Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Rolínek

Některé aplikace Korovkinovy věty o třech funkcích

Katedra matematické analýzy

Vedoucí: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Studijní program: Matematika, MOM
2010

Rád bych na tomto místě poděkoval svým rodičům za finanční a psychickou podporu v průběhu studia i během psaní této práce. Děkuji rovněž Vítu Musilovi za technickou pomoc s programem LaTeX. Největší poděkování však patří mému vedoucímu Prof. Jaroslavu Lukešovi za velkou trpělivost a nespočet rad a poznámek.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 30. června 2010 Michal Rolínek

Obsah

Název práce: Některé aplikace Korovkinovy věty o třech funkcích
Autor: Michal Rolínek
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
E-mail vedoucího: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Hlavním tématem této práce je Korovkinova věta o třech funkcích, její aplikace a zobecnění. Tato věta zhruba říká, že pro stejnoměrnou konvergenci některých posloupností funkcí stačí vyšetřovat jejich stejnoměrnou konvergenci pro tři speciální funkce. Okamžitým důsledkem Korovkinovy věty je kupříkladu Weierstrassova věta o aproximaci spojitých funkcí polynomy. Kromě toho se v práci zaměříme na dvě zobecnění této věty a porovnáme je z hlediska účinnosti v aplikacích i teoretického přínosu. Vybaveni touto teorií pak předvedeme další aplikace. Dokážeme například některé vlastnosti Poissonova integrálu či Fejérovu větu o sčítatelnosti Fourierových řad.

Klíčová slova: Korovkinova věta, omezující funkce, Fejérova věta.

Title: Some applications of the Korovkin theorem
Author: Michal Rolínek
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Supervisor's e-mail address: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The main topic of this work is the Korovkin theorem, it's applications and generalizations. Loosely, this theorem states that when investigating uniform convergence of some sequences of functions it sometimes suffices to investigate it only for three special functions. For example the Weierstrass theorem on approximating continuous functions by polynomials is an immediate consequence. Then we focus on two possible generalizations of the theorem and compare them in terms of applicability and theoretical benefits. After we are equipped with this theory, we can show further results. For example we will prove some properties of Poisson integral or the Fejér theorem on summability of Fourier series.

Keywords: Korovkin theorem, bounding function, Fejér theorem

Úmluvy a značení

$\mathbb{N}$	Množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	Množina nezáporných celých čísel $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	Množina kladných reálných čísel
$C(X)$	Banachův prostor spojitých funkcí na kompaktním prostoru X, opatřený běžnou supremovou normou
$f_n \rightrightarrows f$ na X	Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na množině X
$\operatorname{Lin} X$	Lineární obal podmnožiny X reálného vektorového prostoru

Kapitola 1

Klasický důkaz Korovkinovy věty

V celé práci (nebude-li řečeno jinak) bude X značit kompaktní Hausdorffův topologický prostor.

Definice (Lineární operátor)**.** Operátor $T : C(X) \to C(X)$ nazveme *lineární*, pokud pro každé dva prvky $f, g \in C(X)$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(a) $T(f + g) = T(f) + T(g)$,

(b) $\alpha \cdot T(f) = T(\alpha \cdot f)$.

Poznámka 1.1. Místo zápisu $T(f)$ budeme dále pro obraz funkce f častěji používat zkrácený zápis Tf. Dále $Tf(x)$ bude označovat hodnotu tohoto obrazu v bodě x, zatímco $T(f(x))$ bude obraz konstanty $f(x)$.

Definice (Nezáporný operátor)**.** Operátor $T : C(X) \to C(X)$ nazveme *nezáporný*, pokud platí $Tf \geq 0$, kdykoliv $f \geq 0$, $f \in C(X)$.

Definice (Monotónní operátor)**.** Operátor $T : C(X) \to C(X)$ nazveme *monotónní*, pokud platí $Tf \geq Tg$, kdykoliv $f \geq g$.

Lemma 1.2. *Buď $T : C(X) \to C(X)$ lineární a nezáporný operátor. Pak platí:*

(a) *T je monotónní.*

(b) *$|T(f)| \leq T|f|$, $\forall f \in C(X)$.*

(c) *T je spojitý.*

Důkaz. (a): Buďte $g, f \in C(X)$ takové, že $f \geq g$. Pak $f - g \geq 0$ a z nezápornosti máme $T(f-g) \geq 0$. Z linearity pak $Tf - Tg = T(f-g) \geq 0$, takže $Tf \geq Tg$ a jsme hotovi.
(b): Pro $f \in C(X)$ platí $|f| \geq f \geq -|f|$, podle (a) pak můžeme psát $T|f| \geq Tf \geq -T|f|$, což ovšem již znamená $|Tf| \leq T|f|$.
(c): Podle (b) platí $|Tf| \leq T|f| \leq T\,\|f\| \leq \|f\|\,\|T(1)\|$. Lineární operátor T je omezený na jednotkové kouli, a tedy je spojitý. □

Lemma 1.3 (O vepsání paraboly)**.** *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak pro každou $f \in C([a,b])$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje konstanta $M \in \mathbb{R}^+$ taková, že nerovnost*

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + M \cdot (x-y)^2$$

platí pro všechna $x, y \in [a,b]$.

Důkaz. Buď $f \in C([a,b])$ a $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje tedy $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pokud} \quad |x-y| \leq \delta, \quad \text{pak} \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

nebo ekvivalentně,

$$\text{pokud} \quad (x-y)^2 \leq \delta^2, \quad \text{pak} \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

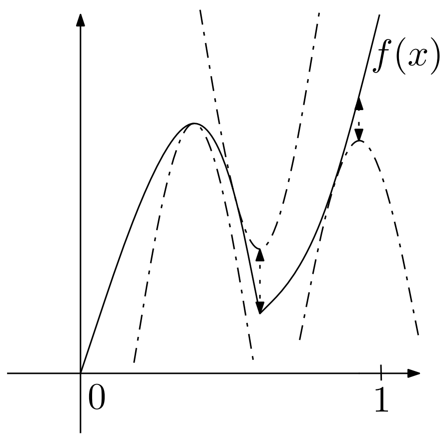
Zvolme nyní $M := 2\|f\|/\delta^2$. V případě, že $|x-y| \leq \delta$, je podle předchozího $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ a jsme hotovi. Naopak, pokud $|x-y| > \delta$, stačí dokázat $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon + 2 \cdot \|f\|$, což je ovšem zřejmé podle trojúhelníkové nerovnosti. □

Poznámka 1.4 (Důležitá)**.** Zvolme v nerovnosti z tohoto lemmatu y pevné a převeďme ji do tvaru

$$\big(f(y) - M \cdot (x-y)^2\big) - \varepsilon \leq f(x) \leq \big(f(y) + M \cdot (x-y)^2\big) + \varepsilon,$$

z něhož je vidět, že předchozí lemma opravdu hovoří o vepisování parabol[1]. Například na levé straně je parabola, jejíž extrém je v bodě y a hodnota v tomto bodě je $f(y) - \varepsilon$. Navíc je tato parabola svrchu ohraničená funkcí $f(x)$ (viz Obr. 1.1). Lemma tedy tvrdí, že libovolnou spojitou funkci f lze v každém bodě jakkoliv těsně sevřít mezi dvě paraboly, což lze geometricky velmi snadno nahlédnout. Stejnoměrnost konstanty M, která je v lemmatu obsažena, nás na kompaktu nijak nepřekvapí. Tyto úvahy si zapamatujme, neboť nám několikrát poslouží k zobecnění Korovkinovy věty.

[1]Samozřejmě osy těchto parabol jsou rovnoběžné s osou y.



Obrázek 1.1: Svírání mezi paraboly

Věta 1.5 (První Korovkinova věta o třech funkcích)**.** *Buď $[a,b] \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval a $\{L_n\} : C([a,b]) \to C([a,b])$ posloupnost lineárních nezáporných operátorů. Označme $P_i(x) = x^i$, $i \in \mathbb{N}_0$ a předpokládejme, že $L_n P_i \rightrightarrows P_i$ na $[a,b]$, pro $i = 0,1,2$. Pak $L_n f \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro každou $f \in C([a,b])$.*

Důkaz. Mějme tedy $f \in C([a,b])$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předchozího lemmatu existuje $M \in \mathbb{R}^+$, že

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon + M \cdot (x-y)^2\,, \qquad x, y \in [a,b].$$

Zvolme nyní $y \in [a,b]$ pevné a na obě strany nerovnosti (mezi funkcemi v x) aplikujme L_n, $n \in \mathbb{N}$. Pak díky linearitě a monotonii L_n a Lemmatu 1.2 (b) platí

$$|L_n f - f(y) L_n P_0| \le \varepsilon L_n P_0 + M \cdot (L_n P_2 - 2y L_n P_1 + y^2 L_n P_0).$$

Položíme-li $x := y$, získáme

$$|L_n f(y) - f(y) L_n P_0(y)| \le \varepsilon L_n P_0(y) + M \cdot (L_n P_2(y) - 2y L_n P_1(y) + y^2 L_n P_0(y)).$$

K odhadu $|L_n f(y) - f(y)|$ zbývá očekávaným způsobem použít trojúhelníkovou nerovnost

$$\begin{aligned} |L_n f(y) - f(y)| \le |L_n f(y) - f(y) L_n P_0(y)| + f(y)|1 - L_n P_0(y)| \le \\ \varepsilon + \varepsilon|1 - L_n P_0(y)| + M|L_n P_2(y) - y^2| + \\ +2My|L_n P_1(y) - y| + \big(My^2 + f(y)\big) \cdot |L_n P_0(y) - 1|, \end{aligned}$$

v níž každá z absolutních hodnot jde podle předpokladu k nule pro $n \to \infty$. Jistě tedy lze najít takové $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že pro $n \ge n_0$ je $|L_n f(y) - f(y)| \le 2\varepsilon$ pro každé $y \in [a,b]$, a důkaz je hotov. $\square$

Fakt, že konvergenci stačí ověřit pro konkrétní trojici funkcí je velice silný, jak dobře pochopíme nyní při důkazu Weierstrassovy věty.

Důsledek 1.6 (Weierstrassova věta)**.** *Nechť* $f \in C([0,1])$. *Pak existuje posloupnost polynomů* $\{P_n\}$ *taková, že* $P_n \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$.

Důkaz. Ukážeme, že posloupnost *Bernsteinových polynomů* má tuto vlastnost. Jejich předpis je

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Operátory B_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné a lineární. Podle Korovkinovy věty tedy stačí ověřit stejnoměrnou konvergenci pouze pro funkce $1, x, x^2$. Elementárním použitím binomické věty snadno dopočítáme

$$\begin{aligned} B_n 1 &= 1, \\ B_n x &= x, \\ B_n x^2 &= \frac{1}{n} \cdot x + \frac{n-1}{n} \cdot x^2 \rightrightarrows x^2 \text{ na } [0,1] \end{aligned}$$

a vidíme, že důkaz slavné Weierstrassovy věty je u konce. □

Kapitola 2

Omezující funkce

Viděli jsme, že klíčem ke klasickému důkazu bylo Lemma 1.3 o vepsání paraboly. Tušíme, že paraboly nebudou zdaleka jediné křivky[1], které lze takto vepisovat, a sledováním této myšlenky bychom mohli najít další „rodiny“ funkcí, pro něž by mohlo stačit konvergenci ověřovat. Interval $[a, b]$ nahradíme kompaktním topologickým prostorem X a nový výklad začneme zobecněním lemmatu o vepsání paraboly.

Lemma 2.1 (O vepisování křivek)**.** *Buďte $f, h \in C(X)$ takové, že $h \geq 0$ a platí, že kdykoliv $h(x) = 0$, $x \in X$, pak i $f(x) = 0$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konstanta $M \in \mathbb{R}^+$ taková, že*

$$f(x) \leq \varepsilon + Mh(x) \quad \textit{pro každé } x \in X.$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Definujme otevřenou množinu

$$G := \{x \in X : f(x) < \varepsilon\}.$$

Je-li $G = X$, stačí zvolit $M \in \mathbb{R}^+$ libovolně a kýžená nerovnost je splněna pro každé $x \in X$. V opačném případě je $X \setminus G$ neprázdný uzavřený podprostor kompaktu X, a tedy je sám (neprázdným) kompaktem. Funkce $g := \frac{f}{h}$ je podle předpokladů na $X \setminus G$ dobře definovaná ($f(x) \neq 0 \to h(x) \neq 0$), spojitá a navíc kladná. Nabývá tam tedy svého maxima $M \in \mathbb{R}^+$. Pro $x \in X \setminus G$ pak platí $f(x) \leq Mh(x)$. Nerovnost

$$f \leq \varepsilon + Mh$$

potom platí jak na G, tak i na $X \setminus G$. □

[1]Křivkou v tomto kontextu rozumíme graf funkce, nikoliv křivku ve smyslu diferenciální geometrie.

Poznámka 2.2. Toto lemma skutečně zobecňuje lemma o vepsání paraboly. Stačí ho použít na kompaktní prostor $X := [a,b]^2$ a spojité funkce $F(x,y) = |f(x) - f(y)|$ a $H(x,y) = (x-y)^2$.

Později pochopíme, že lemma o vepisování křivek je podstatnou součástí teorie kolem Korovkinových vět. Kromě své role v klasickém důkazu má i nezanedbatelnou úlohu v obou zobecňujících přístupech. Nyní už přikročme ke slibovaným omezujícím funkcím, které zobecní sadu parabol z klasického důkazu.

Definice (Omezující funkce)**.** Buď $f \in C(X)$. Pokud pro nezápornou funkci $F \in C(X \times X)$ platí, že kdykoliv $F(x,t) = 0$, $x, t \in X$, pak jest $f(x) = f(t)$, nazveme ji *omezující funkcí* pro f.

Poznámka 2.3. Pokud bude $t \in X$ zvoleno pevně, pak budeme funkci (jedné proměnné) $F(\,\cdot\,, t)$ značit zkráceně F_t.

Věta 2.4 (O omezující funkci)**.** *Buď $f \in C(X)$, $F \in C(X \times X)$ omezující funkce pro f a $\{L_n\}$ posloupnost lineárních a nezáporných operátorů. Nechť platí*

(a) $L_n(1) \rightrightarrows 1$ na X,

(b) $L_n(F_t) \rightrightarrows 0$ na X pro každé $t \in X$.

Pak $L_n f \rightrightarrows f$ na X.

Důkaz. Definujme funkci $G(x,t) := |f(x) - f(t)| \in C(X \times X)$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice omezující funkce víme, že pokud $F(x,t) = 0$ pro nějaké $x, t \in X$, pak $f(x) = f(t)$, a tedy i $G(x,t) = 0$. Podle Lemmatu 2.1 použitého na funkce $F, G \in C(X \times X)$ a (kompaktní) prostor $X \times X$ existuje $M \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$|f(x) - f(t)| = G(x,t) \leq \varepsilon + M \cdot F(x,t)$$

pro všechna $x, t \in X$. Zvolme nyní $t \in X$ pevné a na obě strany aplikujme $L_n, n \in \mathbb{N}$. Díky linearitě, monotonii a Lemmatu 1.2(b) můžeme psát

$$|L_n f(x) - f(t) L_n 1(x)| \leq \varepsilon L_n(1)(x) + M L_n F_t(x)$$

pro každé $x \in X$. Nyní položme $x := t$ a pomocí trojúhelníkové nerovnosti dokončeme odhad

$$\begin{aligned}|L_n f(t) - f(t)| &\leq |L_n f(t) - f(t) L_n 1(t)| + |f(t)| \cdot |L_n 1(t) - 1 \leq \\ &\leq \varepsilon L_n 1(t) + M \cdot L_n F_t(t) + \|f\| \cdot |L_n 1(t) - 1|.\end{aligned}$$

Poslední dva členy jdou k nule pro velká n, jistě tedy najdeme $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|L_n f(t) - f(t)| < 2\varepsilon$, a stejnoměrná konvergence je zaručena. $\square$

Poznámka 2.5. Tento důkaz velmi přesně kopíruje důkaz Věty 1.5 a vysvítá tak, že hlavní myšlenka se odehrála v Lemmatu 2.1 o vepisování křivek.

Poznámka 2.6. Snadným důsledkem předchozí věty je samotná první Korovkinova věta. Za omezující funkci stačí zvolit $(x-t)^2$ (ta omezuje každou $f \in C([0,1])$).

Začínáme tušit, že v konkrétně určených situacích je předchozí věta velice silná, neboť stačí pouze nalézt vhodnou omezující funkci. Jako ukázku zde předvedeme důkaz důležité vlastnosti Poissonova integrálu.

Věta 2.7. *Buď f spojitá funkce na intervalu $[-\pi,\pi]$ splňující $f(-\pi)=f(\pi)$. Dále buď $u(r,\varphi)\colon [0,1)\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ zobrazení definované předpisem*

$$u(r,\varphi) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)f(s)}{1-2r\cos(\varphi-s)+r^2}\,\mathrm{d}s.$$

Pak platí, že $\lim_{r\to 1^-} u(r,\varphi) = f(\varphi)$ pro každé $\varphi\in[-\pi,\pi]$ a tato konvergence je navíc stejnoměrná na $[-\pi,\pi]$.

Důkaz. Podle Heineho věty platí

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,\varphi) = f(\varphi)$$

stejnoměrně na $[-\pi,\pi]$, právě když

$$\lim_{n\to\infty} u(r_n,\varphi) = f(\varphi)$$

stejnoměrně na $[-\pi,\pi]$ pro každou posloupnost $\{r_n\}$ takovou, že $r_n \longrightarrow 1$ a zároveň $r_n<1$ pro každé $n\in\mathbb{N}$.

Zvolme tedy takovou posloupnost $\{r_n\}$ a definujme operátory $L_n\colon C[-\pi,\pi]\to C[-\pi,\pi]$, $n\in\mathbb{N}$ následovně

$$(L_n f)(\varphi) = u(r_n,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r_n^2)f(s)}{1-2r_n\cos(\varphi-s)+r_n^2}\,\mathrm{d}s.$$

Operátory $\{L_n\}$ jsou nezáporné, neboť díky nerovnosti $|\cos(\varphi-s)|\le 1$ integrujeme pro $f\ge 0$ nezápornou funkci. Funkce $F(x,t) := 1-\cos(x-t)$ je omezující funkce pro f. Pak

$$(L_n F_t)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\big(1-\cos(s-t)\big)}{1-2r\cos(t-s)+r^2}\,\mathrm{d}s.$$

Pomocí derivace ověříme, že funkce

$$g(x) = \frac{1-x}{1-2tx+t^2}, \qquad t\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

je pro $x \in (-1,1)$ klesající a můžeme odhadovat

$$0 \leq (1-r_n^2) \cdot \frac{1-\cos(s-t)}{1-2r_n\cos(t-s)+r_n^2} \leq (1-r_n^2) \cdot \frac{2}{(1+r_n)^2} = 2 \cdot \frac{1-r_n}{1+r_n}.$$

Pak platí i

$$0 \leq (L_n F_t)(t) \leq \frac{1-r_n}{1+r_n}$$

a můžeme prohlásit, že $L_n(F_t) \rightrightarrows 0$ na $[-\pi,\pi]$. Standardní integrace ukáže $(L_n 1)(\varphi) = 1$, čímž jsou splněny předpoklady Věty 2.4 a platí tak $L_n f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, čímž je dokázáno již celé tvrzení věty.

□

Poznámka 2.8. Rozkrytí hlubších souvislostí mezi předchozím tvrzením a vlastnostmi Poissonova integrálu jakož i další zajímavé aplikace omezujících funkcí lze nalézt v [LG].

Kapitola 3

Horní a dolní obálky

Přestože se omezující funkce používají velmi snadno, pro rozkrývání teoretického pozadí Korovkinovy věty nejsou tím vhodným nástrojem. Potíže činí zejména spojitost omezující funkce v $X \times X$, jíž v obecnější situaci není lehké zaručit. V této kapitole zkusíme Korovkinovu větu zobecnit jiným způsobem tak, abychom se tím zároveň tomuto problému vyhnuli. Naším cílem bude charakterizovat ty množiny funkcí, pro něž stačí konvergenci ověřovat. Funkce $1, x, x^2$ nahradíme *testovací množinou* $\mathcal{T} \subset C(X)$ s jedinou podmínkou $1 \in \mathcal{T}$.

Definice ($\mathcal{T}$-přípustné operátory, $\mathcal{T}$-Korovkinovy funkce, Kor. uzávěr)**.** Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ množina testovacích funkcí. Posloupnost lineárních a nezáporných operátorů $\{L_n\}$ nazveme *$\mathcal{T}$-přípustnou*, jestliže

$$L_n t \rightrightarrows t \quad \text{na}\, X \qquad \text{pro všechny} \quad t \in \mathcal{T}.$$

Dále funkci $f \in C(X)$ nazveme *$\mathcal{T}$-Korovkinovou*, jestliže $L_n f \rightrightarrows f$, kdykoliv je $\{L_n\}$ $\mathcal{T}$-přípustná posloupnost operátorů. Množinu $\mathcal{T}$-Korovkinových funkcí budeme nazývat *Korovkinův uzávěr* $\mathcal{T}$ a značit $\mathrm{Kor}(\mathcal{T})$.

Samozřejmě nás nejvíce ze všeho bude zajímat podoba nebo jiná charakterizace Korovkinova uzávěru, speciálně pro jaké testovací množiny $\mathcal{T}$ je již každá funkce $f \in C(X)$ $\mathcal{T}$-Korovkinova.

Pozorování 3.1. *Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací množina a $\mathcal{T}'$ její lineární obal (nad $\mathbb{R}$). Pak $f \in C(X)$ je $\mathcal{T}$-Korovkinova, právě když je $\mathcal{T}'$-Korovkinova.*

Důkaz. K důkazu zjevně stačí ukázat, že posloupnost operátorů $\{L_n\}$ je $\mathcal{T}$-přípustná, právě když je $\mathcal{T}'$-přípustná. Každá $\mathcal{T}'$-přípustná posloupnost je triviálně i $\mathcal{T}$-přípustná ($\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$), takže zbývá jen jedna implikace.

Buď $\{L_n\}$ $\mathcal{T}$-přípustná posloupnost operátorů. Zvolme $h \in \mathcal{T}'$ a pišme h jako lineární kombinaci

$$h = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_k t_k \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}),$$

v níž $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$. Podle trojúhelníkové nerovnosti ovšem platí

$$\|L_n h - h\| \leq |\lambda_1| \, \|L_n t_1 - t_1\| + \cdots + |\lambda_k| \, \|L_n t_k - t_k\|,$$

a to pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \to \infty$ tak získáváme, že $L_n h \rightrightarrows h$ na X a $\{L_n\}$ je tedy i $\mathcal{T}'$-přípustná. $\square$

V dalším textu se při určování Korovkinova uzávěru stačí omezit na ty testovací množiny, které jsou zároveň lineárními podprostory $C(X)$. Tyto testovací množiny budeme nazývat *prostory testovacích funkcí*. Vzpomeňme nyní, že pro $\mathcal{T} = \{1, x, x^2\}$ tvoří $\operatorname{Lin} \mathcal{T}$ všechny kvadratické funkce, a že v Lemmatu 1.3 jsme svírali $f(x)$ mezi tyto kvadratické funkce. Myšlenku ohraničování svrchu a zespodu funkcemi z $\operatorname{Lin} \mathcal{T}$ nyní oživíme.

Definice (Horní a dolní obálka)**.** Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací prostor funkcí a $f \in C(X)$. Pak funkce

$$\begin{aligned} f^*(x) &:= \inf \{h(x) : h \geq f, h \in \mathcal{T}\}, \qquad x \in X, \\ f_*(x) &:= \sup \{h(x) : h \leq f, h \in \mathcal{T}\}, \qquad x \in X \end{aligned}$$

nazveme *horní*, respektive, *dolní obálkou* f vzhledem k $\mathcal{T}$.

Poznámka 3.2. Definice jsou korektní, neboť f je na kompaktu omezená a $\mathcal{T}$ obsahuje konstanty. Vždy také platí nerovnosti $f^* \geq f \geq f_*$. Dále poznamenejme, že značení f^* a f_* neříká, který testovací prostor $\mathcal{T}$ je zrovna ten referenční. Z kontextu to ovšem bude vždy jasné.

Definice. Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací prostor. Funkci $f \in C(X)$ nazveme $\mathcal{T}$-*nadějnou*, jestliže platí $f_* = f = f^*$. Množinu všech $\mathcal{T}$-nadějných funkcí budeme značit $\mathcal{T}^*$.

Poznámka 3.3.

(a) Funkce z testovacího prostoru jsou $\mathcal{T}$-nadějné triviálně. Platí tedy $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^* \subset C(X)$.

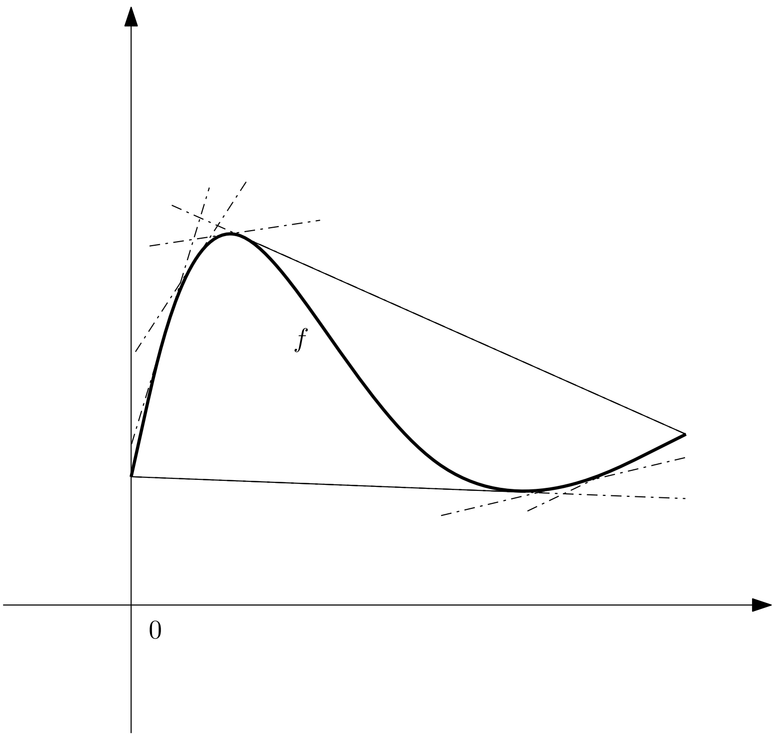
(b) Kdykoliv $f, g \in C(X)$ a $\lambda > 0$, pak okamžitě platí

$$(f + g)^* \leq f^* + g^*, \quad (\lambda f)^* = \lambda f^*, \quad (-f)^* = -f_*$$

a můžeme říct, že $\mathcal{T}^*$ je lineární podprostor $C(X)$.

Příklad 3.4. Zvolíme-li $X = [0,1]$ a $\mathcal{T} = \mathrm{Lin}\{1, x, x^2\}$, pak podle lemmatu o vepisování parabol a obrázku pod ním můžeme očekávat, že $f_*(x) = f^*(x)$ pro každou $f \in C(X)$, a tedy $\mathcal{T}^* = C(X)$. Zároveň víme, že $\mathrm{Kor}(\mathcal{T}) = C(X)$, a všimneme si, že v tomto případě platí $\mathrm{Kor}\,\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. Ukážeme, že taková souvislost zdaleka není náhodná.

Příklad 3.5. Zvolme pro změnu $X = [0,1]$ a $\mathcal{T} = \{f \in C([0,1]) : f(x) = ax+b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Rozmyslíme si, že taková $\mathcal{T}$ nemá „dobré aproximační vlastnosti“. Za pomoci Obrázku 3.1 snadno uvěříme, že horní obálkou k dané funkci f je nejmenší konkávní funkce, která je celá větší rovna f a podobně dolní obálkou je největší konvexní funkce, jejíž hodnoty nejsou větší než hodnoty f. Pak už je jasné, že $f_* = f^*$ platí pouze pro funkce $f \in \mathcal{T}$.



Obrázek 3.1: Obálky pro lineární funkce

Následující tvrzení sice nebudeme přímo potřebovat, nicméně velmi dobře ukazuje, proč je myšlenka „svírání z obou stran“ užitečná.

Tvrzení 3.6. *Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací prostor, $f \in \mathcal{T}^*$ a $\{L_n\}$ $\mathcal{T}$-přípustná posloupnost operátorů. Pak $L_n f(x) \to f(x)$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Buď $x \in X$. Kdykoliv funkce $g, h \in \mathcal{T}$ splňují $g \leq f \leq h$, pak díky monotonii L_n platí i $L_n g \leq L_n f \leq L_n h$ pro každé n. Přechodem k limitě získáme (pamatujme, že $g, h \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$)

$$g(x) \leq \liminf_{n\to\infty} L_n f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} L_n f(x) \leq h(x).$$

Přechodem k infimu (resp. supremu) přes všechny funkce $h \in \mathcal{T}, h \geq f$ (resp. $g \in \mathcal{T}$, $g \leq f$) pak konečně dostaneme

$$f_*(x) \leq \liminf_{n\to\infty} L_n f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} L_n f(x) \leq f^*(x),$$

odkud v případě rovnosti $f_*(x) = f^*(x)$ již plyne $L_n f(x) \to f(x)$. $\square$

Vidíme, že bodovou konvergenci máme téměř zadarmo. Ke konvergenci stejnoměrné chybí jen krůček. Ten učiníme pomocí obratu známého z důkazu Stone-Weierstrassovy věty.

Věta 3.7. *Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací prostor funkcí. Pak každá $\mathcal{T}$-nadějná funkce je $\mathcal{T}$-Korovkinova.*

Důkaz. Zvolme $f \in \mathcal{T}^*$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $x \in X$ nalezneme díky $f_*(x) = f(x) = f^*(x)$ funkce $h_x, h'_x \in \mathcal{T}$ takové, že

$$h_x(x) \leq f(x) \leq h'_x(x) \quad \text{a zároveň} \quad h'_x(x) - h_x(x) < \varepsilon.$$

Navíc ke každému $x \in X$ existuje otveřené okolí U_x na němž stále platí $h'_x(y) - h_x(y) < \varepsilon$, kdykoliv $y \in U_x$. Soubor $(U_x)_{x\in X}$ tvoří otevřené pokrytí kompaktního prostoru X, a lze tedy vybrat jeho konečné podpokrytí tvořené množinami $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$. Označme nyní

$$h_j := h_{x_j} \quad \text{a} \quad h'_j := h'_{x_j} \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dále zvolme $\mathcal{T}$-přípustnou posloupnost operátorů L_n. Jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|L_n h_j - h_j\| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|L_n h'_j - h'_j\| < \varepsilon$$

pro každé $j = 1, \ldots, k$ a $n > n_0$. Operátory L_n jsou monotónní a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $j = 1, \ldots, k$ pak platí

$$L_n h_j \leq L_n f \leq L_n h'_j,$$

což pro $n > n_0$ znamená

$$h_j - \varepsilon \leq L_n f \leq h'_j + \varepsilon. \tag{3.1}$$

Teď už zbývá jen označit

$$h := \sup\{h_1, \dots, h_k\} \quad h' := \inf\{h'_1, \dots, h'_k\},$$

rozmyslet si, že platí $h \leq f \leq h'$, $h' - h < \varepsilon$, a v (3.1) přejít k infimu resp. supremu

$$h - \varepsilon \leq L_n f \leq h' + \varepsilon.$$

Pak totiž odečteme od předchozích nerovností f a za použití odhadů $h \leq f \leq h'$ upravíme na

$$|L_n f - f| \leq h' - h + \varepsilon < 2\varepsilon$$

a jsme hotovi, neb jsme zaručili stejnoměrnou konvergenci $L_n f \rightrightarrows f$ na X. □

Poznámka 3.8. V důkazu se využila jen monotonie operátorů L_n, tvrzení tedy v tomto směru lze zobecnit.

Podařilo se nám najít postačující podmínku na podobu testovacího prostoru $\mathcal{T}$ (konkrétně $\mathcal{T}^* = C(X)$) k tomu, aby již každá funkce byla $\mathcal{T}$-Korovkinova, a přistoupíme-li na geometrickou argumentaci z Příkladu 3.5, vlastně jsme tak podali jiný důkaz první Korovkinovy věty. Zabývejme se teď nutnými podmínkami. Cílem bude ukázat, že pro kompaktní **metrické** prostory X je podmínka $\mathcal{T}^* = C(X)$ rovněž podmínkou nutnou.

Abychom mohli ukázat i opačnou implikaci, bude dříve či později potřeba zkonstruovat vhodnou přípustnou posloupnost operátorů, jejíž podoba bude záviset na testovacím prostoru $\mathcal{T}$. Tyto operátory zkonstruujeme z lineárních nezáporných funkcionálů na $C(X)$, tedy z nezáporných Radonových měr na X. Motivací k tomuto obratu může být například fakt, že lineární funkcionály lze pomocí Hahn-Banachovy věty dobře rozšiřovat z podprostoru na celý prostor. Plán je tedy již prozrazen a můžeme přistoupit k několika definicím.

Definice (Choquetova hranice)**.** Buď $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací prostor. Množinu

$$\partial_{\mathcal{T}} X := \{x \in X : \text{pro každou } f \in C(X) \text{ je } f_*(x) = f^*(x)\}$$

nazveme *Choquetovou hranicí* X vzhledem k $\mathcal{T}$.

Definice nám umožňuje přeformulovat tvrzení $\mathcal{T}^* = C(X)$ do podoby $\partial_{\mathcal{T}} X = X$. Tuto nyní nicneříkající tautologii za pár okamžiků využijeme ke stanovení účinné nutné a postačující podmínky pro $\mathcal{T}^* = C(X)$.

Definice (Diracova míra)**.** Buď $x \in X$. Pak nezápornou Radonovu míru $\mu\colon f \mapsto f(x)$, $f \in C(X)$, nazveme *Diracovou mírou* v x a značit ji budeme ε_x.

Definice (Reprezentující míra)**.** Nechť $x \in X$ a $\mathcal{T} \subset C(X)$ testovací prostor. Nezápornou Radonovu míru μ nazveme *reprezentující* x *vzhledem k* $\mathcal{T}$, jestliže

$$\mu(f) = f(x), \quad \text{kdykoliv} \quad f \in \mathcal{T}.$$

Poznámka 3.9. Diracova míra ε_x samozřejmě vždy reprezentuje x vzhledem k $\mathcal{T}$, obecně ale takových měr existuje hodně. Pro $\mathcal{T}$ z příkladu 3.5 stačí zvolit

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{1-\alpha}, \quad \alpha \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big)$$

a získáme reprezentující míry pro $x = \frac{1}{2}$. Další takovou je třeba

$$\mu_2(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existenci netriviálních reprezentujících měr můžeme, inspirováni předchozími příklady, vnímat jako jistou „lineární zavislost" mezi hodnotami v jistých bodech společnou pro všechny funkce z $\mathcal{T}$. Zanedlouho uvidíme, že právě tato „závislost" hraje velmi podstatnou úlohu.

Dosud nejasnou souvislost Choquetovy hranice s reprezentujícími měrami rozkrývá následující klíčové lemma, v němž dojde i na slibovanou Hahn-Banachovu větu.

Lemma 3.10. *Buď* $\mathcal{T} \subset C(X)$ *testovací prostor. Pak pro každý bod* $x \in X$ *a každou funkci* $f \in C(X)$ *platí následující rovnost množin*

$$\big[f_*(x), f^*(x)\big] = \{\mu(f) : \mu \textit{ reprezentuje } x \textit{ vzhledem k } \mathcal{T}\}.$$

Důkaz. Buď tedy $x \in X$ a $f \in C(X)$. Ukážeme postupně dvě inkluze.

Zvolme tedy nejprve μ reprezentující x vzhledem k $\mathcal{T}$ a ukažme $\mu(f) \in \big[f_*(x), f^*(x)\big]$. K tomu postačí uvážit $g, h \in \mathcal{T}$ takové, že $g \leq f \leq h$, využít monotonii μ, definici reprezentující míry a psát

$$g(x) = \mu(g) \leq \mu(f) \leq \mu(h) = h(x).$$

Přechodem k infimu (resp. supremu) v definici horní (resp. dolní) obálky totiž získáme $f_*(x) \leq \mu(f) \leq f^*(x)$ a první část je hotova.

Nyní zvolme naopak $\alpha \in \big[f_*(x), f^*(x)\big]$ a hledejme příslušnou reprezentující míru. Nejprve definujme lineární formu μ_0 na podprostoru $\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset C(X)$ předpisem $\mu_0(\lambda f) = \lambda\alpha$ (speciálně $\mu_0(f) = \alpha$). Ukážeme, že μ_0 je shora omezená funkcí $p(g) = g^*(x)$

definované na $C(X)$, o níž podle Poznámky 3.3 (b) víme, že je sublineárním funkcionálem na $C(X)$. Skutečně, pokud $\lambda \geq 0$, platí

$$\mu_0(\lambda f) = \lambda\alpha \leq \lambda f^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f)$$

a pokud $\lambda < 0$, platí

$$\mu_0(\lambda f) = \lambda\alpha \leq \lambda f_*(x) = -\lambda(-f)^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f).$$

Lineární formu definovanou na podprostoru můžeme podle Hahn-Banachovy věty rozšířit na celý prostor tak, aby rozšířená forma byla stále majorizována příslušným sublineárním funkcionálem. Máme tedy lineární formu μ definovanou na $C(X)$ splňující

$$\mu(\lambda f) = \mu_0(\lambda f), \quad \mu(g) \leq p(g) = g^*(x), \text{ kdykoliv } g \in C(X).$$

Navíc pro $f \geq 0$ platí

$$\mu(f) = -\mu(-f) \geq -p(-f) = p(f) = f^*(x) \geq 0,$$

takže μ je dokonce nezáporná lineární forma na $C(X)$, a tedy zároveň podle Riezsovy věty o reprezentaci nezáporná Radonova míra na X. Víme, že platí $\mu(f) = \mu_0(f) = \alpha$ a zbývá tedy jen ukázat, že μ reprezentuje x vzhledem k $\mathcal{T}$. To ovšem není vůbec obtížné, neboť zvolíme-li $h \in \mathcal{T}$, platí $h^*(x) = h(x) = h_*(x)$ a snadno odvodíme nerovnosti $\mu(h) \leq h^*(x) = h(x)$ a $\mu(h) = -\mu(-h) \geq -p(-h) = p(h) = h^*(x) = h(x)$. Ukázali jsme, že $\mu(h) = h(x)$, kdykoliv $h \in \mathcal{T}$ a μ pak reprezentuje x vzhledem k $\mathcal{T}$, což již ukončuje celý důkaz. □

Důsledek 3.11. *Nechť $\mathcal{T} \subset C(X)$ je testovací prostor. Pak prvek $x \in X$ leží v Choquetově hranici právě tehdy, když ε_x je jediná míra reprezentující x vzhledem k $\mathcal{T}$.*

Důkaz. Podle definice $x \in \partial_{\mathcal{T}} X$, právě když $f^*(x) = f_*(x)$ pro každou $f \in C(X)$. Podle předchozího lemmatu platí $f^*(x) = f_*(x)$, právě když pro každou míru μ reprezentující x platí $\mu(f) = f^*(x) = f_*(x) = f(x)$, kdykoliv $f \in C(X)$, což je jen ekvivalentní podoba tvrzení $\mu = \varepsilon_x$. □

Důsledek 3.12. *Nechť $\mathcal{T} \subset C(X)$ je testovací prostor. Pak $\mathcal{T}^* = C(X)$ platí, právě když pro každý prvek $x \in X$ je ε_x jediná míra reprezentující x vzhledem k $\mathcal{T}$.*

Důkaz. Plyne z předchozího důsledku a ekvivalence $\mathcal{T}^* = C(X)$, právě když $\partial_{\mathcal{T}} X = X$. □

Nyní jsme již vybaveni potřebnou teorií k tomu, abychom dokázali jeden z nejhlubších teoretických výsledků v této práci, a to charakterizaci Korovkinova uzávěru.

Věta 3.13 (Charakterizace Korovkinova uzávěru)**.** *Nechť* (X,ρ) *je kompaktní metrický prostor a* $\mathcal{T} \subset C(X)$ *testovací prostor. Pak* $\mathcal{T}^* = \operatorname{Kor}(\mathcal{T})$.

Důkaz. Jednu inkluzi jsme již dokázali ve Větě 3.7. Buď tedy $f \in \operatorname{Kor}(\mathcal{T})$ a snažme se ukázat, že je i $\mathcal{T}$-nadějná. To podle Lemmatu 3.10 nastane, právě když $\mu(f) = f(x_0)$ pro každé $x_0 \in X$ a každou míru μ reprezentující x_0 vzhledem k $\mathcal{T}$. Zvolme tedy $x_0 \in X$ a míru μ reprezentující x_0. Definujme uzavřené množiny

$$A_n := \left\{x \in X : \rho(x, x_0) \geq \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Kompaktní prostor je úplně regulární a existují tedy spojité funkce q_n $(n \in \mathbb{N})$ takové, že

$$0 \leq q_n \leq 1, \quad q_n(x_0) = 1, \quad q_n(x) = 0 \quad \text{pro } x \in A_n.$$

Nyní sestrojíme posloupnost operátorů $\{L_n\}\colon C(X) \to C(X)$ předpisem

$$L_n g = \mu(g) q_n + (1 - q_n) g, \quad g \in C(X).$$

Takové operátory jsou jistě lineární a nezáporné, navíc platí $L_n f(x_0) = \mu(f)$. Pokud ukážeme, že taková posloupnost je $\mathcal{T}$-přípustná, budeme hotovi, neboť pro $\mathcal{T}$-Korovkinovu funkci f bude platit $L_n f \rightrightarrows f$ a speciálně pak $\mu(f) = L_n f(x_0) \longrightarrow f(x_0)$, což dá vytoužené $\mu(f) = f(x_0)$.

Zvolme tedy $h \in \mathcal{T}$. Pak platí $\mu(h) = h(x_0)$ a můžeme začít odhadovat výraz $\|L_n h - h\|$. Vidíme, že v odhadu

$$\|L_n h - h\| \leq \sup\left\{q_n(x) \cdot |g(x_0) - g(x) : x \in X \setminus A_n\right\}$$

jde pravá strana k nule pro $n \to \infty$, neboť $q_n \leq 1$, průnikem množin $X \setminus A_n$ je x_0 a g je spojitá funkce. Důkaz je hotov! $\square$

Vidíme, že v rozumných aplikacích (pro X metrizovatelný) si vystačíme se zkoumáním množiny $\mathcal{T}^*$. Uveďme nyní jedno užitečné kritérium, jež nám pomůže určit, kdy $\mathcal{T}^* = C(X)$. Předem upozorňujeme, že i v jeho odvozování dojde na lemma o vepisování křivek.

Tvrzení 3.14. *Buď* $\mathcal{T} \subset C(X)$ *testovací prostor takový, že pro každý bod* $x \in X$ *existuje* $f \in \mathcal{T}$, *že* $f(x) = 0$ *a* $f > 0$ *na* $X \setminus \{x\}$ *(tedy* x *je kořen a zároveň jediné globální minimum nějaké* $f \in \mathcal{T}$*). Pak* $\mathcal{T}^* = C(X)$.

Důkaz. Vezměme $h \in C(X)$ a $x \in X$. Ukážeme, že $h^*(x) = h(x) = h_*(x)$. K tomuto účelu zvolme ještě $\varepsilon > 0$. Ježto $\mathcal{T}$ obsahuje konstanty, můžeme bez újmy na obecnosti položit

$h(x) = 0$ a snažit se ukázat nejprve rovnost $h^*(x) = h(x)$. Podle předpokladů existuje $f \in \mathcal{T}$ taková, že $f(x) = 0$ a $f > 0$ na $X \setminus \{x\}$. Dvojice funkcí f, h splňuje předpoklady Lemmatu 2.1 a existuje tedy $M \in \mathbb{R}^+$ taková, že

$$h(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot f(t) \quad \text{pro každé } t \in X.$$

Položme $f_1(t) := \frac{\varepsilon}{2} + Mf(t) \in \mathcal{T}$. Vidíme, že $f_1 \geq h$ na X a zároveň $f_1(x) - h(x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Jest tedy $h^*(x) = h(x)$. Zde důkaz tvrzení zakončíme, neboť druhá rovnost se dokáže obdobně. □

V tuto chvíli už nic nebrání tomu, abychom první Korovkinovu větu z vybudované teorie dokázali zcela rigorózně, a nemuseli se odvolávat na obrázky jako dříve.

Věta 3.15 (První Korovkinova podruhé)**.** *Je-li* $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $\mathcal{T} = \operatorname{Lin}\{1, x, x^2\}$*, pak* $\operatorname{Kor} \mathcal{T} = C(X)$*.*

Důkaz. Pro každé $t \in [a, b]$ nabývá $f_t := (x - t)^2 \in \operatorname{Lin} \mathcal{T}$ svého minima pouze v t a podle předchozího tvrzení je $\mathcal{T}^* = C(X)$ a podle Věty 3.13 pak i $\operatorname{Kor} \mathcal{T} = \mathcal{T}^* = C(X)$. □

V příštím odstavci zodpovíme otázku, jaká je minimální velikost testovací množiny $\mathcal{T}$. Víme totiž, že stačí, aby po boku konstanty stály dvě funkce, nabízí se tedy, zda by někdy mohla stačit i jedna. Odpověď je záporná.

Věta 3.16 (Třetí Korovkinova věta)**.** *Buď* $f \in C(X)$ *a* $\mathcal{T} = \operatorname{Lin}\{1, f\}$ *testovací množina. Pokud prostor* X *obsahuje alespoň tři body, pak* $\operatorname{Kor}(H) \neq C(X)$*.*

Důkaz. Buďte $x, y, z \in X$ tři různé body. Bez újmy na obecnosti položme $f(x) \geq f(y) \geq f(z)$. Existuje tedy $\lambda \in [0, 1]$ takové, že

$$f(y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z).$$

Ten samý vztah ale platí pro každou $h \in \operatorname{Lin} \mathcal{T}$ a míra $\mu(h) = \lambda h(x) + (1 - \lambda) h(z)$ pak reprezentuje bod y vzhledem k $\mathcal{T}$. Podle Důsledku 3.12 tedy nemůže být $\operatorname{Kor}(H) = C(X)$. □

Kapitola 4

Aplikace na Fourierovy řady

Naším cílem nyní bude aplikovat Korovkinovu větu na teorii Fourierových řad. Pro začátek vzpomeňme, že (kompaktní) jednotková kružnice v komplexní rovině

$$\mathbf{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

je díky zobrazení $F\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{T}$, $F(x) = e^{ix}$ topologicky nerozlišitelná od intervalu $[0, 2\pi]$, v němž jsou ztotožněny body 0 a 2π. Chápejme tedy dále prostor $\mathbf{T}$ právě jako tento „slepený“ interval.

Věta 4.1 (Druhá Korovkinova)**.** *Buď $X := \mathbf{T}$ a $\mathcal{T} = \{1, \sin, \cos\}$, pak $\operatorname{Kor} \mathcal{T} = C(\mathbf{T})$.*

Důkaz. Ke každému $t \in \mathbf{T}$ nalezneme funkci

$$f_t(x) := 1 - \cos(x - t) \in \operatorname{Lin} \mathcal{T},$$

jejíž minimum je nula a nabývá se pouze pro $x = t$. Opět tedy dostáváme $\operatorname{Kor} \mathcal{T} = C(\mathbf{T})$. □

Následující tvrzení je klíčovou částí známé věty o cesarovské sčítatelnosti Fourierových řad a my si na něm opět ukážeme sílu Korovkinových vět. Zatímco klasický důkaz je technický a nepříjemný, my budeme hotovi za pár chvil.

Tvrzení 4.2 (Cesarovská sčítatelnost Fourierových řad)**.** *Nechť $\{L_n\}\colon C(\mathbf{T}) \to C(\mathbf{T})$ je posloupnost operátorů definovaná následovně*

$$L_n f(x) := \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(x + t) \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \mathrm{d}t, \quad f \in C(\mathbf{T}),\ x \in \mathbf{T}.$$

Pak platí $L_n f \rightrightarrows f$ na $\mathbf{T}$, kdykoliv $f \in C(\mathbf{T})$.

Důkaz. Uvědomíme si, že operátory jsou lineární a nezáporné. Podle Věty 4.1 pak konvergenci stačí ověřit pro trojici funkcí $\{1, \sin, \cos\}$. Po standardní integraci vyjde

$$\begin{aligned} L_n 1 &= 1, \\ L_n \sin &= \frac{n-1}{n} \sin, \\ L_n \cos &= \frac{n-1}{n} \cos, \end{aligned}$$

a vidíme, že máme, co jsme potřebovali. □

Poznámka 4.3. V důkazu bylo možné postupovat i pomocí vhodné omezující funkce. Tou by byla $F(x,t) := 1 - \cos(x-t)$, ovšem při výpočtu integrálu, bychom se nevyhnuli integrálům z předchozího důkazu. Postupy jsou tak v tomto případě rovnocenné.

Poznámka 4.4. Může se zdát, že jsme si práci neusnadnili a jen ji „schovali“ do pracného výpočtu integrálů. Opak je pravdou. Operátory L_n jsou ve skutečnosti definovány jakožto cesarovské součty částečných Fourierových řad. Jelikož funkce $\{1, \sin, \cos\}$ mají velmi jednoduché Fourierovy řady lze hodnoty $L_n 1$, $L_n \cos$, $L_n \sin$ počítat přímo z definice a integraci se tak lze zcela vyhnout! Detaily lze nalézt v [B].

Literatura

[B] Bauer, H.: *Approximation and abstract boundaries*, Amer. Math. Monthly **85**, (1978), 632-647.

[LG] Lomelí, H. E., García L. C.: *Variations on a Theorem of Korovkin*, Amer. Math. Monthly **113**, (2006), 744-750.