Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Sýkora

Výpočet magnetického pole permanentního magnetu

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.

Studijní program: Matematika, obecná matematika

2010

Tímto bych rád poděkoval doc. Mgr. Petru Knoblochovi, Dr. za poskytnutí literatury, užitečných rad a zdrojových kódů a ing. Marketě Sýkorové za korekturu textu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 4. 8. 2010 Petr Sýkora

Obsah

Název práce: Výpčet magnetického pole permanentního magnetu
Autor: Petr Sýkora
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.
e-mail vedoucího: knobloch@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: Tento text prezentuje výpočet magnetického pole permanentního magnetu s nulovou hustotou náboje pomocí metody konečných prvků. Celá konsrukce duální metody vychází z Brezzi, Fortin (1991). Nejdříve je úloha pro intenzitu magnetického pole zformulována pomocí skalárního potenciálu v klasickém smyslu. Potom je odvozena slabá formulace a uveden postup, jak odvodit formlaci smíšenou. Pro smíšenou formulaci jsou uvedeny výsledky o existenci a jednoznačnosti řešení. Dále se zabýváme diskretizací smíšené formulace a definicí konečných prvků aproximujících prostor $H(\mathrm{div};\Omega)$. Nakonec ukážeme jak je možné transformovat příslušnou soustavu lineárních rovnic do tvaru, který jsme schopni vyřešit. Text bohužel neobsahuje numerické výsledky, což bylo původně jedním z cílů.

Klíčová slova: Metoda konečných prvků, smíšená formulace, magnetické pole

Title: Computation of the magnetic field of a permanent magnet
Author: Petr Sýkora
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.
Supervisor's e-mail: knobloch@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: This text presents computation of the magnetic field of a permanent magnet with zero density of a charge by using finite element method. The construction of a dual method comes from Brezzi, Fortin (1991). At the begining the problem of an intensity of the magnetic field is formulated in classic sens by using scalar potential. After that we derive weak formulation and we show, how to derive dual formulation. We present results about existence and uniqueness for mixed formulation. We study discretization of a mixed formulation and we build finite elements approximating the space $H(\mathrm{div};\Omega)$. Finally, we show how to transform system of linear equations, to the form, which we can easily solve. Unfortunately, this text doesn't include numerical results.

Keywords: Finite element method, mixed formulation, magnetic field

1. Formulace úlohy pomocí skalárního potenciálu

Magnetické pole permanentního magnetu s nulovou hustotou náboje je popsáno Maxwellovými rovnicemi tvaru

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = 0 \quad \text{na } \Omega\,,$$

kde $\vec{B}$ je magnetická indukce a $\vec{H}$ je intenzita magnetického pole ve vakuu, definovaná vztahem

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad ,$$

kde μ_0 je permeabilita vakua a $\vec{M}$ je magnetizace.
Předpokládejme, že

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N \ \text{oblast se spojitou hranicí,}$$
$$\mathrm{M} \subset \bar{\mathrm{M}} \subset \Omega\,,$$
$$\vec{M}(x) = \vec{M} \in \mathbb{R}^N\,, \quad \forall\, x \in \mathrm{M}\,,$$
$$\vec{M}(x) = 0\,, \quad \forall\, x \in \Omega \setminus \mathrm{M}\,.$$

Zavedeme-li nyní skalární potenciál φ, který splňuje

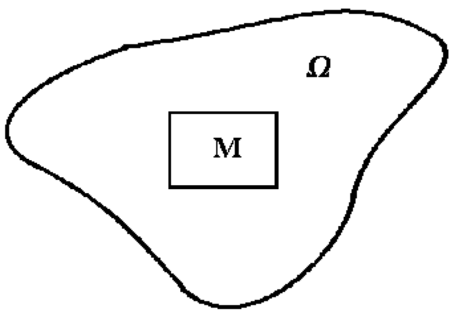
$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi \quad ,$$

pak systém odpovídá Laplaceově rovnici

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{na } \Omega \quad ,$$

a navíc platí

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Omega} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\mathrm{M}} - \vec{M}\cdot\vec{n} \quad .$$



Obr. 1. Schéma výpočtové oblasti

Doplníme-li rovnici o vhodnou okrajovou podmínku, pak za předpokladu $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ nám klasická teorie parciálních diferenciálních rovnic dává existenci a jednoznačnost řešení. To jsou ale velmi silné požadavky. Zavedeme tedy tzv. slabou formulaci, která neklade takové nároky na regularitu φ.

2. Zavedení slabé formulace

Uvažujme tedy rovnici

$$\Delta u = f \text{ na } \Omega \quad (1)$$

s okrajovou podmínkou

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega \quad . (2)$$

Celou rovnici přenásobíme funkcí $v \in C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$, poté zintegrujeme přes oblast Ω a použijeme Greenovu větu. Dostaneme

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \, v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3)$$

Je snadné ukázat, že pokud u řeší (1),(2) v klasickém smyslu, pak splňuje (3) a naopak splňuje-li u (3) a je dostatečně hladká, pak řeší (1),(2) v klasickém smyslu. (3) je tedy zobecněním klasické formulace. Nabízí se ovšem otázka, jak je to s existencí a jednoznačností u splňujicího (3).

3. Existence a jednoznačnost

Zavedeme nejprve značení

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \text{ měřitelná } \mid \int_{\Omega} |u|^2 \, dx < +\infty \right\} \quad ,$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, dx\right)^{1/2} \quad .$$

O $L^2(\Omega)$ víme, že s normou $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ tvoří Hilbertův prostor.
Dále definujme

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ \forall |\alpha| \le m \right\} \quad ,$$

kde

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \ , \ |\alpha| = \alpha^1 + \cdots + \alpha^n \quad .$$

Na tomto prostoru lze definovat seminormu

$$|u|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|_{L^2(\Omega)}^2 \quad ,$$

a normu

$$\|u\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{k \le m} |u|_{k,\Omega}^2 \quad .$$

Tyto prostory spolu se svými normami opět tvoří Hilbertovy prostory.
Pokud $\Omega \in C^{0,1}$, označme $\Gamma = \partial\Omega$, pak existuje spojitý lineární operátor $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, že $\gamma u =$ stopa u na Γ, pro každou u hladkou. Lze tedy operátor stopy rozšířit na celé $H^1(\Omega)$ jako $\gamma u \ \forall u \in H^1(\Omega)$ (budeme značit

$u|_\Gamma$).
O tomto operátoru lze ukázat následující souvislost prostorů

$$\gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma) \quad .$$

Nyní už má dobrý smysl zavedení prostoru

$$H^1_0(\Omega) = \left\{u \mid u \in H^1(\Omega),\ u|_\Gamma = 0\right\} \quad ,$$

a nechť je $\Gamma = D \cup N \ \&\ D \cap N = \emptyset$, pak definujme

$$H^1_{0,D}(\Omega) = \left\{u \mid u \in H^1(\Omega),\ u|_D = 0\right\} \quad .$$

Vraťme se zpět k otázce existence řešení

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx = \int_\Omega f \ v \ dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \quad (4)$$

Věta 1 (Lax-Milgramova)
Buď X reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,.)_X$, a normou $\|.\|_X = (.,.)_X^{1/2}$. Buď $B : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineární forma na X, která je $X-$eliptická a omezená, pak pro každý $F \in X^*$ existuje právě jedno $u \in X$, že $B(u,v) = \langle F, v\rangle \ \ \forall v \in X$

Položíme-li $B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H^1_0(\Omega)$ a $\langle F, v\rangle = \int_\Omega f \ v \ dx, \quad f \in L^2(\Omega)$, stačí ověřit předpoklady Lax-Milgramovy věty, a dostáváme jak existenci, tak jednoznačnost řešení (4) na prostoru $H^1_0(\Omega)$. Je-li navíc $B(u,v)$ symetrická a definujeme funkcionál $\Phi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} B(u,u) - \langle F, u\rangle \quad ,$$

pak platí:
Tvrzení 1
Následující výroky jsou ekvivalentní :
(1) $B(u,v) = \langle F, v\rangle \ \ \forall v \in X$
(2) $\Phi(u) \le \Phi(u+h) \ \ \forall h \in X.$
Řešení (4) je tedy ekvivalentně popsáno jako

$$\inf_{u \in H^1_0(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int_\Omega f \ u \ dx \ . \quad (5)$$

Aproximaci této úlohy hledejme tedy jako řešení podobné úlohy na konečně dimenzionálním podprostoru $H^1_0(\Omega)$. Neboť zůstavají splněny předpoklady Lax-Milgramovy věty, je zaručna existence a jednoznačnost řešení a úloha tedy vede k řešení soustavy lineárních rovnic.

Ještě se podívejme na smíšenou okrajovou podmínku

$$\begin{aligned}\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega,\\ u|_D &= 0,\\ \frac{\partial u}{\partial n}|_N &= g.\end{aligned} \qquad (6)$$

(Pokud $D = \emptyset$ pak je nutné volit g aby $\int_\Gamma g\ ds = 0$.)
Označme $H^{-1/2}(\Gamma)$ duální prostor k $H^{1/2}(\Gamma)$ a volme $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, pak úloze (6) odpovídá minimalizační formulace

$$\inf_{u \in H^1_{0,D}(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\, dx - \int_\Omega f\ v\ dx - \int_\Gamma g\, u\ ds \quad . (7)$$

4. Smíšená formulace

Idea:
Pro danou konvexní funkci $f(v)$ definovanou na prostoru V zavedeme funkci $f^*(v^*)$ na prostoru V' jako

$$f^*(v^*) = \sup_{v \in V} \langle v, v^* \rangle_{V \times V'} - f(v) \quad .$$

Pak lze $f(v)$ určit pomocí $f^*(v^*)$ jako

$$f(v) = \sup_{v^* \in V'} \langle v^*, v \rangle_{V' \times V} - f^*(v^*) \quad .$$

Aplikujme tuto konstrukci na (5) a dostneme

$$\inf_{v \in H^1_0(\Omega)} \sup_{\vec{q} \in (L^2(\Omega))^2} -\frac{1}{2} \int_\Omega |\vec{q}|^2\ dx - \int_\Omega f\ v\ dx + \int_\Omega \vec{q} \cdot \vec{\nabla} v\ dx \quad .(8)$$

To odpovídá úloze pro sedlový bod $(u, \vec{p})$ charakterizovaný rovnicemi

$$\begin{aligned}\int_\Omega \vec{p} \cdot \vec{q}\ dx - \int_\Omega \vec{q} \cdot \vec{\nabla} u\ dx = 0, \qquad & \forall \vec{q} \in (L^2(\Omega))^2,\\ \int_\Omega \vec{p} \cdot \vec{\nabla} v\ dx = \int_\Omega f\ v\ dx, \quad & \forall v \in H^1_0(\Omega),\end{aligned} \qquad (9)$$

které můžeme chápat jako

$$\begin{aligned}\vec{p} = \vec{\nabla} u, \quad & \forall u \in H^1_0(\Omega),\\ \operatorname{div} \vec{p} - f = 0. &\end{aligned} \qquad (10)$$

Definujme dále prostor

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{q} \mid \vec{q} \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} \vec{q} \in L^2(\Omega)\} \quad ,$$

který spolu s normou

$$\|\vec{q}\|^2_{H(\operatorname{div}; \Omega)} = \|\vec{q}\|^2_{0;\Omega} + \|\operatorname{div} \vec{q}\|^2_{0;\Omega}$$

tvoří Hilbertův prostor.
Uvažujme formulaci (8), přenásobme -1 (sup přejde na inf a naopak), dále na člen $\int_\Omega \vec{q}\cdot\vec{\nabla} v\; dx$ aplikujme formuli "Per partes po složkách"

$$\int_\Omega \vec{q}\cdot\vec{\nabla} v\; dx = -\int_\Omega \operatorname{div}\vec{q}\, v\; dx + \int_\Gamma v\,\vec{q}\cdot\vec{n}\; ds, \quad \forall\, \vec{q}\in H(\operatorname{div};\Omega),$$

položme $f=0$ a uvažujme $v=g_1$ na D , dostaneme následující formulaci

$$\inf_{\vec{q}\in H(\operatorname{div};\Omega)} \sup_{v\in L^2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{q}|^2\; dx + \int_\Omega v \operatorname{div}\vec{q}\; dx - \int_D g_1\,\vec{q}\cdot\vec{n}\; ds \quad ,(11)$$

což odpovídá nalezení sedlového bodu $(u,\vec{p})$ řešícího

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vec{p}\cdot\vec{q}\; dx + \int_\Omega u \operatorname{div}\vec{q}\; dx &= \int_D g_1\,\vec{q}\cdot\vec{n}\; ds, & \forall\, \vec{q}\in H(\operatorname{div};\Omega),\\ \int_\Omega \operatorname{div}\vec{p}\, v\; dx &= 0, & \forall\, v\in L^2(\Omega), \end{aligned} \qquad (12)$$

kde $u\in L^2(\Omega)$ a $\vec{\nabla} u = \vec{p}\in (L^2(\Omega))^2$ ($\Rightarrow u\in H^1(\Omega)$).
Tuto formulaci nazýváme smíšená formulace.

A proč zavádět smíšenou formulaci?
φ jsme zavedli pouze jako pomocnou funkci a to, co nás ve skutečnosti zajímá, je $\vec{H}$, která je dána jako $\vec{H} = -\vec{\operatorname{grad}}\,\varphi$. Budeme-li aproximaci $\vec{H}_h$ počítat jako $\vec{H}_h = -\vec{\operatorname{grad}}\,\varphi_h$, kde φ_h je aproximací řešení primární formulace, dopustíme se mnohem větší chyby, než když budeme aproximovat smíšenou formulaci.

Navíc budeme pracovat s aproximacemi prostorů $L^2(\Omega)$ a $H(\operatorname{div},\Omega)$, kde nebudeme muset řešit spojitost derivací mezi jednotlivými prvky, jak by tomu bylo u prostoru $H^2(\Omega)$.

5. Existence a jednoznačnost pro smíšenou formulaci

Nechť V je Hilbertův prostor s normou $\|.\|_V$ a skalárním součinem $(.,.)_V$. Mějme spojitou bilineární formu na $V\times V$, jež splňuje

$$|a(u,v)| \le \|a\|\,\|u\|_V\,\|v\|_V .$$

Této bilineární formě odpovídá spojitý lineární operátor $A: V\to V'$, definovaný jako

$$\langle Au, v\rangle_{V'\times V} = a(u,v), \quad \forall\, u,v\in V.$$

Dále nechť Q je Hilbertův prostor s normou $\|.\|_Q$ a skaláním součinem $(.,.)_Q$ a nechť $b(v,q)$ spojitá bilineární forma na $V\times Q$ splňující

$$|b(v,q)| \le \|b\| \, \|v\|_V \, \|q\|_Q \quad ,$$

pak můžeme definovat lineární operátor $B: V \to Q'$ a $B^t: Q \to V'$ jako

$$\langle Bv, q\rangle_{Q'\times Q} = \langle v, B^t q\rangle_{V\times V'} = b(v,q), \quad \forall\, v\in V, \quad \forall\, q\in Q.$$

Nechť $f\in V'$, $g\in Q'$ jsou dané funkce, pak tedy hledáme $u\in V$, $p\in Q$ splňujicí

$$\begin{aligned} a(u,v)+b(v,p) &= \langle f, v\rangle_{V'\times V} \quad \forall\, v\in V, \\ b(u,q) &= \langle g, q\rangle_{Q'\times Q} \quad \forall\, q\in Q, \end{aligned} \qquad (13)$$

což lze také psát jako

$$\begin{aligned} Au + B^t u &= f \quad \text{na } V', \\ Bu &= g \quad \text{na } Q'. \end{aligned}$$

Nejdříve zformulujeme tvrzení o existenci a jednoznačnosti pro funkci u , které je přímým důsledkem Lax-Milgramovy věty

Tvrzení 2:

Nechť $g\in \mathrm{Im}\, B$ a nechť $a(.,.)$ je bilineární forma $V-$eliptická na $\mathrm{Ker}\, B$, pak existuje právě jedno $u\in V$ řešení

$$a(u, v_0) = \langle f, v_0\rangle_{V'\times V} \quad \forall\, v_0\in \mathrm{Ker}\, B,$$

a

$$Bu = g.$$

a větu, jež nám bude dostatečně silným nástrojem k řešení naší úlohy.

Věta 2:

Nechť $a(.,.)$ je spojitá bilineární forma na $V\times V$, a nechť $b(.,.)$ je spojitá bilineární forma na $V\times Q$. Předpokládejme, že obraz operátoru B určeným $B(.,.)$ je uzavřený v Q', tedy že existuje $k_0 > 0$, že

$$\sup_{v\in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V} \ge k_0 \|q\|_{Q/\mathrm{Ker}\, B'}.$$

Jesliže je navíc $a(.,.)$ invertibilní na $\mathrm{Ker}\, B$, tedy že existuje $\alpha_0 > 0$, že

$$\inf_{u_0\in \mathrm{Ker}\, B} \sup_{v_0\in \mathrm{Ker}\, B} \frac{a(u_0, v_0)}{\|u_0\|_V \|v_0\|_V} \ge \alpha_0,$$

$$\inf_{v_0\in \mathrm{Ker}\, B} \sup_{u_0\in \mathrm{Ker}\, B} \frac{a(u_0, v_0)}{\|u_0\|_V \|v_0\|_V} \ge \alpha_0,$$

pak existuje (u,p) řešení úlohy (13) pro libovolnou $f\in V'$ a $g\in \mathrm{Im}\, B$. Funkce u je určena jednoznačně a p je jednoznačně určena na $Q/\mathrm{Ker}\, B^t$. Navíc platí

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha_0}\|f\|_{V'} + \frac{1}{k_0}\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_0}\right)\|g\|_{Q'},$$

$$\|p\|_{Q/\mathrm{Ker}\, B'} \le \frac{1}{k_0}\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_0}\right)\|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{k_0^2}\left(1+\frac{\|a\|}{\alpha_0}\right)\|g\|_{Q'}.$$

Aplikujme výsledky o abstraktní formulaci (13) na naší úlohu (12). Jako prostor V volme $H(\mathrm{div};\Omega)$ a Q odpovídá prostoru $L^2(\Omega)$. Operátoru B odpovídá operátor divergence z $H(\mathrm{div};\Omega)$ na $L^2(\Omega)$ a bilineární formě $a(\vec{p},\vec{q})$ výraz

$\int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{q}\, dx$. Z definice normy na prostoru $H(\mathrm{div};\Omega)$ plyne, že $a(.,.)$ splňuje předpoklady věty 2 a dostávame tedy existenci a jednoznačnost řešení úlohy (12).

6. Existence a jednoznačnost diskretizace úlohy

V další kapitole se budeme zabývat otázkou, jak je to s existencí a jednoznačností řešení v konečně dimenzionálních podprostorech prostorů V a Q .

Nechť tedy V_h je konečně dimenzionální podprostor prostoru V a Q_h je konečně dimenzionální podprostor prostoru Q , pak hledáme dvojici (u_h, p_h) z $V_h \times Q_h$, která splňuje

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= \langle f, v_h \rangle_{V' \times V} \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) &= \langle g, q_h \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \tag{14}$$

a navíc nás zajímají odhady $\|u - u_h\|_V$ a $\|p - p_h\|_Q$.
Stejně jako v předchozí kapitole můžeme zavést operátory $A_h : V_h \to V_h'$ a $B_h : V_h \to Q_h'$. Navíc pro $g \in Q'$ definujme

$$Z_h(g) = \{ v_h \in V_h | b(v_h, q_h) = \langle g, q_h \rangle, \ \forall q_h \in Q_h \} \ .$$

Pokud $g = 0$, pak zřejmě $Z_h(0) = \mathrm{Ker}\, B_h$.
Dále si ještě popíšeme množinu

$$\mathrm{Ker}\, B_h^t = \{ q_h \in Q_h | b(v_h, q_h) = 0, \ \forall v_h \in V_h \} \ .$$

A jsme připraveni zformulovat tvrzení, které je přímým důsledkem věty 2 a které nám poskytne dostatečnou odpověď na otázku existence a jednoznačnosti.
Tvrzení 3:
Nechť $Z_h(g) \neq \emptyset$ *a nechť existuje* $\alpha_h > 0$ *, že*

$$\inf_{u_h \in \mathrm{Ker}\, B_h} \sup_{v_h \in \mathrm{Ker}\, B_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_V \|v_h\|_V} \geq \alpha_h$$

Pak existuje alespoň jedno (u_h, p_h) *řešení úlohy* (14). *Navíc* u_h *je určeno jednoznačně na* V_h *a* p_h *je určno jednoznačně na* $Q_h / \mathrm{Ker}\, B_h^t$
A jak je to s odhady chyb, nám řekne následující věta.

Věta 3:

Nechť $(u, p) \in V \times Q$ *je řešení úlohy* (13) *a nechť* $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ *je řešení úlohy* (14). *Nechť dále platí*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \|q_h\|_{Q/\mathrm{Ker}\, B'}} \geq k_0 > 0$$

a nechť existuje $\alpha_0 > 0$, *že*

$$a(v_{0h}, v_{0h}) \geq \alpha_0 \|v_{0h}\|^2, \quad \forall v_{0h} \in \mathrm{Ker}\, B_h.$$

Pak platí následující odhad :

$$\|u-u_h\|_V + \|p-p_h\|_{Q/\mathrm{Ker}\, B'} \leq c\left(\inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p-q_h\|_Q\right),$$

kde c je konstanta závislá na $\|a\|, \|b\|, k_0, \alpha_0$ *a nezávislá na h.*

Jinými slovy nám tato věta říká, že pokud je podprostor dostatečně "hustý", pak chyba, které se dopustíme, je dostatečně malá.

7. Triangulace oblasti

Triangulace oblasti Ω je klíčovým krokem pro metodu konečných prvků. Předpokládejme, že Ω je mnohostěn. Nechť tedy $\bar{\Omega} = \cup_{r=1}^{m} K_r$, kde K_r budou v naší aplikaci pro jednoduchost trojúhelníky. (Omezíme se tedy pouze na dvoudimenzionální případ). Tento rozklad budeme značit T_h , kde indexem h budeme rozumět největší diametr prvků rozkladu.

Dále si označme

$$e_{ij} = \partial K_i \cap \partial K_j \quad ,$$

společnou stranu mezi prvky K_i a K_j a

$$\varepsilon_h = \bigcup_{ij} e_{ij} \cup \Gamma_h = \bigcup_{K} \partial K \quad ,$$

kde Γ_h je množina hraničních stran.

Poznámka 1:

Aby bylo možné hovořit o triangulaci, je třeba o T_h předpokládat následující vlastnosti:

- $K_r \in T_h$ je uzavřená, souvislá, s neprázdným vnitřkem a s lipschicovsky spojitou hranicí.
- $\bar{\Omega} = \bigcup_{T_h} K_r$.
- $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$
- $\forall i \neq j \quad K_i \cap K_j = \emptyset$, nebo mají společnou stranu/stěnu. □

Na triangulaci oblasti Ω také zavedeme nové prostory funkcí

$$X(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega),\ v|_{K_i} \in H^1(K_i),\ \forall i \right\} = \prod_r H^1(K_r),$$

s normou

$$\|v\|^2_{X(\Omega)} = \sum_r \|v\|^2_{1,K_r},$$

a

$$Y(\Omega) = \left\{\vec{q} \mid \vec{q} \in (L^2(\Omega))^n,\ \vec{q}|_{K_i} \in H(\mathrm{div}\,;K_i),\ \forall i\right\} = \prod_r H(\mathrm{div}\,;K_r),$$

s normou

$$\|\vec{q}\|^2_{Y(\Omega)} = \sum_r \|\vec{q}\|^2_{\mathrm{div},K_r}.$$

Dále lze ukázat, že platí

$$H^1_{0,D}(\Omega) = \left\{v \mid v \in X(\Omega),\ \sum_r \int_{\Gamma_r} v\vec{q}\cdot\vec{n}_r\, ds = 0,\ \ \forall \vec{q} \in H_{0,N}(\mathrm{div}\,;\Omega)\right\},$$
$$H_{0,N}(\mathrm{div}\,;\Omega) = \left\{\vec{q} \mid \vec{q} \in Y(\Omega),\ \sum_r \int_{\Gamma_r} \vec{q}\cdot\vec{n}_r v\, ds = 0,\ \ \forall v \in H^1_{0,D}(\Omega)\right\},$$

kde $\vec{n}_r$ značí vnější normálu k $\Gamma_r = \partial K_r$.

8. Konečný prvek

Konečným prvkem rozumíme uspořádanou trojici (K, P_K, Σ_K) , kde
- $K \in T_h$ je prvek triangulace;
- P_K je konečně dimenzionální prostor reálných funkcí definovaných na K ;
- Σ_K , unisolventní množina stupňů volnosti = množina lineárních forem $\{l_i\}_{1 \le i \le \dim P_K}$ definovaných na P_K . Σ_K nazveme unisolventní, pokud jsou lineární formy lineárně nezávislé, tedy pokud znalost $l_i(p)$ pro všechna i jednoznačně definuje p ;

Konečný prvek popsaný stupni volnosti, kterými jsou hodnoty v bodech, nazýváme *Lagrangeovský*. Takové prvky jsou vhodné pro aproximaci $H^1(\Omega)$, ovšem pro aproximaci prostoru $H^2(\Omega)$ je třeba zahrnout do stupňů volnosti i derivace v příslušných bodech. Tyto prvky nazýváme *Hermitovské.*

Unisolventnost Σ_K implikuje, že existují $p_i \in P_K$ takové, že

$$l_j(p_i) = \delta_{j,i},\quad i, j = 1, \ldots, \dim P_K,$$

a tedy pro $p \in P_K$ platí

$$p = \sum_{i=1}^{\dim P_K} l_i(p) p_i \quad .$$

Funkce p_i nazýváme bázové funkce konečného prvku.

9. Referenční prvek

Dalším z klíčových bodů je zavedení referenčního prvku, které podstatně zjednoduší práci s jednotlivými prvky K_r .
Nechť tedy $\hat{K} \subset \mathbb{R}^n$, $\partial \hat{K}$ hranice a $\vec{\hat{n}}$ vnější jednotková normála. Uvažujme $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hladké (alespoň třídy C^1), pak definujme $K = F(\hat{K})$. $\hat{K}$ nazýváme referenční prvek. Předpokládejme navíc, že $DF(\hat{x})$, je invertibilní pro libovolný $\hat{x}$ a F je invertibiní na $\hat{K}$. Pak

$$DF^{-1}(x) = (DF(\hat{x}))^{-1}.$$

Důležitou třídou zobrazení jsou zobrazení afinní, tedy když $F(\hat{x}) = x_0 + B\hat{x}$. Potom $DF(\hat{x}) = B$, kde B je konstantní matice. Definujme

$$\|DF\|_\infty = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|DF(\hat{x})\xi|_{\mathbb{R}^n}}{|\xi|_{\mathbb{R}^n}} \right)$$

normu v $L^\infty(\hat{K})$ funkce $\hat{x} \to \|DF(\hat{x})\|$, maticovou normu $DF(\hat{x})$. Stejně tak máme,

$$\|DF^{-1}\|_\infty = \sup_{x \in K} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|DF^{-1}(x)\xi|_{\mathbb{R}^n}}{|\xi|_{\mathbb{R}^n}} \right) .$$

Označme

$$J(\hat{x}) = |\det DF(\hat{x})|,$$

a pro $\hat{x} \in \partial \hat{K}$,

$$J_{\vec{\hat{n}}}(\hat{x}) = J(\hat{x}) |(DF^{-1})^t \vec{\hat{n}}|_{\mathbb{R}^n}.$$

Nyní uvažujme $\hat{v}(\hat{x})$ funkci definovanou na $\hat{K}$, pak funkci $v(x)$ na K definujme jako

$$v = \hat{v} \circ F^{-1},$$

a značme $v = \Phi(\hat{v})$. Potom platí následující vztahy

$$\vec{\text{grad}}\, v = (DF^{-1})^t (\vec{\text{grad}}\, \hat{v}) \circ F^{-1} = \Phi((DF^{-1})^t (\vec{\text{grad}}\, \hat{v})),$$

$$\int_K \Phi(\hat{v})\, dx = \int_{\hat{K}} \hat{v}\, J\, d\hat{x},$$

$$\int_{\partial K} \Phi(\hat{v})\, ds = \int_{\partial \hat{K}} \hat{v}\, J_{\vec{\hat{n}}}\, d\hat{s}.$$

Z čehož plyne

Lemma 1:

Zobrazení Φ je izomorfizmus $L^2(\hat{K})$ na $L^2(K)$ a $H^1(\hat{K})$ na $H^1(K)$, splňující,

$$|v|_{0,K} \le \left(\sup_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{1/2} |\hat{v}|_{0,\hat{K}},$$
$$|\hat{v}|_{0,\hat{K}} \le \left(\inf_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{-1/2} |v|_{0,K},$$
$$|v|_{1,K} \le \left(\sup_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{1/2} \|DF^{-1}\|_\infty |\hat{v}|_{1,\hat{K}},$$
$$|\hat{v}|_{1,\hat{K}} \le \left(\inf_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{-1/2} \|DF\|_\infty |v|_{1,K}.$$

Pro aproximace prostoru $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ budeme muset zavést novou transformaci, neboť výše zmíněná nemusí zachovávat normálové složky.
Nechť tedy $DF(\hat{x})$ je Jakobiho matice transformace $F(\hat{x})$, pak pro $\vec{\hat{q}} \in (L^2(\hat{K}))^n$ definujme zobrazení

$$\Psi(\vec{\hat{q}})(x) = \frac{1}{J(\hat{x})} DF(\hat{x}) \vec{\hat{q}}(\hat{x}), \quad x = F(\hat{x}) \quad .$$

Pak pro $v = \Phi(\hat{v})$ a $\vec{q} = \Psi(\vec{\hat{q}})$ platí

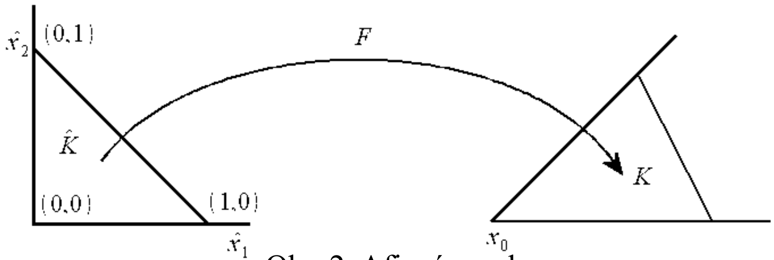
$$\mathrm{div}\,\vec{q} = \frac{1}{J}\mathrm{div}\,\vec{\hat{q}},$$
$$\int_K \vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v\ dx = \int_{\hat{K}} \vec{\hat{q}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\hat{v}\ d\hat{x},$$
$$\int_K v\,\mathrm{div}\,\vec{q}\ dx = \int_{\hat{K}} \hat{v}\,\mathrm{div}\,\vec{\hat{q}}\ d\hat{x},$$
$$\int_{\partial K} \vec{q}\cdot\vec{n}\, v\ d\sigma = \int_{\partial\hat{K}} \vec{\hat{q}}\cdot\vec{\hat{n}}\,\hat{v}\ d\hat{s}.$$

A můžeme zformulovat lemma.

Lemma 2:

Zobrazení Ψ je izomorfizmus $H(\mathrm{div}\,;\hat{K})$ na $H(\mathrm{div}\,;K)$ a $H^0(\mathrm{div}\,;\hat{K})$ na $H^0(\mathrm{div}\,;K)$.
Navíc platí

$$|\vec{q}|_{0,K} \le \left(\inf_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{-1/2} \|DF\|_\infty |\vec{\hat{q}}|_{0,\hat{K}},$$
$$|\vec{\hat{q}}|_{0,\hat{K}} \le \left(\sup_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{1/2} \|DF^{-1}\|_\infty |\vec{q}|_{0,K},$$
$$|\mathrm{div}\,\vec{q}|_{0,K} \le \left(\inf_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{-1/2} |\mathrm{div}\,\vec{\hat{q}}|_{0,\hat{K}},$$
$$|\mathrm{div}\,\vec{\hat{q}}|_{0,\hat{K}} \le \left(\sup_{\hat{x}} J(\hat{x})\right)^{1/2} |\mathrm{div}\,\vec{q}|_{0,K}.$$



Obr. 2. Afinní prvek

10. Aproximace prostorů

Mějme dánu triangulaci oblasti Ω, pak jako aproximaci prostoru $H^1(\Omega)$ budeme hledat nějaký konečně dimenzionální podprostor spojitých funkcí. Jako vhodná volba se nabízí prostor po částech polynomiálních funkcí nebo funkcí polynomům podobných (funkcí vzniklých z polynomů vhodnou transformací souřadnic).
Nechť je dán prvek $K \in T_h$, e_i značí stranu ($i = 1, 2, 3$), pak na něm definujme prostor polynomů $P_k(K)$ stupně $\leq k$. Dimenze $P_k(K)$ je rovna $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ pro $n = 2$.
Dále budeme potřebovat prostor polynomiálních funkcí na jednotlivých stranách prvku. Definujme

$$R_k(\partial K) = \left\{ \phi \mid \phi \in L^2(\partial K),\ \phi|_{e_i} \in P_k(e_i),\ \ \forall e_i \right\},$$

$$T_k(\partial K) = \left\{ \phi \mid \phi \in R_k(\partial K) \cap C^0(\partial K) \right\}.$$

Funkce z $R_k(\partial K)$ jsou polynomy stupně $\leq k$ na jednotlivých stranách, ovšem nemusí být spojité ve vrcholech. Pro trojúhelníkové prvky je dimenze prostorů $R_k(\partial K)$ a $T_k(\partial K)$ $3(k+1)$ a $3k$.

Poněkud složitější situace nastane při aproximaci prostoru $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Uvedeme dvě konstrukce aproximace tohoto prostoru. Opět se omezíme pouze na případ $n = 2$.
Nejdříve zavedeme prostor

$$BDM_k(K) = (P_k(K))^2.$$

Dimenze prostoru $BDM_k(K)$ je rovna $(k+1)(k+2)$. Pro $\vec{q} \in BDM_k(K)$ je $\mathrm{div}\,\vec{q} \in P_{k-1}(K)$ a $\vec{q} \cdot \vec{n}$ na ∂K leží v prostoru $R_k(\partial K)$. Abychom mohli pomocí $BDM_k(K)$ zkonstruovat aproximaci prostoru $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$, je nezbytné, aby $\vec{q} \cdot \vec{n}$ byla spojiá na sousedních prvcích.

Tvrzení 4:
Pro $k \geq 1$ a pro $\vec{q} \in BDM_k$ následující vztahy implikují $\vec{q} = 0$.

$$\int_{\partial K} \vec{q} \cdot \vec{n}\, p_k \, ds = 0, \quad \forall\, p_k \in R_k(\partial K),$$

$$\int_K \vec{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_{k-1} \, dx = 0, \quad \forall\, p_{k-1} \in P_{k-1}(K),$$

$$\int_K \vec{q} \cdot \vec{\phi}_k \, dx = 0, \quad \forall\, \vec{\phi} \in \left\{ \vec{\phi}_k \in (P_k)^2 \mid \mathrm{div}\,\vec{\phi}_k = 0,\ \vec{\phi}_k \cdot \vec{n}|_{\partial K} = 0 \right\} = \Phi_k.$$

První dvě podmínky jsou ekvivalentní s tím, že $\vec{q} \in \Phi_k$. Lze tedy psát

$$\int_K \mathrm{div}\,\vec{q}\ \mathrm{div}\,\vec{q}\ dx = -\int_K \vec{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\,\vec{q}\ dx + \int_{\partial K} \vec{q} \cdot \vec{n}\, \mathrm{div}\,\vec{q}\ d\sigma.$$

Abychom k definici stupňů volnosti na prostoru BDM_k mohli užít předchozí tvrzení, je třeba lineární nezávislosti prvních dvou, o čemž nám poví následujicí lemma.

Lemma 3:

Nechť $g \in R_k(\partial K)$ *a* $f \in P_{k-1}(K)$ *takové, že*

$$\int_{\partial K} g\vec{q}\cdot\vec{n}\; ds + \int_K \vec{q}\cdot \vec{\mathrm{grad}}\, f\; dx = 0, \quad \forall\, \vec{q} \in BDM_k(K),$$

pak $g = 0$ *a* f *je konstantní funkce.*

Pro dvoudimenzionální případ lze prostor Φ_k charakterizovat následujicím způsobem.

Lemma 4:

Pro $n = 2$ *platí*

$$\Phi_k = \left\{ \vec{\phi}_k \mid \phi_k = \vec{\mathrm{curl}}\,(b_K\, p_{k-2}),\ p_{k-2} \in P_{k-2}(K) \right\},$$

kde $b_K \in B_3(K)$ *je 'bubble function' na* K.

Poznámka 2:

'*Bubble function*' je funkce definovaná na K, jež má na hranici ∂K nulové hodnoty.

$$B_k(K) = P_k(K) \cap H_0^1(K) \quad . \; \square$$

Nyní se podíváme na druhou konstrukci aproximace prostoru $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$. Zavedeme prostor

$$RT_k(K) = (P_k(K))^n + \vec{x}\, P_k(K) \quad .$$

Opět se omezíme pouze na dvoudimenzionální případ. Dimenze prostoru $RT_k(K)$ je rovna $(k+1)(k+3)$. Zformulujme některá základní tvrzení o tomto prostoru.

Tvrzení 5:

Nechť $\vec{q} \in RT_k(K)$, *pak platí*

$$\mathrm{div}\,\vec{q} \in P_k(K),$$
$$\vec{q}\cdot\vec{n}|_{\partial K} \in R_k(\partial K).$$

Navíc operátor divergence je surjektivní z $RT_k(K)$ *na* $P_k(K)$.

Tvrzení 6:

Pro $k \geq 0$ *a pro* $\vec{q} \in RT_k$ *následujicí vztahy implikují* $\vec{q} = 0$.

$$\int_{\partial K} \vec{q}\cdot\vec{n}\, p_k\; ds = 0, \quad \forall\, p_k \in R_k(\partial K),$$

$$\int_K \vec{q}\cdot \vec{p}_{k-1}\; dx = 0, \quad \forall\, \vec{p}_{k-1} \in (P_{k-1}(K))^n.$$

Dále definujme prostor

$$RT_k^0(K) = \left\{ \vec{q} \in RT_k(K) \mid \mathrm{div}\,\vec{q} = 0 \right\} \quad ,$$

pak $RT_k^0(K) \subset (P_k(K))^n$.

Příklady prostorů:

RT_0 je trojdimenzionální prostor polynomiálních funkcí tvaru

$$RT_0 = \begin{array}{l} q_1(x,y) = a + cx, \\ q_1(x,y) = b + cy. \end{array}$$

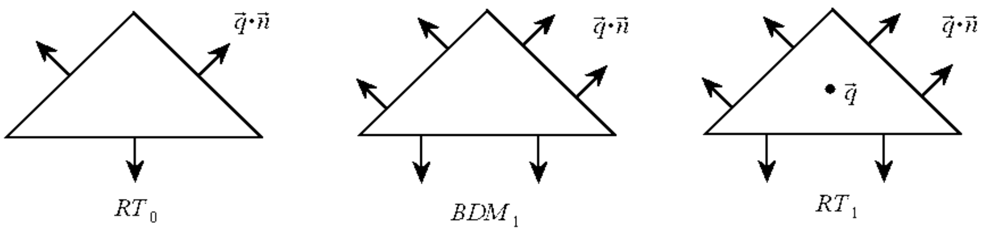
BDM_1 je šestidimenzionální prostor polynomiálních funkcí tvaru

$$BDM_1 = \begin{array}{l} q_1(x,y) = a + bx + cy, \\ q_1(x,y) = d + ex + fy. \end{array}$$

A RT_1 je osmidimenzionální prostor polynomiálních funkcí tvaru

$$RT_1 = \begin{array}{l} q_1(x,y) = a + bx + cy + rx^2 + sxy, \\ q_1(x,y) = d + ex + fy + rxy + sy^2. \end{array}$$

Je zřejmé, že $RT_0 \subset BDM_1 \subset RT_1$. Přesněji
$RT_0 = \{\vec{q} \in BDM_1 \mid \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\partial K} \in R_0(\partial K)\}$ a $BDM_1 = \{\vec{q} \in RT_1 \mid \operatorname{div} \vec{q} \in P_0\}$.



Obr. 3. Stupně volnosti jednotlivých prvků

11. Interpolační operátor a odhady chyb

Nechť $\vec{q}$ je funkce z $H(\operatorname{div}; K)$, pak pro prostory, které jsme popsali výše, lze definovat interpolační operátor $\rho_K \vec{q}$, který je definovaný na funckích jen o něco málo hladších než $H(\operatorname{div}; K)$.

Pro $s > 2$ definujme prostor

$$W(K) = \{\vec{q} \in (L^s(K))^n \mid \operatorname{div} \vec{q} \in L^2(K)\} ,$$

na kterém již lze interpolační operátor $\rho_K \vec{q}$ charakterizovat následujicími vztahy. (Stále pro $n = 2$, a trojúhelníkové prvky)

(i) $BDM_k(K) = (P_k(K))^2, \ (k \geq 1).$
$\rho_K \colon W(K) \to BDM_k(K)$ je popsán

$$\int_{\partial K} (\vec{q} - \rho_K \vec{q}) \cdot \vec{n} \, p_k \, ds = 0, \quad \forall \, p_k \in R_k(\partial K),$$

$$\int_K (\vec{q} - \rho_K \vec{q}) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \, p_{k-1} \, dx = 0, \quad \forall \, p_{k-1} \in P_{k-1}(K),$$

$$\int_K (\vec{q} - \rho_K \vec{q}) \cdot \overrightarrow{\operatorname{curl}} (b_K \, p_{k-2}) \, dx = 0, \quad \forall \, p_{k-2} \in P_{k-2}(K), \ (k \geq 2).$$

(ii) $RT_k(K) = (P_k(K))^2 \oplus \vec{x}\, P_k(K),\ (k \geq 0)$.

$\rho_K : W(K) \to RT_k(K)$ je popsán

$$\int_{\partial K} (\vec{q} - \rho_K \vec{q}) \cdot \vec{n}\, p_k \, ds = 0, \quad \forall\, p_k \in R_k(\partial K),$$

$$\int_K (\vec{q} - \rho_K \vec{q}) \cdot \vec{p}_{k-1} \, dx = 0, \quad \forall\, \vec{p}_{k-1} \in (P_{k-1}(K))^2, (k \geq 1).$$

Dále budeme obecně značit $M(K)$ libovolnou aproximaci prostor $H(\mathrm{div}\,; K)$ a $M_k(K)$ značí takový prostor, že $(P_k(K))^n \subseteq M_k(K)$, ale $(P_{k+1}(K))^n \not\subset M_k(K)$. Označme navíc

$$D_k(K) := \mathrm{div}(M_k(K)) \quad ,$$

a zformulujme několik tvrzení o chování chyb v $H(\mathrm{div}\,; K)$.

Tvrzení 7:

Nechť K je afinní prvek a ρ_K je interpolační operátor $W(K) \to M_k(K)$. Pak existuje konstanta c závislá pouze na k a na tvaru K taková, že pro $1 \leq m \leq k+1$ a pro $s = 0$ nebo 1 a pro libovolnou $\vec{q} \in (H^m(K))^n$ platí

$$\|\vec{q} - \rho_k \vec{q}\|_{s,K} \leq c\, h_K^{m-s} |\vec{q}|_{m,K} .$$

Tvrzení 8:

Nechť K je afinní prvek a ρ_K je interpolační operátor $W(K) \to M_k(K)$. Nechť navíc π_K je L^2- projekce na $D_k(K)$, pak pro každou $\vec{q} \in W(K)$ platí

$$\mathrm{div}(\rho_K \vec{q}) = \pi_K \mathrm{div}\, \vec{q} .$$

a

Tvrzení 9:

Nechť K je afinní prvek a ρ_K je interpolační operátor $W(K) \to M_k(K)$. Pak existuje konstanta c závislá pouze na k a na tvaru K taková, že pro $1 \leq m \leq \phi_K(k)$ a pro libovolnou $\vec{q} \in (H^m(K))^n$ platí

$$\|\mathrm{div}(\vec{q} - \rho_k \vec{q})\|_{s,K} \leq c\, h_K^m |\mathrm{div}\, \vec{q}|_{m,K} ,$$

kde $\phi_K(k) = k$ pro BDM_k a $\phi_K(k) = k+1$ pro RT_k.

A tyto výsledky přeneseme na konstrukci aproximace celého $H(\mathrm{div}\,; \Omega)$. Zřejmě lze správnou volbou stupňů volnosti dosáhnout spojitosti $\vec{q} \cdot \vec{n}$ na společných stranách a tedy poskládat nový prostor

$$M_k(\Omega, T_h) = \{\vec{q} \in H(\mathrm{div}\,; \Omega),\ \vec{q}\,|_K \in M_k(K)\}.$$

a stejně tak

$$L^0(D_k, T_h) = \{v \in L^2(\Omega),\ v\,|_K \in D_k(K)\}.$$

Je zřejmé, že pro afinní prvky máme

$$\operatorname{div} M_k(\Omega, T_h) \subset L^0(D_k, T_h).$$

Můžeme také definovat globální interpolační operátor Π_h z $W = H(\operatorname{div}, \Omega) \cap (L^s(\Omega))^n$ $(s > 2 \text{ pevné})$ do $M_k(\Omega; T_h)$ jako

$$(\Pi_h \vec{q})_K = \rho_K(\vec{q}|_K).$$

Navíc definujeme-li P_h projekci na $L^0(D_k, T_h)$ máme

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{\operatorname{div}}{\rightarrow} & L^2(\Omega) \\ \downarrow_{\Pi_h} & & \downarrow_{P_h} \\ M_k(\Omega, T_h) & \overset{\operatorname{div}}{\rightarrow} & L^0(D_k, T_h) \end{array},$$

tedy

$$\operatorname{div} M_k(\Omega, T_h) = L^0(D_k, T_h).$$

A z tvrzení 7 a 9 dostáváme odhady pro interpolační operátor Π_h .

Tvrzení 10:

Nechť T_h je triangulace Ω a nechť Π_h je jako výše, pak existuje konstanta c nezávislá na h, že

$$\|\vec{q} - \Pi_h \vec{q}\|_{0,\Omega} \le c\, h^m |\vec{q}|_{m,\Omega},$$

pro $1 \le m \le k+1$. Navíc

$$\|\operatorname{div}(\vec{q} - \Pi_h \vec{q})\|_{0,\Omega} \le c\, h^s |\operatorname{div} \vec{q}|_{s,\Omega},$$

kde $s \le k$ pro BDM_k a $s \le k+1$ pro RT_k.

12. Aplikace teoretických výsledků

Vraťme se zpět na začátek k naší úloze.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad na\ \Omega, \\ u &= g_1 \quad na\ D, \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u \cdot \vec{n} &= g_2 \quad na\ N, \end{aligned}$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ s lipschicovsky spojitou hranicí, $\Gamma = N \cup D = \partial\Omega$. Zřejmě tedy existuje $\alpha \ge 0$ takové, že

$$\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle \ge \alpha |\vec{q}|^2_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall \vec{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Řešení tedy odpovídá variačnímu problému

$$\inf_{v\in H^1_{g_1,D}(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{\text{grad}}\, v\cdot \vec{\text{grad}}\, v\ dx - \int_N g_2 v\ ds \quad (15)$$

kde $H^1_{g_1,D}(\Omega)=\{v \mid v\in H^1(\Omega),\ v|_D = g_1\}$. Pro tuto primární formulaci jsme existenci a jednoznačnost řešení již zkoumali. Přejděme nyní ke smíšené formulaci a pro začátek předpokládejme, že $g_2=0$, pak

$$\inf_{\vec{q}\in H_{0,N}(\text{div};\Omega)} \sup_{v\in L^2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{q}\cdot\vec{q}\ dx + \int_\Omega (\text{div}\,\vec{q})\,v\ dx + \int_D g_1 \vec{q}\cdot\vec{n}\ ds, \quad (16)$$

kde $H_{0,N}(\text{div};\Omega)=\{\vec{q} \mid \vec{q}\in H(\text{div};\Omega),\ \vec{q}\cdot\vec{n}|_N = 0\}$. Položme

$$a(\vec{p},\vec{q}) = \int_\Omega \vec{p}\cdot\vec{q}\ dx,$$
$$b(v,\vec{q}) = \int_\Omega v\,\text{div}\,\vec{q}\ dx,$$

pak (16) lze psát jako

$$\begin{aligned} a(\vec{p},\vec{q}) + b(\vec{q},u) &= \langle g_1, \vec{q}\cdot\vec{n}\rangle, && \forall\, \vec{q}\in H_{0,N}(\text{div};\Omega),\\ b(\vec{p},v) &= 0, && \forall\, v\in L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (17)$$

kde hledáme $(u,\vec{p})\in Q\times V$ $(Q=L^2(\Omega),\ V=H_{0,N}(\text{div};\Omega))$. Operátor B je operátor divergence z V na Q . Nyní se podívejme na případ $g_2\neq 0$. Uvažujme

$$\vec{\tilde{q}}\cdot\vec{n} = g_2\ \ na\ \ N,$$

pak (17) transformujeme na úlohu, kde hledáme $\vec{p}=\vec{\tilde{q}}+\vec{p}_0$ pro $\vec{p}_0\in H_{0,N}(\text{div};\Omega)$
.

$$\begin{aligned} a(\vec{p}_0,\vec{q}) + b(\vec{q},u) &= \langle g_1, \vec{q}\cdot\vec{n}\rangle - a(\vec{\tilde{q}}_0,\vec{q}), && \forall\, \vec{q}\in H_{0,N}(\text{div};\Omega),\\ b(\vec{p},v) &= \qquad\qquad - b(\vec{\tilde{q}},v), && \forall\, v\in L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (18)$$

Tedy pro řešení úlohy s $g_2\neq 0$ stačí změnit pravou stranu soustavy.
Neboť jsme si již ukázali, jak aproximovat prostor $H(\text{div};\Omega)$, můžeme zavést diskrétní formulaci. Nechť tedy například

$$V_h = \{\vec{q}_h \mid \vec{q}_h\in RT_k(\Omega,T_h),\ \vec{q}_h\cdot\vec{n}|_N = 0\}$$

pak

$$Q_h = \{v_h \mid v_h|_K\in P_k(K)\}.$$

Hledáme řešení $(\vec{p}_h,u_h)\in V_h\times Q_h$ diskrétního problému

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vec{p}_h\cdot\vec{q}_h\,dx + \int_\Omega u_h \operatorname{div}\vec{q}_h\,dx &= \int_D g_1\vec{q}_h\cdot\vec{n}\,ds - \int_\Omega \vec{\tilde{q}}_h\cdot\vec{q}_h\,dx, \qquad \forall\,\vec{q}_h\in V_h,\\ \int_\Omega v_h\operatorname{div}\vec{p}_h\,dx &= \qquad\qquad -\int_\Omega v_h \operatorname{div}\vec{\tilde{q}}_h\,dx, \quad \forall\,v_h\in Q_h. \end{aligned} \tag{19}$$

O této úloze lze dokázat, že má jednoznačně určené řešení, pro které platí následující odhady

$$\begin{aligned} \|\vec{p}-\vec{p}_h\|_V &\le c \inf_{\vec{q}_h\in V_h}\|\vec{p}-\vec{q}_h\|_V,\\ \|u-u_h\|_Q &\le c\left(\inf_{v_h\in Q_h}\|u-v_h\|_Q + \inf_{\vec{q}_h\in V_h}\|\vec{p}-\vec{q}_h\|_V\right). \end{aligned}$$

A užitím tvrzení 10 dostáváme

Tvrzení 11:

Nechť $M_k(\Omega,T_h)$ je prostor definovaný v předchozí kapitole a $L^0(D_k,T_h)$ odpovídající prostor. Nechť $(\vec{p},u)$ řešení (18) a nechť $(\vec{p}_h,u_h)\in M_k(\Omega,T_h)\times L^0(D_k,T_h)$ řeší (19), pak máme odhad

$$\|\vec{p}-\vec{p}_h\|_{0,\Omega}\le c\,h^s\|\vec{p}\|_{s,\Omega}$$

pro $s\le k+1$. Navíc platí,

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\le c\,h^s(\|p\|_s+\|u\|_s)$$

pro $s\le k$ na prostorech BDM a pro $s\le k+1$ na prostorech RT.

13. Trasformace soustavy vzniklé diskretizací

Otázkou zůstává jak toto řešení vypočítat. Uvažujme opět $g_2=0$ a volme nejjednodušší možnou aproximaci, tedy užijeme prvky $RT_0(K)$.

$$RT_0(K)=\{(a+b\,x_1,c+b\,x_2);a,b,c\in\mathbb{R}\}\subseteq(P_1(K))^2,$$

dále označme

$$M^0=\{\vec{q}\mid\vec{q}\in(L^2(\Omega))^2,\vec{q}|_K\in RT_0(K),\ \forall\,K\in T_h\},$$

a

$$M=M^0\cap H_{0,D}(\operatorname{div},\Omega)=\{\vec{q}\in RT_0(\Omega,T_h),\ \vec{q}\cdot\vec{n}=0\ \text{na}\ N\}.$$

Příslušným prostorem L^0 je potom P_0 , tedy po částech konstantní funkce. Hledáme tedy $(\vec{p}_h,u_h)\in M\times L^0$ řešení systému

$$\begin{aligned} a(\vec{p}_h,\vec{q}_h)+b(\vec{q}_h,u_h)&=\langle g_1,\vec{q}_h\cdot\vec{n}\rangle \quad \forall\,\vec{q}_h\in M,\\ b(\vec{p}_h,v_h)&=0, \qquad\qquad\quad \forall\,v_h\in L^0. \end{aligned}\tag{20}$$

Nyní si představíme postup, kterým lze tento systém vyřešit. V této konstrukci nám postačí bázové funkce prostoru M^0 , což nám velmi zjednoduší situaci. Zavedeme prostor

$$\Lambda=L^0(\varepsilon_h),$$

tedy prostor funkcí μ_h konstantních na každé straně triangulace T_h . Pro libovolnou funkci $\chi \in L^2(D)$ položme

$$\Lambda_{\chi, D} = \{\mu_h \mid \mu_h \in \Lambda, \int_e (\mu_h - \chi)\, ds = 0, \quad \forall e \in \varepsilon_h \cap D\}.$$

Dále ještě zavedeme značení, pro $\vec{q}_h \in M^0$ a $\mu_h \in \Lambda$,

$$c(\mu_h, \vec{q}_h) = \sum_K \int_{\partial K} \mu_h \vec{q}_h \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

Přímo z definice prostoru M plyne následující lemma.
Lemma 5:
Nechť $\vec{q}_h \in M^0$, pak platí

$$(c(\mu_h, \vec{q}_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in \Lambda_{0,D}) \Leftrightarrow (\vec{q}_h \in M).$$

Nechť nyní $(\vec{p}_h, u_h)$ je řešením (20), definujme lineární zobrazení

$$\phi : \vec{q}_h \to (\vec{p}_h, \vec{q}_h) + (u_h, \operatorname{div} \vec{q}_h)_h - \langle g, \vec{q}_h \cdot \vec{n} \rangle,$$

kde $(\chi, \psi)_h = \sum_K \int_K \chi \psi\, dx$. Pro všechny $\vec{q}_h \in M$ zřejmě platí, že $\phi(\vec{q}_h) = 0$. Navíc existuje $\lambda_{0h} \in \Lambda_{0,D}$, které splňuje

$$\phi(\vec{q}_h) = c(\lambda_{0h}, \vec{q}_h), \quad \forall \vec{q}_h \in M^0.$$

Toto λ_{0h} je určeno jednoznačně. Definujme $\lambda_h \in \Lambda_{g,D}$ tak, že $\lambda_h = \lambda_{0h}$ na $\varepsilon_h \setminus D$, pak

$$(\vec{p}_h, \vec{q}_h) + (u_h, \operatorname{div} \vec{q}_h)_h = c(\lambda_h, \vec{q}_h), \quad \forall \vec{q}_h \in M^0.$$

Výsledky celé této konstrukce lze shrnout do věty.

Věta 4:
Nechť $(\vec{p}_h, u_h)$ je řešení systému (20) a nechť λ_h je jako výše ,
pak $(\vec{p}_h, u_h, \lambda_h) \in M^0 \times L^0 \times \Lambda_{g,D}$ je jednoznačně určené řešení systému

$$\begin{aligned} (\vec{p}_h, \vec{q}_h) + (u_h, \operatorname{div} \vec{q}_h)_h &= c(\lambda_h, \vec{q}_h), \quad \forall \vec{q}_h \in M^0, \\ (v_h, \operatorname{div} \vec{p}_h)_h &= 0, \quad \forall \vec{v}_h \in L^0, \\ c(\mu_h, \vec{p}_h) &= 0, \quad \forall \mu_h \in \Lambda_{0,D}. \end{aligned}$$

Protože prostory L^0 a M^0 jsou na sousedních prvcích nespojité, lze volit zcela přirozeně bázové funkce nenulové vždy jen na jednom prvku K^* . V odpovídajícím systému lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} A & B^t & C^t \\ B & O & O \\ C & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ U \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ O \\ O \end{pmatrix} \quad (21)$$

se matice A stane blokově diagonální (každý blok je matice $n \times n$, kde $n = \dim M(K)$) a je tedy vhodné P na každém prvku vyjádřit jako

$$P = A^{-1}(G - B^t U - C^t \Lambda) \quad ,$$

přičemž zbyde soustava

$$\begin{pmatrix} -BA^{-1}B^t & -BA^{-1}C^t \\ -CA^{-1}B^t & -CA^{-1}C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -BA^{-1}G \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ovšem nyní matice $BA^{-1}B^t$ je blokově diagonální (tentokrát $n = \dim D(K)$) a tedy i U vyjádříme jako

$$U = (BA^{-1}B^t)^{-1}[-BA^{-1}C^t \Lambda + BA^{-1}G] \quad ,$$

a zbyde

$$L\Lambda = R \quad ,$$

kde

$$L = CA^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1}C^t - CA^{-1}C^t ,$$

$$R = CA^{-1}B^t(BA^{-1}B^t)^{-1}BA^{-1}G .$$

Ještě si řekneme, jak sestrojit soustavu lineárních rovnic (21). Neboť prostory M^0 a L^0 , jak už jsme řekli, nejsou spojité na sousedních prvcích, je zcela přirozené sestavit soustavu (21) po jednotlivých prvcích. Navíc ke každému $K \in T_h$ existuje F takové, že $K = F(\hat{K})$. Protože předpokládáme práci s afinními prvky, F je tvaru $x_0 + B\hat{x}$, kde B je konstantní matice. Se znalostí $DF = B$ a $J = |\det B|$ se můžeme omezit na výpočet na referenčním prvku. Nechť

$$p_{\hat{K}} = \begin{matrix} p_1(x,y) = a_{\hat{K}} + c_{\hat{K}} x , \\ p_2(x,y) = b_{\hat{K}} + c_{\hat{K}} y , \end{matrix} \qquad a_{\hat{K}}, b_{\hat{K}}, c_{\hat{K}} \in \mathbb{R},$$

$$u_{\hat{K}} = u(x,y) = s_{\hat{K}}, \qquad s_{\hat{K}} \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_{\hat{e}} = \lambda(x,y) = t_{\hat{e}}, \qquad t_{\hat{e}} \in \mathbb{R}.$$

Jako bázi M^0 volme funkce

$$\vec{q}^{\,1} = (1,0), \qquad \vec{q}^{\,2} = (0,1), \qquad \vec{q}^{\,3} = (x,y),$$

a jako bázi L^0 funkci $v = 1$. Tedy

$$\int_{\hat{K}} \vec{p}_{\hat{K}} \cdot \vec{q} \; dx + \int_{\hat{K}} u_{\hat{K}} \operatorname{div} \vec{q} \; dx = \int_{\partial \hat{K}} \lambda_{\hat{e}} \vec{q} \cdot \vec{n} \; ds , \qquad \vec{q} = \vec{q}^{\,1},\ \vec{q}^{\,2},\ \vec{q}^{\,3},$$

$$\int_{\hat{K}} v \operatorname{div} \vec{p}_{\hat{K}} \; dx = 0.$$

Tím dostaneme pro každý prvek 4 rovnice a zbývají rovnice odpovídající $c(\mu_h, \vec{p}_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in \Lambda_{0,D}$.

Funkce prostoru $\Lambda_{0,D}$ (v našem případě funkce konstantní na $e \in \varepsilon_h$) jsou ovšem nenulové pro dva sousední prvky. Jinými slovy do jedné rovnice vstupují vždy dva sousedící prvky (pokud se nejedná o případ $e \in \partial\Omega$). Doplníme tedy rovnice implikující spojitost na každé straně $\in \varepsilon_h$. Jako bázi prostoru $\Lambda_{0,D}$ volme funkce $\mu_{e^*} = 1$ na e^* a 0 jinak.

$$\sum_{\substack{K \in T_h, \\ \partial K \cap e \neq \emptyset}} \int_e \vec{\mu}_e \, p_K \cdot \vec{n}_K \, ds = 0, \qquad \forall e \in \varepsilon_h.$$

Tím dostáváme kompletní systém, který jsme schopni vyřešit. Výše uvedeným způsobem trasformjeme na soustavu tvaru $L\Lambda = R$, a tu již vyřešíme vhodnou iterační metodou.

Literatura

Brezzi, F., Fortin, M.: *Mixed and Hybrid finite element methods,* Springer-Verlag, New York, 1991, ISBN 0-387-97582-9.

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika 3. Elektřina a magnetismus*, Vysoké učení technické v Brně – Nakladtelství VUTIMN a PROMETHEUS v Praze, 2000, ISBN 80-214-1868-0.

Rokyta, M., John, O., Málek, J., Pokorný, M., Stará, J.: *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic,* 2002,
URL:<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/skripta-pdr/>.

Maxwellovy rovnice a jejich základní důsledky
URL:<http://www.wiki.matfyz.cz/wiki/8._Maxwellovy_rovnice_a_jejich_z%C3%A1kladn%C3%AD_d%C5%AFsledky>.