Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vladimír Holý

Testy v multinomickém rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky (32-KPMS)

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	obecná matematika (MOM)

Praha 2011

Rád bych poděkoval vedoucímu práce prof. Jiřímu Andělovi za odborný dohled, cenné rady a zapůjčení materiálů.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26.5.2011 Podpis autora

Název práce: Testy v multinomickém rozdělení

Autor: Vladimír Holý

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky (32-KPMS)

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

Abstrakt: V této práci jsou nejdříve popsány klasické testy dobré shody - Pearsonův χ^2 test a test založený na věrohodnostním poměru. Modernější metodou testování je rodina statistik založených na mocninných divergencích, která je zobecněním klasických statistik. Dalším zobecněním je rodina disparitních statistik, která kromě rodiny mocninných divergencí obsahuje také rodiny BWHD a BWCS. Dokáže se, že všechny tyto testové statistiky mají asymptoticky rozdělení χ^2. V programu R se pro jednotlivé testy spočte jejich přesná hladina a přesná síla. Dále se odvodí obecné momenty testových statistik a jejich konvergence k momentům χ^2 rozdělení. Na základě těchto porovnání se pak ukáže, jaké testové statistiky jsou vhodné pro testování dobré shody.

Klíčová slova: multinomické rozdělení, test dobré shody

Title: Tests in Multinomial Distribution

Author: Vladimír Holý

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics (32-KPMS)

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

Abstract: In this paper there are at first described classical goodness-of-fit tests - the Pearson's χ^2 test and the log likehood ratio test. The more modern method of testing is the family of statistics based on power divergence which is generalisation of classical statistics. Another type of generalisation is the family of disparity statistics which includes beside the family of power divergence also the families BWHD and BWCS. It is demonstrated that all these test statistics have an asymptotic χ^2 distribution. In the program R the exact level and exact power can be calculated for individual tests. Hereafter, moments of test statistics can be derived. On the basis of these comparisons there will be shown which test statistics are the most suitable for the goodness-of-fit tests.

Keywords: multinomial distribution, test of fit

Obsah

Úvod **2**

1 Základní poznatky **3**
1.1 Multinomické rozdělení 3
1.2 Princip testu dobré shody 5

2 Testové statistiky **6**
2.1 Pearsonova statistika 6
2.2 Věrohodnostní poměr 7
2.3 Mocninné divergence 7
2.4 Disparita 11
2.5 Přehled statistik 16

3 Porovnání testů **17**
3.1 Přesná hladina testů 17
3.2 Síla testů 19
3.3 Momenty testů 23

Závěr **28**

A Použité věty **29**

B Funkce v programu R **31**

Seznam použité literatury **37**

Seznam tabulek **38**

Seznam obrázků **39**

Úvod

Testy v multinomickém rozdělení (neboli testy dobré shody) se používají k ověření, zda má náhodná veličina určité předem dané rozdělení, nebo k ověření nezávislosti v kontingenčních tabulkách. Testy dobré shody jsou založeny na tom, že se z náhodné veličiny mající multinomické rozdělení vypočítá statistika, která má asymptoticky rozdělení χ^2. Po dlouhou dobu se používala pouze Pearsonova χ^2 statistika představená roku 1900 v článku [9] a statistika založená na věrohodnostním poměru. Později ale statistik, které se dají použít k testování dobré shody, přibylo.

V roce 1984 Cressie a Read představili v článku [3] rodinu testových statistik založenou na mocninných divergencích I^λ, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr. Tato třída testových statistik zobecňuje jak Pearsonovu χ^2 statistiku ($\lambda = 1$) a statistiku založenou na věrohodnostním poměru ($\lambda = 0$), tak i další méně používané statistiky jako Freeman-Tukeyovu statistiku ($\lambda = -\frac{1}{2}$), Neymanovu modifikovanou χ^2 statistiku ($\lambda = -2$) a statistiku založenou na modifikovaném poměru věrohodností ($\lambda = -1$). Cressie a Read jednotlivé statistiky porovnali a zjistili, že nejlepší vlastnosti má statistika $\lambda = \frac{2}{3}$.

Další zobecnění statistik navrhli roku 1994 Basu a Sarkar v článku [2]. Jedná se o tzv. disparitní testové statistiky. Tato třída obsahuje rodinu mocninných divergencí a rodiny BWHD a BWCS, které představil Lindsay v rukopise [7]. Tyto rodiny Basu a Sarkar podrobněji zkoumali podobným způsobem jako Cressie a Read rodinu mocninných divergencí.

V této práci nejdříve přiblížíme multinomické rozdělení (viz část 1.1) a základní princip testů dobré shody (viz část 1.2). Dále popíšeme jednotlivé statistiky a dokážeme, že všechny asymptoticky konvergují k χ^2 rozdělení (viz kapitola 2). Nakonec se pokusíme určit, jaké testové statistiky jsou nejvhodnější (viz kapitola 3) na základě těchto kritérií:

1. Rozdíl mezi hladinou testu použitou při testování pomocí χ^2 rozdělení (které je pouze asymptotické) a skutečnou hladinou testu vypočítanou ze všech možných kombinací vektorů četností (viz část 3.1).

2. Přesná síla testu (pravděpodobnost, že nenastane chyba druhého druhu) při přesné hladině testu (viz část 3.2).

3. Rychlost konvergence obecných momentů statistik k momentům χ^2 rozdělení (viz část 3.3).

Přesnou hladinu testů a sílu testů počítáme pomocí programu R. Ten ovšem obsahuje pouze funkci pro výpočet Pearsonova testu, a tak je třeba funkci pro výpočet obecnějších statistik naprogramovat (viz dodatek B).

1. Základní poznatky

1.1 Multinomické rozdělení

Multinomické rozdělení $\mathsf{M}(n, p_1, \dots, p_k)$ je rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)'$, který nabývá hodnot $(x_1, \dots, x_k)'$ s pravděpodobností

$$\mathsf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \tag{1.1}$$

pro

$$x_i = 0, 1, \dots, n \ (i = 1, \dots, k); \qquad x_1 + \dots + x_k = n,$$

kde

$$0 < p_i < 1 \ (i = 1, \dots, k); \qquad p_1 + \dots + p_k = 1.$$

Věta 1.1 (o marginálním rozdělení)**.** *Nechť* $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{M}(n, p_1, \dots, p_k)$ *a* $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, 2 \dots, k\}$. *Pak marginální rozdělení veličin* $X_{i_1}, \dots, X_{i_r}$ *je*

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_r} = x_{i_r}) \\ &= \frac{n!}{x_{i_1}! \dots x_{i_r}! (n - x_{i_1} - \dots - x_{i_r})!} {p_{i_1}}^{x_{i_1}} \dots {p_{i_r}}^{x_{i_r}} (1 - p_{i_1} - \dots - p_{i_r})^{n - x_{i_1} - \dots - x_{i_r}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Důkaz. Počítáme pravděpodobnost, že $X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_r} = x_{i_r}$, zbylé veličiny zahrneme do jediné třídy. Jde tedy o $\mathsf{P}(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_r} = x_{i_r}, n - X_{i_1} \dots - X_{i_r} = n - x_{i_1} \dots - x_{i_r})$, což je opět multinomické rozdělení. Speciálně, jednorozměrné marginální rozdělení je binomické. □

Věta 1.2 (o střední hodnotě a varianční matici)**.** *Nechť* $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{M}(n, p_1, \dots, p_k)$. *Pak*

$$\mathsf{E}\boldsymbol{X} = (np_1, \dots, np_k)' \tag{1.3}$$

$$\mathsf{var}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \cdots & -np_1p_k \\ -np_2p_1 & np_2(1-p_2) & \cdots & -np_2p_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -np_kp_1 & -np_kp_2 & & np_k(1-p_k) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Označíme-li σ_{ij} *prvky matice* $\mathsf{var}\boldsymbol{X}$, *pak*

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} np_i(1-p_i) & \textit{pro } 1 \le i = j \le k, \\ -np_ip_j & \textit{pro } 1 \le i \ne j \le k. \end{cases}$$

Důkaz. Protože $X_i \sim \mathsf{Bi}(n, p_i)$, platí $\mathsf{E}X_i = np_i$ a $\mathsf{var}X_i = \sigma_{ii} = np_i(1-p_i)$ pro $1 \le i \le k$. Zbývá vypočítat $\mathsf{cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$ pro $1 \le i \ne j \le k$. Zaveďme náhodné veličiny ξ_{hi} tak, že

$$\xi_{hi} = \begin{cases} 1, & \text{když v } h\text{-tém výběru nastala } i\text{-tá možnost}, \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases}$$

Platí $\mathsf{E}\xi_{hi} = p_i$ a $X_i = \sum_{h=1}^n \xi_{hi}$. Pro $h \neq m$ jsou ξ_{hi} a ξ_{mj} nezávislé. Pro $i \neq j$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}(X_i, X_j) &= \mathsf{cov}\left(\sum_{h=1}^n \xi_{hi}, \sum_{m=1}^n \xi_{mj}\right) = \sum_{h=1}^n \sum_{m=1}^n \mathsf{cov}(\xi_{hi}, \xi_{mj}) \\
&= \sum_{h=1}^n \mathsf{cov}(\xi_{hi}, \xi_{hj}) = \sum_{h=1}^n \Big(\mathsf{E}(\xi_{hi}\xi_{hj}) - \mathsf{E}\xi_{hi} E\xi_{hj}\Big) \\
&= \sum_{h=1}^n \Big(\mathsf{E}(\xi_{hi}\xi_{hj}) - p_i p_j\Big) = -np_i p_j.
\end{aligned}$$

Vždy aspoň jedna z veličin ξ_{hi} a ξ_{hj} je rovna 0, tedy $\sum_{h=1}^n \mathsf{E}(\xi_{hi}\xi_{hj}) = 0$. $\square$

Maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{p}$

Odvozujeme maximálně věrohodný odhad parametrů v multinomickém rozdělení $\mathsf{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$. Nechť všechna x_i jsou kladná čísla. Definujme vektor $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)'$ vztahem

$$\boldsymbol{z} = \Big(\underbrace{\frac{np_1}{x_1}, \ldots, \frac{np_1}{x_1}}_{x_1}, \underbrace{\frac{np_2}{x_2}, \ldots, \frac{np_2}{x_2}}_{x_2}, \ldots, \underbrace{\frac{np_k}{x_k}, \ldots, \frac{np_k}{x_k}}_{x_k}\Big)'.$$

Dále vypočítáme aritmetický průměr $\bar{z}$ a geometrický průměr $\bar{z}_G$ ze složek $z_1, \ldots, z_n$. Platí

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{x_1} \frac{np_1}{x_1} + \sum_{i=1}^{x_2} \frac{np_2}{x_2} + \cdots + \sum_{i=1}^{x_k} \frac{np_k}{x_k}\right) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1, \\
\bar{z}_G &= \sqrt[n]{\left(\frac{np_1}{x_1}\right)^{x_1} \left(\frac{np_2}{x_2}\right)^{x_2} \cdots \left(\frac{np_k}{x_k}\right)^{x_k}}.
\end{aligned}$$

Z nerovnosti $\bar{z}_G \leq \bar{z}$ plyne

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left(\frac{np_1}{x_1}\right)^{x_1} \cdots \left(\frac{np_k}{x_k}\right)^{x_k}} &\leq 1, \\
p_1^{x_1} \ldots p_k^{x_k} &\leq \left(\frac{x_1}{n}\right)^{x_1} \cdots \left(\frac{x_k}{n}\right)^{x_k}.
\end{aligned}$$

Proto hodnoty $\hat{p}_i = \frac{x_i}{n}$, $i = 1 \ldots k$, maximalizují funkci $\mathsf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k)$.

1.2 Princip testu dobré shody

Postup při testu dobré shody lze popsat v několika krocích:

1. Mějme náhodnou veličinu Z (může být diskrétní i spojitá). Obor hodnot veličiny Z rozdělíme na k různých částí (neboli tříd). Čím více tříd zvolíme, tím přesnější test bude, musíme ale zachovat určité minimální četnosti v každé třídě.

2. Pro každou třídu se stanoví pravděpodobnost p_i, že veličina Z nabyde hodnoty z i-té třídy. Předpokládáme, že $p_i > 0$ pro $i = 1, \ldots, k$. Pravděpodobnosti p_i však mohou záviset na nějakém neznámém parametru $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)'$, kde $m < k - 1$. Pak je třeba vypočítat odhad $\hat{\boldsymbol{a}}$ parametru $\boldsymbol{a}$ a dále počítat s pravděpodobnostmi $p_i(\hat{\boldsymbol{a}})$.

3. Provede se n pokusů a spočte se vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$, kde X_i je počet pokusů, kdy veličina Z nabyla hodnoty z i-té třídy. Veličina $\boldsymbol{X}$ má tedy multinomické rozdělení $\mathsf{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$ a platí $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$.

4. Veličiny X_i se nazývají empirické četnosti a $e_i = np_i$ se nazývají očekávané (teoretické) četnosti. Označme $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_k)'$. Spočítáme statistiku $S(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e})$, která má asymptoticky rozdělení χ^2. Pokud jsou všechny p_i známé, počet stupňů volnosti χ^2 rozdělení je $k - 1$. Pokud $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_k)'$ závisí na parametru $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)'$, počet stupňů volnosti je $k - m - 1$. Hodnotu statistiky S porovnáme s kritickou hodnotou χ^2 rozdělení na dané hladině významnosti.

Test pomocí χ^2 je pouze asymptotický, a proto při malém rozsahu výběru n může být značně nepřesný. Dříve se uvádělo, že musí platit $e_i \geq 5$ pro $i = 1, \ldots, k$. V poslední době se v případě známých parametrů p_i používá Yarnoldovo kritérium, podle kterého stačí, aby platilo

$$e_i \geq 5q \quad \text{pro } i = 1, \ldots, k \text{ při } k \geq 3,$$

kde q je podíl tříd, pro něž platí $e_i < 5$.

Statistikám $S(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e})$ se věnuje následující kapitola.

2. Testové statistiky

2.1 Pearsonova statistika

Pearson v článku [9] definoval statistiku

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{e_i}, \tag{2.1}$$

pomocí které lze testovat hypotézu H_0, že skutečné hodnoty četností v multinomickém rozdělení jsou rovny $e_1, \ldots, e_k$ (tedy skutečné hodnoty pravděpodobností jsou rovny $p_1, \ldots, p_k$). Dále ukázal, že tato statistika má asymptoticky rozdělení χ^2.

Věta 2.1. *Nechť* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)' \sim \mathsf{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$. *Pak statistika* χ^2 *má při* $n \to \infty$ *asymptoticky rozdělení* χ^2_{k-1}.

Důkaz. Označme $\mathsf{E}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}$ a $\mathsf{var}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V} = (\sigma_{ij})$. Zaveďme náhodné veličiny ξ_{hi} tak, že

$$\xi_{hi} = \begin{cases} 1, & \text{když v } h\text{-tém výběru nastala } i\text{-tá možnost,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí

$$\boldsymbol{\xi}_h = (\xi_{h1}, \ldots, \xi_{hk})' \sim \mathsf{M}(1, p_1, \ldots, p_k),$$
$$\mathsf{E}\boldsymbol{\xi}_h = \boldsymbol{\mu}^1 = (p_1, \ldots, p_k)'.$$

Označíme-li σ^1_{ij} prvky matice $\mathsf{var}\boldsymbol{\xi}_h = \boldsymbol{V}^1$ pak

$$\sigma^1_{ij} = \begin{cases} p_i(1-p_i) & \text{pro } 1 \le i = j \le k, \\ -p_i p_j & \text{pro } 1 \le i \ne j \le k. \end{cases}$$

Tedy $\sigma_{ij} = n\sigma^1_{ij}$ a $\boldsymbol{V} = n\boldsymbol{V}^1$. Zaveďme náhodný vektor $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} = (X_1 - np_1, \ldots, X_k - np_k)'$. Platí $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\xi}_i$, a proto

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\mu}^1).$$

Podle věty A.1 má vektor $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\mu}^1)$ pro $n \to \infty$ asymptoticky rozdělení $\mathsf{N}(0, \boldsymbol{V}^1)$, náhodný vektor $\boldsymbol{Y}$ má tedy rozdělení $\mathsf{N}(0, n\boldsymbol{V}^1) = \mathsf{N}(0, \boldsymbol{V})$. Dále je třeba zjistit hodnost matice $\boldsymbol{V}$. Označme $\boldsymbol{u} = (\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_k})'$, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{D} = \mathsf{diag}\{\sqrt{np_1}, \ldots \sqrt{np_k}\}$. Protože $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = 1$, je matice $\boldsymbol{Q}$ idempotentní. Protože $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{DQD}$ a $\boldsymbol{D}$ je regulární, platí

$$\mathsf{h}(\boldsymbol{V}) = \mathsf{h}(\boldsymbol{DQD}) = \mathsf{h}(\boldsymbol{Q}) = \mathsf{Tr}(\boldsymbol{Q}) = \mathsf{Tr}\boldsymbol{I} - \mathsf{Tr}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = k - 1.$$

Zvolme $\boldsymbol{V}^- = \mathsf{diag}\{\frac{1}{np_1}, \ldots, \frac{1}{np_k}\} = \boldsymbol{D}^{-2}$ a ověříme, zda je pseudoinverzní. Platí

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^-\boldsymbol{V} = \boldsymbol{DQDD}^{-2}\boldsymbol{DQD} = \boldsymbol{DQ}^2\boldsymbol{D} = \boldsymbol{DQD} = \boldsymbol{V}.$$

Matice $\boldsymbol{V}^-$ je tedy skutečně pseudoinverzní matice k $\boldsymbol{V}$. Podle věty A.2 dostáváme, že $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{V}^-\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$ má asymptoticky rozdělení χ^2 o $\mathsf{h}(\boldsymbol{V}) = k - 1$ stupních volnosti. □

Pearsonova statistika bývá někdy označována X^2 místo χ^2 pro snadnější zápis na počítači.

2.2 Věrohodnostní poměr

Test věrohodnostním poměrem odvodíme následujícím způsobem. Protože $n \to \infty$, můžeme předpokládat, že všechna X_i jsou kladná. Nechť $\boldsymbol{\theta} = (p_1, \dots, p_{k-1})'$. Maximálně věrohodný odhad $\boldsymbol{\theta}$ je $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{k-1})'$, kde $\hat{p}_i = \frac{x_k}{n}$, $i = 1, \dots, k-1$. Budeme testovat hypotézu $H_0 : p_i = p_i^0$, $i = 1, \dots, k$, kde p_i^0 jsou kladná čísla splňující $\sum_{i=1}^k p_i^0 = 1$. Položme $\hat{p}_k = \frac{x_k}{n} = 1 - \hat{p}_1 - \dots - \hat{p}_{k-1}$. Označme $L(\boldsymbol{\theta})$ logaritmickou věrohodností funkci. Pak

$$L(\boldsymbol{\theta}_0) = \ln \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} + \sum_{i=1}^k X_i \ln p_i^0,$$

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \ln \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} + \sum_{i=1}^k X_i \ln \frac{X_i}{n},$$

$$2\Big(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L(\boldsymbol{\theta}_0)\Big) = 2\sum_{i=1}^k X_i \ln \frac{X_i}{np_i^0} = 2\sum_{i=1}^k X_i \ln \frac{X_i}{e_i}.$$

Test věrohodnostním poměrem je tedy založen na testové statistice

$$G^2 = 2\sum_{i=1}^k X_i \ln \frac{X_i}{e_i}. \tag{2.2}$$

Věta 2.2. *Nechť* $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)' \sim \mathsf{M}(n, p_1, \dots, p_k)$. *Pak statistika* G^2 *má při* $n \to \infty$ *asymptoticky rozdělení* χ^2_{k-1}.

Důkaz. Podle věty A.3 má statistika $2\Big(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L(\boldsymbol{\theta}_0)\Big) = 2\sum_{i=1}^k X_i \ln \frac{X_i}{e_i} = G^2$ za platnosti H_0 asymptoticky rozdělení χ^2_{k-1}. □

2.3 Mocninné divergence

Cressie a Read navrhli v článku [3] rodinu testových statistik založených na mocninných divergencích, která je zobecněním Pearsonovy statistiky i statistiky založené na věrohodnostním poměru. Rodina statistik založených na mocninných divergencích je definována jako

$$2nI^\lambda = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^k X_i \left(\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^\lambda - 1 \right), \tag{2.3}$$

kde $-\infty < \lambda < \infty$. Pro hodnoty $\lambda = -1$ a $\lambda = 0$ se $2nI^\lambda$ definují jako limity předchozího výrazu. Dále uvedeme některé významné hodnoty λ a jim příslušné statistiky.

Pearsonova χ^2 statistika

Pearsonova χ^2 statistika je rovna statistice z rodiny mocninných divergencí s parametrem $\lambda = 1$. Dosazením do vzorce (2.3) dostaneme

$$2nI^1 = \sum_{i=1}^k X_i \Big(\frac{X_i}{e_i} - 1\Big) = \sum_{i=1}^k \frac{X_i(X_i - e_i)}{e_i} = \sum_{i=1}^k \frac{X_i(X_i - e_i)}{e_i} - \sum_{i=1}^k \frac{e_i(X_i - e_i)}{e_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{e_i} = \chi^2.$$

Věrohodnostní poměr

Statistika založená na věrohodnostním poměru je rovna statistice z rodiny mocninných divergencí s parametrem $\lambda = 0$. Dosazením do vzorce (2.3) dostaneme

$$\lim_{\lambda \to 0} 2nI^{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} 2 \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i \left(\left(\frac{X_i}{e_i} \right)^{\lambda} - 1 \right)}{\lambda} = 2 \sum_{i=1}^{k} X_i \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left(\frac{X_i}{e_i} \right)^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{k} X_i \lim_{\lambda \to 0} \left(\left(\frac{X_i}{e_i} \right)^{\lambda} \ln \frac{X_i}{e_i} \right) = 2 \sum_{i=1}^{k} X_i \ln \frac{X_i}{e_i} = G^2.$$

Cressie-Readova statistika

Cressie-Readova statistika je statistika z rodiny mocninných divergencí s parametrem $\lambda = \frac{2}{3}$. Cressie a Read navrhli tuto statistiku v článku [3] a ukázali, že při malých četnostech má nejlepší vlastnosti. Statistika je dána vzorcem

$$2nI^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{5} \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i (X_i^{\frac{2}{3}} - e_i^{\frac{2}{3}})}{e_i^{\frac{2}{3}}}.$$

Freeman-Tukeyova statistika

Freeman-Tukeyova statistika je rovna statistice z rodiny mocninných divergencí s parametrem $\lambda = -\frac{1}{2}$. Freeman a Tukey navrhli tuto statistiku v článku [4]. Dosazením do vzorce (2.3) dostaneme

$$2nI^{-\frac{1}{2}} = -8 \sum_{i=1}^{k} X_i \left(\left(\frac{X_i}{e_i} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = 8 \sum_{i=1}^{k} (X_i - \sqrt{X_i e_i})$$

$$= 4 \sum_{i=1}^{k} (X_i - 2\sqrt{X_i e_i} + e_i) = 4 \sum_{i=1}^{k} (\sqrt{X_i} - \sqrt{e_i})^2 = T^2.$$

Neymanova modifikovaná χ^2 statistika

Neymanova modifikovaná χ^2 statistika je rovna statistice z rodiny mocninných divergencí s parametrem $\lambda = -2$. Neyman navrhl tuto statistiku v článku [8]. Dosazením do vzorce (2.3) dostaneme

$$2nI^{-2} = \sum_{i=1}^{k} X_i \left(\left(\frac{X_i}{e_i} \right)^{-2} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{e_i^2 - X_i^2}{X_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{e_i^2 - X_i^2}{X_i} + 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i}{X_i} (X_i - e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{X_i} = NM^2.$$

Modifikovaný věrohodnostní poměr

Statistika založená na modifikovaném věrohodnostním poměru je rovna statistice z rodiny mocninných divergencí s parametrem $\lambda = -1$. Gokhale a Kullback navrhli tuto statistiku v článku [5]. Dosazením do vzorce (2.3) dostaneme

$$\lim_{\lambda\to-1} 2nI^\lambda = -\lim_{\lambda\to-1} 2\frac{\sum_{i=1}^k X_i\left(\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^\lambda - 1\right)}{\lambda+1} = -2\sum_{i=1}^k X_i \lim_{\lambda\to-1}\frac{\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^\lambda - 1}{\lambda+1}$$
$$= -2\sum_{i=1}^k X_i \lim_{\lambda\to-1}\left(\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^\lambda \ln\frac{X_i}{e_i}\right) = 2\sum_{i=1}^k e_i \ln\frac{e_i}{X_i} = GM^2.$$

Je třeba poznamenat, že pro hodnoty $\lambda < -1$ v případě, že nějaká složka vektoru empirických četností je nulová, statistika $2nI^\lambda$ nabývá hodnoty ∞ a hypotéza se tedy vždy zamítá. Podobně pro hodnotu $\lambda = -1$ se může ve statistice $2nI^{-1}$ objevit výraz $0\ln(0)$, který je definován jako 0. Pro tyto situace je lepší používat hodnoty $\lambda > -1$. Dále dokážeme, že statistiky $2nI^\lambda$ mají asymptoticky rozdělení χ^2. Nejdříve však dokážeme pomocnou větu, kterou pak využijeme v důkazu asymptotického rozdělení statistik $2nI^\lambda$.

Věta 2.3. *Veličina* $\sqrt{n}\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right)$ *je* $O_P(1)$ *pro* $i = 1, \dots, k$.

Důkaz. Veličina Y_n je $O_P(1)$, pokud posloupnost $Y_1, Y_2, \dots$ je omezená v pravděpodobnosti, tedy

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N: \quad P(|Y_n| > M) < \epsilon. \tag{2.4}$$

V našem případě je $Y_n = \sqrt{n}\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right)$. Dostáváme

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{X_i}{e_i} - 1\right| > M\right) = \int_{M^{-1}\sqrt{n}\left|\frac{X_i}{e_i}-1\right|>1} \mathsf{dP} \le \int \frac{n}{M^2}\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right)^2 \mathsf{dP}$$
$$= \frac{n}{M^2}\mathsf{var}\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right) = \frac{n}{M^2}\frac{1}{(np_i)^2}np_i(1-p_i)$$
$$= \frac{1}{M^2}\frac{1-p_i}{p_i}.$$

Pravděpodobnost $P(|Y_n| > M)$ je menší než ϵ pro $M > \sqrt{\frac{1-p_i}{p_i}\frac{1}{\epsilon}}$, tvrzení (2.4) tedy platí a věta je dokázána. □

Věta 2.4. *Nechť* $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)' \sim \mathsf{M}(n, p_1, \dots, p_k)$. *Pak statistika* $2nI^\lambda$ *má při* $n \to \infty$ *asymptoticky rozdělení* χ^2_{k-1}.

Důkaz. Je-li $\lambda \neq 0$ a $\lambda \neq -1$, pak

$$2nI^\lambda = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\sum_{i=1}^k e_i\frac{X_i}{e_i}\left(\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^\lambda - 1\right) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left(\sum_{i=1}^k e_i\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^{\lambda+1} - \sum_{i=1}^k X_i\right)$$
$$= \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left(\sum_{i=1}^k e_i\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^{\lambda+1} - n\right) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left(\sum_{i=1}^k e_i\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^{\lambda+1} - \sum_{i=1}^k e_i\right)$$
$$= \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\sum_{i=1}^k e_i\left(\left(\frac{X_i}{e_i}\right)^{\lambda+1} - 1\right) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\sum_{i=1}^k e_i\left(\left(1 + \frac{X_i - e_i}{e_i}\right)^{\lambda+1} - 1\right).$$

Užitím Taylorova vzorce $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{1}{2}r(r-1)x^2 + \frac{1}{6}r(r-1)(r-2)x^2 + \cdots$ dostaneme

$$2nI^\lambda = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^{k} e_i \Bigg[1 + (\lambda+1)\frac{X_i - e_i}{e_i} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\lambda\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 + O_P\Bigg(\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Bigg) - 1\Bigg].$$

Je-li $\lambda = 0$, pak

$$\lim_{\lambda\to 0} 2nI^\lambda = 2\sum_{i=1}^{k} X_i \ln\frac{X_i}{e_i} = 2\sum_{i=1}^{k} e_i\Big(1 + \frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)\ln\Big(1 + \frac{X_i - e_i}{e_i}\Big).$$

Užitím Taylorova vzorce $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0} 2nI^\lambda &= 2\sum_{i=1}^{k} e_i\Bigg[1 + \frac{X_i - e_i}{e_i}\Bigg]\Bigg[\frac{X_i - e_i}{e_i} - \frac{1}{2}\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 + O_P\Bigg(\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Bigg)\Bigg] \\ &= 2\sum_{i=1}^{k} e_i\Bigg[\frac{X_i - e_i}{e_i} + \frac{1}{2}\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 + O_P\Bigg(\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Bigg)\Bigg].\end{aligned}$$

Je-li $\lambda = -1$, pak

$$\lim_{\lambda\to -1} 2nI^\lambda = 2\sum_{i=1}^{k} e_i \ln\frac{e_i}{X_i} = -2\sum_{i=1}^{k} e_i \ln\frac{X_i}{e_i} = -2\sum_{i=1}^{k} e_i \ln\Big(1 + \frac{X_i - e_i}{e_i}\Big).$$

Užitím Taylorova vzorce $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ dostaneme

$$\lim_{\lambda\to -1} 2nI^\lambda = -2\sum_{i=1}^{k} e_i\Bigg[\frac{X_i - e_i}{e_i} - \frac{1}{2}\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 + O_P\Bigg(\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Bigg)\Bigg].$$

Dále máme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} e_i\frac{X_i - e_i}{e_i} &= \sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k} e_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{k} e_i\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{e_i} = \chi^2.\end{aligned}$$

Podle věty 2.4 platí

$$\sum_{i=1}^{k} e_i O_P\Bigg(\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Bigg) = \sum_{i=1}^{k} np_i O_P\Bigg(n^{-\frac{3}{2}}\Big(\sqrt{n}\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Bigg) = O_P(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Pro všechny λ tedy dostáváme

$$2nI^\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{e_i} + O_P(n^{-\frac{1}{2}}).$$

To znamená, že asymptotické rozdělení $2nI^\lambda$ je za H_0 stejné jako rozdělení statistiky χ^2, tedy χ^2_{k-1}. $\square$

2.4 Disparita

Basu a Sarkar navrhli v článku [2] rodinu disparitních testových statistik, která je zobecněním statistik založených na mocninných divergencích. Rodina disparitních statistik je definována jako

$$2n\rho_G = 2\sum_{i=1}^{k} G\Big(\frac{X_i}{e_i} - 1\Big)e_i, \tag{2.5}$$

kde G je ryze konvexní, $3\times$ diferencovatelná na $[-1,\infty)$, $G(0) = 0$, $G''(0) = 1$, $G'''(0)$ konečná a G''' spojitá v 0. Dále uvedeme jednotlivé třídy disparitních testových statistik generované funkcemi G.

Mocninné divergence

Třída statistik založená na mocninných divergencích je generovaná funkcí

$$G(\delta) = \frac{(\delta+1)^{\lambda+1} - 1}{\lambda(\lambda+1)}, \quad \text{kde } -\infty < \lambda < \infty.$$

Pro hodnoty $\lambda = -1$ a $\lambda = 0$ se funkce $G(\delta)$ definují jako limity předchozího výrazu. Pro $\lambda = -1$ platí

$$G(\delta) = -\ln(\delta+1)$$

a pro $\lambda = 0$ platí

$$G(\delta) = (\delta+1)\ln(\delta+1).$$

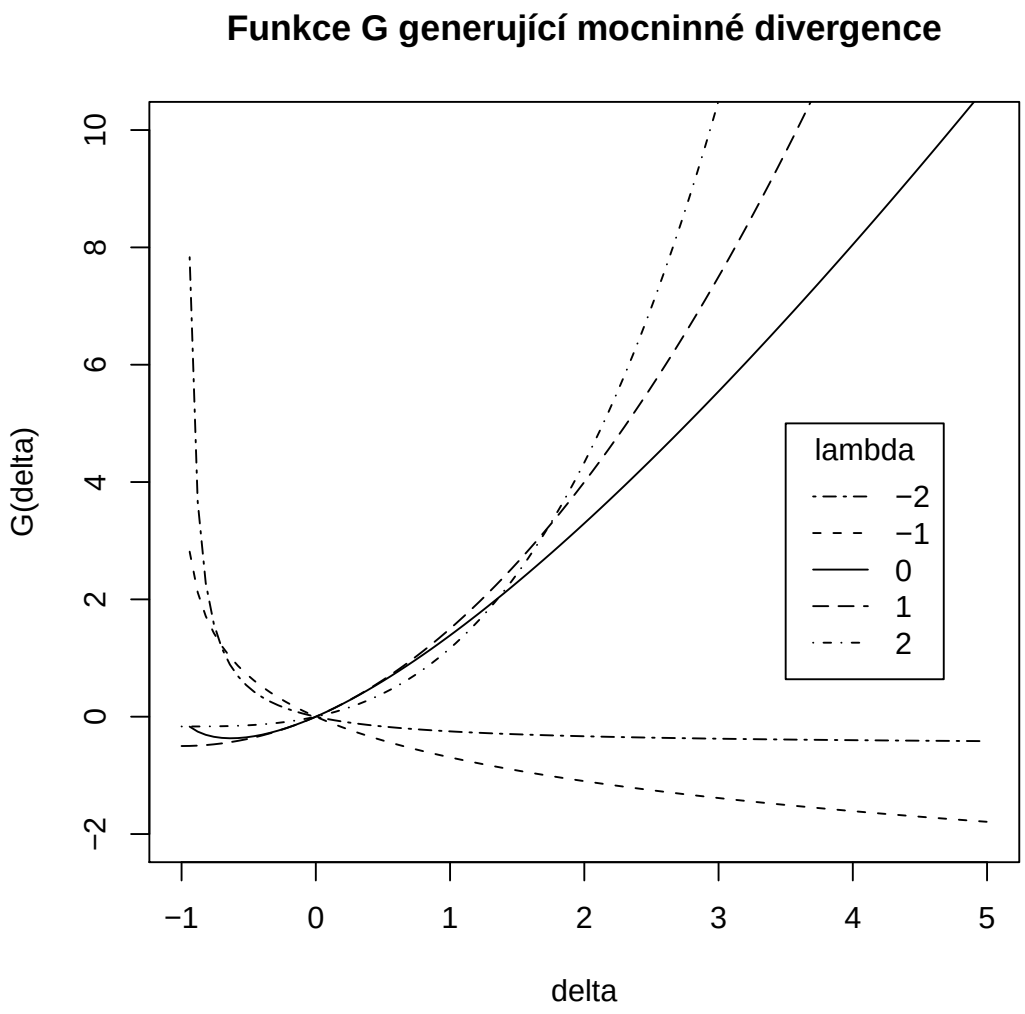
Derivace funkce G jsou

$$G'(\delta) = \frac{(\delta+1)^{\lambda}}{\lambda}, \qquad G''(\delta) = (\delta+1)^{\lambda-1}, \qquad G'''(\delta) = (\lambda-1)(\delta+1)^{\lambda-2}.$$

Pro $\delta \in (-1,\infty)$ platí $G''(\delta) > 0$ a funkce G je tedy ryze konvexní. Třída testových statistik má tvar

$$\begin{aligned}
2n\rho_G &= 2\sum_{i=1}^{k} \frac{(\frac{X_i}{e_i} - 1 + 1)^{\lambda+1} - 1}{\lambda(\lambda+1)} e_i = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} e_i\Big(\frac{X_i}{e_i}\Big)^{\lambda+1} - \sum_{i=1}^{k} e_i\Bigg) \\
&= \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big(\frac{X_i}{e_i}\Big)^{\lambda} - n\Bigg) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big(\frac{X_i}{e_i}\Big)^{\lambda} - \sum_{i=1}^{k} X_i\Bigg) \\
&= \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\sum_{i=1}^{k} X_i\Bigg(\Big(\frac{X_i}{e_i}\Big)^{\lambda} - 1\Bigg) = 2nI^{\lambda}.
\end{aligned}$$

Obrázek 2.1: Graf funkce G, která generuje testy založené na mocninných divergencích.



Blended weight Hellinger distance

Třída statistik založená na Blended weight Hellinger distance (dále jen BWHD) je generovaná funkcí

$$G(\delta) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta}{\alpha\sqrt{\delta+1}+1-\alpha}\Big)^2, \quad \text{kde } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Derivace funkce G jsou

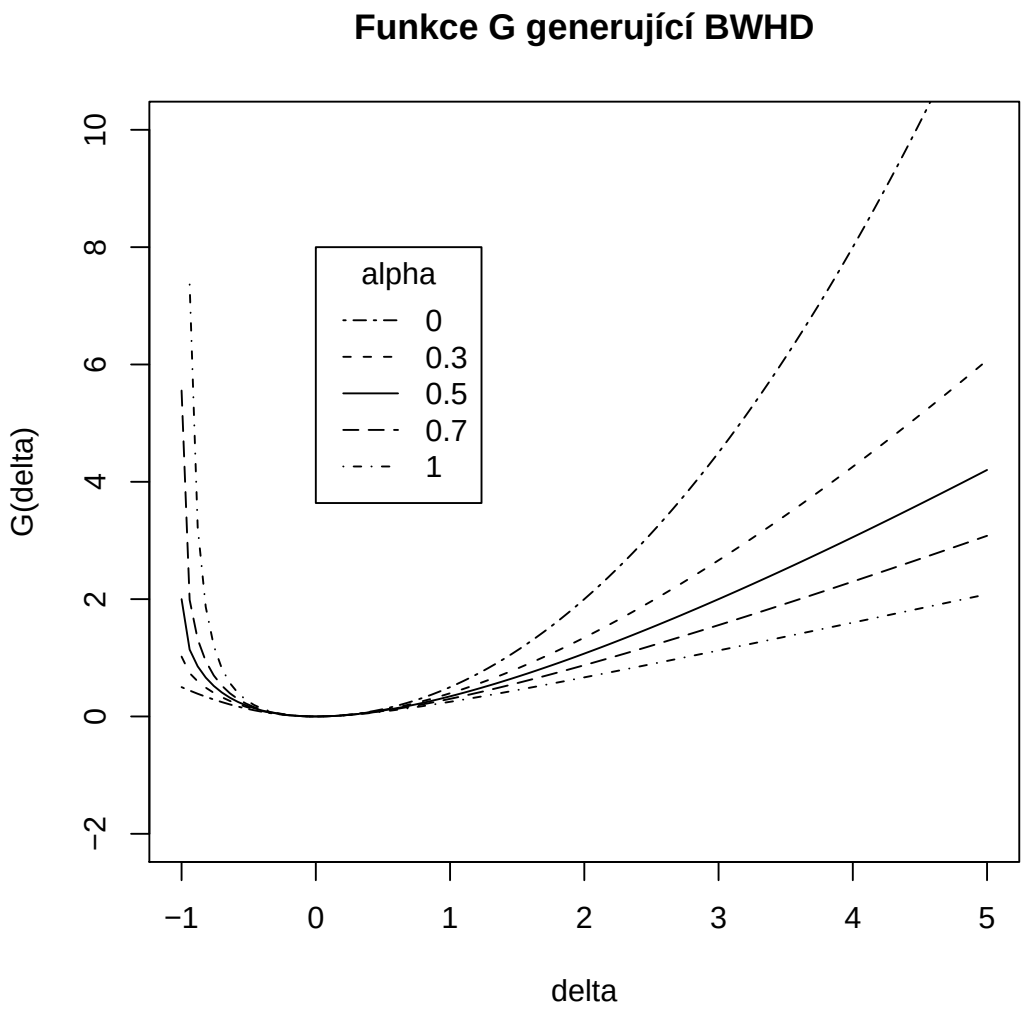
$$G(\delta)' = \frac{\delta\Big(\sqrt{\delta+1}(\alpha\delta+2\alpha)+2(1-\alpha)(\delta+1)\Big)}{2(\delta+1)(\alpha\sqrt{\delta+1}+1-\alpha)^3}$$

$$G(\delta)'' = \frac{2\alpha-(\alpha-1)^2\delta^2-\alpha^2(\delta+2)-2(\alpha-1)^2\delta-1}{(\delta+1)^2(\alpha\sqrt{\delta+1}+1-\alpha)^4} + \frac{(\alpha^2-\alpha)\sqrt{\delta+1}(\delta^2+8\delta+8)}{4(\delta+1)^2(\alpha\sqrt{\delta+1}+1-\alpha)^4}$$

Pro $\delta \in (-1, \infty)$ platí $G''(\delta) > 0$ a funkce G je tedy ryze konvexní. Třída testových statistik má tvar

$$2n\rho_G = 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{X_i}{e_i} - 1}{\alpha\sqrt{\frac{X_i}{e_i} - 1 + 1} + 1 - \alpha}\Big)^2 e_i = \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{e_i}{\sqrt{e_i}}\frac{\frac{X_i}{e_i} - 1}{\alpha\sqrt{\frac{X_i}{e_i}} + 1 - \alpha}\Big)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{X_i - e_i}{\alpha\sqrt{X_i} + (1-\alpha)\sqrt{e_i}}\Big)^2 = 2nBWHD_\alpha.$$

Obrázek 2.2: Graf funkce G, která generuje testy založené na BWHD.



Blended weight chi-square

Třída statistik založená na Blended weight chi-square (dále jen BWCS) je generovaná funkcí

$$G(\delta) = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\alpha\delta + 1}, \quad \text{kde } 0 \le \alpha \le 1.$$

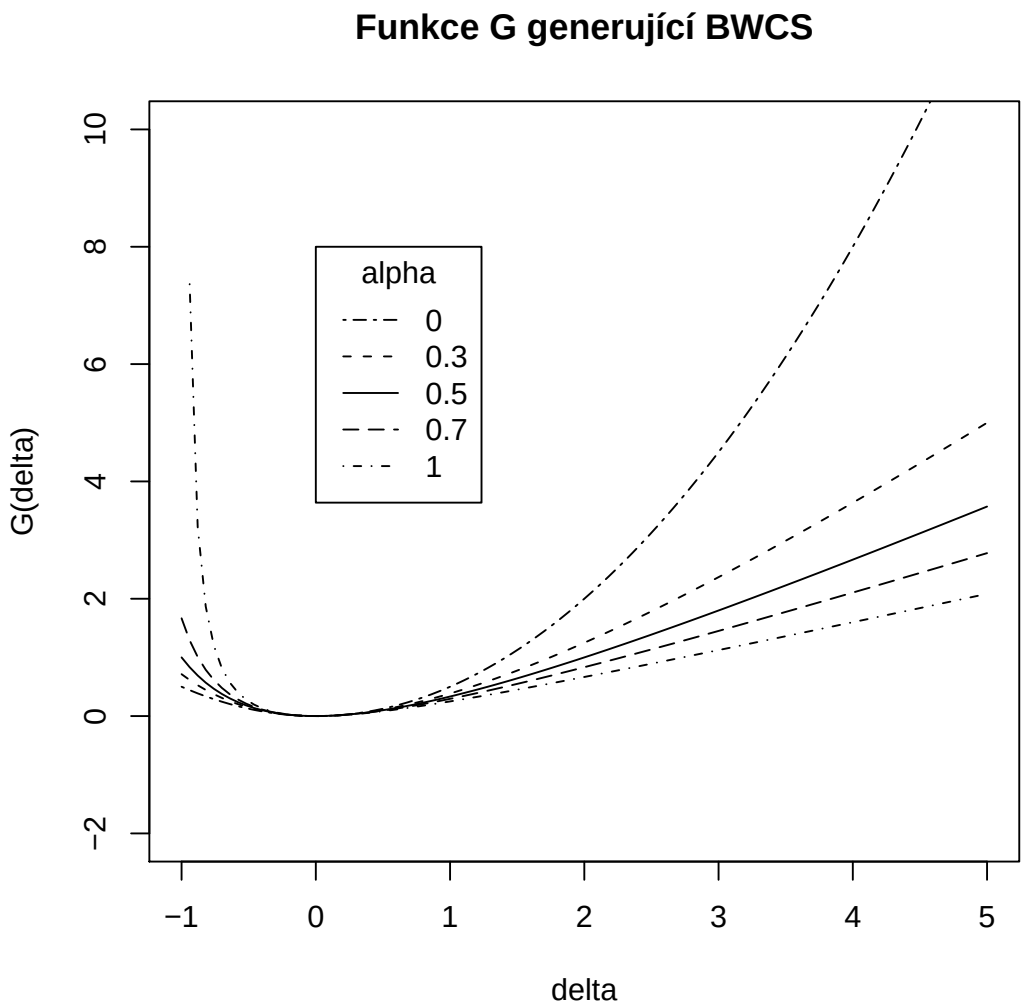
Derivace funkce G jsou

$$G'(\delta) = \frac{1}{2}\frac{\delta(\alpha\delta+2)}{(\alpha\delta+1)^2}, \qquad G''(\delta) = \frac{1}{(\alpha\delta+1)^3}, \qquad G'''(\delta) = -\frac{3\alpha}{(\alpha\delta+1)^4}.$$

Pro $\delta \in (-1, \infty)$ platí $G''(\delta) > 0$ a funkce G je tedy ryze konvexní. Třída testových statistik má tvar

$$\begin{aligned} 2n\rho_G &= 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right)^2}{\alpha\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right) + 1} e_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{e_i^2}{e_i} \frac{\left(\frac{X_i}{e_i} - 1\right)^2}{\alpha\frac{X_i}{e_i} - \alpha + 1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{\alpha X_i + (1-\alpha)e_i} = 2nBWCS_\alpha. \end{aligned}$$

Obrázek 2.3: Graf funkce G, která generuje testy založené na BWCS.



Lindsay představil rodiny BWHD a BWCS v rukopise [7], i když je nepoužil pro testování dobré shody, ale pro účely odhadu. Basu a Sarkar v článku [2]

zkoumali vlastnosti statistik založených na BWHD a BWCS. Statistiky $BWHD_0$ a $BWCS_0$ jsou rovny Pearsonově χ^2 statistice a statistiky $BWHD_1$ a $BWCS_1$ jsou rovny Neymanově modifikované χ^2 statistice. V případě, že nějaká složka vektoru empirických četností je nulová, statistika $BWHD_1 = BWCS_1$ nabývá hodnoty ∞ a hypotéza se tedy vždy zamítá. Dále dokážeme, že statistiky $2n\rho_G$ mají asymptoticky rozdělení χ^2.

Věta 2.5. *Nechť* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)' \sim \mathsf{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$. *Pak statistika* $2n\rho_G$ *má při* $n \to \infty$ *asymptoticky rozdělení* χ^2_{k-1}.

Důkaz. Z Taylorova rozvoje dostaneme

$$\begin{aligned} 2n\rho_G = {} & 2\sum_{i=1}^{n} e_i G(0) + 2\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{X_i - e_i}{e_i} G'(0) + \sum_{i=1}^{n} e_i \Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 G''(0) \\ & + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} e_i \Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3 G'''(\xi_i), \end{aligned}$$

kde ξ_i leží mezi 0 a $\frac{X_i}{e_i} - 1$. Dále máme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k} e_i G(0) = 0, \\ & \sum_{i=1}^{k} e_i \frac{X_i - e_i}{e_i} G'(0) = \sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k} e_i = 0, \\ & \sum_{i=1}^{k} e_i \Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^2 G''(0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{e_i} = \chi^2. \end{aligned}$$

Podle věty 2.4 platí

$$\sum_{i=1}^{k} e_i O_P\Big(\Big(\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3 G'''(\xi_i)\Big) = \sum_{i=1}^{k} n p_i O_P\Big(n^{-\frac{3}{2}}\Big(\sqrt{n}\frac{X_i - e_i}{e_i}\Big)^3\Big) = O_P(n^{-\frac{1}{2}}),$$

protože $\xi_i = O_P(1)$ a tedy i $G'''(\xi_i) = O_P(1)$. Dostáváme

$$2n\rho_G = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - e_i)^2}{e_i} + O_P(n^{-\frac{1}{2}}).$$

To znamená, že asymptotické rozdělení $2n\rho_G$ je za H_0 stejné jako rozdělení statistiky χ^2, tedy χ^2_{k-1}. $\square$

2.5 Přehled statistik

Tabulka 2.1: Rodiny testových statistik

Mocninné divergence		
$G = \frac{(\delta+1)^{\lambda+1}-1}{\lambda(\lambda+1)}$	$2nI^{\lambda} = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum X_i \left(\left(\frac{X_i}{e_i} \right)^{\lambda} - 1 \right)$	$-\infty < \lambda < \infty$
Blended weight Hellinger distance test family		
$G = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha\sqrt{\delta+1}+1-\alpha} \right)^2$	$2nBWHD_{\alpha} = \sum \left(\frac{X_i - e_i}{\alpha\sqrt{X_i}+(1-\alpha)\sqrt{e_i}} \right)^2$	$0 \leq \alpha \leq 1$
Blended weight chi-square test family		
$G = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\alpha\delta+1}$	$2nBWCS_{\alpha} = \sum \frac{(X_i-e_i)^2}{\alpha X_i+(1-\alpha)e_i}$	$0 \leq \alpha \leq 1$

Tabulka 2.2: Testové statistiky

Pearsonova χ^2 statistika	
$G = \frac{1}{2}\delta^2$	$\chi^2 = 2nI^1 = 2nBWHD_0 = 2nBWCS_0 = \sum \frac{(X_i-e_i)^2}{e_i}$
Věrohodnostní poměr	
$G = (\delta+1)\ln(\delta+1)$	$G^2 = 2nI^0 = 2\sum X_i \ln \frac{X_i}{e_i}$
Cressie-Readova statistika	
$G = \frac{9}{10} \left((\delta+1)^{\frac{5}{3}} - 1 \right)$	$2nI^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{5} \sum X_i (X_i^{\frac{2}{3}} - e_i^{\frac{2}{3}}) e_i^{-\frac{2}{3}}$
Freeman-Tukeyova statistika	
$G = 4 - \frac{4}{\sqrt{\delta+1}}$	$T^2 = 2nI^{-\frac{1}{2}} = 4\sum(\sqrt{X_i} - \sqrt{e_i})^2$
Neymanova modifikovaná χ^2 statistika	
$G = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta+1}$	$NM^2 = 2nI^{-2} = 2nBWHD_1 = 2nBWCS_1 = \sum \frac{(X_i-e_i)^2}{X_i}$
Modifikovaný věrohodnostní poměr	
$G = -\ln(\delta+1)$	$GM^2 = 2nI^{-1} = 2\sum e_i \ln \frac{e_i}{X_i}$
$G = \frac{81}{2} \left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta+1}+8} \right)^2$	$2nBWHD_{\frac{1}{9}} = 81 \sum \left(\frac{X_i - e_i}{\sqrt{X_i}+8\sqrt{e_i}} \right)^2$
Čtverec Hellingerovy vzdálenosti	
$G = 2 \left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta+1}+1} \right)^2$	$2nBWHD_{\frac{1}{2}} = 2 \sum \left(\frac{X_i - e_i}{\sqrt{X_i}+\sqrt{e_i}} \right)^2$
$G = \frac{3}{2} \frac{\delta^2}{\delta+3}$	$2nBWCS_{\frac{1}{3}} = 3 \sum \frac{(X_i-e_i)^2}{X_i+2e_i}$

3. Porovnání testů

3.1 Přesná hladina testů

Používáme-li k testování hypotézy limitní rozdělení statistiky, je třeba si uvědomit, že skutečná hladina významnosti testu se může lišit. Zvláště pro malý rozsah výběru může být aproximace χ^2 rozdělením velmi nepřesná. Pro malé velikosti n (rozsah výběru) a k (počet složek vektoru četností) lze spočítat přesnou hladinu testu α_0. Uvažujeme platnost hypotézy H_0. Nejdříve se vypočtou všechny možné kombinace četností (pro dané n a k). U každé kombinace se provede test pomocí asymptotického rozdělení χ^2, který ukáže, zda se hypotéza H_0 zamítne nebo nezamítne. Dále se sečtou multinomické pravděpodobnosti dané hypotézou H_0 těch vektorů četností, které povedou k zamítnutí H_0. Tím získáme přesnou pravděpodobnost chyby prvního druhu (zamítnutí H_0 za platnosti H_0). V následujících tabulkách je vypočtena přesná hladina testu, pokud testujeme hypotézu na hladině $\alpha_0 = 0.05$ pomocí asymptotického rozdělení χ^2 v modelu

$$\begin{aligned} H_0 &: p_i = \tfrac{1}{k} \text{ pro } i = 1, \dots\ k, \\ H_1 &: p_j \neq \tfrac{1}{k} \text{ pro aspoň jedno } j. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tabulka 3.1: Přesná hladina testů $2nI^\lambda$ při testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2 na hladině $\alpha_0 = 0.05$ v modelu (3.1)

	$k = 4$			$k = 5$		$k = 6$
λ	$n = 5$	$n = 20$	$n = 60$	$n = 5$	$n = 20$	$n = 5$
-5.0	0.76563	0.34959	0.19743	0.96160	0.43924	1.00000
-2.5	0.76563	0.16757	0.10670	0.96160	0.32781	1.00000
-2.0	0.76563	0.12250	0.08487	0.96160	0.32634	1.00000
-1.5	0.76563	0.11234	0.07215	0.96160	0.17227	1.00000
-1.0	0.76563	0.11234	0.06532	0.96160	0.10499	1.00000
-0.7	0.76563	0.11234	0.06183	0.57760	0.09997	0.90741
-0.5	0.17969	0.07822	0.05884	0.28960	0.08825	0.44444
-0.3	0.17969	0.07925	0.05469	0.09760	0.08825	0.05864
0.0	0.06250	0.05277	0.05204	0.03360	0.07729	0.05864
0.3	0.06250	0.04914	0.05089	0.03360	0.05741	0.02006
0.5	0.06250	0.04914	0.05236	0.03360	0.04976	0.02006
0.7	0.06250	0.04769	0.04941	0.03360	0.04540	0.02006
1.0	0.06250	0.04152	0.04872	0.03360	0.05053	0.02006
1.5	0.06250	0.04999	0.04893	0.03360	0.05137	0.05864
2.0	0.06250	0.06844	0.05186	0.09760	0.06342	0.21296
2.5	0.06250	0.06777	0.05623	0.28960	0.07645	0.21296
5.0	0.41406	0.16890	0.09734	0.28960	0.20122	0.44444

Numerické výsledky ukazují, že u rodiny testových statistik $2nI^\lambda$ je pro velké hodnoty $|\lambda|$ přesná pravděpodobnost chyby prvního druhu daleko vyšší než požadovaná hladina $\alpha_0 = 0.05$. Vypočtené přesné hladiny jsou nejblíže požadované hladině $\alpha_0 = 0.05$ pro $\lambda \in [0, 1.5]$. Ze známých statistik si nejlépe vedou Pearsonova statistika ($\lambda = 1$) a Cressie-Readova statistika ($\lambda = 2/3$). Věrohodností poměr ($\lambda = 0$) je také dobrou statistikou, ovšem leží na hranici přijatelnosti. Statistiky se záporným parametrem λ jako Freeman-Tukeyova statistika ($\lambda = -0.5$), Neymanova modifikovaná χ^2 statistika ($\lambda = -2$) a modifikovaný věrohodnostní poměr ($\lambda = -1$) už jsou nevhodné.

Tabulka 3.2: Přesná hladina testů $BWHD_\alpha$ při testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2 na hladině $\alpha_0 = 0.05$ v modelu (3.1)

	$k = 4$			$k = 5$		$k = 6$
α	$n = 5$	$n = 20$	$n = 60$	$n = 5$	$n = 20$	$n = 5$
0.0	0.06250	0.04152	0.04872	0.03360	0.05053	0.02006
0.1	0.06250	0.04914	0.04941	0.03360	0.04624	0.02006
0.2	0.06250	0.04914	0.05107	0.03360	0.05700	0.02006
0.3	0.06250	0.05277	0.05089	0.09760	0.08344	0.05864
0.4	0.17969	0.06328	0.05330	0.09760	0.08825	0.05864
0.5	0.17969	0.07822	0.05884	0.28960	0.08825	0.44444
0.6	0.76563	0.11234	0.06382	0.57760	0.10499	0.90741
0.7	0.76563	0.11234	0.06442	0.96160	0.11817	0.90741
0.8	0.76563	0.11234	0.07013	0.96160	0.16348	1.00000
0.9	0.76563	0.12250	0.07312	0.96160	0.19497	1.00000
1.0	0.76563	0.12250	0.08487	0.96160	0.32634	1.00000

U rodiny testových statistik $2nBWHD_\alpha$ je pro α blížící se k 1 přesná pravděpodobnost chyby prvního druhu daleko vyšší než požadovaná hladina $\alpha_0 = 0.05$. Vypočtené přesné hladiny jsou nejblíže požadované hladině $\alpha_0 = 0.05$ pro $\alpha \in [0, 0.2]$.

Tabulka 3.3: Přesná hladina testů $BWCS_\alpha$ při testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2 na hladině $\alpha_0 = 0.05$ v modelu (3.1)

	$k=4$			$k=5$		$k=6$
α	$n=5$	$n=20$	$n=60$	$n=5$	$n=20$	$n=5$
0.0	0.06250	0.04152	0.04872	0.03360	0.05053	0.02006
0.1	0.00391	0.04370	0.04831	0.03360	0.04321	0.02006
0.2	0.00391	0.04914	0.04765	0.00160	0.03955	0.00077
0.3	0.00391	0.04914	0.05089	0.00160	0.04312	0.00077
0.4	0.00391	0.05174	0.05151	0.00160	0.05613	0.00077
0.5	0.06250	0.06225	0.05420	0.03360	0.07490	0.00077
0.6	0.17969	0.07822	0.05893	0.09760	0.08752	0.05864
0.7	0.17969	0.11234	0.06442	0.09760	0.10499	0.05864
0.8	0.17969	0.11234	0.06625	0.57760	0.11817	0.44444
0.9	0.76563	0.11234	0.07312	0.96160	0.18398	0.90741
1.0	0.76563	0.12250	0.08487	0.96160	0.32634	1.00000

Obdobně u rodiny testových statistik $2nBWCS_\alpha$ je pro α blížící se k 1 přesná pravděpodobnost chyby prvního druhu daleko vyšší než požadovaná hladina $\alpha_0 = 0.05$. Vypočtené přesné hladiny jsou nejblíže požadované hladině $\alpha_0 = 0.05$ pro $\alpha \in [0, 0.4]$.

Je třeba dodat, že ani pokud bychom při testování používali přesné rozdělení statistik místo asymptotického rozdělení χ^2, skutečná hladina by nebyla přesně 0.05. To je způsobeno tím, že multinomické rozdělení je diskrétní a skutečná hladina testů je tedy o trochu nižší.

3.2 Síla testů

Důležitým kritériem pro porovnání testů je jejich síla, tzn. pravděpodobnost, že nenastane chyba druhého druhu. Postupujeme podobně jako Cressie a Read v článku [3]. Pro konkrétní rozsah výběru n, počet složek vektoru četností k, nulovou hypotézu H_0 a alternativní hypotézu H_1 lze vypočítat přesnou hodnotu síly testu na přesné hladině α_0. Postup je podobný jako v případě výpočtu přesné hladiny testů v předcházející části. Uvažujeme platnost alternativní hypotézy H_1. Nejdříve se vypočtou všechny možné kombinace četností, které povedou k zamítnutí nulové hypotézy H_0. Dále se sečtou jejich multinomické pravděpodobnosti dané alternativní hypotézou H_1. Ta je v našem případě jednoduchá a má tedy jednoznačně určeny pravděpodobnosti p_i. Zaměříme se na model

$$H_0 : p_i = \tfrac{1}{k} \text{ pro } i = 1, \dots\ k,$$

$$H_1 : p_i = \begin{cases} \frac{1-\frac{1+\delta}{k}}{k-1} & \text{pro } i = 1, \dots\ k-1, \\ \frac{1+\delta}{k} & \text{pro } i = k, \end{cases} \tag{3.2}$$

kde $-1 \leq \delta \leq 1$. Nulová hypotéza H_0 je zde symetrická a alternativní hypotéza H_1 je tvořená vektorem pravděpodobností, kde k-tá pravděpodobnost je změněna o $\frac{\delta}{k}$ oproti hypotéze H_0 a ostatní pravděpodobnosti jsou rovnoměrně přizpůsobeny tak, aby jejich součet byl 1. Protože rozdělení testových statistik je diskrétní, musíme použít znáhodněné testy, aby hladina testu byla přesně $\alpha_0 = 0.05$. Konstrukce znáhodněných testů probíhá následovně. Nejdříve spočteme nejvyšší hodnotu statistiky S, pro kterou hypotézu H_0 při normálním testu nezamítáme. Tuto hodnotu označíme s_0. Definujme funkci ψ předpisem

$$\psi(s) = \mathsf{P}(\text{zamítnutí } H_0 \text{ pokud statistika } S \text{ nabývá hodnoty } s).$$

Pro normální test má funkce ψ tvar

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{pro } s > s_0, \\ 0 & \text{pro } s \leq s_0. \end{cases}$$

Zatímco pro znáhodněný test má funkce ψ tvar

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{pro } s > s_0, \\ p_0 & \text{pro } s = s_0, \\ 0 & \text{pro } s < s_0, \end{cases}$$

kde p_0 vypočteme z rovnice

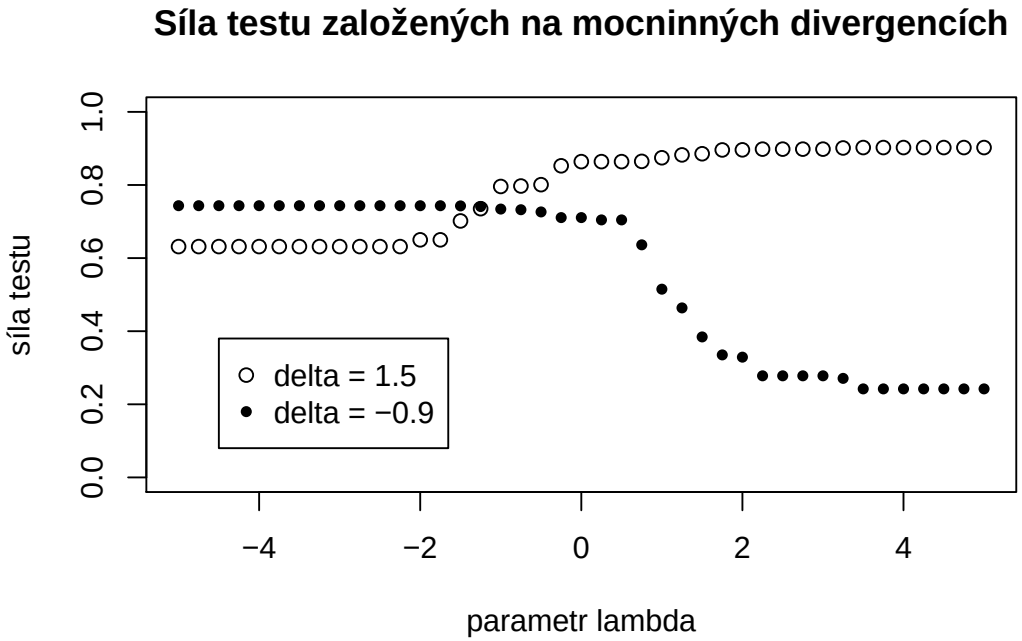
$$\alpha_0 = \mathsf{P}(S > s_0) + p_0 \mathsf{P}(S = s_0).$$

Hladina znáhodněného testu je tedy přesně α_0. Následují tabulky vypočítaných sil pro rodiny testových statistik $2nI^\lambda$, $2nBWHD_\alpha$ a $2nBWCS_\alpha$.

Tabulka 3.4: Přesná síla znáhodněných testů založených na $2nI^\lambda$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$

λ	$\delta = 1.5$	$\delta = 0.5$	$\delta = -0.5$	$\delta = -0.9$
-5.0	0.63157	0.12284	0.17660	0.74340
-2.5	0.63157	0.12284	0.17660	0.74340
-2.0	0.65004	0.12313	0.17660	0.74336
-1.5	0.70173	0.12535	0.17658	0.74282
-1.0	0.79598	0.13841	0.17522	0.73418
-0.7	0.79726	0.13922	0.17493	0.73239
-0.5	0.80092	0.14117	0.17391	0.72632
-0.3	0.85253	0.15375	0.16955	0.71083
0.0	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.3	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.5	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.7	0.86465	0.15768	0.16271	0.63632
1.0	0.87453	0.16293	0.15057	0.51500
1.5	0.88554	0.16817	0.13734	0.38440
2.0	0.89618	0.17254	0.12697	0.32905
2.5	0.89817	0.17331	0.12222	0.27800
5.0	0.90246	0.17434	0.11510	0.24221

Obrázek 3.1: Graf síly testů založených na $2nI^{\lambda}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$

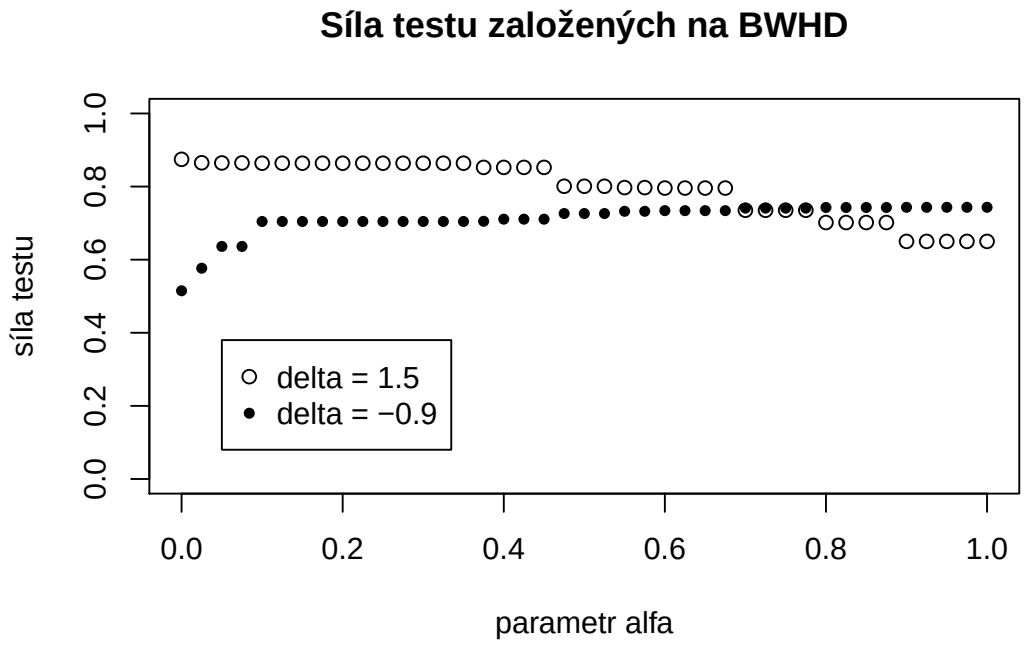


Výsledky tabulky 3.4 ukazují, že u rodiny testových statistik $2nI^{\lambda}$ pro $\delta > 0$ síla testu roste s rostoucím parametrem λ a pro $\delta < 0$ síla testu klesá s rostoucím parametrem λ. Z obrázku 3.1 je vidět, že pro velké $|\lambda|$ zůstává síla testů přibližně na stejné hodnotě.

Tabulka 3.5: Přesná síla znáhodněných testů založených na $2nBWHD_{\alpha}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$

α	$\delta = 1.5$	$\delta = 0.5$	$\delta = -0.5$	$\delta = -0.9$
0.0	0.87453	0.16293	0.15057	0.51500
0.1	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.2	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.3	0.86401	0.15665	0.16779	0.70488
0.4	0.85253	0.15375	0.16955	0.71083
0.5	0.80092	0.14117	0.17391	0.72632
0.6	0.79598	0.13841	0.17522	0.73418
0.7	0.73528	0.12907	0.17638	0.74103
0.8	0.70173	0.12535	0.17658	0.74282
0.9	0.65004	0.12313	0.17660	0.74336
1.0	0.65004	0.12313	0.17660	0.74336

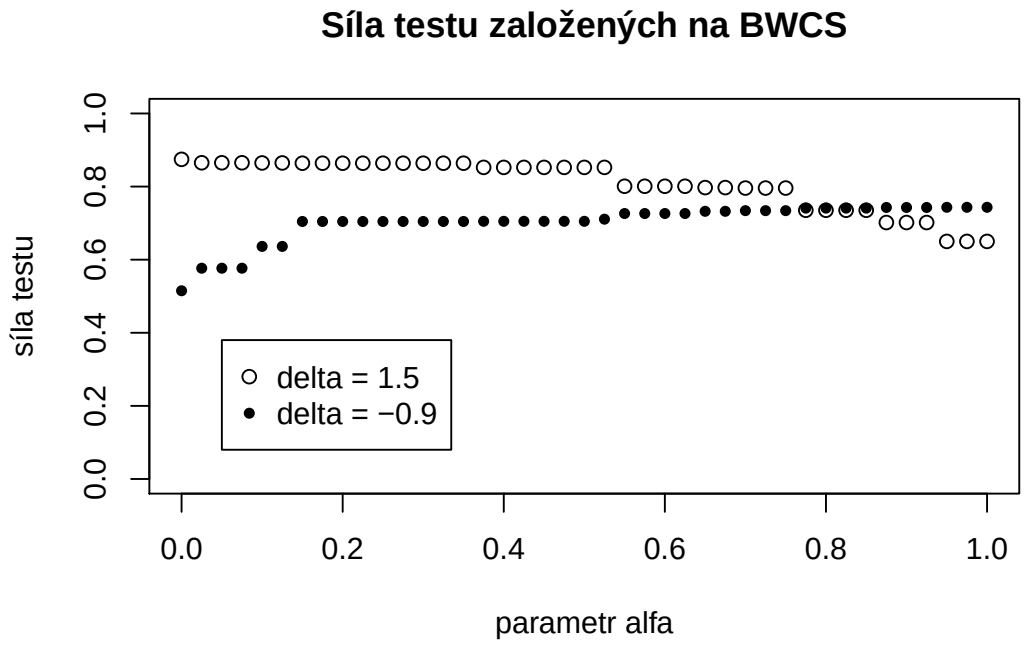
Obrázek 3.2: Graf síly testů založených na $2nBWHD_\alpha$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$



Tabulka 3.6: Přesná síla znáhodněných testů založených na $2nBWCS_\alpha$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$

α	$\delta = 1.5$	$\delta = 0.5$	$\delta = -0.5$	$\delta = -0.9$
0.0	0.87453	0.16293	0.15057	0.51500
0.1	0.86465	0.15768	0.16271	0.63632
0.2	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.3	0.86401	0.15665	0.16779	0.70448
0.4	0.85256	0.15402	0.16854	0.70499
0.5	0.85256	0.15402	0.16854	0.70499
0.6	0.80092	0.14117	0.17391	0.72632
0.7	0.79598	0.13841	0.17522	0.73418
0.8	0.73528	0.12907	0.17638	0.74103
0.9	0.70173	0.12535	0.17658	0.74282
1.0	0.65004	0.12313	0.17660	0.74336

Obrázek 3.3: Graf síly testů založených na $2nBWCS_\alpha$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$



Výsledky tabulek 3.5 a 3.6 ukazují, že u rodin testových statistik $2nBWHD_\alpha$ a $2nBWCS_\alpha$ pro $\delta > 0$ síla testu klesá s rostoucím parametrem α a pro $\delta < 0$ síla testu roste s rostoucím parametrem α. Protože parametr α je omezený, síla testu je maximální s parametrem $\alpha = 0$ pro $\delta > 0$ a s parametrem $\alpha = 1$ pro $\delta < 0$.

3.3 Momenty testů

Jedním ze způsobů, jak zjistit rychlost konvergence statistik k χ^2 rozdělení, je porovnání obecných momentů veličiny $Z \sim \chi^2_{k-1}$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}Z &= k, \\ \mathsf{E}Z^2 &= k(k+2), \\ \mathsf{E}Z^3 &= k(k+2)(k+4) \end{aligned} \tag{3.3}$$

s momenty disparitních statistik. Postupujeme podobně jako Cressie a Read v článku [3]. Z Taylorova rozvoje a z věty 2.4 dostaneme

$$\begin{aligned} 2n\rho_G = &\sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} + \frac{1}{3}G^{(3)}(0) \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^3}{(np_i)^2} \\ &+ \frac{1}{12}G^{(4)}(0) \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^4}{(np_i)^3} + O_P(n^{-\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

Odvodíme první obecný moment s využitím centrálních momentů binomického rozdělení, které jsou popsány ve větě A.4. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(2n\rho_G)^1 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathsf{E}(X_i - np_i)^2}{np_i} + \frac{1}{3}G^{(3)}(0) \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathsf{E}(X_i - np_i)^3}{(np_i)^2} \\
&\quad + \frac{1}{12}G^{(4)}(0) \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathsf{E}(X_i - np_i)^4}{(np_i)^3} + O_P(n^{-\frac{3}{2}}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(1 - p_i) + \frac{1}{3}G^{(3)}(0) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n}\Big(2p_i - 3 + \frac{1}{p_i}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{12}G^{(4)}(0) \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n^2}\Big(- 6p_i + 12 - 7\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\Big) + \frac{1}{n}\Big(3p_i - 6 + 3\frac{1}{p_i}\Big)\right) \\
&\quad + O_P(n^{-\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
$$

Označme $S = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$. Platí vztah $S \geq k^2$. To dokážeme následujícím způsobem. Označme $\hat{p}$ aritmetický průměr a $\hat{p}_H$ harmonický průměr hodnot p_i. Z nerovnosti $\bar{z}_H \leq \bar{z}$ plyne

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}} &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} p_i \\
k^2 &\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}.
\end{aligned}
$$

Případ $S = k^2$ nástává při symetrické nulové hypotéze ($p_i = \frac{1}{k}$, $i = 1 \dots k$). První tři obecné momenty mají tvar

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(2n\rho_G)^1 &= k - 1 \\
&\quad + \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{3}[G^{(3)}(0)](2 - 3k + S) + \frac{1}{4}[G^{(4)}(0)](1 - 2k + S)\Big) \\
&\quad + O_P(n^{-\frac{3}{2}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(2n\rho_G)^2 &= (k-1)(k+1) \\
&\quad + \frac{1}{n}\Big(2 - 2k - k^2 + S + \frac{2}{3}[G^{(3)}(0)](10 - 13k - 6k^2 + kS + 8S) \\
&\qquad + \frac{1}{3}[G^{(3)}(0)]^2(4 - 6k - 3k^2 - 5S) \\
&\qquad + \frac{1}{2}[G^{(4)}(0)](3 - 5k - 2k^2 + kS + 3S)\Big) \\
&\quad + O_P(n^{-\frac{3}{2}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(2n\rho_G)^3 &= (k-1)(k+1)(k+3) \\
&\quad + \frac{1}{n}\Big(26 - 24k - 21k^2 - 3k^3 + 19S + 3kS \\
&\qquad + [G^{(3)}(0)](70 - 81k - 64k^2 - 9k^3 + 65S + 18kS + k^2S) \\
&\qquad + [G^{(3)}(0)]^2(20 - 26k - 21k^2 - 3k^3 + 25S + 5kS)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{3}{4}[G^{(3)}(0)](15-22k-15k^2-2k^3+15S+8kS+k^2S)\Big)$$
$$+O_P(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Momenty $\mathsf{E}(2n\rho_G)^2$ a $\mathsf{E}(2n\rho_G)^3$ jsou převzaty z článku Cressie a Read [3]. Dosazením derivací funkce G v bodě 0 získáme jednotlivé momenty pro mocninné divergence, BWHD a BWCS. Členy, které nezávisejí na n, odpovídají obecným momentům χ^2_{k-1} rozdělení. Označme U_i výraz z Taylorova rozvoje i-tého momentu, který je násoben $\frac{1}{n}$. Obecné momenty lze tedy pro $i = 1, 2, 3$ zapsat jako

$$\mathsf{E}(2n\rho_G)^i = \mathsf{E}Z^i + \frac{1}{n}U_i + O_P(n^{-\frac{3}{2}}),$$

kde $\mathsf{E}Z^i$ jsou obecné momenty χ^2_{k-1} rozdělení. Momenty disparitních statistik budou konvergovat k momentům χ^2_{k-1} rozdělení nejrychleji, když eliminujeme výraz U_i a zůstane pouze $O_P(n^{-\frac{3}{2}})$. Následují tabulky kořenů rovnice $U_i = 0$ pro $i = 1, 2, 3$ a daná k při $S = k^2$.

Tabulka 3.7: Kořeny rovnice $U_i = 0$ v rozvoji $\mu'_i = \mathsf{E}(2nI^\lambda)^i$ při $S = k^2$

	μ'_1		μ'_2		μ'_3	
k	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
2	2.000	1.000	0.475	2.525	0.320	2.680
3	1.333	1.000	0.500	1.600	0.350	1.559
4	1.111	1.000	0.521	1.353	0.377	1.307
5	1.000	1.000	0.538	1.240	0.400	1.200
10	0.815	1.000	0.587	1.076	0.478	1.057
20	0.737	1.000	0.623	1.023	0.549	1.016
30	0.713	1.000	0.637	1.011	0.581	1.008
40	0.701	1.000	0.644	1.007	0.600	1.004
50	0.694	1.000	0.649	1.004	0.611	1.003
100	0.680	1.000	0.658	1.001	0.637	1.001
200	0.673	1.000	0.662	1.000	0.652	1.000
300	0.671	1.000	0.664	1.000	0.657	1.000
400	0.670	1.000	0.664	1.000	0.659	1.000
500	0.669	1.000	0.665	1.000	0.661	1.000
1000	0.668	1.000	0.666	1.000	0.664	1.000
∞	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1

Momenty statistik založených na mocninných divergencích tedy konvergují nejrychleji k momentům χ^2 rozdělení pro $\lambda \in [0.32, 2.68]$. Při počtu složek vektoru četností $k \to \infty$ konvergují nejrychleji pro $\lambda = 1$ (Pearsonova statistika) a $\lambda = \frac{2}{3}$ (Cressie-Readova statistika).

Tabulka 3.8: Kořeny rovnice $U_i = 0$ v rozvoji $\mu'_i = \mathsf{E}(2nBWHD_\alpha)^i$ při $S = k^2$

	μ'_1		μ'_2		μ'_3	
k	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
2	-0.333	0.000	0.175	-0.508	0.227	-0.560
3	-0.111	0.000	0.167	-0.200	0.217	-0.186
4	-0.037	0.000	0.160	-0.118	0.208	-0.067
5	0.000	0.000	0.154	-0.080	0.200	-0.019
10	0.062	0.000	0.138	-0.025	0.174	-0.005
20	0.088	0.000	0.126	-0.008	0.150	-0.003
30	0.096	0.000	0.121	-0.004	0.140	-0.001
40	0.100	0.000	0.119	-0.002	0.133	-0.001
50	0.102	0.000	0.117	-0.001	0.130	-0.001
100	0.107	0.000	0.114	-0.000	0.121	-0.000
200	0.109	0.000	0.113	-0.000	0.116	-0.000
300	0.110	0.000	0.112	-0.000	0.114	-0.000
400	0.110	0.000	0.112	-0.000	0.114	-0.000
500	0.110	0.000	0.112	-0.000	0.113	-0.000
1000	0.111	0.000	0.111	-0.000	0.112	-0.000
∞	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0

Momenty statistik založených na BWHD tedy konvergují nejrychleji k momentům χ^2 rozdělení pro $\alpha \in [0, 0.23]$. Při počtu složek vektoru četností $k \to \infty$ konvergují nejrychleji pro $\alpha = 0$ (Pearsonova statistika) a $\alpha = \frac{1}{9}$. V tabulce 3.8 jsou některé kořeny záporné. Protože ale ve statistikách založených na $2nBWHD_\alpha$ musí být parametr α větší nebo roven 0, nejbližší přípustná hodnota je tedy 0.

Tabulka 3.9: Kořeny rovnice $U_i = 0$ v rozvoji $\mu'_i = \mathsf{E}(2nBWCS_\alpha)^i$ při $S = k^2$

	μ'_1		μ'_2		μ'_3	
k	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
2	0.000	0.000	0.258	-0.258	0.309	-0.309
3	1.667	0.000	0.293	-0.088	0.333	-0.952
4	0.222	0.000	0.308	-0.047	0.342	-0.049
5	0.250	0.000	0.316	-0.030	0.346	-0.304
10	0.296	0.000	0.328	-0.008	0.348	-0.007
20	0.316	0.000	0.332	-0.002	0.344	-0.002
30	0.322	0.000	0.333	-0.001	0.342	-0.001
40	0.325	0.000	0.333	-0.001	0.340	-0.000
50	0.327	0.000	0.333	-0.000	0.339	-0.000
100	0.330	0.000	0.333	-0.000	0.336	-0.000
200	0.332	0.000	0.333	-0.000	0.335	-0.000
300	0.332	0.000	0.333	-0.000	0.334	-0.000
400	0.332	0.000	0.333	-0.000	0.334	-0.000
500	0.333	0.000	0.333	-0.000	0.334	-0.000
1000	0.333	0.000	0.333	-0.000	0.334	-0.000
∞	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

Momenty statistik založených na BWCS tedy konvergují nejrychleji k momentům χ^2 rozdělení pro $\alpha \in [0, 0.35]$. Při počtu složek vektoru četností $k \to \infty$ konvergují nejrychleji pro $\alpha = 0$ (Pearsonova statistika) a $\alpha = \frac{1}{3}$. V tabulce 3.9 jsou některé kořeny záporné. Protože ale ve statistikách založených na $2nBWCS_\alpha$ musí být parametr α větší nebo roven 0, nejbližší přípustná hodnota je tedy 0.

Tyto výsledky nám přinášejí kromě Pearsonovy statistiky i další statistiky $2nI^{\frac{2}{3}}$, $2nBWHD_{\frac{1}{9}}$ a $2nBWCS_{\frac{1}{3}}$, které mají také velmi dobré vlastnosti a jsou vhodné pro testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2.

Závěr

Dokázali jsme, že třída disparitních statistik (která obsahuje všechny ostatní známé statistiky) má za platnosti nulové hypotézy H_0 asymptoticky χ^2 rozdělení. Dále jsme tyto statistiky porovnali a zjistili, které jsou nejvhodnější k testování dobré shody proti obecné alternativě.

Přesná hladina testu se blíží zadané hladině (při aproximaci rozdělením χ^2) u mocninných divergencí nejvíce pro $\lambda \in [0, 1.5]$, u BWHD pro $\alpha \in [0, 0.2]$ a u BWCS pro $\alpha \in [0, 0.4]$. Momenty testových statistik konvergují nejrychleji u mocninných divergencí pro $\lambda \in [0.32, 2.68]$, u BWHD pro $\alpha \in [0, 0.23]$ a u BWCS pro $\alpha \in [0, 0.35]$. Tato pozorování využijeme při hodnocení jednotlivých statistik.

Nejdříve zhodnotíme „nejstarší“ známé statistiky, a to Pearsonovu statistiku a statistiku založenou na věrohodnostním poměru. Přesná hladina těchto testů je poměrně blízká k zadané hladině při aproximaci χ^2 rozdělením, ovšem některé další statistiky si vedou o něco lépe. Obecné momenty Pearsonvy statistiky při počtu složek vektoru četností $k \to \infty$ konvergují nejrychleji (spolu se 3 dalšími statistikami) k momentům χ^2 rozdělení. Pearsonova statistika je nejrozšířenější a nevede si špatně v našem pozorování, ale lze doporučit lepší statistiky.

Freeman-Tukeyova statistika ($2nI^{-\frac{1}{2}}$), Neymanova modifikovaná χ^2 statistika ($2nI^{-2}$) a statistika založená na modifikovaném věrohodnostním poměru ($2nI^{-1}$) jsou velmi nevhodné (jako všechny statistiky z rodiny mocninných divergencí se záporným parametrem λ). Jejich přesná hladina testu není příliš blízká zadané hladině při aproximaci rozdělením χ^2 a síla testu je vysoká pouze pro určité alternativy.

Proti obecné alternativě jsou podle našeho pozorování nejvhodnější statistiky $2nI^{\frac{2}{3}}$, $2nBWHD_{\frac{1}{9}}$ a $2nBWCS_{\frac{1}{3}}$. Jejich přesná hladina se blíží nejvíce ze všech statistik k zadané hladině při aproximaci rozdělením χ^2, síla testu je poměrně vysoká (i když proti specifické alternativě může být vyšší u jiných statistik) a obecné momenty těchto statistik při počtu složek vektoru četností $k \to \infty$ konvergují nejrychleji (spolu s Pearsonovou statistikou) k momentům χ^2 rozdělení.

A. Použité věty

Věta A.1 (Vícerozměrná Lévy-Lindebergova centrální limitní věta)**.** *Pro nezávislé stejně rozdělené k-rozměrné náhodné vektory $\boldsymbol{X}_n, n \in \mathbb{N}$ a $\|\boldsymbol{X}_1\| \in \mathbb{L}_2$ platí*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i - n\mathsf{E}\boldsymbol{X}_1\Big) \to \mathsf{N}_k(\boldsymbol{0}, \mathsf{var}\boldsymbol{X_1})$$

v distribuci pro $n \to \infty$.

Důkaz. Viz Lachout [6], str. 105. □

Věta A.2. *Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_k(\mu, \boldsymbol{V})$, kde $\mathsf{h}(\boldsymbol{V}) = m \geq 1$. Pak náhodná veličina $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X} - \mu)'\boldsymbol{V}^-(\boldsymbol{X} - \mu)$ má rozdělení χ^2_m při libovolné volbě pseudoinverzní matice $\boldsymbol{V}^-$.*

Důkaz. Viz Anděl [1], str. 68. □

Věta A.3. *Nechť jsou splněny následující předpoklady.*

1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}_m$ je parametrický prostor, který obsahuje takový neprázdný otevřený interval ω, že skutečná hodnota parametru $\boldsymbol{\theta}_0$ patří do ω.*
2. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, kde X_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ.*
3. *Nechť $M = \{x : f(x, \boldsymbol{\theta}) > 0\}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.*
4. *Nechť $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \Omega$. Pak $f(x, \boldsymbol{\theta}_1) = f(x, \boldsymbol{\theta}_2)\,[\mu]$ platí právě tehdy, je-li $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$.*
5. *Nechť $\{f(x, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Omega\}$ je regulární systém hustot s Fisherovou mírou informace $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$.*
6. *Derivace $\frac{\partial^3 f(x,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k}$ existuje pro skoro všechna x, pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ a pro všechna $i, j, k = 1, \ldots, m$.*
7. *Pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ a pro všechna $i, j = 1, \ldots, m$ platí*
$$\int_M f''_{ij}(x, \boldsymbol{\theta}) d\mu(x) = 0.$$
8. *Pro všechna $i, j, k = 1, \ldots, m$ existují funkce $M_{ijk}(x) \geq 0$ tak, že*
$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0} M_{ijk}(X) < \infty$$
a
$$\Big|\frac{\partial^3 \ln f(x, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k}\Big| \leq M_{ijk}(x)$$
pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ a skoro všechna $x \in M$.

9. *Matice* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ *je spojitá v bodě* $\boldsymbol{\theta}_0$.

Pak má $LR(\boldsymbol{\theta}_0) = 2\Big(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L(\boldsymbol{\theta}_0)\Big)$ *asymptoticky rozdělení* χ^2_m.

Důkaz. Viz Anděl [1], str. 177. □

Věta A.4. *Nechť* $X \sim \mathsf{Bi}(n, p)$. *Pak její centrální momenty jsou*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 &= np(1-p), \\
\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^3 &= np(2p^2 - 3p + 1), \\
\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^4 &= np(-6p^3 + 12p^2 - 7p + 1) + n^2p^2(3p^2 - 6p + 3).
\end{aligned}$$

Důkaz. Dokáže se přímým výpočtem. □

B. Funkce v programu R

V základní verzi programu R je pro výpočet testů dobré shody pouze funkce `chisq.test`, což je Pearsonův test. Zde je uveden zdrojový kód funkce `gof.test`, která testuje data pomocí statistik založených na mocninných divergencích, BWHD a BWCS. Výpočty přesné hladiny testů (část 3.1) a síly testů (část 3.2) byly provedeny pomocí funkce `gof.power`.

```
gof.test <- function(X,E,fg="PowDiv",par=1,tpval="a",simrep=2000)

# funkce pro výpočet testu dobré shody

# vstupní parametry
#    X - vektor empirických četností
#    E - vektor teoretických četností
#    fg - typ testu, přípustné hodnoty jsou "PowDiv", "BWHD"
#     a "BWCS"
#    par - doplňující parametr, pro "PowDiv" může být libovolné
#     číslo, pro "BWHD" a "BWCS" číslo z intervalu (0,1)
#    tpval - způsob výpočtu p-hodnoty, přípustné hodnoty jsou
#     "a" (asymptotická p-hodnota počítaná z chi kvadrát rozdělení),
#     "e" (přesná p-hodnota, pouze pro malé vektory četností),
#     "s" (simulovaná p-hodnota počítaná metodou Monte Carlo)
#    simrep - počet opakování při výpočtu simulované p-hodnoty
# výstupní parametry
#    stat - testová statistika
#    df - počet stupňů volnosti
#    pval - p-hodnota testu

{
   name <- gof.name(fg,par);
   if(tpval=="e") {
      name <- paste(name,"with exact p-value",sep=" ");
   }
   if(tpval=="s") {
      name <- paste(name,"with simulated p-value (based on",
       simrep, "replicates)",sep=" ");
   }
   stat <- gof.stat(X,E,fg,par);
   df <- length(X)-1;
   pval <- gof.pval(X,E,fg,par,tpval,simrep);
   names(stat) <- "stat";
   names(df) <- "df";
   dname <- deparse(substitute(X));
   structure(list(statistic=stat,parameter=df,p.value=pval,
    method=name,data.name=dname,observed=X,expected=E),
    class="htest");
```

```
}


gof.name <- function(fg,par)

# vstupní parametry
#    fg - typ testu, přípustné hodnoty jsou "PowDiv", "BWHD"
#     a "BWCS"
#    par - doplňující parametr, pro "PowDiv" může být libovolné
#     číslo, pro "BWHD" a "BWCS" číslo z intervalu (0,1)
# výstupní parametry
#      methname - název statistiky

{
   if(((fg=="PowDiv")&&(par==1))||((fg=="BWHD")&&(par==0))
    ||((fg=="BWCS")&&(par==0))) {
      methname <- "Pearson chi-square test";
   }
   else if((fg=="PowDiv")&&(par==0)) {
      methname <- "Likelihood ratio test";
   }
   else if((fg=="PowDiv")&&(par==2/3)) {
      methname <- "Cressie-Read test";
   }
   else if((fg=="PowDiv")&&(par==-1/2)) {
      methname <- "Freeman-Tukey test";
   }
   else if((fg=="PowDiv")&&(par==-1)) {
      methname <- "Discriminant information test";
   }
   else if(((fg=="PowDiv")&&(par==-2))||((fg=="BWHD")&&(par==1))
    ||((fg=="BWCS")&&(par==1))) {
      methname <- "Neyman modified chi-square test";
   }
   else if(fg=="PowDiv") {
      methname <- paste("Power divergence test (lambda=",par,")",
       sep="");
   }
   else if(fg=="BWHD") {
      methname <- paste("Blended weight Hellinger distance test (",
       "alpha=",par,")",sep="")
   }
   else if(fg=="BWCS") {
      methname <- paste("Blended weight chi-square test (",
       "alpha=",par,")",sep="")
   }
   return(methname)
}
```

```
gof.stat <- function(X,E,fg,par,dig=NULL)

# funkce pro výpočet testové statistiky

# vstupní parametry
#    X - vektor empirických četností
#    E - vektor teoretických četností
#    fg - typ testu, přípustné hodnoty jsou "PowDiv", "BWHD"
#     a "BWCS"
#    par - doplňující parametr, pro "PowDiv" může být libovolné
#     číslo, pro "BWHD" a "BWCS" číslo z intervalu (0,1)
#    dig - počet desetinných míst při zaokrouhlování,
#     NULL pokud nemá zaokrouhlovat
# výstupní parametry
#      stat - testová statistika

{
   if(fg=="PowDiv") {
      if(par==0) { stat <- na.omit(2*X*log(X/E)) }
      else if(par==-1) { stat <-2*E*log(E/X) }
      else { stat <- (2*E*((X/E)^(par+1)-1))/(par*(par+1)) }
   }
   else if(fg=="BWHD") {
      stat <- ((X-E)^2)/((par*sqrt(X)+(1-par)*sqrt(E))^2)
   }
   else if(fg=="BWCS") {
      stat <- ((X-E)^2)/(par*X+(1-par)*E)
   }
   stat <- sum(stat)
   if(is.null(dig)==FALSE) { stat <- round(stat,dig) }
   return(stat)
}


gof.pval <- function(X=NULL,E,fg,par,tpval,simrep=2000,stat=NULL,
 stonly=FALSE,dig=NULL)

# funkce pro výpočet p-hodnoty testu

# vstupní parametry
#    X - vektor empirických četností
#    E - vektor teoretických četností
#    fg - typ testu, přípustné hodnoty jsou "PowDiv", "BWHD"
#     a "BWCS"
#    par - doplňující parametr, pro "PowDiv" může být libovolné
#     číslo, pro "BWHD" a "BWCS" číslo z intervalu (0,1)
```

```
#    tpval - způsob výpočtu p-hodnoty, přípustné hodnoty jsou
#     "a" (asymptotická p-hodnota počítaná z chi kvadrát rozdělení),
#     "e" (přesná p-hodnota, pouze pro malé vektory četností),
#     "s" (simulovaná p-hodnota počítaná metodou Monte Carlo)
#    simrep - počet opakování při výpočtu simulované p-hodnoty
#    stat - statistika, volitelné, jinak se vypočítá z X
#    stonly - TRUE pokud má místo p-hodnoty vypočítat
#      pouze pravděpodobnost statistiky
#    dig - počet desetinných míst při zaokrouhlování,
#     NULL pokud nemá zaokrouhlovat
# výstupní parametry
#      pvalue - p-hodnota testu

#   používá funkci rmultz2 z balíku combinat

{
   digst <- 10;
   k <- length(E);
   n <- sum(E);
   P <- E/n;
   if(is.null(stat)) { stat <- gof.stat(X,E,fg,par,dig=digst); }
   if(tpval=="a") {
      pvalue <- 1-pchisq(stat,k-1);
   }
   else if(tpval=="e") {
      mat <- matAll(n,k);
      if(stonly==FALSE) {
         mat <- matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E,
          fg=fg,par=par,dig=digst)>=stat,],ncol=k);
      } else {
         mat <- matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E,
          fg=fg,par=par,dig=digst)==stat,],ncol=k);
      }
      pvalue <- sum(apply(mat,MARGIN=1,FUN=dmultinom,prob=P))
   }
   else if(tpval=="s") {
      mat <- t(rmultz2(n,P,simrep));
      matrow <- nrow(mat);
      if(stonly==FALSE) {
         mat <- matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E,
          fg=fg,par=par,dig=digst)>=stat,],ncol=k);
      } else {
         mat <- matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E,
          fg=fg,par=par,dig=digst)==stat,],ncol=k);
      }
      pvalue <- nrow(mat)/matrow;
   }
   if(is.null(dig)==FALSE) { pvalue <- round(pvalue,dig) }
```

```
   return(pvalue);
}


gof.power <- function(n,P0,P1,size,fg,par,tpval="e",rand=FALSE,
 dig=NULL)

# funkce pro výpočet pravděpodobosti zamítnutí hypotézy P0
#  za platnosti P1, pouze pro malé vektory četností

# vstupní parametry
#    n - součet hodnot vektoru četností
#    P0 - vektor pravděpodobností nulové hypotézy
#    P1 - vektor pravděpodobností alternativní hypotézy
#    size - přesná hladina testu
#    fg - typ testu, přípustné hodnoty jsou "PowDiv", "BWHD"
#     a "BWCS"
#    par - doplňující parametr, pro "PowDiv" může být libovolné
#     číslo, pro "BWHD" a "BWCS" číslo z intervalu (0,1)
#    tpval - způsob výpočtu p-hodnoty, přípustné hodnoty jsou
#     "a" (asymptotická p-hodnota počítaná z chi kvadrát rozdělení),
#     "e" (přesná p-hodnota, pouze pro malé vektory četností),
#     "s" (simulovaná p-hodnota počítaná metodou Monte Carlo)
#    rand - TRUE pokud má použít znáhodněný test
#    dig - počet desetinných míst při zaokrouhlování,
#     NULL pokud nemá zaokrouhlovat
# výstupní parametry
#    power - síla testu

{
   digst <- 10;
   k <- length(P0);
   E0 <- P0*n;
   mat <- matAll(n,k);
   maxStat <- max(apply(matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,
    FUN=gof.pval,E=E0,fg=fg,par=par,tpval=tpval)>=size,],
    ncol=k),MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E0,fg=fg,par=par,
    dig=digst));
   mat1 <- matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E0,
    fg=fg,par=par,dig=digst)>maxStat,],ncol=k);
   mat2 <- matrix(mat[apply(mat,MARGIN=1,FUN=gof.stat,E=E0,
    fg=fg,par=par,dig=digst)==maxStat,],ncol=k);
   if(rand) {
      pran <- (size-gof.pval(E=E0,fg=fg,par=par,tpval=tpval,
       stat=maxStat))/gof.pval(E=E0,fg=fg,par=par,tpval=tpval,
       stat=maxStat,stonly=TRUE)+1;
   } else {
      pran <- 0;
```

```
   }
   power <- (sum(apply(mat1,MARGIN=1,FUN=dmultinom,prob=P1))
    +pran*sum(apply(mat2,MARGIN=1,FUN=dmultinom,prob=P1)));
   if(is.null(dig)==FALSE) { power <- round(power,dig); }
   return(power);
}


matAll <- function(n,k)

# funkce pro výpočet matice všech možných kombinací
#  vektoru četností

# vstupní parametry
#    n - součet hodnot vektoru četností
#    k - velikost vektoru četností
# výstupní parametry
#    mat - matice možností

{
   egA <- 0:n;
   egB <- list(egA);
   egC <- egB;
   for(i in 1:(k-1)) { egC <- c(egC,egB); }
   mat <- as.matrix(expand.grid(egC));
   mat <- mat[rowSums(mat)==n,];
   mat <- matrix(mat,ncol=k);
   return(mat);
}
```

Seznam použité literatury

[1] Anděl, J. *Základy matematické statistiky.* 2. vydání. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 80-7378-001-1.

[2] Basu, A., Sarkar, S. *On disparity based goodness-of-fit tests for multinomial models.* Statistics & Probability Letters 19, 307–312, 1994.

[3] Cressie, N., Read, T.R.C. *Multinomial Goodness-of-Fit Tests.* J. Roy Statist. Soc. Ser. B 46, 440–464, 1984.

[4] Freeman, M.F., Tukey, J.W. *Transformations related to the angular and the square root.* Ann. Math. Stat. 21, 607–611, 1950.

[5] Gokhale, D.V., Kullback, S. *The minimum discrimination information approach in analyzing categorical data.* Commun. Stat., Theory Methods A7, 987–1005, 1978.

[6] Lachout, P. *Teorie pravděpodobnosti.* 1. vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-730-5.

[7] Lindsay, B.G. *Residual adjustment functions: efficiency, robustness, and curvature in minimum distance problems.* Unpublished manuscript, Pennsylvania State Univ. (University Park, PA), 1993.

[8] Neyman, J. *Contribution to the theory of the χ^2 test.* Proc. 1st Berkley Symp. Math. Statist. Prob., 239–273, 1949.

[9] Pearson, K. *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling.* Philosophy Magazine Series (5) 50, 157–172, 1900.

[10] Simonoff, J. S. *Analyzing Categorical Data.* New York: Springer, 2003. ISBN 0-387-00749-0.

Seznam tabulek

2.1 Rodiny testových statistik 16
2.2 Testové statistiky 16

3.1 Přesná hladina testů $2nI^{\lambda}$ při testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2 na hladině $\alpha_0 = 0.05$ v modelu (3.1) 17
3.2 Přesná hladina testů $BWHD_{\alpha}$ při testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2 na hladině $\alpha_0 = 0.05$ v modelu (3.1) 18
3.3 Přesná hladina testů $BWCS_{\alpha}$ při testování pomocí asymptotického rozdělení χ^2 na hladině $\alpha_0 = 0.05$ v modelu (3.1) 19
3.4 Přesná síla znáhodněných testů založených na $2nI^{\lambda}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$ 20
3.5 Přesná síla znáhodněných testů založených na $2nBWHD_{\alpha}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$ . . . 21
3.6 Přesná síla znáhodněných testů založených na $2nBWCS_{\alpha}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$ . . . 22
3.7 Kořeny rovnice $U_i = 0$ v rozvoji $\mu_i' = \mathsf{E}(2nI^{\lambda})^i$ při $S = k^2$ 25
3.8 Kořeny rovnice $U_i = 0$ v rozvoji $\mu_i' = \mathsf{E}(2nBWHD_{\alpha})^i$ při $S = k^2$ 26
3.9 Kořeny rovnice $U_i = 0$ v rozvoji $\mu_i' = \mathsf{E}(2nBWCS_{\alpha})^i$ při $S = k^2$. 27

Seznam obrázků

2.1 Graf funkce G, která generuje testy založené na mocninných divergencích. 12
2.2 Graf funkce G, která generuje testy založené na BWHD. 13
2.3 Graf funkce G, která generuje testy založené na BWCS. 14

3.1 Graf síly testů založených na $2nI^{\lambda}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$ 21
3.2 Graf síly testů založených na $2nBWHD_{\alpha}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$ 22
3.3 Graf síly testů založených na $2nBWCS_{\alpha}$ v modelu (3.2), kde $k = 4$ a $n = 20$ při přesné hladině $\alpha_0 = 0.05$ 23