Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Bc. Jana Klůjová

Banach-Tarského paradox

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2011

Děkuji vedoucímu práce doc. RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D. za poskytnutí konzultací a cenných rad v průběhu tvorby bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 19. 5. 2011 Jana Klůjová

Název práce: Banach-Tarského paradox
Autor: Bc. Jana Klůjová
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
e-mail vedoucího: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme Banach-Tarského paradox a jiné paradoxní rozklady množin, grup a pologrup. Tyto rozklady jsou ukázány zejména na volných grupách a pologrupách. Zabýváme se slovy tvořenými písmeny, pomocí kterých lze zmíněné grupy konstruovat. Studujeme zde jak konečnou, tak spočetnou variantu paradoxních rozkladů. Následně se práce věnuje problematice ekvirozložitelnosti. V práci je proveden důkaz Banach-Schröder-Bernsteinovy věty. Ekvirozložitelnost je využita také v důkazu Banach-Tarského paradoxu.

Klíčová slova: Banach-Tarského paradox, paradoxní rozklad, ekvirozložitelnost

Title: The Banach-Tarski Paradox
Author: Bc. Jana Klůjová
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the Banach-Tarski Paradox and other paradoxical decompositions of sets, groups and semigroups. These decompositions are described especially using free groups and semigroups. We can construct such groups using words made of letters. We study both finite and denumerable paradoxical decomposition. Further we deal with equidecomposability, which we need for a proof of Banach-Tarski Paradox. We present a proof of Banach-Schröder-Berstein Theorem.

Keywords: Banach-Tarski Paradox, paradoxical decomposition, equidecomposability

Obsah

Úvod

Název bakalářské práce napovídá, že hlavním tématem je Banach-Tarského paradox. Banach-Tarského paradox se v práci ovšem objevuje až v jejím závěru; stěžejní část práce je věnována paradoxním rozkladům množin, grup a pologrup. Určitý odklon od hlavního tématu je způsoben již existující bakalářskou prací Banach-Tarského paradox, jejímž autorem je Antonín Holub (viz [3]), která byla obhájena v roce 2010.

Banach-Tarského paradox říká, že můžeme vzít libovolně velkou kouli, rozložit ji na konečný počet částí a z nich poskládat koule dvě o stejném poloměru, jaký měla původní koule. Jde o tvrzení, které odporuje běžné zkušenosti z reálného světa.

Důkaz Banach-Tarského paradoxu navazuje na paradox Hausdorffův, který ukazuje, že je možné až na spočetnou množinu paradoxně rozložit sféru. Tedy z kousků získaných tímto rozkladem můžeme získat stejné sféry dvě. Stefanu Banachovi a Alfredu Tarskému tedy stačilo už „jen“ dokázat, že paradoxní rozklad sféry je možné provést, aniž bychom museli vynechat jistou spočetnou množinu.

V práci je dále ukázáno, jaké paradoxy mohou způsobovat volné grupy a pologrupy. Na tuto problematiku navazuje např. Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox, který pojednává o existenci neprázdné paradoxní podmnožiny $\mathbb{R}^2$.

Ačkoliv paradoxy zajímaly matematiky odjakživa, popsaná problematika paradoxních rozkladů se objevuje až ve 20. století. Jedná se tedy o část matematiky relativně mladou.

Kapitola 1

Paradoxní grupy a rozklady

Hlavním tématem bakalářské práce je Banach-Tarského paradox. Jedná se o bizarní duplikaci koule v $\mathbb{R}^3$, která je provedena prostřednictvím transformací, které zachovávají vzdálenosti. Jde o posunutí a rotace.

Konkrétně řečeno, Banach-Tarského paradox popisuje, že je možné jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ rozebrat na konečně mnoho částí, které „přeskládáme" prostřednictvím rotací a translací tak, že získáme kouli o dvojnásobném poloměru.

Pro vysvětlení problematiky Banach-Tarského paradoxu je třeba formálně definovat zmíněnou duplikaci množiny; vhodný způsob je pracovat s akcemi grupy.

Následující dva odstavce proto definují akci grupy na množině a paradoxní množinu.

Definice 1.1. Nechť G je grupa a X je neprázdná množina. *Akcí grupy G* na množině X rozumíme operaci $\cdot : G \times X \to X$ takovou, že pro všechna $g, h \in G$ a pro všechna $x \in X$ platí:

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot x) &= (gh) \cdot x, \\ 1 \cdot x &= x, \end{aligned}$$

kde 1 je jednotkový prvek G.

Dále budeme pro zjednodušení psát gx, resp. Gx, místo $g \cdot x$, resp. $G \cdot x$.

Definice 1.2. Nechť je dána akce grupy G na množině X. Předpokládejme, že $E \subseteq X$. Řekneme, že E je *G-paradoxní*, jestliže existují $m, n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní množiny $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset E$ a $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ takové, že $E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$.

1.1 Volné neabelovské grupy a pologrupy

Jakákoliv grupa definuje akci na sobě prostřednictvím násobení zleva, to znamená pro $g, h \in G$ definujme $g \cdot h = g \times h$, kde $\times$ značí operaci násobení na grupě G. Vhodným příkladem G-paradoxní množiny je volná grupa G se dvěma generátory s akcí na sobě prostřednictvím násobení zleva.

Definice 1.3. Je-li M podmnožina pologrupy S, potom S je *volná pologrupa s volnou bází* M, jestliže pro každou pologrupu H a pro každou funkci $f : M \to H$ existuje právě jeden homomorfismus $\phi : S \to H$ rozšiřující f.

Potom *volnou pologrupou* rozumíme pologrupu, která má alespoň jednu volnou bázi.

Definice 1.4. Je-li M podmnožina grupy G, potom G je *volná grupa s volnou bází* M, jestliže pro každou grupu H a pro každou funkci $f : M \to H$ existuje právě jeden homomorfismus $\phi : G \to H$ rozšiřující f.

Potom *volnou grupou* rozumíme grupu, která má alespoň jednu volnou bázi.

Nechť $X = \{\sigma | \sigma \in X\}$ a $Y = \{\mu | \mu \in Y\}$ jsou nějaké neprázdné disjunktní množiny takové, že existuje bijekce X na Y, která každému prvku $\sigma \in X$ jednoznačně přiřadí prvek $\mu \in Y$. Ten označíme σ^{-1}. Tedy $X = \{\sigma | \sigma \in X\}$ a $Y = \{\sigma^{-1} | \sigma \in X\}$. Označme $\widetilde{X} = X \cup Y$.

Prvky množiny $\widetilde{X}$ budeme nazývat *písmena*, pod pojmem *slovo* budeme rozumět konečnou posloupnost písmen, včetně prázdné posloupnosti. Tu budeme nazývat *prázdný řetězec* a označovat 1. Potom můžeme definovat množinu $\widetilde{W}$ tak, že $\widetilde{W} = \{\sigma_1 \dots \sigma_n | \sigma_i \in \widetilde{X}, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Nechť $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \mu_1, \dots, \mu_l \in \widetilde{X}$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom $\sigma_1 \dots \sigma_k$ a $\mu_1 \dots \mu_l$ jsou slova. Definujme asociativní binární operaci skládání slov tak, že výsledkem složení slov $\sigma_1 \dots \sigma_k$ a $\mu_1 \dots \mu_l$ je slovo $\sigma_1 \dots \sigma_k \mu_1 \dots \mu_l$. Tuto operaci budeme nazývat *spojení*. Jednotkový prvek k binární operaci spojení je prázdný řetězec.

$\widetilde{W}$ spolu s prázdným řetězcem a s asociativní binární operací spojení tvoří pologrupu, kterou budeme dále označovat $\widetilde{W}$.

Dvojici prvků $\sigma\sigma^{-1}$ nazveme *sdružený pár*; sdruženým párem je i dvojice $\sigma^{-1}\sigma$. Pokud ve slově již neexistují žádná dvě písmena, která stojí vedle sebe a tvoří sdružený pár, potom se jedná o slovo *redukované*. Abychom vytvořili z neredukovaného slova slovo redukované, postupně odebíráme ze slova sdružené páry.

Protože slova mají vždy konečný počet písmen, proces odebírání sdružených párů musí být také konečný. Při tvorbě redukovaných slov nezáleží na pořadí odebírání sdružených párů. Tato skutečnost plyne z [4, Věta 11.1].

Z popsaného postupu vyplývá, že redukované slovo je buď slovo prázdné, nebo $\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\dots\sigma_l^{k_l}$, kde $\sigma_i \in X$, $k_i \in \{1, -1\}$, $i \in \{1, \dots, l\}$ a žádná dvě $\sigma_i^{k_i}\sigma_{i+1}^{k_{i+1}}$, $i \in \{1, \dots, l-1\}$, netvoří sdružený pár.

Mějme slovo $w = \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\dots\sigma_n^{k_n}$. *Podslovem* slova w je buď prázdný řetězec nebo slovo ve tvaru $v = \sigma_i^{k_i}\dots\sigma_j^{k_j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$. *Inverzním slovem* ke slovu w rozumíme slovo $w^{-1} = \sigma_n^{-k_n}\dots\sigma_2^{-k_2}\sigma_1^{-k_1}$. Dvojici ww^{-1}, resp. $w^{-1}w$ budeme nazývat *sdružená slova.*

Délka slova $\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\dots\sigma_n^{k_n}$ je n, délka prázdného slova je 0.

Definujme ještě operaci spojení pro redukovaná slova. Pokud spojením slov vznikne ve výsledném slově sdružený pár, je ze slova odebrán. Budou-li potom stát vedle sebe další dvě písmena, která tvoří sdružený pár, opět jsou ze slova odebrána, dokud se nejedná o slovo redukované. Tento proces je opět konečný.

Nechť w a u jsou redukovaná slova. Existuje-li podslovo v slova w tak, že $w = w'v$, a současně v^{-1} je podslovo slova u takové, že $u = v^{-1}u''$, potom $w'u''$ je redukované slovo, pokud v je nejdelší možné podslovo s požadovanými vlastnostmi. Tedy po odebrání sdružených slov má redukované slovo příslušné ke slovu wu tvar $w'u''$.

Nyní můžeme definovat grupu W s binární asociativní operací spojení pro redukovaná slova, inverzní operací $^{-1}$ a jednotkovým prvkem 1. Nosičem grupy W je množina všech redukovaných slov obsažených v množině $\widetilde{W}$.

Jakékoliv dvě (volné) báze dané grupy mají stejnou mohutnost. Tu označujeme jako *stupeň* volné grupy. Důkaz je možné najít v [4, Věta 11.4].

Tvrzení 1.1. *Volné grupy stejného stupně jsou izomorfní.*

Důkaz. Označme F volnou grupu s bází M a G volnou grupu s bází N, dále nechť $f : M \to N$ je bijekce. Protože se jedná o volnou grupu, tak lze f a f^{-1} rozšířit na homomorfismy $h : F \to G$ a $\widetilde{h} : G \to F$. Potom zobrazení $\widetilde{h}h : F \to F$, resp. $h\widetilde{h} : G \to G$ lze restringovat na množiny M, resp. N, na kterých se se jedná o identitu. Jelikož se jedná o volnou grupu, rozšíření na homomorfismus je jednoznačně určené. Proto musí platit $h\widetilde{h} = id_G$ a $\widetilde{h}h = id_F$ a grupy F a G jsou izomorfní. □

Navíc zřejmě platí, že jakákoliv grupa, která je izomorfní volné grupě, je také volná.

Věta 1.2. *Volná grupa F stupně 2 je F-paradoxní, jestliže uvažujeme akci grupy F na sobě pomocí násobení zleva.*

Důkaz. Předpokládejme, že σ, τ jsou volné generátory grupy F. Pro $\rho \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$ definujme $W(\rho)$ jako množinu takových prvků (neboli redukovaných slov) F, které začínají vlevo písmenem ρ a jsou složeny z písmen σ, σ^{-1}, τ, τ^{-1}. Potom F můžeme zapsat jako sjednocení

$$\{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$$

po dvou disjunktních množin. Navíc platí

$$F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1}) \tag{1.1}$$

a

$$F = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1}), \tag{1.2}$$

protože slova v F mohou začínat buď na σ, ta jsou obsažena v množině $W(\sigma)$, nebo na znak různý od σ, která jsou v množině $\sigma W(\sigma^{-1})$; přidáme-li totiž před slova začínající na σ^{-1} písmeno σ, vznikne sdružený pár, který je ze slova odstraněn, aby se stále jednalo o slovo redukované.

Potom pro $h \in F \backslash W(\sigma)$ platí

$$\sigma^{-1} h \in W(\sigma^{-1}),$$

$$h = \sigma(\sigma^{-1} h) \in \sigma W(\sigma^{-1}).$$

Nyní položme $A_1 = W(\sigma)$, $A_2 = W(\sigma^{-1})$, $B_1 = W(\tau)$, $B_2 = W(\tau^{-1})$ a $g_1 = 1$, $g_2 = \sigma$, $h_1 = 1$ a $h_2 = \tau$. Podle (1.1) a (1.2) dostáváme

$$F = g_1 A_1 \cup g_2 A_2$$

a

$$F = h_1 B_1 \cup h_2 B_2,$$

tedy F je F-paradoxní.

□

1.2 Libovolné bijekce

Pojem nekonečna vede ke zdánlivě paradoxním konstrukcím; často se jedná o operace, které změní „velikost" objektu, ačkoliv podle běžného lidského vnímání by velikost měly zachovávat. Známým příkladem této skutečnosti je Galileovo pozorování, které říká, že množina celých kladných čísel může být vzájemně jednoznačně přiřazena množině druhých mocnin těchto čísel. Množina druhých mocnin celých kladných čísel je vlastní podmnožinou množiny celých kladných čísel; přesto jsou mohutnosti těchto množin stejné.

Moderní verzí Galileova pozorování je následující věta, která popisuje, jak je jakákoliv nekonečná množina paradoxní vzhledem ke grupě všech permutací na této množině.

Věta 1.3. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) existuje bijekce X na $X \times \{0, 1\}$;

(2) X je paradoxní vzhledem ke grupě $S(X)$, což je grupa všech permutací na X (bijekce X na X);

(3) X je nekonečná, nebo prázdná.

Důkaz. *(2)* $\Rightarrow$ *(1)*: X je paradoxní, tedy existují disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_n \subset X$ a $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in S(X)$ takové, že

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{n} h_j B_j.$$

Označme

$$A'_1 = A_1,$$
$$A'_i = g_i^{-1}(g_i A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} g_k A_k), i = 2, \ldots, m,$$
$$B'_1 = B_1,$$
$$B'_j = h_j^{-1}(h_j B_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} h_k B_k), j = 2, \ldots, n,$$

a definujme

$$g'_i = g_i|_{A'_i}, i = 1, \ldots, m.$$

Stejně definujme h'_j, $j = 1, \ldots, n$ jako

$$h'_j = h_j|_{B'_j}, j = 1, \ldots, n.$$

Zobrazení f z $\bigcup_{i=1}^m A'_i \cup \bigcup_{j=1}^n B'_j$ do $X \times \{0,1\}$ definujeme tak, že:

$$\begin{aligned} f|_{A'_1} &= g'_1 \times \{0\}, \\ &\vdots \\ f|_{A'_m} &= g'_m \times \{0\}, \\ f|_{B'_1} &= h'_1 \times \{1\}, \\ &\vdots \\ f|_{B'_n} &= h'_n \times \{1\}. \end{aligned}$$

Definice je korektní, protože množiny $A'_1, \ldots, A'_m$, $B'_1, \ldots, B'_n$ jsou po dvou disjunktní.

Definičním oborem tohoto zobrazení je podmnožina X a oborem hodnot je $X \times \{0,1\}$, protože $\bigcup_{i=1}^m (g'_i \times \{0\}) A'_i = X \times \{0\}$ a $\bigcup_{j=1}^n (h'_j \times \{1\}) B'_j = X \times \{1\}$. Zobrazení $g'_1, \ldots, g'_m, h'_1, \ldots, h'_n$ jsou prostá na příslušných množinách $A'_1, \ldots, A'_m$, $B'_1, \ldots, B'_n$. Navíc z konstrukce těchto množin plyne, že vezmeme-li bod $x \in A'_i$ a bod $y \in A'_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, potom jejich obrazy musí být různé; stejně tak pro body z množin B'_i a B'_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Máme-li bod $x \in A'_i$ a $y \in B'_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, tak obrazy opět musí být různé, protože dostáváme $g'_i(x) \times \{0\}$ a $h'_j(y) \times \{1\}$. Tedy zobrazení f je prosté.

Existuje inverzní zobrazení k f, které prostě zobrazí $X \times \{0,1\}$ do X. Potom můžeme využít Cantor-Bernsteinovu větu, která říká, že existuje-li prosté zobrazení množiny A do B a prosté zobrazení množiny B do A, pak existuje také bijekce mezi těmito dvěma množinami (důkaz je možné nalézt v [1, Kapitola I, Věta 5.48]). Z toho plyne, že existuje bijekce X na $X \times \{0,1\}$.

(1) ⇒ (2): Existuje bijekce X na $X \times \{0,1\}$, označme ji Φ. Potom existuje i inverzní zobrazení Φ^{-1}, $\Phi^{-1} : X \times \{0,1\} \to X$. Označme $A = \Phi^{-1}(X \times \{0\})$, $B = \Phi^{-1}(X \times \{1\})$, A, B jsou podmnožiny X a platí $A \cup B = X$ a $A \cap B = \emptyset$. Také musí platit $\Phi(A) = X \times \{0\}$, $\Phi(B) = X \times \{1\}$.

Nyní ještě označme

$$\begin{aligned} A_1 &= \Phi^{-1}(A \times \{0\}), \\ A_2 &= A \setminus A_1, \\ B_1 &= \Phi^{-1}(B \times \{1\}), \\ B_2 &= B \setminus B_1. \end{aligned}$$

Nechť $\pi : X \times \{0,1\} \to X$ je projekce, tzn. pro všechna $x \in X$ platí $\pi(x,0) = x$, resp. $\pi(x,1) = x$.

Definujme následující zobrazení:

$$g_1|_{A_1} = \pi \circ \Phi|_{A_1},$$

$$g_2|_{A_2} = \pi \circ \Phi|_{A_2},$$

$$h_1|_{B_1} = \pi \circ \Phi|_{B_1},$$

$$h_2|_{B_2} = \pi \circ \Phi|_{B_2}.$$

Zobrazení g_1, g_2, h_1, h_2 dodefinujeme na celém X pomocí bijekce mezi $B \cup A_2$ a B, resp. $B \cup A_1$ a B, resp. $A \cup B_2$ a A, resp. $A \cup B_1$ a A. Ukážeme, že bijekce $\psi : B \cup A_2 \to B$ existuje. Víme, že platí $\Phi^{-1}(X \times \{1\}) = B$, kde Φ^{-1} je prosté zobrazení. Vezmeme-li v úvahu jen podmnožinu $(B \cup A_2) \times \{1\}$, dostáváme $\Phi^{-1}((B \cup A_2) \times \{1\}) \subset B$. Potom platí, že $B \cup A_2$ je subvalentní B, a triviálně také B je subvalentní $B \cup A_2$, protože jde o vlastní podmnožinu. Musí tedy existovat bijekce $\psi : B \cup A_2 \to B$ podle Cantor-Bernsteinovy věty (viz [1, Kapitola I, Věta 5.48]). Potom g_1 definujeme jako:

$$g_1|_{A_1} = \pi \circ \Phi|_{A_1},$$

$$g_1|_{B \cup A_2} = \psi.$$

Zobrazení g_2, h_1 a h_2 dodefinujeme obdobně.

Potom platí

$$g_1 A_1 \cup g_2 A_2 = A \cup B = X$$

a

$$h_1 B_1 \cup h_2 B_2 = A \cup B = X.$$

Z toho plyne, že X je paradoxní.

(1) $\Rightarrow$ *(3)*: Tvrzení je zřejmé.

(3) $\Rightarrow$ *(1)*: Jde o důsledek axiomu výběru, viz [1, Kapitola I, Příklady 7.15].

$\square$

1.3 Spočetně paradoxní množiny

V Definici 1.2 jsme definovali paradoxní množinu s využitím konečně mnoha disjunktních podmnožin. Nyní zavedeme pojem, který se týká spočetně mnoha podmnožin.

Definice 1.5. Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X. Předpokládejme, že $E \subseteq X$. Řekneme, že E je *spočetně G-paradoxní*, jestliže existují po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ podmnožiny E a $g_i, h_j \in G$, $i, j \in \mathbb{N}$ takové, že platí $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} h_j B_j$.

Pro následující větu je třeba zavést značení. Nechť S^1 označuje jednotkovou kružnici v $\mathbb{R}^2$ a SO_2 grupu rotací na kružnici.

Věta 1.4. *S^1 je spočetně SO_2-paradoxní.*

Důkaz. Nechť M je výběrová množina z tříd ekvivalence relace na S^1; ekvivalence je dána následujícím způsobem: dva body jsou ekvivalentní, můžeme-li jeden zobrazit na druhý prostřednictvím rotace okolo počátku o úhel rovný racionálnímu násobku 2π. Racionální čísla jsou spočetná, tedy tyto rotace mohou být očíslovány přirozenými čísly - $\{\rho_i | i \in \mathbb{N}\}$. Nechť $M_i = \rho_i(M)$. Potom platí, že $\{\rho_i(M) | i \in \mathbb{N}\} = S^1$, tedy $\{M_i | i \in \mathbb{N}\}$ je rozklad S^1. Protože každé dvě množiny M_i lze převést prostřednictvím rotací jednu na druhou, tak $\{M_i | i \textit{ sudé}\}$ mohou být zobrazeny tak, aby pokryly celé S^1. Totéž platí o $\{M_i | i \textit{ liché}\}$, takže množina S^1 je spočetně paradoxní.

□

Důsledek 1.5. *Označuje-li G grupu translací modulo 1 na intervalu $[0, 1)$, potom $[0, 1)$ je spočetně G-paradoxní.*

Důkaz. Vezmeme bijekci, která matici

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

reprezentující rotaci o úhel $\theta \in [0, 2\pi)$ přiřadí $\frac{\theta}{2\pi} \in [0, 1)$.

Skládání rotací provádíme prostřednictvím součinu matic, které rotace reprezentují, kdežto při skládání translací se využívá součtu. Mějme dvě rotace o úhly θ, ω reprezentované maticemi

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.$$

Násobením matic zřejmě dostaneme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\omega) & -\sin(\theta+\omega) \\ \sin(\theta+\omega) & \cos(\theta+\omega) \end{pmatrix},$$

což je popsanou bijekcí převedeno na $\frac{(\theta+\omega) mod 2\pi}{2\pi}$, tedy tato bijekce indukuje izomorfismus SO_2 na G.

Odtud a z Věty 1.4 již snadno plyne tvrzení důsledku.

□

Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox říká, že v $\mathbb{R}^2$ existuje neprázdná paradoxní podmnožina vzhledem ke grupě izometrií. Toto tvrzení je důsledkem Vět 1.6 a 1.7.

Pro potřeby Věty 1.6 je třeba vzít v úvahu následující poznámku. Nechť X je neprázdná množina a G je grupa, jejímiž prvky jsou bijekce z X do X. Mějme $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Na slovo $w = \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\ldots\sigma_n^{k_n}$, kde $k_i \in \{1, -1\}$, $i = 1, \ldots, n$, je nyní možné nahlížet ze dvou různých úhlů pohledu. Za prvé je w posloupnost písmen $\sigma_1^{k_1}, \sigma_2^{k_2}, \ldots, \sigma_n^{k_n}$. Za druhé, pokud se na $\sigma_i^{k_i}$, $i = 1, \ldots, n$, díváme jako na zobrazení, tak potom i na slovo w lze pohlížet jako na zobrazení definované předpisem $w = \sigma_1^{k_1} \circ \sigma_2^{k_2} \circ \ldots \circ \sigma_n^{k_n}$.

Věta 1.6. *Nechť G_2 je grupa izometrií v rovině. Potom existují izometrie τ a ρ $\in G_2$ takové, že pologrupa S generovaná τ a ρ splňuje:*

(i) jestliže w_1, resp. $w_2 \in S$ je redukované slovo sestávající z písmen τ a ρ začínající na τ, resp. ρ, tak $w_1(\mathbf{0}) \neq w_2(\mathbf{0})$, kde $\mathbf{0}$ je počátek v $\mathbb{R}^2$;

(ii) S je volná pologrupa.

Důkaz. *(i)* Pro zjednodušení důkazu ztotožníme $\mathbb{R}^2$ s komplexní rovinou. Zvolme θ tak, že $u = e^{i\theta}$ je transcendentní komplexní číslo. Existuje pouze spočetně mnoho algebraických (tzn. netranscendentních komplexních) čísel na jednotkovém kruhu, takže takové θ existuje. Netranscendentní komplexní čísla jsou kořeny polynomů s racionálními koeficienty. Racionálních čísel je spočetně mnoho a každý polynom má konečně mnoho kořenů. Z toho plyne, že algebraických čísel je také spočetně mnoho, protože se jedná o spočetné sjednocení spočetných množin.

Nechť τ označuje translaci $\tau(z) = z + 1$ a nechť ρ značí rotaci $\rho(z) = uz$. Potřebujeme dokázat, že τ a ρ splňují podmínku $w_1(\mathbf{0}) \neq w_2(\mathbf{0})$.

Mějme w_1, resp. $w_2 \in S$ slova začínající na τ, resp. ρ, taková, že platí $w_1(\mathbf{0}) = w_2(\mathbf{0})$. Ovšem w_1 a w_2 jsou různá slova. Předpokládejme, že $w_1 = \tau^{j_1}\rho^{j_2}...\tau^{j_m}$ a $w_2 = \rho^{k_1}\tau^{k_2}...\tau^{k_l}$, kde $\tau^k = \underbrace{\tau \dots \tau}_{k\times}$, $\rho^k = \underbrace{\rho \dots \rho}_{k\times}$, $m, l \geq 1$ a $j_1, ..., j_m$, $k_1, ..., k_l$ $\in \mathbb{N}$. Víme, že $\rho(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tedy předpokládáme, že obě slova končí na mocninu τ. Potom

$$\begin{array}{rcl} w_1(\mathbf{0}) & = & j_1 + j_3 u^{j_2} + j_5 u^{j_2+j_4} + ... + j_m u^{j_2+j_4+...+j_{m-1}}, \\ w_2(\mathbf{0}) & = & k_2 u^{k_1} + k_4 u^{k_1+k_3} + ... + k_l u^{k_1+k_3+...+k_{l-1}}. \end{array}$$

Jestliže $w_1(\mathbf{0}) = w_2(\mathbf{0})$, tak tyto výrazy můžeme odečíst a získáme nekonstantní polynom s celočíselnými koeficienty, jehož kořenem je $e^{i\theta}$. To je ve sporu s volbou θ.

(ii) Nyní chceme ukázat, že z podmínky v *(i)* plyne, že pologrupa je volná.

Mějme zobrazení $f : M \to H$, kde $M = \{\tau, \rho\}$ a H je libovolná pologrupa. Chceme ukázat, že f lze jednoznačně rozšířit na homomorfismus $\phi : S \to H$.

Nechť $w \in S$, tedy w je ve tvaru $\tau^{k_1}\rho^{k_2} \dots \tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$, $k_1, \dots k_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazení $\phi : S \to H$ tak, že $\phi|_M = f$, to znamená $\phi(\tau) = f(\tau)$, $\phi(\rho) = f(\rho)$. Potom $\phi(w) = (\phi(\tau))^{k_1}(\phi(\rho))^{k_2} \dots (\phi(\tau))^{k_{m-1}}(\phi(\rho))^{k_m}$. Aby bylo zobrazení definováno korektně, je třeba ukázat, že vyjádření w je jednoznačné.

Předpokládejme, že

$$w_1 = \tau^{k_1}\rho^{k_2} \dots \tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$$

a

$$w_2 = \tau^{l_1}\rho^{l_2} \dots \tau^{l_{n-1}}\rho^{l_n},$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $k_1, k_m, l_1, l_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_2, \dots, k_{m-1}, l_2, \dots, l_{n-1} \in \mathbb{N}$, jsou různá vyjádření slova w. Nejprve budeme předpokládat, že jedno slovo je iniciální částí druhého, tedy lze psát $w_2 = w_1 w'$ nebo $w_1 = w_2 w'$. Potom w' je identita, ale nejedná se o prázdný řetězec. Budeme se věnovat variantě $w_1 = w_2 w'$, tedy

$w' = \tau^{k_j}\rho^{k_{j+1}}\dots\tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$, nebo $w' = \rho^{k_j}\tau^{k_{j+1}}\dots\tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$. V případě, že $w' = \tau^{k_j}\dots\rho^{k_m}$, platí $w'\rho(\mathbf{0}) = \rho(\mathbf{0})$, což je spor s předpokladem, protože slovo $w'\rho$ začíná na τ. Pokud $w' = \rho^{k_j}\dots\rho^{k_m}$, tak $w'\tau(\mathbf{0}) = \tau(\mathbf{0})$, což je také spor.

V případě, že se nejedná o iniciální část, rozlišujeme několik dalších případů. Pokud $k_1 = 0$ a $l_1 \neq 0$, tak $w_1 = \rho^{k_2}\dots\tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$ a $w_2 = \tau^{l_1}\rho^{l_2}\dots\tau^{l_{n-1}}\rho^{l_n}$. Vidíme, že w_1 začíná na ρ a w_2 na τ. Potom ale musí platit $w_1(\mathbf{0}) \neq w_2(\mathbf{0})$, což je spor.

Případ, kdy $l_1 = 0$ a $k_1 \neq 0$ lze přivést ke sporu obdobně.

Nyní mějme $k_1 \neq 0$, $l_1 \neq 0$, nebo $k_1 = 0$, $l_1 = 0$. Nechť j je první přirozené číslo takové, že $l_j \neq k_j$. Potom zřejmě

$$\tau^{k_1}\rho^{k_2}\dots\tau^{k_{j-1}} = \tau^{l_1}\rho^{l_2}\dots\tau^{l_{j-1}}$$

nebo

$$\tau^{k_1}\rho^{k_2}\dots\rho^{k_{j-1}} = \tau^{l_1}\rho^{l_2}\dots\rho^{l_{j-1}}.$$

Budeme se věnovat variantě, kdy $\tau^{k_1}\rho^{k_2}\dots\tau^{k_{j-1}} = \tau^{l_1}\rho^{l_2}\dots\tau^{l_{j-1}}$. Označme

$$w_1' = \rho^{k_j}\tau^{k_{j+1}}\dots\rho^{k_m}$$

a

$$w_2' = \rho^{l_j}\tau^{l_{j+1}}\dots\rho^{l_n},$$

tedy platí

$$w_1 = \tau^{k_1}\rho^{k_2}\dots\tau^{k_{j-1}}w_1'$$

a

$$w_2 = \tau^{l_1}\rho^{l_2}\dots\tau^{l_{j-1}}w_2'.$$

Předpokládejme, že $k_j > l_j$. Pak lze psát

$$w_1' = \rho^{l_j}\rho^{k_j-l_j}\tau^{k_{j+1}}\dots\tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$$

a

$$w_2' = \rho^{l_j}\tau^{l_{j+1}}\dots\tau^{l_{n-1}}\rho^{l_n}.$$

Položme

$$w_1'' = \rho^{k_j-l_j}\tau^{k_{j+1}}\dots\tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$$

a

$$w_2'' = \tau^{l_{j+1}}\dots\tau^{l_{n-1}}\rho^{l_n},$$

tedy máme $w_1' = \rho^{l_j} w_1''$ a $w_2' = \rho^{l_j} w_2''$. Stejně jako v předchozím případě dostáváme spor, protože w_1'' začíná na ρ a w_2'' na τ.

Zbývá ukázat jednoznačnost rozšíření na homomorfismus. Nechť máme $\phi : S \to H$, $\phi|_M = f$, a $\psi : S \to H$, $\psi|_M = f$. Předpokládejme, že existuje $w = \tau^{k_1}\rho^{k_2}\dots\tau^{k_{m-1}}\rho^{k_m}$ tak, že $\phi(w) \neq \psi(w)$. Musí tedy platit

$$(\phi(\tau))^{k_1}(\phi(\rho))^{k_2}\dots(\phi(\tau))^{k_{m-1}}(\phi(\rho))^{k_m} \neq (\psi(\tau))^{k_1}(\psi(\rho))^{k_2}\dots(\psi(\tau))^{k_{m-1}}(\psi(\rho))^{k_m},$$

a tedy

$$(f(\tau))^{k_1}(f(\rho))^{k_2}\dots(f(\tau))^{k_{m-1}}(f(\rho))^{k_m} \neq (f(\tau))^{k_1}(f(\rho))^{k_2}\dots(f(\tau))^{k_{m-1}}(f(\rho))^{k_m},$$

což je spor.

Homomorfismus je určený jednoznačně a S je volná pologrupa.

□

Věta 1.7. *Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X. Nechť existuje nějaké $x \in X$ a nechť G obsahuje τ, ρ takové, že pro jakákoliv dvě slova w_1, w_2 složená z τ, ρ, z nichž jedno začíná na τ a druhé na ρ, platí $w_1(x) \neq w_2(x)$. Potom existuje neprázdná G-paradoxní podmnožina X.*

Důkaz. Nechť S je podpologrupa grupy G generovaná τ, ρ a E je S-orbita x, tj. $E = Sx = \{gx|g \in S\}$. Potom $\tau(E) \subseteq E$, $\rho(E) \subseteq E$. Podle předpokladu $\tau u_1(x) \neq \rho u_2(x)$ pro jakákoliv u_1, $u_2 \in S$. Platí $\tau(E) \cap \rho(E) = \emptyset$.

Zřejmě $\tau^{-1}(\tau E) = E$ a $\rho^{-1}(\rho E) = E$, tedy E je paradoxní.

□

Jak již bylo řečeno, Věta 1.6 a Věta 1.7 dokazují Sierpiński-Mazurkiewiczův paradox, tedy že v $\mathbb{R}^2$ existuje neprázdná paradoxní podmnožina vzhledem ke grupě izometrií. Z Věty 1.6 plyne, že je-li G_2 grupa izometrií v rovině a S je její volná podpologrupa, potom G_2 obsahuje τ a ρ takové, že pro jakákoliv dvě slova w_1, w_2 složená z τ, ρ, z nichž jedno začíná na τ a druhé na ρ, platí $w_1(\mathbf{0}) \neq w_2(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Tím jsou splněny podmínky Věty 1.7 a tedy existuje neprázdná G_2-paradoxní podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Zmíněné konstrukce byly základem pro geometrické paradoxy. Ačkoliv ve Větách 1.6 a 1.7 se pracuje s pojmem pologrupy, častěji je třeba uvažovat grupu. Analogií Věty 1.7 je skutečnost, že paradoxní dekompozici grupy lze převést na akci grupy bez netriviálních pevných bodů; to znamená, je-li grupa paradoxní a je dána její akce na množině X bez netriviálních pevných bodů, potom je i množina X paradoxní.

Definice 1.6. Nechť G je grupa a X množina. Pak akce grupy G na množině X je bez *netriviálních pevných bodů*, pokud pro všechna $g \in G$ platí: je-li $g \neq 1$, pak $gx \neq x$ pro všechna $x \in X$.

Tvrzení 1.8. *Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X bez netriviálních pevných bodů. Nechť G je G-paradoxní vzhledem k akci na sobě prostřednictvím násobení zleva. Potom X je G-paradoxní.*

Důkaz. Nechť G je grupa, A_i, $B_j \subseteq G$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, jsou po dvou disjunktní množiny, g_i, $h_j \in G$ a $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$. Pomocí axiomu výběru nalezneme množinu M tak, že obsahuje jeden prvek z každé G-orbity v X. Potom $\{gM | g \in G\}$ je rozklad X. Pro všechna i, j, $i \neq j$, totiž platí, že množiny $g_i M$ a $g_j M$ jsou disjunktní, což plyne z neexistence netriviálních pevných bodů akce grupy G. Pokud by totiž $g_i M \cap g_j M \neq \emptyset$, pak existuje $x \in g_i M \cap g_j M$, tedy můžeme psát $x = g_i m = g_j m'$. Potom platí $m = g_i^{-1} g_j m'$, takže m a m' musí ležet ve stejné orbitě. Tedy $m = m'$, protože množina M obsahuje z každé G-orbity právě jeden prvek.

Pak $g_i^{-1} g_j m = g_i^{-1} x = g_i^{-1} g_i m = m$, tedy $g_i^{-1} g_j = 1$. Z toho plyne, že $g_i = g_j$, což je spor s naším předpokladem.

Nyní označme

$$A_i^* = \bigcup \{gM | g \in A_i\},$$

$$B_j^* = \bigcup \{gM | g \in B_j\}.$$

Potom $\{A_i^* | i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{B_j^* | j \in \{1, \ldots, m\}\}$ je po dvou disjunktní systém podmnožin X, protože $\{A_i | i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{B_j | j \in \{1, \ldots, m\}\}$ je po dvou disjunktní systém a akce grupy G na množině X je bez netriviálních pevných bodů. Jelikož platí $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i$, $G = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$, pak platí i $X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i^*$, $X = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j^*$, tedy X je G-paradoxní.

□

Kapitola 2

Duplikace sféry

2.1 Ekvirozložitelnost

Pro potřeby následující věty je třeba definovat nezávislou množinu.

Definice 2.1. Nechť G je grupa a S je podmnožina G. Potom S je *nezávislá*, jestliže se jedná o volnou množinu generátorů generující nějakou podgrupu H grupy G.

Věta 2.1. *Existují dvě nezávislé rotace Φ a ρ okolo os procházejících počátkem v $\mathbb{R}^3$ takové, že generují volnou podgrupu stupně 2 grupy SO_3.*

Důkaz. Nechť Φ je rotace okolo osy z proti směru hodinových ručiček a ρ je rotace okolo osy x také proti směru hodinových ručiček, obě o úhel $\arccos \frac{1}{3}$. Přesněji:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že neexistuje netriviální redukované slovo složené z $\Phi^{\pm 1}$ a $\rho^{\pm 1}$ takové, jehož odpovídající zobrazení dává identitu.

Protože platí

$$\rho^{\pm 1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)\,,$$

omezíme se na případy, kdy slova končí na $\Phi^{\pm 1}$. Předpokládáme-li totiž, že w je slovo ve tvaru $w'\rho^{\pm 1}$, potom nutně $w(1,0,0) = w'(1,0,0)$.

Nechť tedy w je slovo končící na $\Phi^{\pm 1}$ a pro spor předpokládejme, že jeho odpovídající zobrazení dává identitu. Chceme ukázat, že pro všechna taková slova platí $w(1,0,0) = \frac{(a,b\sqrt{2},c)}{3^k}$, kde a, b, $c \in \mathbb{Z}$ a b není dělitelné třemi. To dokážeme indukcí podle délky slova w.

Nechť délka slova w je jedna. Potom platí $w = \Phi^{\pm 1}$ a dostáváme

$$w(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}, 0\right).$$

Dále nechť $w = \Phi^{\pm 1} w'$ nebo $w = \rho^{\pm 1} w'$, kde $w'(1,0,0) = \frac{(a',b'\sqrt{2},c')}{3^{k-1}}$, a', b', $c' \in \mathbb{Z}$ a b' není dělitelné třemi. Potom platí:

$$w(1,0,0) = \Phi^{\pm 1} w'(1,0,0) = \Phi^{\pm 1} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k-1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{a'}{3} \mp \frac{4b'}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}a'}{3} + \frac{b'\sqrt{2}}{3}, c'\right) =$$

$$= \left(\frac{a' \mp 4b'}{3^k}, \frac{\pm 2\sqrt{2}a' + b'\sqrt{2}}{3^k}, \frac{c'}{3^{k-1}}\right) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^k}.$$

Odtud máme

$$a = a' \mp 4b',$$

$$b = \pm 2a' + b',$$
$$c = 3c'.$$

Pokud $w = \rho^{\pm 1} w'$, analogickým postupem dostáváme

$$a = 3a',$$
$$b = b' \mp 2c',$$
$$c = c' \pm 4b',$$

a, b, $c \in \mathbb{Z}$.

Zbývá dokázat, že b nemůže být dělitelné třemi. Nechť v je libovolné redukované slovo, může se jednat i o identitu. Potřebujeme ukázat, že v žádném z případů $\Phi^{\pm 1}\Phi^{\pm 1}v(1,0,0)$, $\Phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v(1,0,0)$, $\rho^{\pm 1}\Phi^{\pm 1}v(1,0,0)$, $\Phi^{\mp 1}\rho^{\pm 1}v(1,0,0)$, $\rho^{\mp 1}\Phi^{\pm 1}v(1,0,0)$ a $\rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v(1,0,0)$ nemůže být b dělitelné třemi.

Jak jsme vysvětlili výše, předpokládáme, že slova končí na $\Phi^{\pm 1}$. Víme, že pro $w = \Phi^{\pm 1}$ máme $w(1,0,0) = \frac{(1,\pm 2\sqrt{2},0)}{3}$, a současně, že pro všechna redukovaná slova w složená z $\Phi^{\pm 1}$ a $\rho^{\pm 1}$ platí $w(1,0,0) = \frac{(a,b\sqrt{2},c)}{3^k}$. Dále budeme pracovat právě s trojicemi (a,b,c).

Předpokládejme, že délka slova w je $n > 1$. Podle indukčního předpokladu platí, že pro slova délky $n-1$ není b dělitelné třemi.

Z případů vyjmenovaných výše se budeme věnovat variantám $\Phi\rho v(1,0,0)$, $\Phi\Phi v(1,0,0)$ a $\rho\rho v(1,0,0)$.

(1) Nechť $w = \Phi\rho v$. Potom označme (a'', b'', c'') trojici odpovídající $v(1,0,0)$, (a', b', c') trojici odpovídající $\rho v(1,0,0)$ a (a,b,c) trojici odpovídající $\Phi\rho v(1,0,0)$. Ze vztahů uvedených v předchozí části plyne $a' = 3a''$ a $b = 2a' + b'$. Odtud dostáváme $b = 6a'' + b'$ a pokud b' není dělitelné třemi, tak ani b není dělitelné třemi.

(2) Nechť $w = \Phi\Phi v$. Zaveďme obdobné značení jako v předchozí části, tedy (a'', b'', c'') odpovídá $v(1,0,0)$, (a', b', c') odpovídá $\Phi v(1,0,0)$ a (a,b,c) odpovídá $\Phi\Phi v(1,0,0)$. Potom platí $a' = a'' - 4b''$, $b' = 2a'' + b''$ a $b = 2a' + b' = 2(a'' - 4b'') + b' = 2a'' - 8b'' + b' = 2a'' - 8b'' + b' + b'' - b'' = \underbrace{2a'' + b''}_{b'} + b' - 9b'' = 2b' - 9b''$.
Opět platí, že pokud b' není dělitelné třemi, tak ani b není dělitelné třemi.

(3) Nechť $w = \rho\rho v$. Opět nechť se trojice (a'', b'', c'') vztahuje k $v(1,0,0)$, trojice (a', b', c') k $\rho v(1,0,0)$ a trojice (a,b,c) k $\rho\rho v(1,0,0)$. Potom platí $b' = b'' - 2c''$, $c' = c'' + 4b''$ a odtud $b = b' - 2c' = b' - 2(c'' + 4b'') = b' - 2c'' - 8b'' - b'' + b'' = b' - 9b'' + \underbrace{b'' - 2c''}_{b'} = 2b' - 9b''$. Pokud b' není dělitelné třemi, pak ani b není dělitelné třemi.

Ostatní případy je možné provést analogicky. V případě inverzí se na příslušných místech změní znaménka.

$\square$

Věta 2.2 (Hausdorffův paradox)**.** *Existuje spočetná množina $D \subset S^2$ taková, že $S^2 \setminus D$ je SO_3-paradoxní.*

Důkaz. Nechť SO_3 je grupa rotací na sféře S^2. Rotace Φ a ρ, kde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

generují podle předchozí věty volnou grupu H stupně 2. Její akce na S^2 má netriviální pevné body, neboť každá netriviální rotace má právě dva pevné body. Protože H je spočetná, máme spočetně mnoho netriviálních pevných bodů. Takto získanou množinu netriviálních pevných bodů označme C. Položme $D = \{h(C) | h \in H\}$. Množina D je spočetná, neboť C a H jsou spočetné.

Akce grupy H na $S^2 \setminus D$ je dobře definovaná a nemá netriviální pevné body. Množina $S^2 \setminus D$ je H-paradoxní podle Věty 1.2 a Tvrzení 1.8, a tedy i SO_3-paradoxní.

$\square$

Definice 2.2. Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X. Nechť A, $B \subseteq X$. Řekneme, že A a B jsou G-*ekvirozložitelné*, jestliže A a B mohou být rozděleny na stejný (konečný) počet částí $A_1, \ldots, A_n$ a $B_1, \ldots, B_n$, pro které platí

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

kde $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$, $i < j \leq n$, a existují $g_1, \ldots, g_n \in G$ takové, že pro každé $i \leq n$ platí $g_i A_i = B_i$.

Skutečnost, že množiny A a B jsou G-ekvirozložitelné, budeme značit $A \sim_G B$.

V následujících větách budeme používat označení $\preceq$ ve smyslu ekvirozložitelnosti. Tedy $A \preceq B$ znamená, že A je G-ekvirozložitelné s podmnožinou množiny B.

Věta 2.3 (Banach-Schröder-Bernsteinova). *Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X. Nechť A, $B \subseteq X$. Jestliže $A \preceq B$ a $B \preceq A$, potom $A \sim_G B$.*

Důkaz. Relace $\sim_G$ splňuje následující dvě podmínky:

(1) Jestliže $A \sim_G B$, potom existuje bijekce $g : A \to B$ taková, že pro všechny množiny $C \subseteq A$ platí $C \sim_G g(C)$;

Protože platí $A \sim_G B$, tak existují $A_1, \ldots, A_n \subset A$, $B_1, \ldots, B_n \subset B$ takové, že $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$, $i < j \leq n$, a existují $g_1, \ldots, g_n \in G$ takové, že pro každé $i \leq n$ platí $g_i A_i = B_i$. Nechť $g : X \to X$ je zobrazení takové, pro které platí $g(x) = g_i x$, pokud $x \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Nyní ukážeme, že takto definované zobrazení je bijekce.

Mějme x, $y \in A$. Potom pokud platí $g(x) = g(y)$, tak existuje nějaký prvek $g_i \in G$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, takový, že $g_i x = g_i y$. Prvky x i y musí být z množiny A_i, protože pokud by $x \in A_i$ a $y \in A_j$, $i \neq j$, tak $g_i x \in B_i$ a $g_j y \in B_j$, ale $B_i \cap B_j = \emptyset$, tedy nemůže platit $g_i x = g_j y$. Odtud máme, že $i = j$.

Jelikož $g_i \in G$, tak existuje inverzní prvek g_i^{-1} a musí platit $g_i^{-1} g_i x = g_i^{-1} g_i y$ a odtud $x = y$. Zobrazení g je tedy prosté.

Víme, že platí $g_i A_i = B_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$, $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$. Tedy lze psát $g(A_i) = B_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $g(A) = B$, což znamená, že zobrazení g je na.

Tím jsme dokázali, že g je bijekce.

Nechť $C \subset A$. Potom platí, že $C = \bigcup_{j=1}^n A'_j$, kde $A'_j \subset A_j$, $j = 1, \ldots, n$. Odtud plyne, že $g(C) \subset B$, a tedy $C \sim_G g(C)$.

(2) Jestliže pro A_1, $A_2 \subseteq A$ a B_1, $B_2 \subseteq B$ platí $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ a současně platí $A_1 \sim_G B_1$ a $A_2 \sim_G B_2$, potom $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$.

$A_1 \sim_G B_1$ znamená, že existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $A_1 = \bigcup_{i=1}^{m_1} A_{1,i}$, $B_1 = \bigcup_{i=1}^{m_1} B_{1,i}$ a zároveň existují $h_{1,1}, \ldots, h_{1,m_1} \in G$ takové, že $h_{1,i} A_{1,i} = B_{1,i}$. Analogicky pro $A_2 \sim_G B_2$ existuje $m_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $A_2 = \bigcup_{i=1}^{m_2} A_{2,i}$, $B_2 = \bigcup_{i=1}^{m_2} B_{2,i}$ a zároveň existují $h_{2,1}, \ldots, h_{2,m_2} \in G$ takové, že $h_{2,i} A_{2,i} = B_{2,i}$. Navíc platí, že $A_{1,i}$, $i = 1, \ldots, m_1$, jsou po dvou disjunktní, stejně tak $A_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m_2$, $B_{1,i}$, $i = 1, \ldots, m_1$, a $B_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m_2$. Protože $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, jsou po dvou disjunktní i $A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}, A_{2,1}, \ldots, A_{2,m_2}$, resp. $B_{1,1}, \ldots, B_{1,m_1}, B_{2,1}, \ldots, B_{2,m_2}$.

Máme

$$A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i=1}^{m_1} A_{1,i} \cup \bigcup_{i=1}^{m_2} A_{2,i},$$

$$B_1 \cup B_2 = \bigcup_{i=1}^{m_1} B_{1,i} \cup \bigcup_{i=1}^{m_2} B_{2,i},$$

$$B_{1,i} = h_{1,i} A_{1,i}, i = 1, \dots, m_1,$$

$$B_{2,i} = h_{2,i} A_{2,i}, i = 1, \dots, m_2.$$

Tedy $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$.

Nechť $f : A \to B_1$ a $g : A_1 \to B$ jsou bijekce takové, že pro všechny množiny $C \subseteq A$ platí $C \sim_G f(C)$ a pro všechny množiny $D \subseteq A_1$ platí $D \sim_G g(D)$. Definujme $C_0 = A \setminus A_1$ a dále indukcí $C_{n+1} = g^{-1} \circ f(C_n)$. Nechť $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Můžeme psát:

$$g(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_{n+1}) = g(\bigcup_{n=0}^{\infty} g^{-1} \circ f(C_n)),$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} g(C_{n+1}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} g \circ g^{-1} \circ f(C_n),$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} g(C_{n+1}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(C_n).$$

Potom platí následující rovnosti:

$$f(C) = f(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(C_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} g(C_{n+1}) = g(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_{n+1}) = g(C \setminus C_0).$$

Když $x \in A \setminus C$, tak to znamená, že $x \in A_1$. Potom z předchozího plyne, že $g(x) \notin f(C)$, tedy $g(x) \in B \setminus f(C)$. To znamená, že $g(A \setminus C) \subseteq B \setminus f(C)$.

Opačnou inkluzi dokážeme následovně. Nechť $y \in B \setminus f(C)$. To znamená, že $y \in B \setminus g(C \setminus C_0)$. Protože $B = g(A_1)$, dostáváme $y \in g(A_1) \setminus g(C \setminus C_0) = g(A_1 \setminus (C \setminus C_0)) = g(A \setminus C)$. Poslední rovnost plyne z rovnosti $A = A_1 \cup C_0$. Tedy platí $B \setminus f(C) \subseteq g(A \setminus C)$ a odtud $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ a $A \setminus C \sim_G B \setminus f(C)$. Protože platí $C \sim_G f(C)$, potom podle podmínky *(2)* máme $(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C)$, tedy $A \sim_G B$.

$\square$

Banach-Schröder-Bernsteinova věta zásadně zjednodušuje ověření ekvirozložitelnosti. Předpokládejme, že $E \subset X$ je G-paradoxní, nechť A, B jsou disjunktní podmnožiny E takové, že platí $A \sim_G E \sim_G B$. Potom platí $E \sim_G B \subseteq E \setminus A \subseteq E$. Tedy z Banach-Schröder-Bernsteinovy věty vyplývá, že $E \setminus A \sim_G E$.

Tento fakt dokazuje následující důsledek.

Důsledek 2.4. *Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X. Množina $E \subset X$ je G-paradoxní právě tehdy, když existují disjunktní množiny $A, B \subseteq E$ takové, že $A \sim_G E \sim_G B$.*

Pozorování 2.5. *Nechť G je grupa a je dána její akce na množině X. Nechť E a E' jsou G-ekvirozložitelné podmnožiny X. Jestliže E je G-paradoxní, potom i E' je G-paradoxní.*

2.2 Banach-Tarského paradox

V předchozí části práce bylo ukázáno, že volné grupy stupně dva způsobují paradoxy, jestliže je dána jejich akce na nějaké množině bez netriviálních pevných bodů. Neméně důležité jsou situace, kdy je množina obsahující pevné body ekvirozložitelná s množinou bez těchto pevných bodů. Tato skutečnost vede k Banach-Tarského paradoxu.

Věta 2.6. *Je-li D spočetná podmnožina S^2, potom S^2 a $S^2 \setminus D$ jsou SO_3-ekvirozložitelné.*

Důkaz. Nechť ρ je rotace sféry S^2 taková, že množiny D, $\rho(D)$, $\rho^2(D)$, $\ldots$ jsou po dvou disjunktní. Ukážeme, že taková rotace existuje. Nechť l je přímka procházející počátkem, disjunktní s množinou D. Dále nechť A je množina úhlů θ takových, že pro každé $\theta \in A$ existuje nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $P \in D$ takové, že bude-li $\widetilde{\rho}$ rotace kolem l o úhel $n\theta$ (vždy ve stejném smyslu rotace), tak $\widetilde{\rho}(P)$ náleží opět do množiny D. Protože množina D je spočetná a rotace $\widetilde{\rho}$ může být o $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$, tedy jedná se opět o spočetně mnoho variant, tak musí existovat úhel φ, který neleží v A. Nechť ρ je rotace okolo přímky l o úhel φ. Potom $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ pro $n > 0$, z čehož plyne, že za podmínky $0 \leq m < n$ platí $\rho^{n-m}(D) \cap D = \emptyset$, tedy $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset$. Označme $\widetilde{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D)$. Potom lze psát $S^2 = \widetilde{D} \cup (S^2 \setminus \widetilde{D}) \sim_{SO_3} \rho(\widetilde{D}) \cup (S^2 \setminus \widetilde{D}) = S^2 \setminus D$, tedy platí $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$. $\square$

Věta 2.7 (Banach-Tarského). *(i) Sféra S^2 je SO_3-paradoxní, stejně tak je paradoxní jakákoliv sféra se středem v počátku.*

(ii) Jsou-li A a B omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdnými vnitřky, potom A a B jsou ekvirozložitelné.

Důkaz. (i) Hausdorffův paradox uvádí, že existuje spočetná množina $D \subset S^2$ taková, že $S^2 \setminus D$ je SO_3-paradoxní. Využijeme-li tvrzení Věty 2.6, dostáváme, že S^2 je SO_3-paradoxní. Protože Hausdorffův paradox ani Věta 2.6 nezávisí na poloměru sféry, jsou paradoxní sféry jakéhokoliv poloměru.

(ii) Důkaz této varianty Banach-Tarského paradoxu je uveden v [5, Věta 3.11] a také v bakalářské práci [3, Věta 2], proto zde nebude podrobně rozepisován.

V důkazu se využívá skutečnosti, že pokud ρ a φ jsou dvě rotace,

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

tak potom existuje rozklad (V_1, V_2, V_3, P) sféry S^2 takový, že P je spočetná množina a platí

$$V_3 = \varphi(V_2) = \varphi^2(V_1),$$
$$V_1 = \rho(V_2 \cup V_3).$$

Konkrétní použití tohoto faktu můžeme nalézt v již zmíněných publikacích. □

Literatura

[1] Balcar, B., Štěpánek, P.: *Teorie množin*, Academia, Praha, 2001.

[2] Drápal, A.: *Teorie grup - základní aspekty*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.

[3] Holub, A.: *Banach-Tarského paradox*, bakalářská práce, Matematický ústav UK, 2010.

[4] Rotman, J.: *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] Wagon, S.: *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.