}{}_{B}\xi^{B}\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_{C}$. Pro zvolené $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ zapíšeme symplektický součinu pomocí determinantu (3.5):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\mathbf{G}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{C}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}}\mathbf{G}^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}} &= \det\begin{pmatrix} G^{1}{}_{B}\xi^{B} & G^{1}{}_{B}\psi^{B} \\ G^{2}{}_{B}\xi^{B} & G^{2}{}_{B}\psi^{B}\end{pmatrix} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} G^{1}{}_{1} & G^{1}{}_{2} \\ G^{2}{}_{1} & G^{2}{}_{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{1} & \psi^{1} \\ \xi^{2} & \psi^{2}\end{pmatrix}\right) \\
&= \det G\ \ \det\begin{pmatrix}\xi^{1} & \psi^{1} \\ \xi^{2} & \psi^{2}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\xi^{1} & \psi^{1} \\ \xi^{2} & \psi^{2}\end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}
\end{aligned}$$

5. Zbývá dokázat implikaci $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = 0 \implies \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}$ *jsou linárně závislé*. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ i $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}$ jsou nenulové – v opačném případě je tvrzení splněno triviálně.

   Vezměme $\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ takové, že $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{C}} \neq 0$. Hledané $\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{A}}$ skutečně existuje – zvolíme-li vzhledem k pevné spinové bázi $\varrho^{1} = -\overline{\psi^{2}}$ a $\varrho^{2} = \overline{\psi^{1}}$ vyjde symplektický součin nenulový: $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{C}} = \det\begin{pmatrix}\psi^{1} & -\overline{\psi^{2}} \\ \psi^{2} & \overline{\psi^{1}}\end{pmatrix} = |\psi^{1}|^{2} + |\psi^{2}|^{2} \neq 0$.

   Vektory $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}$ a $\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{A}}$ nyní dosadíme do cyklického pravidla (axiom iv.): $\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{C}} = 0$. Vzhledem k $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = 0$ a $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{C}} \neq 0$ zjišťujeme $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = \left(-\frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}}}{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{C}}}\right)\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}$.

□

Symplektická forma umožňuje (v analogii s Minkowského tenzorem na časoprostoru) zavést na spinovém prostoru *zvyšování* a *snižování indexů*.

Vzhledem k antisymetrii $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}$ záleží na tom, přes který index snižujeme, resp. zvyšujeme. V souladu se zažitou konvencí zvolme:

$$\textit{snižování indexů}: \quad \begin{array}{rcl} \mathbf{S}^{\mathbf{A}} & \to & \mathbf{S}_{\mathbf{A}} \\ \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} & \mapsto & \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}} := \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CA}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}} \end{array} \tag{3.6}$$

Zvyšování indexů zapíšeme pomocí tenzoru $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}$, jenž definujeme vztahem: $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CB}} = \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}}$. [5]

$$\textit{zvyšování indexů}: \quad \begin{array}{rcl} \mathbf{S}_{\mathbf{A}} & \to & \mathbf{S}^{\mathbf{A}} \\ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}} & \mapsto & \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} := \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{B}} \end{array} \tag{3.7}$$

Symplektický součin tak ekvivalentně vyjádříme v libovolném z tvarů:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = -\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{B}} \tag{3.8}$$

Závěrem oddílu dokažme jednu užitečnou identitu.

Tvrzení:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{CD}} = \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{B}} \tag{3.9}$$

Důkaz. Pravdivost ověříme přímým výpočtem. Využijeme toho, že symplektická forma má stejně jako zobrazení identita shodná souřadnicová vyjádření v libovolné spinové bázi.

$$\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{CD}} & = & (\epsilon_{EF}\mathbf{s}^{E}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{F}_{\mathbf{B}})(\epsilon^{GH}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{G}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{H}) = (\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}} - \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}})(\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} - \mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1}) \\
& = & \mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} + \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} - \mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} - \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} \\
& = & \mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} + \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} + \\
& & \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} + \mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} - \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2} - \mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} \\
& & \qquad - \mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1}\mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2} - \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2}\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1} \\
& = & (\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1} + \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2})(\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} + \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2}) \\
& & \quad -(\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{1} + \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{A}}\mathbf{s}^{\mathbf{D}}_{2})(\mathbf{s}^{1}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{1} + \mathbf{s}^{2}_{\mathbf{B}}\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{2}) \\
& = & \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{B}}
\end{array}$$

□

[5] Snadno ověříme rovnosti $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} \quad \forall\, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ a $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}} = -\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{BA}}$. Na úrovni složek vůči spinové bázi platí: $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}} = \epsilon^{CD}\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_{C}\mathbf{s}^{\mathbf{B}}_{D}$, kde $\epsilon^{AB} = \epsilon_{AB}$ pro $A, B = 1, 2$, tj. $[\epsilon^{AB}] = [\epsilon_{AB}] = \epsilon$.

3.2 Spinorová algebra

Spinory definujeme v analogii s tenzory jako multilineární zobrazení. Zobecnění oproti tenzorům spočívá v tom, že do obecného spinoru dosazujeme nejen z vektorového prostoru $\mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ a jeho duálu $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$, ale i z (anti)izomorfních kopií $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ a $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}}$. Prostory $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ a $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}}$ si nyní přiblížíme.

Prostor $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ je věrnou kopií spinového prostoru $\mathbf{S}^{\mathbf{A}}$. Dvojice $(\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}, \boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}})$ splňuje pro každé $a, b \in \mathbb{C}$ a $\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}, \boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}, \boldsymbol{\varrho}^{\dot{\mathbf{X}}} \in \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ axiomy analogické (3.3). Všechny vlastnosti prostoru $\mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ platí i pro $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$. Speciálně existuje spinová báze $\{\mathbf{s}_{\dot{1}}^{\dot{\mathbf{X}}}, \mathbf{s}_{\dot{2}}^{\dot{\mathbf{X}}}\} \equiv \{\mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{X}}}\}_{\dot{Y}=\dot{1}}^{\dot{2}}$ (vyhovující podmínce $\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\mathbf{s}_{\dot{1}}^{\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{s}_{\dot{2}}^{\dot{\mathbf{Y}}} = 1$) a báze k ní duální $\{\mathbf{s}^{\dot{Y}}_{\dot{\mathbf{X}}}\}_{\dot{Y}=\dot{1}}^{\dot{2}}$ (splňující $\mathbf{s}_{\dot{Z}}^{\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{s}^{\dot{Y}}_{\dot{\mathbf{X}}} = \delta^{\dot{Y}}_{\dot{Z}}$). Duál prostoru $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ označíme $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}}$. [6]

Vektorové prostory $\mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ a $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ mají stejnou dimenzi, můžeme proto jeden na druhý vzájemně jednoznačně zobrazit. Zobrazení označíme $^{-}$ a nazveme *operace sdružení*. Nadto požadujeme, aby operace sdružení byla antiizomorfismem:

$$\begin{aligned} {}^{-}: \quad \mathbf{S}^{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}} \\ \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} &\mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}} \equiv \boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{A}}} \quad \text{splňující} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\overline{a\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} + b\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}} = \bar{a}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{A}}} + \bar{b}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{A}}} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C} \quad \forall\, \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}} \tag{3.11}$$

Podmínka antiizomorfismu (3.11) ještě neurčuje operaci sdružení jednoznačně. Konkrétní realizaci získáme po zadání dvou ($= \dim \mathbf{S}^{\mathbf{A}} = \dim \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$) dvojic sobě si odpovídajících vektorů. Přirozeně vyberme spinové báze:

$$^{-}: \mathbf{s}_{B}^{\mathbf{A}} \mapsto \overline{\mathbf{s}_{B}^{\mathbf{A}}} = \mathbf{s}_{\dot{B}}^{\dot{\mathbf{A}}} \quad B = 1, 2 \tag{3.12}$$

V důsledku této volby se již libovolná spinová báze zobrazí opět na spinovou bázi. Vskutku, nechť $\{\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{B}\}_{B=1}^{2}$ je spinová báze a $[G^{A}{}_{B}] \in SL(2, \mathbb{C})$ matice přechodu od $\{\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{B}\}_{B=1}^{2}$ k $\{\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{B}\}_{B=1}^{2}$ (tj. $\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_{B} = G^{A}{}_{B}\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_{A}$), potom spinové báze $\{\mathbf{s}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}}\}_{\dot{Y}=\dot{1}}^{\dot{2}}$ a $\{\mathbf{s}'^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}}\}_{\dot{Y}=\dot{1}}^{\dot{2}}$ spojuje díky antiizomorfismu (3.11) matice komplexně sdružená, tj. $\mathbf{s}^{\dot{\mathbf{Z}}}_{\dot{Y}} = G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\mathbf{s}'^{\dot{\mathbf{Z}}}_{\dot{X}}$, kde $G^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} = \overline{G^{1}{}_{1}}$, $G^{\dot{1}}{}_{\dot{2}} = \overline{G^{1}{}_{2}}$, $G^{\dot{2}}{}_{\dot{1}} = \overline{G^{2}{}_{1}}$ a $G^{\dot{2}}{}_{\dot{2}} = \overline{G^{2}{}_{2}}$ (příp. zkráceně $G^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} = \overline{G^{A}{}_{B}}$). Matice $[G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}]$ zůstává v $SL(2, \mathbb{C})$

[6] Matematicky jsou prostory $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ a $\mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ (resp. $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ a $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}}$) „jednovaječnými dvojčaty“, které rozlišíme pouze tím, že jedno z „dvojčat“ oblečeme do puntíkovaných indexů. Tečkované indexy (ať už abstraktní nebo složkové) budeme nadto zpravidla volit z konce abecedy.

$(\det[G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}] = \overline{\det[G^{A}{}_{B}]} = 1)$, a proto díky větě z oddílu 3.1 tvoří $\{\mathbf{s'}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}}\}_{\dot{Y}=\dot{1}}^{\dot{2}}$ spinovou bázi prostoru $\mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$.

Podívejme se, jak se operace sdružení realizuje ve složkách vůči pevné bázi. Z antiizomorfismu (3.11) plyne:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = \xi^{B}\mathbf{s}_{B}^{\mathbf{A}} & \mapsto & \boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{A}}} = \xi^{\dot{B}}\mathbf{s}_{\dot{B}}^{\dot{\mathbf{A}}}, \quad \text{kde } \xi^{\dot{A}} = \overline{\xi^{A}} \\ \begin{pmatrix} \xi^{1} \\ \xi^{2} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \overline{\xi^{1}} \\ \overline{\xi^{2}} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.13}$$

Operaci sdružení zavedeme i ve směru $^{-}\colon \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}} \to \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ jako inverzní zobrazení k původnímu$^{-}\colon \mathbf{S}^{\mathbf{A}} \to \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$.

$$\begin{array}{rccl} ^{-}\colon & \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}} & \to & \mathbf{S}^{\mathbf{A}} \\ & \boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} & \mapsto & \overline{\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}} := \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{X}} \end{array} \tag{3.14}$$

Operaci sdružení nakonec rozšíříme i na duály:

$$\begin{array}{rccl} ^{-}\colon & \mathbf{S}_{\mathbf{A}} & \to & \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}} \\ & \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}} & \mapsto & \overline{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}} \equiv \boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{A}}} \\ & & & \boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}} := \overline{\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}} \qquad \forall\, \boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}} \in \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}} \end{array} \tag{3.15}$$

Jinými slovy výsledky kontrakcí sdružené a původní formy na odpovídajících si vektorech jsou komplexně sdružená čísla. Korespondence mezi duály je opět antiizomorfismem. Opačný směr $^{-}\colon \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}} \to \mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ definujeme znovu jako inverzi: $\overline{\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}} := \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{X}}$.

Snadno ověříme, že pro $\overline{\mathbf{s}_{\mathbf{A}}^{B}} = \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\dot{B}}$ platí $\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{X}}}^{\dot{Y}}\mathbf{s}_{\dot{Z}}^{\dot{\mathbf{X}}} = \delta_{\dot{Z}}^{\dot{Y}}$. Tedy, že se duální báze v $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ zobrazí na odpovídající duální bázi v $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}}$. V důsledku mj. platí (případně s odvoláním na (3.5) a (3.13)):

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\psi}_{\dot{\mathbf{Y}}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{Y}}} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{B}}} \\ \forall\, \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}} \end{array} \tag{3.16}$$

Tvrzení nahlédneme i z toho, že symplektický součin nabývá ve všech čtyřech podobách spinových bázích stejného souřadnicového vyjádření.

$$[\epsilon_{AB}] = [\epsilon^{AB}] = [\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}] = [\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}}] = \epsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Všimeme si, že libovolný spinový vektor můžeme ekvivalentně zadat v libovolné ze čtyř podob $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}$ a $\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}$. Mezi nimi lze jednoznačně přecházet prostřednictvím operace sdružení $(\bar{\ })$ a operace snižování a zvyšování indexů.

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}_{\mathbf{A}} & \xleftrightarrow{\;-\;} & \boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}} \in \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}} \\
{\scriptstyle \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}=\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CA}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{C}}}\uparrow\;\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}=\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{B}}} & & {\scriptstyle \boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}=\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{Z}}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Z}}}}\uparrow\;\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}=\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{Y}}}} \\
\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}} & \xleftrightarrow{\;-\;} & \boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} \in \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}
\end{array}$$

Tučná hlavička následujícího odstavce dává tušit, že nadešel čas k zavedení klíčového pojmu celé bakalářské práce – pojmu *spinor.*

Definice – spinor. *Každé multilineární zobrazení*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}} \;:\; & \mathbf{S_{A_1}}\times\ldots\times\mathbf{S_{A_r}}\times\mathbf{S_{\dot{X}_1}}\times\ldots\times\mathbf{S_{\dot{X}_m}} \\
& \times\mathbf{S^{B_1}}\times\ldots\times\mathbf{S^{B_s}}\times\mathbf{S^{\dot{Y}_1}}\times\ldots\times\mathbf{S^{\dot{Y}_n}}\to\mathbb{C}
\end{aligned}$$

nazveme spinorem typu $\begin{pmatrix} r & m \\ s & n \end{pmatrix}$.

Množinu všech spinorů typu $\begin{pmatrix} r & m \\ s & n \end{pmatrix}$ *označme* $\mathbf{S^{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}_{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}}$ *a nazývejme* $\begin{pmatrix} r & m \\ s & n \end{pmatrix}$-tou spinorovou mocninou.

Pro obecné spinory definujme operaci sdružení $\bar{\ }$*:*

$$\begin{aligned}
\bar{\ }: \mathbf{S^{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}_{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}} &\to \mathbf{S^{A_1\ldots A_m\dot{X}_1\ldots\dot{X}_r}_{B_1\ldots B_n\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_s}} \\
\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}} &\mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}}} \\
&\quad \equiv \bar{\boldsymbol{\xi}}^{\mathbf{\dot{A}_1\ldots\dot{A}_rX_1\ldots X_m}}{}_{\mathbf{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_sY_1\ldots Y_n}}, \quad \textit{kde}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{\xi}}^{\mathbf{A_1\ldots A_m\dot{X}_1\ldots\dot{X}_r}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_n\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_s}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A_1}}\ldots\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A_m}}\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{\dot{X}_1}}\ldots\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{\dot{X}_r}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B_1}}\ldots\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{B_n}}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathbf{\dot{Y}_1}}\ldots\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{\dot{Y}_s}} := \\
&\overline{\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{\dot{X}_1}}\ldots\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{\dot{X}_m}}\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{A_1}}\ldots\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A_r}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{Y}_1}}\ldots\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{\dot{Y}_n}}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathbf{B_1}}\ldots\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{B_s}}}
\end{aligned}$$

Tenzorovou algebru nad spinovým prostorem, $\bigoplus_{r,s,m,n=0}^{\infty}\mathbf{S^{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_m}_{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_n}}$, *vybevenou operací sdružení nazveme* spinorovou algebrou.

K definici operace sdružení poznamenejme, že sdružený spinor $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ vyčíslíme na odpovídajícím počtu vektorů a forem tak, že do původní spinoru $\boldsymbol{\xi}$ dosadíme antiizomorfní obrazy příslušných vektorů a forem, a výsledek komplexně sdružíme.

Ve spinorové algebře můžeme identifikovat „reálnou strukturu" – spinory, jež se působením operace sdružení nemění. Spinor typu $\begin{pmatrix} r & r \\ s & s \end{pmatrix}$ nazveme *hermitovský* právě tehdy, když $\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{\xi}}$.

Ukažme, že hermitovské spinory typu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ reprezentuje v dané spinové bázi $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ hermitovská matice 2×2. Pro dané $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \xi^{B\dot{Y}} \mathbf{s}_B^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{X}}}$ a libovolné $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}} = \psi_B \mathbf{s}_{\mathbf{A}}^B \in \mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ a $\boldsymbol{\varrho}_{\dot{\mathbf{X}}} = \varrho_{\dot{Y}} \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{X}}}^{\dot{Y}} \in \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{X}}}$ rozepišme podmínku hermitovskosti.

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varrho}_{\dot{\mathbf{X}}} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varrho}_{\dot{\mathbf{X}}} = \overline{\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \boldsymbol{\varrho}_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\psi}_{\dot{\mathbf{X}}}}$$

Pomocí relací úplnosti přejdeme k souřadnicovému vyjádření:

$$\begin{aligned} \xi^{A\dot{X}} \psi_A \varrho_{\dot{X}} &= \overline{\xi^{A\dot{X}} \varrho_A \psi_{\dot{X}}} = \overline{\xi^{A\dot{X}}} \varrho_{\dot{A}} \psi_X, \text{ po přeznačení indexů} \\ \xi^{X\dot{A}} \varrho_{\dot{A}} \psi_X &= \overline{\xi^{A\dot{X}}} \varrho_{\dot{A}} \psi_X \quad \forall \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Rovnice $\xi^{X\dot{A}} = \overline{\xi^{A\dot{X}}} \quad A, X = 1, 2$ je složkovým vyjádřením hledané podmínky $\begin{pmatrix} \xi^{1\dot{1}} & \xi^{1\dot{2}} \\ \xi^{2\dot{1}} & \xi^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \equiv [\xi^{A\dot{X}}] = [\xi^{A\dot{X}}]^\dagger \equiv \begin{pmatrix} \xi^{1\dot{1}} & \xi^{1\dot{2}} \\ \xi^{2\dot{1}} & \xi^{2\dot{2}} \end{pmatrix}^\dagger$.

3.3 Korespondece tenzorů a hermitovských spinorů

V nadcházejícím oddíle poskládáme dohromady indicie posbírané v předchozích kapitolách. Východiskem ke konstrukci nakrytí $\Upsilon : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(1,3)_+$ byl izomorfismus čtyřvektorů a 2×2 hermitovských matic a není náhodou, že právě 2×2 hermitovské matice reprezentují hermitovské spinory ve spinové bázi.

Mostem, kterým hermitovské spinory a čtyřvektory spojíme budou *Infeld-van der Waerdenovy symboly* $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$. Podobně jako leží konce mostu na dvou různých březích, odkazují i indexy $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$ na dva různé světy – Minkowského prostor $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$ a spinorovou algebru $\mathbf{S}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$.

Stavět začneme nejprve abstraktně – shrnutím požadavků na $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ v definici *abstraktních Infeld-van der Waerdenových symbolů.* V souřádnicích následně ukážeme, že izomorfismus j z kapitoly 2 dané výchozí axiomy splňuje.

Definice – Infeld - van der Waerdenovy symboly.
Multilineární zobrazení $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$

$$\begin{array}{rrcl} \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}: & \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{S_A} \times \mathbf{S_{\dot{X}}} & \to & \mathbb{C} \\ & (\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\xi}_\mathbf{A}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{\dot{X}}}) & \mapsto & \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\xi}_\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{\dot{X}}} \in \mathbb{C} \end{array}$$

nazveme abstraktní Infeld - van der Waerdenovy symboly*, vyhovuje-li podmínkám:*

i. $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\xi}_\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{\dot{X}}} = \overline{\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{A}} \quad \forall\, \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\xi}_\mathbf{A} \in \mathbf{S_A}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{\dot{X}}} \in \mathbf{S_{\dot{X}}}$

ii. $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\left(-\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\right) = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}$

Z definice umožňují Infeld - van der Waerdenovy symboly $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ konvertovat čtyřvektory na kontravariantní spinory a naopak kovariantní spinory na čtyřformy.[7]

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} & \to & \mathbf{S}^{\mathbf{A\dot{X}}} \\ \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} & \mapsto & \mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}} := \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} \end{array} \tag{3.19}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S_{A\dot{X}}} & \to & \mathbf{V}_{\boldsymbol{\mu}} \\ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A\dot{X}}} & \mapsto & \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mu}} := -\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A\dot{X}}} \end{array} \tag{3.20}$$

Znaménko „–“ v (3.20) volíme z konvenčních důvodů. (Zhruba řečeno, Minkowského metrický tenzor – jako protějšek symplektického součinu – pak v souřadnicích vyjde η, a nikoliv $-\eta$.)

Podmínka (i) tvrdí, že spinor $\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ příslušející čtyřvektoru $\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}$ je hermitovský. Naopak forma $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\mu}}$ odpovídající *hermitovskému* spinoru $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A\dot{X}}}$ bude mít díky bodu (i) v libovolné duální bázi Minkowského prostoru *reálné* složky, neboť výsledkem její kontrakce s libovolným čtyřvektorem je reálné

[7]Princip, kterým hermitovké spinory na $\mathbf{S}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ a čtyřvektory na $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$ ztotožňujeme, nazývá slovenská terminologie půvabně *bilineárné spárenie.*

číslo. Vskutku: $\forall \mathbf{x}^{\mu} \in \mathbf{V}^{\mu} \quad \mathbf{x}^{\mu}\boldsymbol{\xi}_{\mu} = -\mathbf{x}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = -\overline{\mathbf{x}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}} = -\overline{\mathbf{x}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}} = \overline{\mathbf{x}^{\mu}\boldsymbol{\xi}_{\mu}}$.

Na spinorové algebře i na Minkowského prostoru lze zvyšovat a snižovat indexy. Díky definiční podmínce (ii) nezáleží na tom, na kterém z prostorů zvyšování, resp. snižování provádíme. [8] Dokažme, že snižovat indexy u čtyřvektorů můžeme ekvivalentě „oklikou přes spinový prostor“: $\mathbf{V}^{\mu} \to \mathbf{S}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \to \mathbf{S}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \to \mathbf{V}_{\mu}$. Vektor $\mathbf{v}^{\mu} \in \mathbf{V}^{\mu}$ zobrazíme na spinorový protějšek $\mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{v}^{\nu}$. Na spinorové algebře snížíme indexy pomocí symplektické formy: $\mathbf{v}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{B}\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\mathbf{v}^{\nu} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\mathbf{v}^{\nu}$, a přes Infeld - van der Waerdenovy symboly přejdeme zpátky na Minkowského prostor: $-\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\mathbf{v}^{\nu} = \boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\left(-\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\right)\mathbf{v}^{\nu} = \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}\mathbf{v}^{\nu} = \mathbf{v}_{\mu}$.

Nevyřešenou otázkou zatím zůstala konverze kontravariantních spinorů na čtyřvektory a čtyřforem na kovariantí spinory. Spuštěním spinorových indexů a zvýšením časoprostorového indexu u Infeld - van der Waerdenových symbolů

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} := \boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{B}\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}} = \boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}} \tag{3.21}$$

obdržíme zobrázení:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} &\to \mathbf{V}^{\mu} \\ \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} &\mapsto \boldsymbol{\xi}^{\mu} := -\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mu} &\to \mathbf{S}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} \\ \mathbf{v}_{\mu} &\mapsto \mathbf{v}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} := \boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{v}_{\mu} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dokažme, že zobrazení (3.22), resp. (3.23) jsou inverzní k (3.19), resp. (3.20), tj. platí:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\nu}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = -\boldsymbol{\delta}^{\nu}_{\mu} \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}} = -\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\boldsymbol{\delta}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{\mathbf{Y}}} \tag{3.25}$$

První identitu ověříme pomocí definiční podmínky (ii): $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\nu}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\eta}^{\nu\rho}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\rho}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}} = -\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}_{\rho}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}(-\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}})\boldsymbol{\eta}^{\nu\rho} = -\boldsymbol{\eta}_{\mu\rho}\boldsymbol{\eta}^{\nu\rho} = -\boldsymbol{\delta}^{\nu}_{\mu}$.

Výraz $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}$ snáze vyšetříme na Minkowského prostoru – po zúžení s $\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}$. Přechod na Minkowského prostor je ekvivalentní úpravou, neboť

[8] Po dodefinování spinorového ekvivalentu obecného tenzoru (3.26) uvidíme, že podmínka (ii) postuluje za protějšek Minkowského tenzoru $\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}$ spinor $-\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}$.

existuje inverze $-\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}$, jak jsme právě ukázali v (3.24). Postupnými úpravami nacházíme $\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}) = \boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}(\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}) = -\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{\delta}^{\mu}_{\nu} = -\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}} = \boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}(-\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{A}}_{\mathbf{B}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{\dot{X}}}_{\mathbf{\dot{Y}}})$.

Infeld - van der Waerdenovy symboly $\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}$ podléhají podmínce hermitovskosti analogické (i). Pro $\mathbf{v}_{\mu} \in \mathbf{V}_{\mu}$ a $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ upravme kontrakci $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}_{\mu}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}}} = \overline{\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{v}_{\mu}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{v}^{\nu}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{\dot{Y}}}}$
$= \boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{v}^{\nu}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{\dot{Y}}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{v}_{\mu}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}_{\mu}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}$, tj.

$$i.' \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}_{\mu}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}_{\mu}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}} \quad \forall\, \mathbf{v}_{\mu} \in \mathbf{V}_{\mu}, \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{\dot{X}}}$$

Analogickým rozborem jako u $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ zjistíme, že se i čtyřformy zobrazí na hermitovské spinory a naopak čtyřvektorové protějšky hermitovských spinorů jsou reálné.

Infeld - van der Waerdenovy symboly $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ a $\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}$ tak zprostředkovávají izomorfismus mezi kovariantními, resp. kontravariantními *hermitovskými* spinory a čtyřformami, resp. čtyřvektory.

Korespondenci mezi čtyřvektory a hermitovskými spinory přirozeně rozšíříme na obecný tenzor, resp. obecný hermitovský spinor.

$$\boldsymbol{\sigma}: \quad \mathbf{V}^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\mu_1\ldots\mu_s} \quad \leftrightarrow \quad \text{hermitovské spinory v } \mathbf{S}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_r}}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_s}}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_r}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_s}} = \\ &\quad = \boldsymbol{\sigma}_{\nu_1}{}^{\mathbf{A_1\dot{X}_1}}\ldots\boldsymbol{\sigma}_{\nu_r}{}^{\mathbf{A_r\dot{X}_r}}\boldsymbol{\sigma}^{\mu_1}{}_{\mathbf{B_1\dot{Y}_1}}\ldots\boldsymbol{\sigma}^{\mu_s}{}_{\mathbf{B_s\dot{Y}_s}}\mathbf{T}^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\mu_1\ldots\mu_s} \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\mu_1\ldots\mu_s} &= (-\boldsymbol{\sigma}^{\nu_1}{}_{\mathbf{A_1\dot{X}_1}})\ldots(-\boldsymbol{\sigma}^{\nu_r}{}_{\mathbf{A_r\dot{X}_r}}) \\ &\quad (-\boldsymbol{\sigma}_{\mu_1}{}^{\mathbf{B_1\dot{Y}_1}})\ldots(-\boldsymbol{\sigma}_{\mu_s}{}^{\mathbf{B_s\dot{Y}_s}})\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_r}}{}_{\mathbf{B_1\ldots B_s\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_s}} \end{aligned} \tag{3.27}$$

V tomto kontextu postuluje pomínka (ii) v definici Infeld - van der Waerdenových symbolů spinor $-\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}$ za protějšek Minkowského metrického tenzoru $\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}$. Symplektický součin díky tomu odpovídá Minkowského skalárnímu součinu: $\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}\mathbf{u}^{\mu}\mathbf{w}^{\nu} = \boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\left(-\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\right)\mathbf{u}^{\mu}\mathbf{w}^{\nu} =$
$-\,\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{u}^{\mu})(\boldsymbol{\sigma}_{\nu}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{w}^{\nu}) = -\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{w}^{\mathbf{B\dot{Y}}} = -\mathbf{u}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{w}^{\mathbf{B\dot{Y}}}$, tj. platí:

$$\mathbf{u}_{\mu}\mathbf{w}^{\mu} = -\mathbf{u}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}} \tag{3.28}$$

Konstrukce izomorfismu mezi hermitovskými spinory a tenzory pomocí Infeld - van der Waerdenových symbolů $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ vypadala doposud poměrně přesvědčivě a slibně, leč její vadou na kráse je, že nevíme, jestli multilineární zobrazení $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ vyhovující definičním podmínkám (*i.*) a (*ii.*) vůbec existuje. [9]

O kladné odpovědi se přesvědčíme v konkrétní bázi. Zvolme proto $\{\mathbf{e}_\nu^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\nu=0}^3$ ortonormální bázi ve $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$ (inerciální souřadný systém $\mathcal{S}$) a $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ spinovou bázi v $\mathbf{S}^{\mathbf{A}}$. Našim kandidátem na Infeld - van der Waerdenovy symboly $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} = \sigma_\nu{}^{B\dot{Y}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\mu}}^\nu \mathbf{s}_B^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{X}}}$ je izomorfismus z kapitoly 2 (2.6) s maticemi σ_μ definovanými ve vzorci (2.4):

$$\mu = 0, \dots, 3 \qquad [\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}] = \sigma_\mu \tag{3.29}$$

Úděl Infeld - van der Waerdenových symbolů propojovat Minkowského prostor a spinorovou algebru se prolíná do kombinovaného vektorovo - maticového souřadnicového vyjádření.

$$\begin{aligned}
[\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Dosazením relací úplnosti do libovolného ze vztahů pro konverzi hermitovských spinorů na tenzory (příp. tenzorů na spinory) se snadno přesvědčíme, že příslušné vzorce pro složky vypadají stejně, pouze nejsou tištěny tučně a přes stejné indexy se dle sumační konvence sčítá. Pro názornost uvažme formuli (3.19). Komponentu $v^{A\dot{X}}$ spinoru $\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}} = v^{B\dot{Y}} \mathbf{s}_B^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{X}}}$ vypočteme kontrakcí spinoru s prvky duální báze $\mathbf{s}_{\mathbf{B}}^A$ a $\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{Y}}}^{\dot{X}}$:

$$\begin{aligned}
v^{A\dot{X}} &= \mathbf{v}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \mathbf{s}_{\mathbf{B}}^A \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{Y}}}^{\dot{X}} = \boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{s}_{\mathbf{B}}^A \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{Y}}}^{\dot{X}} = \boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{v}^{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{s}_{\mathbf{B}}^A \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{Y}}}^{\dot{X}} \\
&= \boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\rho}}^\mu \mathbf{e}_\mu^{\boldsymbol{\nu}}) \mathbf{v}^{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{s}_{\mathbf{B}}^A \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{Y}}}^{\dot{X}} = (\mathbf{e}_\mu^{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \mathbf{s}_{\mathbf{B}}^A \mathbf{s}_{\dot{\mathbf{Y}}}^{\dot{X}})(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\rho}}^\mu \mathbf{v}^{\boldsymbol{\rho}}) = \sigma_\mu{}^{A\dot{X}} v^\mu
\end{aligned}$$

Matice $[v^{A\dot{X}}]$ je součtem reálných (komponenty v^μ) násobků hermitovských matic (σ_μ), a je proto hermitovská. Hermitovský je tudíž i odpovídající spinor $\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}}$. Jinými slovy definujeme-li složky $\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}$ dle (3.29), splníme první definiční podmínku Infeld - van der Waerdenových symbolů.

[9] Podobně by mohla být napadena existence samotného spinového prostoru. Snadno nahlédneme, že vektorový prostor $\mathbb{C}^2$ se symplektickým součinem definovaným pomocí determinantu (3.5) axiomům spinového prostoru dostojí.

I druhou definiční podmínku nám nezbyde než vyšetřovat ve složkách:

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}\sigma_\nu{}^{B\dot{Y}}\left(-\epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\right)=\eta_{\mu\nu}\qquad\qquad \mu,\nu=0\ldots3$$

Většina členů v sumaci na levé straně díky $[\epsilon_{AB}]=[\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}]=\epsilon$ (viz (3.17)) vymizí:

$$\eta_{\mu\nu}=-\sigma_\mu{}^{1\dot{1}}\sigma_\nu{}^{2\dot{2}}+\sigma_\mu{}^{1\dot{2}}\sigma_\nu{}^{2\dot{1}}+\sigma_\mu{}^{2\dot{1}}\sigma_\nu{}^{1\dot{2}}-\sigma_\mu{}^{2\dot{2}}\sigma_\nu{}^{1\dot{1}}$$

Vzhledem k symetrii obou stran rovnice vůči záměně $\mu\leftrightarrow\nu$ stačí vyšetřit pouze 10 složek $\mu\geq\nu$. Využijme dále toho, že matice $[\sigma_0{}^{A\dot{X}}]$ a $[\sigma_3^{A\dot{X}}]$ mají nenulové pouze diagonální složky, naopak $[\sigma_1{}^{A\dot{X}}]$ a $[\sigma_2^{A\dot{X}}]$ pouze složky mimodiagonální.

$$\eta_{\mu0}=-\sigma_\mu{}^{1\dot{1}}\sigma_0{}^{2\dot{2}}-\sigma_\mu{}^{2\dot{2}}\sigma_0{}^{1\dot{1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_\mu{}^{1\dot{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_\mu{}^{2\dot{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{Tr}\ [\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}]$$

Nenulové stopě se z matic $[\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}]$ těší pouze $[\sigma_0{}^{A\dot{X}}]$, $\ \mathrm{Tr}\ [\sigma_0{}^{A\dot{X}}]=\frac{2}{\sqrt{2}}$, a tedy $\eta_{00}=-1$, zatímco $\eta_{10}=\eta_{20}=\eta_{30}=0$.

$$\eta_{\mu1}=\sigma_\mu{}^{1\dot{2}}\sigma_1{}^{2\dot{1}}+\sigma_\mu{}^{2\dot{1}}\sigma_1{}^{1\dot{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_\mu{}^{1\dot{2}}+\sigma_\mu{}^{2\dot{1}}\right)$$

Z výše uvedeného plyne $\eta_{01}=\eta_{31}=0$, dále $\eta_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$ a $\eta_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=0$.

$$\eta_{\mu2}=\sigma_\mu{}^{1\dot{2}}\sigma_2{}^{2\dot{1}}+\sigma_\mu{}^{2\dot{1}}\sigma_2{}^{1\dot{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sigma_\mu{}^{1\dot{2}}-\sigma_\mu{}^{2\dot{1}}\right)$$

Opět zřejmě platí $\eta_{32}=0$ a $\eta_{22}=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=1$. Ověření definiční podmínky (*ii.*) dokončíme výpočtem $\eta_{33}=-\sigma_3{}^{1\dot{1}}\sigma_3{}^{2\dot{2}}-\sigma_3{}^{2\dot{2}}\sigma_3{}^{1\dot{1}}=-2\sigma_3{}^{1\dot{1}}\sigma_3{}^{2\dot{2}}$ $=-2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$.

Izomorfismus hermitovských spinorů a tenzorů je tím definitivně potvrzen.

Provedení důkazu existence Infeld - van der Waerdenových symbolů v konkrétních bázích $\{\mathbf{e}_\nu^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\nu=0}^3$ a $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$ tyto báze do jisté míry privileguje. Je otázkou pro následující odstavce, zda-li při změně báze zůstane symbolům $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ elegantní souřadnicové vyjádření podobné (3.29). Případně obecněji, co vůbec *změna báze* pro multilineární zobrazení „rozkročené mezi dva světy" znamená? Pro odpověď se vraťme do kapitoly 2 ke konstrukci nakrytí $\Upsilon : SL(2,\mathbb{C}) \to SO(1,3)_+$.

Hermitovskou matici $h \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{C})$ nyní nahlížíme jako souřadnicové vyjádření $h = [\xi^{A\dot{X}}]$ hermitovského spinoru $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \xi^{B\dot{Y}}\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{X}}} \in \mathbf{S}^{\dot{\mathbf{X}}}$ ve zvolené spinové bázi $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$. Složkový zápis konverze vektorů na spinory (3.19): $v^{A\dot{X}} = \sigma_\mu{}^{A\dot{X}}v^\mu$ zřejmě odpovídá zobrazení j^{-1} definovaném formulí (2.6), proto i v novém kabátě:

$$\left[v^{A\dot{X}}\right] = \begin{pmatrix} v^{1\dot{1}} & v^{1\dot{2}} \\ v^{2\dot{1}} & v^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v^0+v^3 & v^1-iv^2 \\ v^1+iv^2 & v^0-v^3 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Porovnáním přepočtu spinorů zpátky na vektory (3.22): $\xi^\mu = -\sigma^\mu{}_{A\dot{X}}\xi^{A\dot{X}}$ se zobrazením j definovaným formulí (2.7) uhodneme souřadnicové vyjádření Infeld - van der Waerdenových symbolů $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \sigma^\nu{}_{B\dot{Y}}\mathbf{e}_\nu^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{s}_{\mathbf{A}}^B\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{X}}}^{\dot{Y}}$.

(Ke stejnému výsledku samozřejmě vede i přímý výpočet z definice (3.21): $\sigma^\mu{}_{A\dot{X}} = \eta^{\mu\nu}\epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}\sigma_\nu{}^{B\dot{Y}}$.)

$$\begin{aligned} [\sigma^\mu{}_{A\dot{X}}] &= -[\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}] = -\sigma_\mu \qquad \mu = 0,1,3 \\ [\sigma^2{}_{A\dot{X}}] &= [\sigma_2{}^{A\dot{X}}] = \sigma_2 \end{aligned}$$

$$[\sigma^\mu{}_{A\dot{X}}] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

Klíčovým článkem v konstrukci nakrytí je zobrazení Y_G. Po připomenutí konvence značení $G = [G^A{}_B] = \overline{[G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}]}$ přepišme definici (2.10) do složek: $Y_G : \xi^{A\dot{X}} \mapsto G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\xi^{B\dot{Y}}$. Ideu nakrytí Υ_G – definice (2.12) – vystihuje následující diagram.

$$\begin{array}{ccc} v^\mu\mathbf{e}_\mu^{\boldsymbol{\alpha}} & \xrightarrow{\Lambda=\Upsilon_G} & (\Upsilon_G)^\mu{}_\nu v^\nu\mathbf{e}_\mu^{\boldsymbol{\alpha}} \\ {\scriptstyle v^{A\dot{X}}=\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}v^\mu}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \xi^\mu=-\sigma^\mu{}_{A\dot{X}}\xi^{A\dot{X}}} \\ \xi^{A\dot{X}}\mathbf{s}_A^{\mathbf{B}}\mathbf{s}_{\dot{X}}^{\dot{\mathbf{Y}}} & \xrightarrow{Y_G} & G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\xi^{B\dot{Y}}\mathbf{s}_A^{\mathbf{B}}\mathbf{s}_{\dot{X}}^{\dot{\mathbf{Y}}} \end{array}$$

Pro libovolný čtyřvektor $v^\mu \mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\alpha}}$, matici $G = [G^A{}_B] \in SL(2,\mathbb{C})$ a Lorentzovu transformaci $\Upsilon_G \in SO(1,3)_+$ zadanou vzorcem (2.13) je splněna rovnice: $(\Upsilon_G)^\mu{}_\nu v^\nu = -\sigma^\mu{}_{A\dot{X}} G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \sigma_\nu{}^{B\dot{Y}} v^\nu$. Dosazujeme-li za $\mathbf{v}^{\boldsymbol{\alpha}} = v^\mu \mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu$ postupně jednotlivé bázové vektory $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu$, zbavíme se závislosti na v^ν:

$$(\Upsilon_G)^\mu{}_\nu = -\sigma^\mu{}_{A\dot{X}} G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \sigma_\nu{}^{B\dot{Y}} \qquad \forall \mu,\nu = 0,\dots,3 \tag{3.32a}$$

Na obě strany rovnice (3.32a) nyní zapůsobíme symboly $\sigma_\rho{}^{A\dot{X}}$ a inverzní Lorentzovou transformací $(\Upsilon_G)_\lambda{}^\nu$. Po použití identity (3.24) pro složky, a následném přeznačení indexu λ za μ obdržíme:

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{X}} = G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} (\Upsilon_G)_\mu{}^\nu \sigma_\nu{}^{B\dot{Y}} \qquad \forall \mu,\nu = 0,\dots,3 \tag{3.32b}$$

Předpokládejme, že změně báze $\{\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_B\}_{B=1}^2 \xrightarrow{G} \{\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}{}_B\}_{B=1}^2$, $\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_B = G^A{}_B \mathbf{s}'^{\mathbf{C}}_A$, na spinovém prostoru odpovídá na Minkowského prostoročase změna báze $\{\mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu\}_{\mu=0}^3 \xrightarrow{\Upsilon_G} \{\mathbf{e}'^{\boldsymbol{\alpha}}{}_\mu\}_{\mu=0}^3$, $\mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu = (\Upsilon_G)^\nu{}_\mu \mathbf{e}'^{\boldsymbol{\alpha}}{}_\nu$. Příslušné duální báze spinového prostoru jsou spojeny $\mathbf{s}'^A_{\mathbf{C}} = G^A{}_B \mathbf{s}^B_{\mathbf{C}}$ a $\mathbf{s}'^{\dot{X}}_{\dot{\mathbf{Z}}} = G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \mathbf{s}^{\dot{Y}}_{\dot{\mathbf{Z}}}$, na Minkowského prostoročase platí $\mathbf{e}'^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu = (\Upsilon_G)_\mu{}^\nu \mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\nu$. Přepočtěme složky Infeld - van der Waerdenových symbolů do čárkovaných souřadnic.

$$\begin{aligned}
\sigma'_\mu{}^{A\dot{X}} &= \mathbf{s}'^A_{\mathbf{C}} \mathbf{s}'^{\dot{X}}_{\dot{\mathbf{Z}}} \mathbf{e}'^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}} = G^A{}_B \mathbf{s}^B_{\mathbf{C}} G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} \mathbf{s}^{\dot{Y}}_{\dot{\mathbf{Z}}} (\Upsilon_G)_\mu{}^\nu \mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\nu \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}} \\
&= G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} (\Upsilon_G)_\mu{}^\nu (\mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\nu \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}}{}^{\mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}} \mathbf{s}^B_{\mathbf{C}} \mathbf{s}^{\dot{Y}}_{\dot{\mathbf{Z}}}) = G^A{}_B G^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}} (\Upsilon_G)_\mu{}^\nu \sigma_\nu{}^{B\dot{Y}} \\
&= \sigma_\mu{}^{A\dot{X}}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Báze $\{\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_\nu\}_{\nu=0}^3$ a $\{\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_B\}_{B=1}^2$ zvolené v kapitole 2, potažmo v důkazu existence $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}}{}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$ nemají nikterak výsadní postavení. Infeld - van der Waerdenovy symboly nabývají stejných souřadnicových vyjádřeních $\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}$ (3.29) v každé dvojici asociované spinové a ortonormální báze. Změně báze $\{\mathbf{s}^{\mathbf{C}}_B\}_{B=1}^2 \xrightarrow{G} \{\mathbf{s}'^{\mathbf{C}}{}_B\}_{B=1}^2$ na spinovém prostoru odpovídá změna $\{\mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu\}_{\mu=0}^3 \xrightarrow{\Upsilon_G} \{\mathbf{e}'^{\boldsymbol{\alpha}}{}_\mu\}_{\mu=0}^3$ na Minkowského prostoročase. [10]

V aktivní interpretaci přiřazuje nakrytí Υ každé lineární transformaci spinového prostoru $\mathbf{G}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{B}} : \mathbf{S}^{\mathbf{A}} \to \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$, v nějaké spinové bázi zadané maticí

[10] Dovedeno do detailu, odpovídá ortonormální bázi $\{\mathbf{e}^{\boldsymbol{\alpha}}_\mu\}_{\mu=0}^3$ hned dvojice asociovaných spinových bází $\{\pm\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_B\}_{B=1}^2$. Snadno se přesvědčíme, že záměna $\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_B \to -\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_B$ (a tedy zároveň $\mathbf{s}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}} \to -\mathbf{s}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}}$) nezmění ani komponenty $\sigma_\mu{}^{A\dot{X}}$ ani $\left[v^{A\dot{X}}\right]$. Učiněné pozorování je ve shodě s dvouhodnotovostí nakrytí $\Upsilon_G = \Upsilon_{-G}$.

$G = [G^A{}_B] \in SL(2,\mathbb{C})$, Lorentzovu transformaci $\boldsymbol{\Upsilon}_G{}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}} : \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} \to \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$, v asociované bázi zadanou maticí $\Upsilon_G = [\Upsilon_G{}^\mu{}_\nu] \in SO(1,3)_+$.

$$\boldsymbol{\Upsilon}_G{}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{\nu}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{G}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{B}}\mathbf{G}^{\dot{\mathbf{X}}}{}_{\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\nu}}{}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \tag{3.32c}$$

Závěrem ukažme, kterak z obecné teorie plyne vyjádření čtyřintervalu vektoru pomocí determinantu matice příslušného spinorového ekvivalentu (2.8). Vyjděme z formule (3.28): $\boldsymbol{Q}(\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}} = -\mathbf{v}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}} = -v_{A\dot{X}}v^{A\dot{X}}$. Definici snižování indexů $\mathbf{v}_{\mathbf{A\dot{X}}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BA}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{v}^{\mathbf{B\dot{Y}}}$ přepíšeme nejprve do složek $v_{A\dot{X}} = \epsilon_{BA}\epsilon_{\dot{Y}\dot{X}}v^{B\dot{Y}} = -\epsilon_{AB}v^{B\dot{Y}}\epsilon_{\dot{Y}\dot{X}}$, a následně vypočteme v maticích $[v_{A\dot{X}}] = -[\epsilon_{AB}][v^{B\dot{Y}}][\epsilon_{\dot{Y}\dot{X}}]$.

$$\begin{aligned}
[v_{A\dot{X}}] &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^{1\dot{1}} & v^{1\dot{2}} \\ v^{2\dot{1}} & v^{2\dot{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v^{2\dot{2}} & -v^{2\dot{1}} \\ -v^{1\dot{2}} & v^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v^0 - v^3 & -v^1 - iv^2 \\ -v^1 + iv^2 & v^0 + v^3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Po dosazení výsledku (3.34) do formule pro čtyřinterval nacházíme $-v_{A\dot{X}}v^{A\dot{X}} = -\Big(v^{2\dot{2}}v^{1\dot{1}} + (-v^{2\dot{1}})v^{1\dot{2}} + (-v^{1\dot{2}})v^{2\dot{1}} + v^{1\dot{1}}v^{2\dot{2}}\Big) = -2\big(v^{1\dot{1}}v^{2\dot{2}} + - v^{1\dot{2}}v^{2\dot{1}}\big) = -2 \det\left[v^{A\dot{X}}\right]$, a tedy:

$$\boldsymbol{Q}(\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}) = -2 \det\left[v^{A\dot{X}}\right] \tag{3.35}$$

3.4 Aplikace spinorů na popis elektromagnetického pole

Speciální teorie relativity popisuje elektromagnetickou interakci prostřednictvím antisymetrického tenzoru $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\nu}}$. V následujícím oddíle ukážeme, jak korespondence mezi hermitovskými spinory a tenzory ve spojení s antisymetrií tenzoru emg. pole přirozeně vede k definici symetrického spinoru elektormagnetického pole $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{AB}}$. Jednoduchého tvaru spinorového ekvivalentu $\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}}$ následně využijeme k formulaci spinorové verze Lorentzovy síly a k vyřešení elementárního příkladu – pohybu testovací částice v konstantním elektrickém a magnetickém poli.

Spinor elektromagnetického pole $\phi_{\mathbf{AB}}$

Nechť $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ označuje antisymetrickou bilineární formu. Zkoumejme, jak se antisymetrie ($\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$) přenese z tenzoru na spinorový ekvivalent $\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}}$:

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\nu}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{\sigma}^{\nu}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\boldsymbol{F}_{\nu\mu} = -\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{Y}A\dot{X}}}$$

Spinor $\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}}$ proto můžeme přepsat do podoby:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} - \boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{Y}A\dot{X}}}) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} - \boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{X}A\dot{Y}}} + \boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{X}A\dot{Y}}} - \boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{Y}A\dot{X}}}) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} - \boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{X}A\dot{Y}}}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{X}A\dot{Y}}} - \boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{Y}A\dot{X}}}) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{B}})\boldsymbol{F}_{\mathbf{C\dot{X}D\dot{Y}}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{\dot{U}}}_{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{\dot{V}}}_{\mathbf{\dot{Y}}} - \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{\dot{V}}}_{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{\dot{U}}}_{\mathbf{\dot{Y}}})\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{U}A\dot{V}}}
\end{aligned}$$

Zde zúročíme vztah (3.9): $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{CD}} = \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{B}}$, dokázaný v oddíle 3.2.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{CD}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{C\dot{X}D\dot{Y}}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{U}\dot{V}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{U}A\dot{V}}} \\
&= \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}(\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{C\dot{X}}}{}^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{\dot{Y}}}) + \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}(\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{U}A}}{}^{\mathbf{\dot{U}}})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Definujme *spinor elektromagnetického pole* $\boldsymbol{\phi}_{AB}$ vztahem:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{AB}} := \frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{\dot{U}A}}{}^{\mathbf{\dot{U}}}{}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{U}\dot{V}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{U}B\dot{V}}} \tag{3.37}$$

Snadno ověříme jeho symetričnost (tj. $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{AB}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BA}}$):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{AB}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{U}\dot{V}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{U}B\dot{V}}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{V}\dot{U}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{V}A\dot{U}}} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{V}A}}{}^{\mathbf{\dot{V}}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{\dot{V}B}}{}^{\mathbf{\dot{V}}}{}_{\mathbf{A}} \qquad = \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BA}}
\end{aligned}$$

Operací sdružení dále dopočteme antiizomorfní obraz spinoru emg. pole:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}} = \overline{\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{XY}}} = \overline{\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{\dot{U}X}}{}^{\mathbf{\dot{U}}}{}_{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathbf{\dot{U}X}}{}^{\mathbf{\dot{U}}}{}_{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{U\dot{X}}}{}^{\mathbf{U}}{}_{\mathbf{\dot{Y}}} \tag{3.38}$$

Vraťmě se k rovnici (3.36). Spinorový ekvivalent libovolné antisymetrické bilineární formy $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ lze jednoznačně zapsat pomocí symetrického spinoru $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{AB}}$:

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}} \tag{3.39}$$

Podívejme se, jak vypadá korespondence mezi $\boldsymbol{F_{\mu\nu}}$ a $\boldsymbol{\phi_{AB}}$ ve složkách vůči dané ortonormální bázi $\{\mathbf{e}_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\alpha=0}^3$ a s ní asociované spinové bázi $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$.

Průběh elektromagnetického pole na prostoročasu je určen tenzorovým polem $\boldsymbol{F_{\mu\nu}}(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\rho}}) = F_{\alpha\beta}(x)\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\mu}}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\nu}}^\beta$, kde $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\rho}} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha^{\boldsymbol{\rho}}$ a $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (x^0, \vec{x})^T$. Pozorovatel v $\mathcal{S} \equiv \{\mathbf{e}_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\alpha=0}^3$ změří v čase x^0 v místě $\vec{x}$ intenzitu elektrického pole $\vec{E}(x)$ a magnetickou indukci $\vec{B}(x)$. Následně sestaví matici emg. pole ve tvaru:

$$[F_{\alpha\beta}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & -E^1(x) & -E^2(x) & -E^3(x) \\ E^1(x) & 0 & B^3(x) & -B^2(x) \\ E^2(x) & -B^3(x) & 0 & B^1(x) \\ E^3(x) & B^2(x) & -B^1(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Pro jednoduchost dále explicitně nevypisujeme závislost na bodě prostoročasu x.

Složky ϕ_{CD} spinoru $\boldsymbol{\phi_{AB}} = \phi_{CD}\mathbf{s}_{\mathbf{A}}^C \mathbf{s}_{\mathbf{B}}^D$ získáme z definice (3.37) dosazením konkrétní (s $\{\mathbf{e}_\alpha^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\alpha=0}^3$ asociované) báze $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$:

$$\begin{aligned}
\phi_{CD} &= \boldsymbol{\phi_{AB}}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{U}}\dot{\mathbf{V}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{V}}}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_{\dot{\mathbf{T}}}^{\dot{\mathbf{U}}}\boldsymbol{\delta}_{\dot{\mathbf{W}}}^{\dot{\mathbf{V}}}\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{W}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{V}}}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{T}}}^{\dot{X}}\mathbf{s}_{\dot{X}}^{\dot{\mathbf{U}}})(\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{W}}}^{\dot{Y}}\mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{V}}})\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{W}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{V}}}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}} \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{W}}}\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{T}}}^{\dot{X}}\mathbf{s}_{\dot{\mathbf{W}}}^{\dot{Y}})(\boldsymbol{F}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{V}}}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_{\dot{X}}^{\dot{\mathbf{U}}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}}\mathbf{s}_{\dot{Y}}^{\dot{\mathbf{V}}}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}}F_{C\dot{X}D\dot{Y}} = \frac{1}{2}\left(F_{C\dot{1}D\dot{2}} - F_{C\dot{2}D\dot{1}}\right)
\end{aligned}$$

Dopočtení souřadnicového vyjádření je již jen cvičením na Infeld-van der Waerdenovy symboly.

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \frac{1}{2}\left(F_{1\dot{1}1\dot{2}} - F_{1\dot{2}1\dot{1}}\right) = F_{1\dot{1}1\dot{2}} = \sigma^\mu{}_{1\dot{1}}\sigma^\nu{}_{1\dot{2}}F_{\mu\nu} \\
&= \sigma^0{}_{1\dot{1}}\sigma^1{}_{1\dot{2}}F_{01} + \sigma^0{}_{1\dot{1}}\sigma^2{}_{1\dot{2}}F_{02} + \sigma^3{}_{1\dot{1}}\sigma^1{}_{1\dot{2}}F_{31} + \sigma^3{}_{1\dot{1}}\sigma^2{}_{1\dot{2}}F_{32} \\
&= \frac{1}{2}\big(1(-E^1) + i(-E^2) + 1(B^2) + i(-B^1)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(B^2 - E^1 - i(E^2 + B^1)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{12} &= \phi_{21} = \frac{1}{2}\left(F_{1\dot{1}2\dot{2}} - F_{1\dot{2}2\dot{1}}\right) = \frac{1}{2}\left({\sigma^{\mu}}_{1\dot{1}}{\sigma^{\nu}}_{2\dot{2}} - {\sigma^{\mu}}_{1\dot{2}}{\sigma^{\nu}}_{2\dot{1}}\right) F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left({\sigma^0}_{1\dot{1}}{\sigma^3}_{2\dot{2}}F_{03} + {\sigma^3}_{1\dot{1}}{\sigma^0}_{2\dot{2}}F_{30} - {\sigma^1}_{1\dot{2}}{\sigma^2}_{2\dot{1}}F_{12} - {\sigma^2}_{1\dot{2}}{\sigma^1}_{2\dot{1}}F_{21}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((-1)(-E^3) + 1(E^3) - (-i)(B^3) - i(-B^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(E^3 + iB^3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{22} &= \frac{1}{2}\left(F_{2\dot{1}2\dot{2}} - F_{2\dot{2}2\dot{1}}\right) = F_{2\dot{1}2\dot{2}} = {\sigma^{\mu}}_{2\dot{1}}{\sigma^{\nu}}_{2\dot{2}}F_{\mu\nu} \\
&= {\sigma^1}_{2\dot{1}}{\sigma^0}_{2\dot{2}}F_{10} + {\sigma^1}_{2\dot{1}}{\sigma^3}_{2\dot{2}}F_{13} + {\sigma^2}_{2\dot{1}}{\sigma^0}_{2\dot{2}}F_{20} + {\sigma^2}_{2\dot{1}}{\sigma^3}_{2\dot{2}}F_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(1(E^1) + (-1)(-B^2) + (-i)(E^2) + i(B^1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(B^2 + E^1 - i(E^2 - B^1)\right)
\end{aligned}$$

Spinor emg. pole odpovídající tenzoru $[F_{\alpha\beta}]$ (3.40) zastupuje v asociované spinové bázi matice $[\phi_{AB}]$.

$$[\phi_{AB}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B^2 - E^1 - i(E^2 + B^1) & E^3 + iB^3 \\ E^3 + iB^3 & B^2 + E^1 - i(E^2 - B^1) \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

Dynamika částic v elektromagnetickém poli

Před vlastním přepisem pohybové rovnice testovací částice v emg. poli do spinorů nejprve ve stručnosti shrneme dynamiku ve speciální teorii relativity.

Definujme *nabitou testovací částici* jako trojici $(q, m_0, \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t))$. Konstanty $q \in \mathbb{R}$, resp. $m_0 > 0$ značí *náboj*, resp. *klidovou hmotnost* částice. *Trajektorie – světočára* částice $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t)$ je časupodobná regulární křivka ve $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$, tj.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}} : (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}} \\
t \in (t_0, t_1) &\mapsto \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t) = \alpha^{\nu}(t)\mathbf{e}_{\nu}^{\boldsymbol{\mu}} \quad \text{a splňuje}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

1. $\alpha^{\nu}(t) \in \mathcal{C}^1(t_0, t_1) \quad \forall \nu = 0, \ldots, 3; \quad \forall \, \{\mathbf{e}_{\nu}^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\nu=0}^{3}$ bázi ve $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$
2. $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}} \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\nu}}(t)}{dt} \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t)}{dt} < 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1)$, kde

   derivaci $\frac{d\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t)}{dt}$ definujeme pomocí libovolné báze $\{\mathbf{e}_{\nu}^{\boldsymbol{\mu}}\}$ jako klasickou derivaci odpovídajících složek $\frac{d\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t)}{dt} := \frac{d\alpha^{\nu}(t)}{dt}\mathbf{e}_{\nu}^{\boldsymbol{\mu}}$.

Od obecného parametru t je díky zadané metrice (Minkowského tenzor) výhodné přejít k parametrizaci *vlastním časem* $\boldsymbol{\tau}$. [11]

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t)) \equiv \boldsymbol{\tau}(t) := \int_{t_0}^{t} \left| \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}} \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(t')}{dt'} \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\nu}}(t')}{dt'} \right|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t' \tag{3.43}$$

Poznamenejme, že výraz (3.43) nezávisí na volbě parametrizace.
Tečný vektor ke světočáře – *čtyřrychlost* $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}$ pak vychází normalizovaný. Platí

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau})) \equiv \mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) := \frac{\boldsymbol{d\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau})}{\boldsymbol{d\tau}} \tag{3.44}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\nu}} = -1 \tag{3.45}$$

Exkurz do dynamiky STR uzavírá *pohybová rovnice* [12]:

$$m_0 \frac{\boldsymbol{d}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau})}{\boldsymbol{d\tau}} = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) \tag{3.46}$$

Vektor $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) \equiv \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\tau}))$ nazveme *čtyřsíla*.

Protějšky objektů (3.42) až (3.46) ve spinorech vypočteme prostřednictvím izomorfismus daného Infeld - van der Waerdenovými symboly (3.19).

- *trajektorie ve spinorech*

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{A\dot{X}}}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}}{}^{\mathbf{A\dot{X}}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) \tag{3.47}$$

- *vlastní čas vyjádřený pomocí spinorů*

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \sqrt{2} \int_{t_0}^{t} \sqrt{\det\left[\frac{d}{dt'} \alpha^{A\dot{X}}(t')\right]} \, \mathrm{d}t' \tag{3.48}$$

Čtyřinterval přejde v determinant díky (3.35).

- *čtyřrychlost ve spinorech*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{X}}}(\boldsymbol{\tau}) &= \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}}{}^{\mathbf{A\dot{X}}} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}}{}^{\mathbf{A\dot{X}}} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\tau}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\tau}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}}{}^{\mathbf{A\dot{X}}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau}) \\ &= \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\tau}} \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{A\dot{X}}}(\boldsymbol{\tau}) \end{aligned} \tag{3.49}$$

---

[11] Jedná se o analogii parametrizace křivky prostřednictvím délky oblouku (vůči eukleidovskému metrickému tenzoru).

[12] Definujeme-li *čtyřhybnost* $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\mu}} = m_0 \mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}$, nabývá pohybová rovnice podoby $\frac{\boldsymbol{d}\mathbf{p}^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{d\tau}}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\tau})$.

Izomorfismus $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ se ve složkách realizuje jako lineární kombinace (srov. (2.6)). Pořadí $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ a derivace podle vlastního času lze proto zaměňovat.

- *normalizační podmínka*

$$\det\left[u^{A\dot{X}}\right] = \frac{1}{2} \quad \text{v libovolné spinové bázi } \{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\} \tag{3.50}$$

Poznamenejme, že normalizační podmínka nezávisí na zvolené *spinové* bázi.

- *čtyřsíla ve spinorech*

$$\boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}}} = \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}} \tag{3.51}$$

- *spinorová pohybová rovnice*

$$m_0 \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\tau}} \mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{X}}}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}}}(\boldsymbol{\tau}) \tag{3.52}$$

Korespondence hermitovských spinorů a tenzorů je vzájemně jednoznačná. Aplikace Infeld-van der Waerdenových symbolů $\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ na obě strany rovnice (3.46) je proto ekvivalentní úpravou.

Lorentzova síla

Do pohybové rovnice (3.52) budeme – vedeni snahou použít teorii spinorů k popisu pohybu v emg. poli – dosazovat Lorentzovu sílu $\boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}}}_{Lor}$. Její vyjádření ve spinorech je proto dalším krokem.

Speciální teorie relativity definuje Lorentzovu sílu jako kontrakci tenzoru emg. pole a čtyřrychlosti částice :

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}}_{Lor} = q \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} \tag{3.53}$$

Spinorový ekvivalent opět vypočteme přímou aplikací Infeld - van der Waerdenových symbolů (3.19) a dále pomocí identity (3.24).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}}}_{Lor} &= \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu}}_{Lor} = q \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} = -q \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} (-\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\nu}}) \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{u}_{\boldsymbol{\lambda}} \\
&= -q \boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} (\boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\lambda}}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}) \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} \mathbf{u}_{\boldsymbol{\lambda}} \\
&= -q (\boldsymbol{\sigma_\mu}^{\mathbf{A\dot{X}}} \boldsymbol{\sigma_\nu}^{\mathbf{B\dot{Y}}} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}}) (\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\lambda}}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}} \mathbf{u}_{\boldsymbol{\lambda}}) = -q \boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}} \mathbf{u}_{\mathbf{B\dot{Y}}}
\end{aligned}$$

Následuje gymnastika snižování a zvyšování indexů:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{Lor}^{\mathbf{A\dot{X}}} &= -q\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{CB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{Z}\dot{Y}}\boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= -q\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\epsilon}_{\dot{Y}\dot{Z}}\boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}B\dot{Y}}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= -q\boldsymbol{F}^{\mathbf{A\dot{X}}}{}_{\mathbf{C\dot{Z}}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= -q\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{F}_{\mathbf{B\dot{Y}C\dot{Z}}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= -q\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{\dot{Y}\dot{Z}}} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{Y}\dot{Z}}}\right)\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= -q\left((\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BC}})\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{\dot{Y}\dot{Z}}} + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BC}}(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{\dot{Y}\dot{Z}}})\right)\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= -q\left(-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{\dot{Y}\dot{Z}}} - \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BC}}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{\dot{Z}}}^{\mathbf{\dot{X}}}\right)\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{Z}}} \\
&= q\left(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{\dot{X}\dot{Y}}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{\dot{Y}\dot{Z}}}\mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{Z}}} + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BC}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{X}}}\right)
\end{aligned}$$

Lorentzovu sílu zapíšeme ve spinorech elegantně ve tvaru:

$$\boldsymbol{F}_{Lor}^{\mathbf{A\dot{X}}} = q\left(\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{\dot{X}}}{}_{\mathbf{\dot{Z}}}\mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{Z}}} + \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{C}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{X}}}\right) \tag{3.54}$$

Pohyb testovací částice v konstantním poli

S přepsanou Lorentzovou silou a pohybovou rovnicí jsme připraveni predikovat pohyb testovací částice v elektromagnetickém poli.

Diferenciální rovnicí určující pohyb částice je rovnice (viz (3.52) s pravou stranou (3.54)):

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d\tau}}\mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{X}}} = \frac{q}{m_0}\left(\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{\dot{X}}}{}_{\mathbf{\dot{Z}}}\mathbf{u}^{\mathbf{A\dot{Z}}} + \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{C}}\mathbf{u}^{\mathbf{C\dot{X}}}\right) \tag{3.55}$$

Předpokádejme, že pozorovatel v $\mathcal{S} \equiv \{\mathbf{e}_{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\alpha=0}^{3}$ pociťuje konstantní elektrické a magnetické pole ve směru osy x_3: $\vec{E} = (0,0,E)^T$ a $\vec{B} = (0,0,B)^T$. [13]

Elektromagnetickému poli odpovídá v $\mathcal{S}$ matice (viz souřadnicové vyjádření tenzoru emg. pole (3.40)):

$$[F_{\alpha\beta}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

[13] Řešený příklad je obecnější než se na první pohled může zdát. G. Naber ([1, str. 113]) ukazuje, že na řešený tvar (mg. a el. pole ve směru osy x_3) lze vhodnou volbou inerciálního souřadného systému $\mathcal{S}$ převést libovolné konstantní elektromagnetické pole, jež je v nějaké bázi zadané regulární antisymetrickou maticí $[F_{\alpha\beta}]$.

Příslušný spinor emg. pole je v asociované spinové bázi $\{\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_{B}\}_{B=1}^{2}$, resp. $\{\mathbf{s}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}}\}_{\dot{Y}=\dot{1}}^{\dot{2}}$ určen maticí:

$$[\phi_{AB}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & E+iB \\ E+iB & 0 \end{pmatrix}, \text{ resp.} \tag{3.57a}$$

$$[\phi_{\dot{X}\dot{Y}}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & E-iB \\ E-iB & 0 \end{pmatrix} \tag{3.57b}$$

Ke složkám vůči konkrétní spinové bázi přejdeme i v pohybové rovnici (3.55):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{d}{d\tau}}\mathbf{u}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} &= \frac{q}{m_0}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\phi}_{\dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{Z}}}\mathbf{u}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{Z}}} + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{BC}}\mathbf{u}^{\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}}\right) \\
\frac{d}{d\tau}u^{A\dot{X}} &= \frac{q}{m_0}\left(\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}}\phi_{\dot{Y}\dot{Z}}u^{A\dot{Z}} + \epsilon^{AB}\phi_{BC}u^{C\dot{X}}\right) \\
\frac{d}{d\tau}u^{A\dot{X}} &= \frac{q}{m_0}\left(u^{A\dot{Z}}\phi_{\dot{Z}\dot{Y}}\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}} + \epsilon^{AB}\phi_{BC}u^{C\dot{X}}\right) \\
&\qquad\qquad A = 1,2 \quad \dot{X} = \dot{1},\dot{2}
\end{aligned}$$

Pravou stranu upravíme nejsnáze v maticovém zápisu:

$$\frac{d}{d\tau}[u^{A\dot{X}}] = \frac{q}{m_0}\left([u^{A\dot{Z}}][\phi_{\dot{Z}\dot{Y}}][\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}}]^T + [\epsilon^{AB}][\phi_{BC}][u^{C\dot{X}}]\right) \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u^{1\dot{1}} & u^{1\dot{2}} \\ u^{2\dot{1}} & u^{2\dot{2}} \end{pmatrix} &= \frac{q}{2m_0}\left(\begin{pmatrix} u^{1\dot{1}} & u^{1\dot{2}} \\ u^{2\dot{1}} & u^{2\dot{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E-iB \\ E-iB & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T\right. \\
&\qquad \left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E+iB \\ E+iB & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{1\dot{1}} & u^{1\dot{2}} \\ u^{2\dot{1}} & u^{2\dot{2}} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u^{1\dot{1}} & u^{1\dot{2}} \\ u^{2\dot{1}} & u^{2\dot{2}} \end{pmatrix} &= \frac{q}{2m_0}\left((E-iB)\begin{pmatrix} u^{1\dot{1}} & -u^{1\dot{2}} \\ u^{2\dot{1}} & -u^{2\dot{2}} \end{pmatrix}\right. \\
&\qquad \left. +(E+iB)\begin{pmatrix} u^{1\dot{1}} & u^{1\dot{2}} \\ -u^{2\dot{1}} & -u^{2\dot{2}} \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{q}{m_0}\begin{pmatrix} Eu^{1\dot{1}} & iBu^{1\dot{2}} \\ -iBu^{2\dot{1}} & -Eu^{2\dot{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Všimeme si, že matice na pravé straně vyšla hermitovská. Jí odpovídajícím čtyřvektorem je samozřejmě Lorentzova síla.

Vypišme explicitně soustavu pohybových rovnic:

$$\frac{d}{d\tau}u^{1\dot{1}} = \frac{qE}{m_0}u^{1\dot{1}} \tag{3.59a}$$

$$\frac{d}{d\tau}u^{1\dot{2}} = i\frac{qB}{m_0}u^{1\dot{2}} \tag{3.59b}$$

$$\frac{d}{d\tau}u^{2\dot{1}} = -i\frac{qB}{m_0}u^{2\dot{1}} \tag{3.59c}$$

$$\frac{d}{d\tau}u^{2\dot{2}} = -\frac{qE}{m_0}u^{2\dot{2}} \tag{3.59d}$$

Řešení nahlédneme snadno. Integrační konstanty zvolíme tak, aby výsledek ležel na prostoru hermitovských matic a splňoval normalizační podmínku (3.50).

$$\left[u^{A\dot{X}}(\tau)\right] = \begin{pmatrix} Ae^{\frac{qE}{m_0}\tau} & Ze^{i\frac{qB}{m_0}\tau} \\ \bar{Z}e^{-i\frac{qB}{m_0}\tau} & Be^{-\frac{qE}{m_0}\tau} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A, B \in \mathbb{R} \quad Z \in \mathbb{C} \\ AB - |Z|^2 = \frac{1}{2} \end{matrix} \tag{3.60}$$

Ekvivalentně lze integrační konstanty zadat ve tvaru $A = -\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $B = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$ a $Z = \frac{-d+ic}{\sqrt{2}}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Význam na první pohled podivné volby doceníme po přepočtení čtyřrychlosti zpátky do vektorů ($u^\mu(\tau) = -\sigma^\mu{}_{A\dot{X}}u^{A\dot{X}}$):

$$[u^\mu(\tau)] = \begin{pmatrix} a\sinh\frac{qE}{m_0}\tau + b\cosh\frac{qE}{m_0}\tau \\ c\sin\frac{qB}{m_0}\tau + d\cos\frac{qB}{m_0}\tau \\ c\cos\frac{qB}{m_0}\tau - d\sin\frac{qB}{m_0}\tau \\ a\cosh\frac{qE}{m_0}\tau + b\sinh\frac{qE}{m_0}\tau \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ b^2 - a^2 - c^2 - d^2 = 1 \end{matrix} \tag{3.61}$$

Diskutujme pohyb testovací částice ve dvou speciálních případech – v samotném elektrickém a v samotném magnetickém poli.

Začněme u elektrického pole ($E \neq 0$ a $B = 0$).

Ve směrech $\mathbf{e}_1^{\boldsymbol{\mu}}$ a $\mathbf{e}_2^{\boldsymbol{\mu}}$ se testovací části pohybuje obecně rovnoměrně přímočaře. Pro jednoduchost zvolme počáteční rychlosti v těchto směrech nulové $c = d = 0$. Normalizační podmínku $b^2 - a^2 = 1$ pak splníme volbou $b = \cosh\frac{qE}{m_0}\tau_0$ a $a = -\sinh\frac{qE}{m_0}\tau_0$, $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Výraz pro čtyřrychlost se následně zjednoduší užitím součtových vzorců pro hyperbolický sinus a cosinus:

$$[u^\mu(\tau)] = \begin{pmatrix} \cosh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0) \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0) \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

$$\beta = \frac{\sinh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0)}{\cosh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0)} = \tanh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0)$$

Trajektorii $\alpha^\mu(\tau)$ dopočteme integrací čtyřrychlosti (3.62).

$$[\alpha^\mu(\tau)] = \begin{pmatrix} \frac{m_0}{qE} \sinh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0) + x_0^0 \\ x_0^1 \\ x_0^2 \\ \frac{m_0}{qE} \cosh \frac{qE}{m_0}(\tau - \tau_0) + x_0^3 \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

Samotné *elektrické pole* – konstantní síla působící ve směru pohybu tělesa – generuje tzv. *hyperbolický pohyb*. Testovací částice, z pohledu pozorovatele v $\mathcal{S}$, zrychluje ve směru elektrického pole. Její klasická rychlost měřená v $\mathcal{S}$ – β roste k rychlosti světla ($\lim_{\tau\to\infty} \beta = 1$).

V druhém případě naopak předpokládáme nenunlové pouze magnetické pole ($B \neq 0$ a $E = 0$). Testovací částice se nyní pohybuje rovnoměrně přímočaře ve směru $\mathbf{e}_3^{\boldsymbol{\mu}}$: $a = u_0^3$. Konstanty c a d zvolíme ve tvaru $c = -u_0^\varphi \cos \frac{qB}{m_0}\tau_0$ a $d = u_0^\varphi \sin \frac{qB}{m_0}\tau_0$, kde $\tau_0, u_0^\varphi \in \mathbb{R}$. Velikost zbylé integrační konstanty b je již dána normalizační podmínkou ((3.50), resp. (3.45)): $b = \sqrt{1 + (u_0^3)^2 + (u_0^\varphi)^2}$. Po provedení substitucí (a aplikaci součtových vzorců pro sinus a cosinus) přísluší čtyřrychlosti vektor:

$$[u^\mu(\tau)] = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + (u_0^3)^2 + (u_0^\varphi)^2} \\ -u_0^\varphi \sin \frac{qB}{m_0}(\tau - \tau_0) \\ -u_0^\varphi \cos \frac{qB}{m_0}(\tau - \tau_0) \\ u_0^3 \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

Trajektorii dopočteme opět integrací:

$$[\alpha^\mu(\tau)] = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + (u_0^3)^2 + (u_0^\varphi)^2}\; \tau + x_0^0 \\ u_0^\varphi \frac{m_0}{qB} \cos \frac{qB}{m_0}(\tau - \tau_0) + x_0^1 \\ -u_0^\varphi \frac{m_0}{qB} \sin \frac{qB}{m_0}(\tau - \tau_0) + x_0^2 \\ u_0^3 \tau + x_0^3 \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

Z pohledu pozorovatel v $\mathcal{S}$ se testovací částice pohybuje po šroubovici, jejíž osa je rovnoběžná s magnetickými indukčními čarami – směrem mg. indukce. Speciálně pro $u_0^3 = 0$ předpovídá relativistická teorie *kruhový pohyb nabité částice v homogenním magnetickém poli.* Právě ten je teoretickým východiskem hmotnostní spektrometrie.

Maxwellovy rovnice

Z teorie elektromagnetismu zbývá zmínit tzv. *polní rovnice* – podmínky, které omezují obecný tvar tenzoru $[F_{\alpha\beta}(x)]$, resp. $[\phi_{AB}([x^{C\dot{Z}}])]$ a svazují jej se zdroji pole (náboj, proud).

Přímým výpočtem lze ukázat ([2, str. 47]), že pro elektromagnetické pole ve vakuu mají *Maxwellovy rovnice* mimořádně jednoduchý tvar:

$$\nabla^{A\dot{X}}\phi_{AB} = 0 \qquad B = 1, 2 \;\; \dot{X} = \dot{1}, \dot{2} \tag{3.66}$$

Diferenciální operátor $\nabla^{A\dot{X}}$ definujeme jako spinorový ekvivalent parciální derivace:

$$\nabla^{A\dot{X}} := {\sigma_\mu}^{A\dot{X}}\partial^\mu \qquad\qquad \partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu, \text{ kde } \partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Soustavu rovnic (3.66) nazveme *rovnicí pro nehmotná pole o spinu $s = 1$* a pole ϕ_{AB}, jež jí řeší, *foton.*

3.5 Reprezentace spinových vektorů pomocí vlajek

V závěrečném oddíle se od praktických aplikací vrátíme zpátky k teorii samotné. Do světa spinorů jsme zatím nahlédli jen z části – objektům z všední zkušenosti jako *událost* (polohový vektor $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}$), *čtyřrychlost* (vektor $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mu}}$), či *elektromagnetické pole* (2-forma $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\nu}}$) odpovídá jen vybraná třída spinorů – spinory hermitovské. Cíl příštích řádků je proto nasnadě – najít vhodný „hmatatelný“ objekt prostoročasu, s nímž lze jednoznačně ztotožnit samotný spinový vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$.

Hlavička oddílu napovídá, že oněmi zástupci spinového prostoru na časoprostoru budou tzv. *vlajky.* Konstrukci reprezentace spinových vektorů proto nelze začít jinak než vztyčením *stožáru.*

Stožárem příslušejícím spinovému vektoru $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ nazveme čtyřvektor $\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$ definovaný jako vektorový protějšek hermitovského spinoru $\mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} := \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}$, tj.

$$\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} := -\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} \tag{3.67}$$

Ačkoliv názvosloví *stožár* evokuje vektor prostorupodobný, leží čtyřvektor $\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}$ na světelném kuželi. Nulovost čtyřintervalu $\boldsymbol{Q}(\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}})$ plyne z antisymetrie symplektického součinu: $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = \overline{\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{BA}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = 0$, a tedy $\boldsymbol{Q}(\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} = -\mathbf{v}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = -\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} = 0$.

Bližší představu získáme po zvolení pevného inerciálního systému $\mathcal{S} \equiv \{\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{\nu}\}^{3}_{\nu=0}$ a asociované spinové báze $\{\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_{B}\}^{2}_{B=1}$. Koeficienty rozvoje ξ^A spinového vektoru $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} = \xi^B\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_{B}$ zapíšeme jednoznačně ve tvaru:

$$[\xi^A] = \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} = e^{i\Delta}\begin{pmatrix}a^1\\ a^2e^{i\varphi}\end{pmatrix} \quad \Delta,\varphi \in \langle 0, 2\pi) \quad a^1, a^2 \geq 0 \tag{3.68}$$

Dále předpokládejme, že spinový vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ je nenulový, a tedy $a^1 + a^2 > 0$.

Odpovídající hermitovský spinor $\mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \xi^B\xi^{\dot{Y}}\mathbf{s}^{\mathbf{A}}_{B}\mathbf{s}^{\dot{\mathbf{X}}}_{\dot{Y}}$ zastupuje matice:

$$[v^{A\dot{X}}] = [\xi^A\xi^{\dot{X}}] = \begin{pmatrix}\xi^1\xi^{\dot{1}} & \xi^1\xi^{\dot{2}}\\ \xi^2\xi^{\dot{1}} & \xi^2\xi^{\dot{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a^1)^2 & a^1a^2e^{-i\varphi}\\ a^1a^2e^{i\varphi} & (a^2)^2\end{pmatrix} \tag{3.69}$$

Příslušný čtyřvektor – stožár – jednoznačně vyjádříme ve sférických souřadnicích (R, ϑ, φ):

$$[v^\mu] = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a^1)^2 + (a^2)^2\right)\\ \sqrt{2}a^1a^2\cos\varphi\\ \sqrt{2}a^1a^2\sin\varphi\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left((a^1)^2 - (a^2)^2\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\\ R\cos\varphi\sin\vartheta\\ R\sin\varphi\sin\vartheta\\ R\cos\vartheta\end{pmatrix}\ , \text{ kde} \tag{3.70}$$

$$R = \tfrac{(a^1)^2+(a^2)^2}{\sqrt{2}}$$
$$\vartheta = \arccos\left(\tfrac{(a^1)^2-(a^2)^2}{(a^1)^2+(a^2)^2}\right) = \arcsin\left(\tfrac{2a^1a^2}{(a^1)^2+(a^2)^2}\right)$$

Budoucí světelný kužel (časová souřadnice $v^0 > 0$) si umíme představit jako rozbíhající se kulovou světelnou vlnu – „záblesk žárovky“ v bodě $\vec{x} = 0$ v čase $x^0 = 0$ šířící se prostorem. Směr (ϑ, φ), do nějž foton vylétá – žerď vlajky míří – je určen pouze vzájemným poměrem $\frac{a^1}{a^2}$ a vzájemnou fází φ koeficientů rozvoje ξ^1 a ξ^2. Je proto stejný pro celou třídu spinových vektorů $z\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Výška stožáru – vzdálenost (např. počet světelných let), kterou foton od počátku urazil – je pak dána absolutní velikostí koeficientů rozvoje. Již z jednoduchého výpočtu $e^{i\Delta}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \to \mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = e^{i\Delta}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} e^{-i\Delta}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} = \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}$ plyne, že reprezentace pouze pomocí stožáru $\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}$ není s to rozlišit absolutní fázi Δ spinového vektoru.

Pomožme si proto vytažením vlajky do vhodného směru. Druhým objektem, který spinový vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ vedle hermitovského spinoru $\mathbf{v}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$ generuje, je symetrický spinor $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{AB}} := \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}$, resp. $\boldsymbol{\phi}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}} := \boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}}$. Jeho časoprostorovým protějškem je (viz (3.39) se zvýšenými indexy) antisymetrický bivektor $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} &= (-\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}})(-\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}})\boldsymbol{F}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}} \\ \boldsymbol{F}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}} &= \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}} + \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}} \end{aligned} \tag{3.71}$$

Výraz pro bivektor (3.71) upravíme trikem. Symplektická forma nabývá v libovolné spinové bázi souřadnicového vyjádření $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}} = \epsilon^{CD}\mathbf{s}_C^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_D^{\mathbf{B}} = \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} - \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}$. Za první bázový vektor zvolíme $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}} =: \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}$, a doplníme ho spinovým vektorem $\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}$ na spinovou bazi, tj. $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} = 1$. Existenci takového vektoru $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ dokážeme vzápětí, až budeme pracovat v konkrétní bázi. Prozatím pokračujme úpravou výrazu (3.71):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} &= \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\phi}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}} + \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{Y}}}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\Big((\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}})\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{Y}}} - \boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}})\Big) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\Big(\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}} - \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}} + \\ &\qquad\qquad + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{Y}}} - \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}}\Big) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\Big(\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{Y}}}) - \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}})\Big) \\ &= \Big(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\Big)\Big(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{Y}}})\Big) + \\ &\qquad\qquad - \Big(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}})\Big)\Big(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{Y}}}\Big) \end{aligned}$$

Ověřme, že spinor $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}} =: \mathbf{w}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$ je hermitovský, a tudíž reprezentovatelný pomocí čtyřvektoru. Pro libovolné $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}_{\mathbf{A}}$ platí: $\bar{\mathbf{w}}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}_{\dot{\mathbf{X}}} = \overline{\mathbf{w}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\alpha}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}} = \overline{(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}})\boldsymbol{\alpha}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}} = \overline{\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}}\,\overline{\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\alpha}_{\dot{\mathbf{X}}}} + \overline{\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}}\,\overline{\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\alpha}_{\dot{\mathbf{X}}}} = (\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\beta}_{\dot{\mathbf{X}}})(\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A}}) + (\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\beta}_{\dot{\mathbf{X}}})(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A}}) = (\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}})\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}_{\dot{\mathbf{X}}} = \mathbf{w}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta}_{\dot{\mathbf{X}}}$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} &= \left(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{w}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\right) - \left(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{v}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\right) \\
&= \left(-\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}}\right)\left(-\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{w}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\right) - \left(-\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}}\right)\left(-\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\nu}}{}_{\mathbf{B\dot{Y}}}\mathbf{v}^{\mathbf{B\dot{Y}}}\right) \\
&= \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}}
\end{aligned}
$$

Oklikou přes symetrický spinor $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{AB}}$ se nám podařilo přiřadit původnímu spinovému vektoru $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ další čtyřvektor: $\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}$. Konstrukce vektoru $\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}$ má ovšem jednu slabinu – nejednoznačnost. Původ nejednoznačnosti spočívá v doplňování spinového vektoru $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ na spinovou bázi. Nechť $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} = 1$ a $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}}_2^{\mathbf{B}} = 1$, pak $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{AB}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}(\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{s}}_2^{\mathbf{B}}) = 0$, a tedy podle bodu (*5.*) věty o základních vlastnostech spinového prostoru $\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{s}}_2^{\mathbf{A}} = \lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$. Proveďme proto v zavedení $\mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ záměnu $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} \to \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} + \lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$, a definujme tak:

$$
\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\mathbf{A\dot{X}}} &:= (\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} + \lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}})\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}} + \bar{\lambda}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}}) \qquad (3.72) \\
&= (\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}}) + (\lambda + \bar{\lambda})\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}} \\
&= \mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}} + (2\mathrm{Re}\ \lambda)\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}} = \mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}} + k\mathbf{v}^{\mathbf{A\dot{X}}} \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Konverze hermitovských spinorů na čtyřvektory je lineární. Přímka v hermitovských spinorech v $\mathbf{S}^{\mathbf{A\dot{X}}}$ se zobrazí opět na přímku ve $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\mu}}$.

$$
\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}} + k\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} \qquad k \in \mathbb{R} \qquad (3.73)
$$

Doplňujícím prostředkem k reprezentaci spinových vektorů, který dualita antisymetrických bivektorů a symetrických bispinorů nábízí, není vektor $\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}$, ale celá třída čtyřvektorů – přímka $\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\mathbf{A\dot{X}}}$. Snadno se přesvědčíme, že antisymetrický spinor $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\mu\nu}} = \mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}}$ se nezmění pokud vektor $\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}$ nahradíme kterýmkoliv jiným čtyřvektorem $\tilde{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}} \in \overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$.

Dvojici $(\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}, \overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}})$ nazveme *vlajkou* spinového vektoru $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$.[14]

Zkoumejme blíže geometrii dvojice $(\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}, \overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}})$. Přímka $\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$ je zřejmě eukleidovsky rovnoběžná se směrem stožáru $\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}$. Tím spíše překvapí, že z hlediska Minkowského sklalárního součinu platí kolmost: $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} = 0$ $\forall\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}} \in \overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$, neboť $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} + k\mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}}) = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} + k\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{v}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\nu}} = -\mathbf{v}_{\mathbf{A\dot{X}}}\mathbf{w}^{\mathbf{A\dot{X}}} = -\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{\dot{X}}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}}) = -\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\dot{X}}}) - (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}})\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{\dot{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{\dot{X}}} = 0$.

[14] Přímku $\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$ můžeme vnímat jako směr, do kterého je „vyvěšena vlajka“ – odtud také název *vlajka* samotný.

Analogickým výpočtem ukážeme $\boldsymbol{Q}(\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}) = 2 \quad \forall \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}} \in \overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$: $(\mathbf{w}_{\boldsymbol{\mu}}+k\mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}+k\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{w}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}+2k\mathbf{w}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}}+k^2\mathbf{v}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{v}^{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{w}_{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}} = -\mathbf{w}_{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{w}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = -(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{\dot{\mathbf{X}}})(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}) = -\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}} - \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}_{\dot{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} = -(-1)1 - 1(-1) = 2$. Z hlediska Minkowského metriky leží přímka $\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$ na průniku dvou ploch – ortogonálního doplňku ke směru stožáru a plochy konstatního invariantu $\boldsymbol{Q}(\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}}) = 2$. Úvahy zpřesníme v pevně zvolených bazích $\{\mathbf{e}_\nu^{\boldsymbol{\mu}}\}_{\nu=0}^3$ a s ní asociované $\{\mathbf{s}_B^{\mathbf{A}}\}_{B=1}^2$.

Postupujme ve výše uvedených krocích. Nejprve doplňme spinový vektor $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}$ (3.68) vhodným vektorem $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}} = \psi^B \mathbf{s}_B^{\mathbf{A}} \in \mathbf{S}^{\mathbf{A}}$ na spinovou bázi.

$$[\psi^A] = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\Delta}}{a^1 + a^2} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

Dále dopočteme komponenty $w^{A\dot{X}} = \psi^A \xi^{\dot{X}} + \xi^A \psi^{\dot{X}}$ spinoru $\mathbf{w}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}} = \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}^{\dot{\mathbf{X}}} + \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}^{\dot{\mathbf{X}}}$:

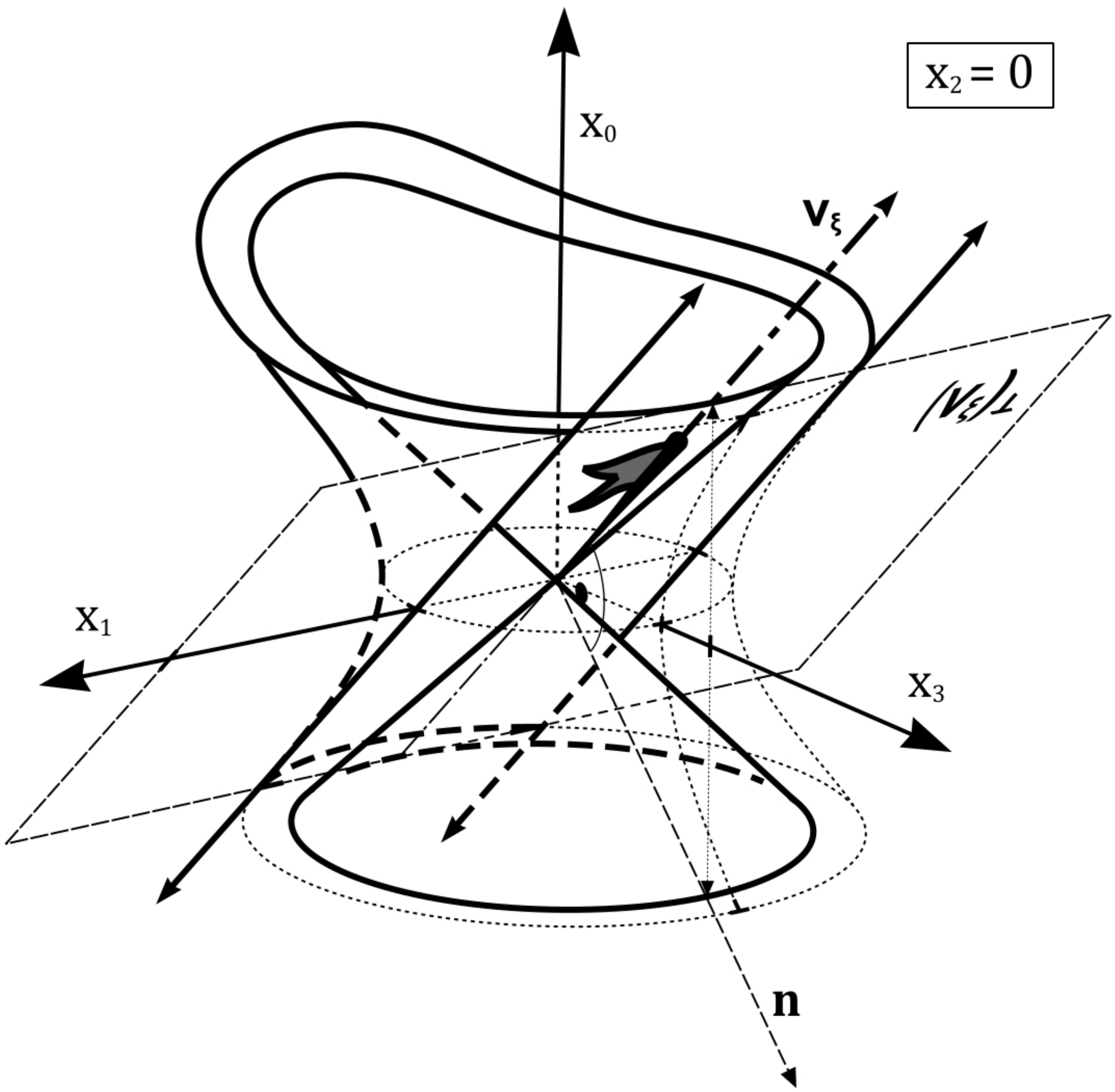
$$[w^{A\dot{X}}] = \frac{1}{a^1 + a^2} \begin{pmatrix} -2a^1 \cos(2\Delta + \varphi) & a^1 e^{i2\Delta} - a^2 e^{-i(2\Delta+2\varphi)} \\ a^1 e^{-i2\Delta} - a^2 e^{i(2\Delta+2\varphi)} & 2a^2 \cos(2\Delta + \varphi) \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Spinoru $\mathbf{w}^{\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}}$ odpovídá čtyřvektor

$$[w^\mu] = \frac{\sqrt{2}}{a^1 + a^2} \begin{pmatrix} (a^2 - a^1) \cos(2\Delta + \varphi) \\ a^1 \cos 2\Delta - a^2 \cos(2\Delta + 2\varphi) \\ -a^1 \sin 2\Delta - a^2 \sin(2\Delta + 2\varphi) \\ -(a^1 + a^2) \cos(2\Delta + \varphi) \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Pro úplnost uveďme i parametrickou rovnici přímky $\overleftrightarrow{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\mu}}$.

$$\begin{aligned} [\overleftrightarrow{w}^\mu] \quad = \quad & \frac{\sqrt{2}}{a^1 + a^2} \begin{pmatrix} (a^2 - a^1) \cos(2\Delta + \varphi) \\ a^1 \cos 2\Delta - a^2 \cos(2\Delta + 2\varphi) \\ -a^1 \sin 2\Delta - a^2 \sin(2\Delta + 2\varphi) \\ -(a^1 + a^2) \cos(2\Delta + \varphi) \end{pmatrix} + \\ & + k \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left((a^1)^2 + (a^2)^2\right) \\ \sqrt{2} a^1 a^2 \cos\varphi \\ \sqrt{2} a^1 a^2 \sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left((a^1)^2 - (a^2)^2\right) \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.77}$$



Obrázek 3.1: Reprezentace spinových vektorů pomocí vlajek

Dodatek

Přehled grup

$GL(n, \mathbb{R}(\mathbb{C})) = \{A$ **reálná (komplexní) matice** $n \times n \mid \mathbf{det}\ A \neq 0\}$
grupa reálných (komplexních) regulárních matic

$GL(\mathbf{V}) = \{\mathbf{A} : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V} \mid$ **lineární, invertovatelné**$\}$
grupa automorfismů $\mathbf{V}$

$O(1,3) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$
obecná Lorentzova grupa (maticově)

$O(1,3) = \{\boldsymbol{\Lambda} \in GL(\mathbf{V}) \mid \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{w})) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}\}$
obecná Lorentzova grupa (bezsouřadnicově)

$SO(1,3)_+ = \{\Lambda \in O(1,3) \mid {\Lambda^0}_0 \geq 1, \mathbf{det}\ \Lambda = 1\}$
(vlastní) Lorentzova grupa

$\mathcal{R} = \{\Lambda \in SO(1,3)_+ \mid {\Lambda^0}_0 = 1\}$
grupa rotací (STR)

$SO(n) = \{R \in GL(n, \mathbb{R}) \mid R^{-1} = R^T, \mathbf{det}\ R = 1\}$
grupa rotací

$SO(m,n) = \{B \in GL(m+n, \mathbb{R}) \mid B^T g_{m,n} B = g_{m,n}, \mathbf{det}\ B = 1,$ kde
$\mathbf{g_{m,n}} = (-\mathbb{1})_{m \times m} \oplus \mathbb{1}_{n \times n}\}$
grupa zachovávající metriku signatury (m,n)

$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \mathbf{det}\ A = 1\}$
grupa (komplexních) unimodulárních matic

$SU(n) = \{A \in SL(n, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}\}$
grupa unitárních matic

Literatura

[1] Naber G.: *The geometry of Minkowski space time*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] Krýsl, S.: Diplomová práce (Mgr.): *Rezoluce twistorů pro nehmotná pole o spinu 3/2*, ÚTF MFF UK, Praha, 2001

[3] Karger A.,Novák J.: *Prostorová kinematika a Lieovy grupy*, SNTL, Praha, 1978.