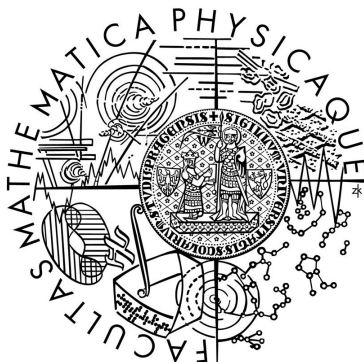


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lucie Pekařová

Lokální časy Brownova pohybu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Ondřej Honzl

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

2010

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu Mgr. Ondřeji Honzlovi za to, že se mi po celou dobu psaní bakalářské práce věnoval a poskytoval mi cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Lucie Pekařová

Obsah

Úvod	5
1 O Brownově pohybu	6
1.1 Brownův pohyb a jeho vlastnosti	6
1.2 Existence Brownova pohybu	8
1.3 Náhodné procházky v \mathbb{R}	14
1.3.1 Metoda Twist & Shrink	14
2 Lokální časy Brownova pohybu	18
2.1 Základní vlastnosti lokálního času	18
2.2 Aproximace lokálního času	22
2.2.1 Excursion representation	22
2.2.2 Downcrossing representation	23
2.2.3 Lokální čas zjemňující se náhodné procházky	24
3 Simulace lokálních časů	26
Literatura	31

Název práce: Lokální časy Brownova pohybu

Autor: Lucie Pekařová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Ondřej Honzl

e-mail vedoucího: honzl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci se zabýváme Brownovým pohybem a jeho vlastnostmi. Prezentujeme speciální posloupnosti zjemňujících se náhodných procházek, které konvergují skoro jistě k Brownovu pohybu. Uvádíme Lévyho definici lokálního času Brownova pohybu. Další možnou definici lokálního času Brownova pohybu obdržíme z Tanakovy formule. Dále uvádíme několik aproximací lokálního času Brownova pohybu. Na závěr provádíme simulace těchto aproximací a porovnáváme jejich vlastnosti.

Klíčová slova: Brownův pohyb, lokální čas, Tanakova formule.

Title: Local times of the Brownian motion

Author: Lucie Pekařová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Ondřej Honzl

Supervisor's e-mail address: honzl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the presented work we introduce Brownian motion and its properties. We presented specific sequences of shrunken random walks which converge to the Brownian motion almost surely. We introduce Lévy's definition of the Brownian local time. Another definition of the Brownian local time is obtained by Tanaka's formula. Next, we introduce some approximations of the Brownian local time. Finally, we make some simulations of these approximations and we compare them.

Keywords: Brownian motion, local time, Tanaka's formula.

Úvod

Poprvé se student setká s pojmem Brownův pohyb při hodinách fyziky na základní škole, kde se dozví, že Brownův pohyb je náhodný pohyb mikroskopických částic v kapalném nebo plynném médiu. Tento jev byl popsán v roce 1827 skotským botanikem Robertem Brownem, který pozoroval chování pylových zrněk ve vodě. Zjistil, že tyto částice vykonávají neuspořádaný pohyb. Aby vyloučil možnost, že pohyb je projevem případného života, opakoval experiment s částicemi prachu. Modely založené na Brownově pohybu se dnes uplatňují ve fyzice, ekonomii (vývoj cen akcií na burze) nebo modelování dynamických systémů.

Matematizací Brownova pohybu se zabýval americký matematik Norbert Wiener, proto se také Brownovu pohybu často říká Wienerův proces. Dalším z významných matematiků, kteří se zabývali Brownovým pohybem, byl Paul Lévy. Ve svých studiích vlastností Brownova pohybu zavedl pojem lokální čas, o kterém pojednává tato práce. Lokální čas má sloužit jako charakteristika Brownova pohybu, která v určitém smyslu říká, kolik času tráví Brownův pohyb na dané hladině. Tuto vágní poznámku ponecháme čtenáři k rozmyšlení, až bude hloubat nad samotnou definicí lokálního času Brownova pohybu.

V rámci této práce nejdříve zadefinujeme Brownův pohyb, popíšeme jeho vlastnosti a dokážeme jeho existenci. Navíc zjistíme, že Brownův pohyb je limitou speciálně zkonstruovaných zjemňujících se náhodných procházek. V druhé kapitole zadefinujeme lokální čas Brownova pohybu a zkonstruujeme několik jeho aproximací. Ve třetí kapitole provedeme simulace těchto aproximací s použitím software Mathematica. Jednotlivé simulace se liší odlišným přístupem k lokálnímu času. Je tedy těžké rozhodnout, které jsou lepší. Na závěr uvádíme přehled prezentovaných simulací, zdrojový kód je obsažen na přiloženém CD.

Kapitola 1

O Brownově pohybu

1.1 Brownův pohyb a jeho vlastnosti

V této kapitole čerpáme především z knihy [1]. Necht' (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. Náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, je-li její hustota rovna

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Přitom píšeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a platí $EX = \mu$ a $\text{var}X = \sigma^2$.

Definice 1.1. *Náhodný proces $\{B(t) : t \geq 0\}$ nazveme **Brownův pohyb** s počátkem v $x \in \mathbb{R}$, jestliže platí následující:*

- $B(0) = x, x \in \mathbb{R}$,
- náhodný proces $\{B(t) : t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky, tj. pro všechny časy $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ jsou přírůstky $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ nezávislé náhodné veličiny,
- pro všechna $t \geq 0$ a $h > 0$ mají přírůstky $B(t+h) - B(t)$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem h (tzv. časová homogenita),
- proces $\{B(t), t \geq 0\}$ má spojité trajektorie skoro jistě.

Řekneme, že $\{B(t) : t \geq 0\}$ je **standardní Brownův pohyb**, jestliže $x = 0$.

V následujících dvou větách demonstrujeme, že existují transformace Brownova pohybu, které zachovávají jeho rozdělení. Důkaz těchto vět lze nalézt v knize [1].

Lemma 1.2 (Scaling invariance). *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je standardní Brownův pohyb a nechť $a > 0$. Definujme náhodné veličiny*

$$X(t) = \frac{1}{a}B(a^2t), \quad t \geq 0.$$

Pak náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ je také Brownův pohyb.

Důkaz. Ověříme podmínky z definice 1.1 pro náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$. Z definice náhodné veličiny X vyplývá nezávislost přírůstků a spojitost trajektorií náhodného procesu $\{X(t) : t \geq 0\}$. Zbývá ověřit, že pro každé $s \geq 0$ a $t > s$ platí $X(t) - X(s) \sim N(0, t - s)$. Počítejme

$$\mathbb{E}[X(t) - X(s)] = \frac{1}{a} \mathbb{E}[B(a^2t) - B(a^2s)] = 0$$

$$\text{var}[X(t) - X(s)] = \frac{1}{a^2} \text{cov}[B(a^2t) - B(a^2s)] = \frac{1}{a^2}(a^2t - a^2s) = t - s.$$

Všechny podmínky jsou tedy splněny a náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. \square

Věta 1.3 (Časová inverze). *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je standardní Brownův pohyb. Položme*

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = 0 \\ tB\left(\frac{1}{t}\right) & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

Pak náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ je standardní Brownův pohyb.

Zabývejme se nyní diferencovatelností Brownova pohybu. Definujme horní a dolní derivaci zprava funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $t \in \mathbb{R}$

$$D^*f(t) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

$$D_*f(t) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Nejdříve dokážeme, že pro nějaké pevné $t \geq 0$ platí, že Brownův pohyb v čase t není diferencovatelný skoro jistě. V důkazu využijeme předchozí větu o časové inverzi a následující tvrzení. Znění a důkaz následujících vět lze nalézt v knize [1].

Tvrzení 1.4. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Pak platí skoro jistě*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty \quad a \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Věta 1.5. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je standardní Brownův pohyb. Zvolme $t \geq 0$. Pak Brownův pohyb v čase t není diferencovatelný skoro jistě. Navíc platí $D^*B(t) = +\infty$ a $D_*B(t) = -\infty$.*

Důkaz. Nechť $\{X(t) : t \geq 0\}$ je náhodný proces definovaný ve větě 1.3. Náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ je tedy standardní Brownův pohyb. Z tvrzení 1.4 vyplývá

$$D^*X(0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X\left(\frac{1}{n}\right) - X(0)}{\frac{1}{n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nX\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Podobně dostaneme $D_*X(0) = -\infty$. Náhodná funkce $X(\cdot)$ tedy není diferencovatelná v nule skoro jistě, z čehož po snadné úvaze plyne, že náhodná funkce $B(\cdot)$ v čase $t \geq 0$ není diferencovatelná skoro jistě. \square

Všimněme si, že z předchozí věty nevyplývá, že skoro jistě platí, že Brownův pohyb není diferencovatelný v $t \geq 0$. Pořadí kvantifikátorů *skoro jistě* a *pro všechna t* nemůžeme obecně měnit. Následující věta je ovšem silnější a ukazuje, že zde tuto „výměnu“ lze provést. Důkaz lze najít v knize [1].

Věta 1.6. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Pak skoro jistě platí, že Brownův pohyb není diferencovatelný v $t \geq 0$. Navíc pro každé $t \geq 0$ platí $D^*B(t) = +\infty$ nebo $D_*B(t) = -\infty$ skoro jistě.*

Poznámka 1.7. *Předchozí věta říká, že trajektorie Brownova pohybu jsou nediferencovatelné skoro jistě (ačkoli jsou spojité skoro jistě). Z toho se dá usoudit, že chování trajektorií Brownova pohybu je velmi neregulární. Proto se právě lokální čas ukázal vhodným nástrojem k popisu setrvání Brownova pohybu na dané hladině.*

1.2 Existence Brownova pohybu

V této části dokážeme, že existuje náhodný proces, který splňuje podmínky uvedené v definici Brownova pohybu. Takový náhodný proces nalezneme pomocí tzv. Lévyho konstrukce.

Nejdříve si připomeneme některá tvrzení a lemmata, která potřebujeme k důkazu Wienerovy věty. Jejich znění a důkazy lze nalézt v knize [1].

Definice 1.8. Reálný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ nazveme **Gaussův náhodný vektor**, jestliže existuje matice \mathbf{A} reálných čísel typu $n \times m$ a n -rozměrný reálný vektor \mathbf{b} takový, že $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{b}$, kde \mathbf{Y} je n -rozměrný reálný náhodný vektor, jehož složky Y_1, Y_2, \dots, Y_n jsou nezávislé náhodné veličiny a $Y_i \sim N(0, 1)$ pro $i = 1, \dots, n$.

Tvrzení 1.9. Nechť $\{\mathbf{X}_n : n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost Gaussových náhodných vektorů a nechť existuje náhodný vektor \mathbf{X} takový, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{X}$. Jestliže existují limity $\mathbf{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\mathbf{X}_n$ a $\mathbf{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\mathbf{X}_n)$, pak \mathbf{X} je Gaussův náhodný vektor s vektorem středních hodnot \mathbf{b} a varianční maticí \mathbf{C} .

Lemma 1.10. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2 > 0$. Pak $X_1 + X_2$ a $X_1 - X_2$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem $2\sigma^2$.

Lemma 1.11. Nechť X je náhodná veličina a $X \sim N(0, 1)$. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$P(X > x) \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Důkaz. Nechť $X \sim N(0, 1)$ a vezměme $x > 0$ pevné. Pak

$$\begin{aligned} P(X > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\right]_x^\infty = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.12 (Cantelliho lemma). Nechť A_n , $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost jevů taková, že $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) < \infty$. Pak $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

Následující věta pojednává o existenci Brownova pohybu. Konstrukce při důkazu této věty je poučná, protože se jedná o konstrukční důkaz nikoli jen existenční. Zdůrazněme, že stačí zkonstruovat standardní Brownův pohyb $\{B(t) : t \geq 0\}$, protože $\{X(t) : t \geq 0\}$, kde $X(t) = B(t) + x$, $t \geq 0$, je Brownův pohyb s počátkem v x .

Věta 1.13 (Wienerova věta). *Brownův pohyb existuje.*

Důkaz. Nejdříve se budeme zabývat konstrukcí standardního Brownova pohybu na intervalu $[0, 1]$. Pro obecné $t \geq 0$ pak snadno můžeme použít lemma 1.2 či nezávislost přírůstků a zopakováním následující konstrukce na intervalech $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, s počátky v $B(n)$ získáme rozšíření Brownova pohybu na interval $[0, \infty)$.

Definujme množiny

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Poznamenejme, že se jedná o tzv. diadické dělení. Položme $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$.

Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, na kterém je definován systém nezávislých náhodných veličin $\{Z_t : t \in \mathcal{D}\}$ takový, že $Z_t \sim N(0, 1)$, $t \in \mathcal{D}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ definujme náhodné veličiny $B(d)$, $d \in \mathcal{D}_n$. Přiřaďme $B(0) = 0$ a $B(1) = Z_1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ chceme definovat náhodné veličiny $B(d)$, $d \in \mathcal{D}_n$, takto:

1. Pro všechna $r, s, t \in \mathcal{D}_n$, $r < s < t$, náhodná veličina $B(t) - B(s)$ je nezávislá s náhodnou veličinou $B(s) - B(r)$ a platí $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$, respektive $B(s) - B(r) \sim N(0, s - r)$.
2. Náhodné vektory $(B(d) : d \in \mathcal{D}_n)$ a $(Z_t : t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n)$ jsou nezávislé.

Tuto konstrukci jsme již provedli pro $n = 0$, $\mathcal{D}_0 = \{0, 1\}$. Pokračujme indukci. Předpokládejme, že máme náhodné veličiny $B(d)$, $d \in \mathcal{D}_{n-1}$. Pro $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ definujme náhodné veličiny

$$B(d) = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}.$$

Všimněme si, že první sčítanec ve vzorci je lineární interpolací hodnot $B(\cdot)$ v sousedních bodech z \mathcal{D}_{n-1} . Proto $B(d)$, $d \in \mathcal{D}_n$, je nezávislá se systémem náhodných veličin $(Z_t : t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n)$ a tedy druhá vlastnost z definice náhodných veličin $B(d)$, $d \in \mathcal{D}_n$, je splněna.

Protože náhodná veličina $\frac{1}{2}(B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n}))$, $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$, závisí pouze na $(Z_t : t \in \mathcal{D}_{n-1})$, je navíc náhodná veličina $\frac{1}{2}(B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n}))$ nezávislá s náhodnou veličinou $\frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}$ pro každé $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$.

Z lemma 1.10 víme, že jejich součet je

$$\frac{B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}} = B(d) - B(d - 2^{-n}) \quad (1.1)$$

a jejich rozdíl

$$\frac{B(d + 2^{-n}) - B(d - 2^{-n})}{2} - \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}} = B(d + 2^{-n}) - B(d). \quad (1.2)$$

Výrazy (1.1) a (1.2) jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem 2^{-n} .

Zbývá ukázat, že všechny přírůstky $B(d) - B(d - 2^{-n})$, $d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}$, jsou nezávislé. K tomu stačí zjistit, že jsou tyto přírůstky po dvou nezávislé. Už jsme ukázali, že náhodné veličiny $B(d) - B(d - 2^{-n})$ a $B(d + 2^{-n}) - B(d)$, $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$, jsou nezávislé. Zbývá prozkoumat nezávislost přírůstků $B(d) - B(d - 2^{-n})$ a $B(d + 2^{-n}) - B(d)$ pro $d \in \mathcal{D}_{n-1}$.

Volme tedy $d \in \mathcal{D}_{n-1}$ pevné. Nalezneme minimální $j \in \mathbb{N}_0$ takové, že $d \in \mathcal{D}_j$ a $[d - 2^{-n}, d] \subset [d - 2^{-j}, d]$, respektive $[d, d + 2^{-n}] \subset [d, d + 2^{-j}]$. Z indukčního předpokladu plyne nezávislost přírůstků $B(d) - B(d - 2^{-j})$ a $B(d + 2^{-j}) - B(d)$. Přírůstky nad intervaly délky 2^{-n} jsou zkonstruovány z nezávislých přírůstků $B(d) - B(d - 2^{-j})$ (respektive $B(d + 2^{-j}) - B(d)$) s použitím náhodných veličin $(Z_t : t \in \mathcal{D}_n)$ (viz (1.1) a (1.2)), tudíž jsou náhodné veličiny $B(d) - B(d - 2^{-n})$ a $B(d + 2^{-n}) - B(d)$ nezávislé. Tím jsme dokázali první vlastnost v definici náhodných veličin $B(d)$ a indukční krok je dokončen.

Definujme náhodnou funkci F :

$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1 & \text{pro } t = 1 \\ 0 & \text{pro } t = 0 \\ tZ_1 & \text{pro } 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ položme

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t & \text{pro } t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1} \\ 0 & \text{pro } t \in \mathcal{D}_{n-1} \\ (t - i2^{-(n-1)}) 2^{(n-1)/2} Z_{\{i2^{-(n-1)}\}} & \text{pro } t \in \left(\frac{i}{2^{n-1}}, \frac{2i+1}{2^n}\right) \\ ((i+1)2^{-(n-1)} - t) 2^{(n-1)/2} Z_{\{(2i+1)2^{-n}\}} & \text{pro } t \in \left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{i+1}{2^{n-1}}\right) \end{cases} \quad (1.4)$$

Poslední dva řádky ve vzorci (1.4) lze slovně vyjádřit tak, že je funkce lineární mezi dvěma po sobě jdoucími body z \mathcal{D}_n . Funkce F_n , $n \in \mathbb{N}_0$, jsou spojité na $[0, 1]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $d \in \mathcal{D}_n$ platí:

$$B(d) = \sum_{i=0}^n F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d). \quad (1.5)$$

Vzorec (1.5) dokážeme indukcí. Zřejmě vztah platí pro $n = 0$. Předpokládejme, že vztah platí pro $n - 1$. Vezměme $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ pevné. Protože pro každé $0 \leq i \leq n-1$ je funkce F_i lineární na $[d - 2^{-n}, d + 2^{-n}]$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(d - 2^{-n}) + F_i(d + 2^{-n})}{2} = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} \\ &= B(d) - \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}} = B(d) - F_n(d), \end{aligned}$$

z čehož plyne (1.5).

Z definice Z_d a z lemma 1.11 vyplývá, že pro každé $c > 0$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathrm{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) = 2 \mathrm{P}(Z_d \geq c\sqrt{n}) \leq 2 \frac{1}{c\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{nc^2}{2}\right\}.$$

Pro $n \geq \frac{2}{c\pi}$ dostáváme nerovnost

$$\mathrm{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \exp\left\{-\frac{nc^2}{2}\right\}.$$

Zvolme $n_0 \geq \frac{2}{c\pi}$. Součet následujících pravděpodobností

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\exists d \in \mathcal{D}_n : |Z_d| \geq c\sqrt{n}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathrm{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathrm{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathrm{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} (2^n + 1) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (2^n + 1) \exp\left\{-\frac{nc^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

konverguje pro $c > \sqrt{2 \log 2}$. Zafixujme takové c . Z lemma 1.12 vyplývá, že existuje náhodné přirozené číslo N (skoro jistě konečné) takové, že pro každé $n \geq N$ a každé $d \in \mathcal{D}_n$ platí $|Z_d| < c\sqrt{n}$. Tudíž pro každé $n \geq N$:

$$\|F_n\|_{\infty} < 2^{-n/2} c\sqrt{n}.$$

Našli jsme tedy horní hranici pro F_n . Položíme-li $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$, pak $B(t)$ skoro jistě stejnoměrně konverguje na intervalu $[0, 1]$. Tato limita je zřejmě spojitá a označíme ji $\{B(t) : t \in [0, 1]\}$.

Zbývá ještě dokázat jeden bod z definice Brownova pohybu, který říká, že pro všechna $t \geq 0$ a $h > 0$ platí $B(t+h) - B(t) \sim N(0, h)$. To je ovšem přímým důsledkem vlastností $B(\cdot)$ na husté množině $\mathcal{D} \subset [0, 1]$ a spojitosti trajektorií. Vezměme $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, nalezneme posloupnosti $(t_{1,k})_{k=1}^{\infty}, (t_{2,k})_{k=1}^{\infty}, \dots, (t_{n,k})_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $t_{1,k} \leq t_{2,k} \leq \dots \leq t_{n,k}$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $\lim_{k \uparrow \infty} t_{i,k} = t_i$. Ze spojitosti B vyplývá, že pro každé $1 \leq i \leq n-1$:

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \lim_{k \uparrow \infty} B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}).$$

Pro každé $1 \leq i \leq n-1$ platí

$$\lim_{k \uparrow \infty} \mathbb{E} [B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = 0$$

a pro každé $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$ platí

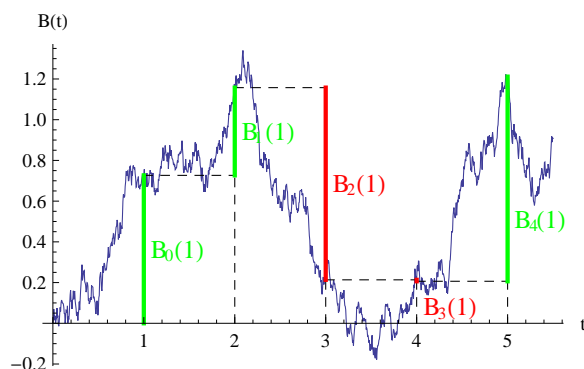
$$\begin{aligned} & \lim_{k \uparrow \infty} \text{cov} [B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}), B(t_{j+1,k}) - B(t_{j,k})] \\ &= \lim_{k \uparrow \infty} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \text{var} [B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = \lim_{k \uparrow \infty} \mathbf{1}_{\{i=j\}} (t_{i+1,k} - t_{i,k}) \\ &= \mathbf{1}_{\{i=j\}} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Z tvrzení 1.9 vyplývá, že pro každé $1 \leq i \leq n$ mají přírůstky $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a variancí $t_{i+1} - t_i$.

Už jsme sestrojili spojitý proces $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se stejným marginálním rozdělením jako má Brownův pohyb. Vezměme posloupnost B_0, B_1, B_2, \dots nezávislých náhodných veličin s hodnotami v $\mathcal{C}[0, 1]$ s tímto rozdělením a pro všechna $t \geq 0$ definujme

$$B(t) = B_{[t]}(t - [t]) + \sum_{i=0}^{[t]-1} B_i(1). \quad (1.6)$$

Hodnoty $B_i(1)$ ze vzorce (1.6) jsou znázorněny na obrázku 1.1, přičemž kladné hodnoty $B_i(1)$ jsou obarveny zeleně a záporné hodnoty $B_i(1)$ červeně. Z definice (1.6) jsme tedy získali náhodnou funkci $B : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje požadavky definice Brownova pohybu. □



Obrázek 1.1: Graf zobrazuje Brownův pohyb $B(t)$ závislý na čase t .

1.3 Náhodné procházky v \mathbb{R}

Zde uvedeme definici symetrické náhodné procházky, kterou budeme používat v následující kapitole. Vycházíme z práce [2] a z článku [3].

Definice 1.14. *Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, na kterém je definovaná posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ taková, že $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Položme $S_0 = 0$ a $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $n \in \mathbb{N}$. Pak náhodnou posloupnost $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ nazýváme **symetrická náhodná procházka**.*

1.3.1 Metoda Twist & Shrink

Nyní provedeme konstrukci posloupnosti symetrických náhodných procházek metodou Twist & Shrink a zformulujeme větu, která říká, že taková posloupnost stejnoměrně konverguje k Brownovu pohybu skoro jistě.

Definujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny $X_m(k)$, pro které platí $P(X_m(k) = 1) = P(X_m(k) = -1) = \frac{1}{2}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Náhodné veličiny $X_m(k)$ lze seřadit do nekonečné matice $X = [X_m(k)]_{m=0, k=1}^{\infty}$, přičemž z m -tého řádku zkonstruujeme m -tou aproximaci Brownova pohybu. Nechť pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ je $S_m(k)$, $k \in \mathbb{N}$, symetrická náhodná procházka, která vznikla z náhodných veličin $X_m(k)$ tak, že $S_m(k) = \sum_{j=1}^k X_m(j)$ pro každé $m \in \mathbb{N}_0$.

Dalším krokem této metody je tzv. *twistování*, kterým vytvoříme posloupnost symetrických náhodných procházek $(\tilde{S}_m(k))_{m=0}^{\infty}$ z posloupnosti náhodných procházek $(S_m(k))_{m=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$. Nejdříve položíme $\tilde{S}_0(n) = S_0(n)$ pro

každé $n \in \mathbb{N}$ a $\tilde{S}_m(0) = 0$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ a dále zkonstruuujeme náhodnou procházku $\tilde{S}_m(k)$ pro $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, rekurentně.

Definujme posloupnost náhodných procesů $(T_{m+1}(k) : k \in \mathbb{N})$ tak, že platí $T_{m+1}(0) = 0$ a pro $k \in \mathbb{N}_0$ je

$$T_{m+1}(k+1) = \min \{n > T_{m+1}(k) : |S_{m+1}(n) - S_{m+1}(T_{m+1}(k))| = 2\}. \quad (1.7)$$

Vzorec (1.7) interpretujeme tak, že $T_{m+1}(k+1)$ je minimální čas větší než $T_{m+1}(k)$ takový, že vzdálenost hladin náhodné procházky S_{m+1} v čase $T_{m+1}(k)$ a v čase $T_{m+1}(k+1)$ je rovna dvěma. Náhodné časy $T_{m+1}(k)$ jsou znázorněny na obrázku 1.2, pravý graf.

Pro $j = 0, 1, 2, \dots$ a pro $k \in \mathbb{N}$ taková, že $T_{m+1}(j) < k \leq T_{m+1}(j+1)$ položme

$$\tilde{X}_{m+1}(k) = \begin{cases} X_{m+1}(k) & \text{je-li } S_{m+1}(T_{m+1}(j+1)) - S_{m+1}(T_{m+1}(j)) = \\ & = 2\tilde{X}_m(j+1), \\ -X_{m+1}(k) & \text{jinak} \end{cases} \quad (1.8)$$

a definujme $\tilde{S}_{m+1}(k) = \tilde{S}_{m+1}(k-1) + \tilde{X}_{m+1}(k)$. Postup tohoto algoritmu je znázorněn na obrázku 1.3 a náhodné procházky $\tilde{S}_m(16)$ a $S_{m-1}(16)$, ze kterých jsme při konstrukci vycházeli, jsou znázorněny na obrázku 1.2.

Lze ukázat, že pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ jsou náhodné veličiny $\tilde{X}_m(1), \tilde{X}_m(2), \dots$ nezávislé a stejně rozdělené a platí

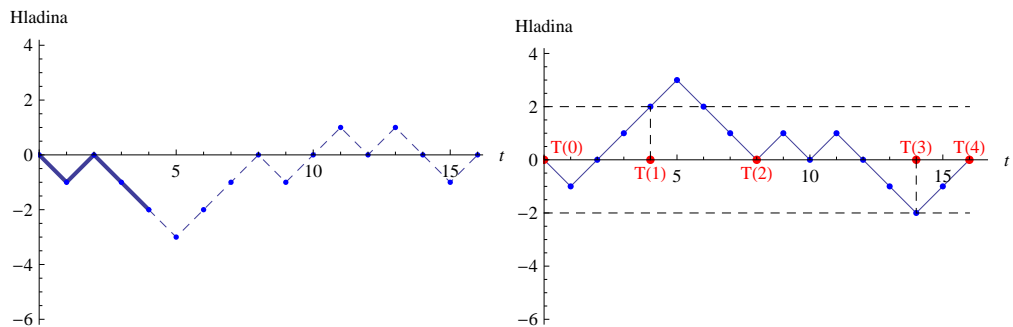
$$P(\tilde{X}_m(k) = 1) = P(\tilde{X}_m(k) = -1) = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tedy pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ je $\tilde{S}_m(k)$, $k \in \mathbb{N}$, náhodná procházka.

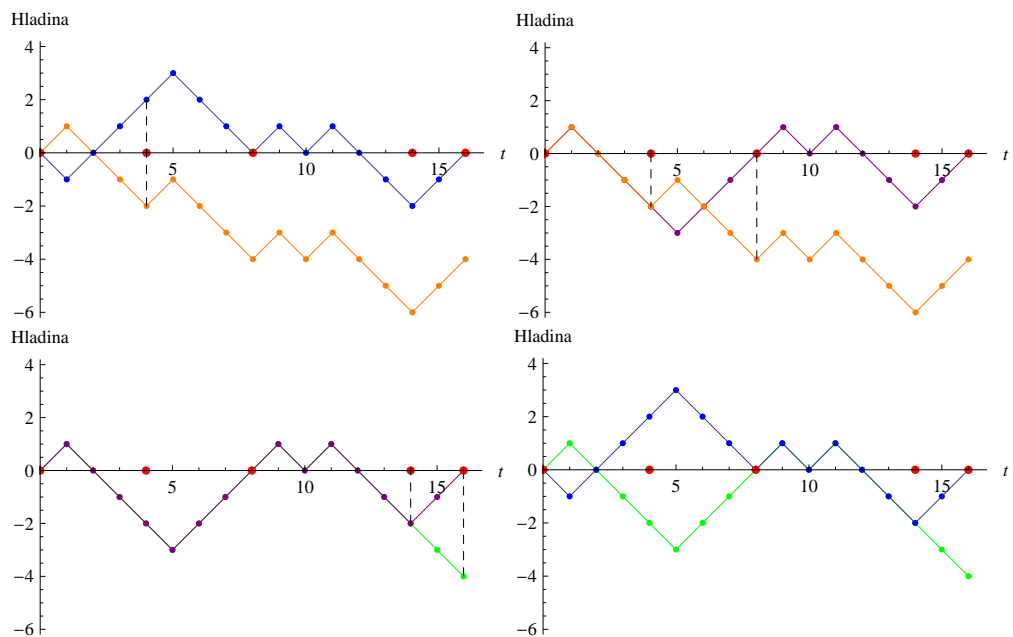
Z konstrukce (1.8) vyplývá následující vztah mezi náhodnými procházkami \tilde{S}_m a \tilde{S}_{m+1} pro $m \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{m+1}(T_{m+1}(k)) &= \sum_{j=1}^k \left[\tilde{S}_{m+1}(T_{m+1}(j)) - \tilde{S}_{m+1}(T_{m+1}(j-1)) \right] \\ &= \sum_{j=1}^k 2\tilde{X}_m(j) = 2\tilde{S}_m(k). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ze vzorce (1.9) vyplývá, že ke konstrukci na obrázku 1.3 nám stačí znát náhodnou procházku $\tilde{S}_m(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, která je zvýrazněna na obrázku 1.2 (levý graf) tlustou čarou.



Obrázek 1.2: Levý graf zobrazuje náhodnou procházku $\tilde{S}_m(16)$ a pravý graf zobrazuje náhodnou procházku $S_{m+1}(16)$.



Obrázek 1.3: Na prvních třech grafech (zleva doprava) je zobrazen postup konstrukce náhodné procházky $\tilde{S}_{m+1}(16)$ z náhodné procházky $S_{m+1}(16)$. Na posledním grafu (pravý dolní) je modrou čarou označena náhodná procházka $S_{m+1}(16)$ a zelenou čarou náhodná procházka $\tilde{S}_{m+1}(16)$. Červené body na všech grafech znázorňují náhodné časy $T_{m+1}(k)$ pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Poslední částí metody Twist & Shrink je konstrukce posloupnosti náhodných procesů $(B_m(t))_{m=0}^\infty$ pro $t \geq 0$. Pro $m \in \mathbb{N}_0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$B_m \left(\frac{k}{2^{2m}} \right) = \frac{1}{2^m} \tilde{S}_m(k). \quad (1.10)$$

Ze vzorců (1.9) a (1.10) vyplývá vztah mezi dvojicemi náhodných procesů $B_m(\cdot)$ a $B_{m+1}(\cdot)$ pro $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$B_{m+1} \left(\frac{T_{m+1}(k)}{2^{2(m+1)}} \right) = \frac{1}{2^{m+1}} \tilde{S}_{m+1}(k) = \frac{1}{2^m} \tilde{S}_m(k) = B_m \left(\frac{k}{2^{2m}} \right).$$

Na intervalech $\left(\frac{k}{2^{2m}}, \frac{k+1}{2^{2m}}\right)$ dodefinujeme $B_m(\cdot)$ lineárně.

Vzniká otázka, jak rychlá je konvergence posloupnosti náhodných procesů zkonstruovaných metodou Twist & Shrink k Brownovu pohybu. Odpověď na tuto otázku nám dá následující věta, jejíž důkaz je uveden v článku [3].

Věta 1.15. *Nechť $(B_m(t))_{m=0}^\infty$, $t \geq 0$, je posloupnost lineárně interpolovaných náhodných procházek, která vznikla metodou Twist & Shrink. Nechť $\{B(t), t \geq 0\}$ je standardní Brownův pohyb. Pak platí*

(i) $B_m(\cdot) \xrightarrow{s.j.} B(\cdot)$ stejnoměrně vzhledem k $t \in [0, \infty)$,

(ii) $\forall C \geq \frac{3}{2} \quad \forall K > 0 \quad \exists m_0(C, K) \quad \forall m \geq m_0(C, K)$ platí

$$P \left[\max_{0 \leq t \leq K} |B(t) - B_m(t)| \geq \frac{m}{2^{m/2}} \right] \leq 6 (K 2^{2m})^{1-C}.$$

Cílem naší práce je simulovat lokální čas hlavně pomocí aproximace Brownova pohybu nikoli zkoumání rychlosti konvergence této aproximace k Brownovu pohybu.

Kapitola 2

Lokální časy Brownova pohybu

2.1 Základní vlastnosti lokálního času

V této kapitole se budeme zabývat měřením času, který Brownův pohyb strávil na dané hladině. K tomu zavedeme náhodnou veličinu tzv. lokální čas Brownova pohybu. Nejprve lokální čas definujeme klasickou definicí Paula Lévyho, kterou lze nalézt v [3] a [5].

Definice 2.1. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb, označme λ Lebesgueovu míru. Náhodnou veličinu $L(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, nazveme **lokální čas Brownova pohybu v čase t na hladině x** , jestliže platí*

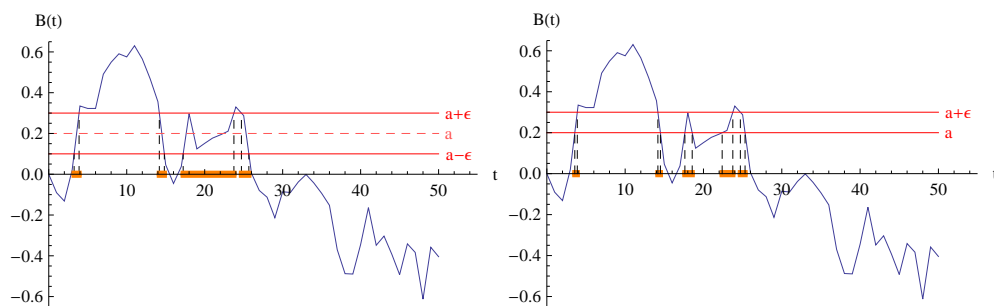
$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda \{s \in [0, t] : x - \varepsilon < B(s) < x + \varepsilon\}. \quad (2.1)$$

Poznámka 2.2. *V předchozí definici lze místo rovnosti (2.1) ekvivalentně psát*

$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \lambda \{s \in [0, t] : x < B(s) < x + \varepsilon\}. \quad (2.2)$$

Obrázek 2.1 ukazuje, jak je možné chápat definici 2.1. Oranžově je zvýrazněna množina ve vzorci (2.1) vlevo, respektive (2.2) vpravo.

Moderní definice lokálního času Brownova pohybu vychází z Tanakovy formule. Ke znění Tanakovy formule je nutné znát definici Itôova integrálu. Jeho definici a vlastnosti lze nalézt v knize [6]. Znění a důkaz Tanakovy formule je obsažen v knize [1] a v práci [2].



Obrázek 2.1: Demonstrace definice 2.1, nalevo viz vzorec (2.1), napravo viz vzorec (2.2).

Definice 2.3. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Bud' $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, pro kterou platí*

- (i) $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ je $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})$ -měřitelná, přičemž \mathcal{B} značí borelovskou σ -algebru na $[0, \infty)$,
- (ii) $f(t, \omega)$ je \mathcal{F}_t -adaptovaná, kde \mathcal{F}_t je σ -algebra generovaná náhodnými veličinami $B(s)$, $0 \leq s \leq t$,
- (iii) $E \left[\int_a^b (f(t, \omega))^2 dt \right] < \infty$.

Pak **Itôův integrál** z funkce f od času $a > 0$ do času $b > a$ definujeme

$$\int_a^b f(t, \omega) dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi_n(t, \omega) dB(t),$$

kde $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jednoduchých funkcí, která splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b (f(t, \omega) - \Phi_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0.$$

Věta 2.4 (Tanakova formule). *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$ platí následující rovnosti skoro jistě:*

$$(i) (B(t) - x)^+ - (B(0) - x)^+ = \frac{1}{2}L(t, x) + \int_0^t \mathbf{1}_{(x, \infty)}(B(s)) dB(s),$$

$$(ii) (B(t) - x)^- - (B(0) - x)^- = \frac{1}{2}L(t, x) - \int_0^t \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(B(s)) dB(s),$$

$$(iii) |B(t) - x| - |B(0) - x| = L(t, x) + \int_0^t \text{sign}(B(s) - x) dB(s),$$

kde $\text{sign}(x) = \mathbf{1}_{[x>0]} - \mathbf{1}_{[x\leq 0]}$, $(x)^+ = \frac{|x|+x}{2}$ a $(x)^- = \frac{|x|-x}{2}$.

Definice 2.5. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Náhodnou veličinu $L(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, nazveme **lokální čas Brownova pohybu v čase t na hladině x** , pokud platí*

$$L(t, x) = |B(t) - x| - |B(0) - x| - \int_0^t \text{sign}(B(s) - x) dB(s). \quad (2.3)$$

Následující věta pojednává o existenci a spojitosti lokálního času Brownova pohybu. Důkaz lze nalézt v práci [2].

Věta 2.6. *Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje nezáporný náhodný proces $\{L(t, x) : t \geq 0\}$, který splňuje (2.3) skoro jistě. Navíc náhodná funkce $L(t, x)$ je spojitá pro každé $t \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}$.*

Omezme se nyní na $L(t, 0)$, $t \geq 0$. Mohlo by nás zajímat, jaké hodnoty $L(t, 0)$ lze očekávat. Chceme například spočítat střední hodnotu či rozptyl. Následující věta nám k tomu pomůže, důkaz nalezneme například v článku [7].

Věta 2.7. *Nechť $L(\cdot, \cdot)$ je lokální čas Brownova pohybu. Pak pro každé $t \geq 0$, $h > 0$ a $u \geq 0$ platí*

$$\begin{aligned} P[L(t+h, 0) - L(t, 0) > u] &= \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{t+h}} \int_u^\infty \exp\left\{-\frac{v^2}{2(t+h)}\right\} \int_{v\sqrt{t/(h(t+h))}}^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy dv. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Příklad 2.8. *Počítejme střední hodnotu a rozptyl lokálního času Brownova pohybu v čase jedna na hladině nula. Volbou $t = 0$ a $h = 1$ ve vzorci (2.4) dostáváme*

$$\begin{aligned} P[L(1, 0) > u] &= \frac{2}{\pi} \int_u^\infty \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_u^\infty \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} dv. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že vzorce pro distribuční funkci $F(u)$ a hustotu $f(u)$, $u \geq 0$, lokálního času Brownova pohybu v čase jedna na hladině nula jsou

$$\begin{aligned} F(u) &= 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_u^\infty \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} dv, \\ f(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Střední hodnota lokálního času Brownova pohybu v čase jedna na hladině nula je rovna

$$\begin{aligned} E[L(1, 0)] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\right]_0^\infty \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \doteq 0,8. \end{aligned}$$

Spočítejme rozptyl lokálního času Brownova pohybu v čase jedna na hladině nula. Použitím metody per partes dostáváme

$$\begin{aligned} E[L(1, 0)]^2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u^2 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left[-u \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Tedy rozptyl lokálního času Brownova pohybu v čase jedna na hladině nula se rovná

$$\text{var} [L(1, 0)] = 1 - \frac{2}{\pi} \doteq 0,36.$$

2.2 Aproximace lokálního času

2.2.1 Excursion representation

V této části vycházíme z [4] a [5]. Protože jsme nenašli vhodný český název pro tuto aproximaci, používáme anglický termín *excursion representation*. Necht' $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Označme $\mathcal{B}^x = \{s \geq 0 : B(s) = x\}$ množinu časů, ve kterých Brownův pohyb prošel hladinou $x \in \mathbb{R}$. Definujme disjunktní otevřené intervaly \mathcal{Z}_k^x pro $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$[0, \infty) \setminus \mathcal{B}^x = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Z}_k^x.$$

Pro $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathcal{N}_\varepsilon(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[\mathcal{Z}_k^x \subset [0, t], |\mathcal{Z}_k^x| > \varepsilon]},$$

$$\mathcal{S}_\varepsilon(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\mathcal{Z}_k^x| \mathbf{1}_{[\mathcal{Z}_k^x \subset [0, t], |\mathcal{Z}_k^x| \leq \varepsilon]} \right],$$

kde symbol $|\cdot|$ značí délku intervalu. Náhodný proces $\mathcal{N}_\varepsilon(t, x)$ je tedy roven počtu podintervalů \mathcal{Z}_k^x do času t , jejichž délka je větší než ε . Náhodný proces $\mathcal{S}_\varepsilon(t, x)$ je součtem délek intervalů \mathcal{Z}_k^x v intervalu $[0, t]$, jejichž délka je menší nebo rovna ε .

Pro $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}$ označme

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(1)}(t, x) = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}} \mathcal{N}_\varepsilon(t, x), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(2)}(t, x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \mathcal{S}_\varepsilon(t, x). \quad (2.6)$$

Následující věta říká, že aproximace lokálního času Brownova pohybu dané vzorci (2.5) a (2.6) konvergují skoro jistě k lokálnímu času Brownova pohybu. Důkaz lze najít v článku [5].

Věta 2.9. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$ splňuje lokální čas Brownova pohybu $L(t, x)$ následující limity skoro jistě

$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{L}_\varepsilon^{(1)}(t, x), \quad (2.7)$$

$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{L}_\varepsilon^{(2)}(t, x). \quad (2.8)$$

2.2.2 Downcrossing representation

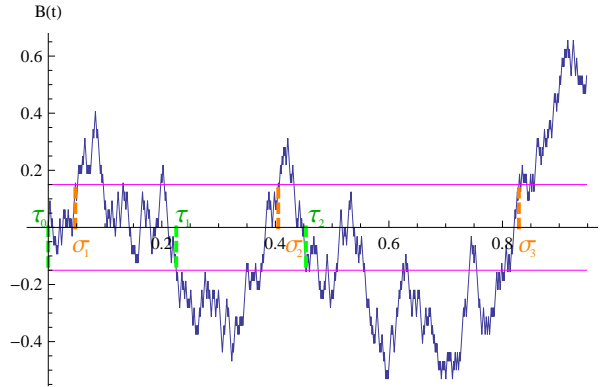
V této části se opět zaměříme na lokální čas Brownova pohybu na hladině nula. Následující teorie je obsažena v knize [1].

Nechť $\{B(t) : t \geq 0\}$ je Brownův pohyb. Zvolme $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Položme $\tau_0 = 0$ a pro $j \in \mathbb{N}$ rekursivně definujeme

$$\sigma_j = \inf \{t > \tau_{j-1} : B(t) = b\},$$

$$\tau_j = \inf \{t > \sigma_j : B(t) = a\}.$$

Náhodná veličina σ_j , $j \in \mathbb{N}$, vyjadřuje čas následující po čase τ_{j-1} , kdy poprvé Brownův pohyb vstoupí do hladiny b . Náhodná veličina τ_j , $j \in \mathbb{N}$, vyjadřuje čas následující po čase σ_{j-1} , kdy poprvé Brownův pohyb vstoupí do hladiny a . Na obrázku 2.2 jsou náhodné časy σ_j a τ_j zvýrazněny.



Obrázek 2.2: Realizace Brownova pohybu s vyznačenými časy σ_j a τ_j pro $a = -0,15$ a $b = 0,15$.

Pro každé $t > 0$ definujeme $D(a, b, t) = \max \{j \in \mathbb{N} : \tau_j \leq t\}$, což je počet přeskoků Brownova pohybu intervalu $[a, b]$ do času $t > 0$.

Věta 2.10. *Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti reálných čísel takové, že $a_n \uparrow 0$, $b_n \downarrow 0$ a $a_n < b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $t > 0$ platí skoro jistě následující limita*

$$L(t, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(b_n - a_n) D(a_n, b_n, t).$$

Důkaz předchozí věty lze nalézt v knize [1]. Tato věta nám dává aproximaci lokálního času Brownova pohybu na nulové hladině, kterou nazýváme anglicky *downcrossing representation*. Český ekvivalent by mohl znít reprezentace pomocí počtu přeskoků.

2.2.3 Lokální čas zjemňující se náhodné procházky

V kapitole 1.3.1 jsme zkonstruovali posloupnost náhodných procesů pomocí metody Twist & Shrink a ukázali jsme, že konverguje skoro jistě k Brownovu pohybu. Nyní se zaměříme na konstrukci lokálního času pomocí náhodné procházky. Budeme vycházet z článku [3] a z práce [2].

Definujme lokální čas náhodné procházky $\tilde{S}_m(k)$, $m \in \mathbb{N}_0$, vytvořené metodou Twist & Shrink na hladině $x \in \mathbb{Z}$ v čase $k \in \mathbb{N}_0$ takto

$$l_m(k, x) = \# \left\{ j \in \mathbb{N}_0 : j < k, \tilde{S}_m(j) = x \right\}.$$

Lokální čas náhodného procesu B_m , $m \in \mathbb{N}_0$, v čase $t \in \{k2^{-2m} : k \in \mathbb{N}_0\}$ na hladině $x \in \{j2^{-m} : j \in \mathbb{Z}\}$ definujeme

$$L_m(t, x) = 2^{-m} l_m(t2^{2m}, x2^m), \quad (2.9)$$

což je přirozené vzhledem na vzorec (1.10).

Lokální čas L_m , $m \in \mathbb{N}_0$, jsme zatím definovali pouze ve dvoudimenzionální síti bodů $(\frac{i}{2^{2m}}, \frac{j}{2^m})$, kde $i \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$. Postup, jak vhodně dodefinovat $L_m(t, x)$ mimo uvedenou síť, je popsán v [2] a [3]. Konstrukce je přirozená, avšak poměrně technicky náročná.

Následující věta říká, že lokální čas $L_m(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, konverguje skoro jistě k lokálnímu času Brownova pohybu. Věta rovněž popisuje, jak rychlá tato konvergence je. Důkaz této věty lze nalézt v článku [3].

Věta 2.11. *Nechť $(B_m(t))_{m=0}^\infty$, $t \geq 0$, je posloupnost náhodných procesů, která vznikla metodou Twist & Shrink a nechť $L_m(t, x)$ je lokální čas náhodného procesu $B_m(t)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Pak*

(i) pro libovolné $K > 0$ platí

$L_m(t, x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{s.j.} L(t, x)$ stejnoměrně vzhledem k $(t, x) \in [0, K] \times \mathbb{R}$.

(ii) $\forall C > 1 \quad \forall K > 0 \quad \exists m_0(C, K) \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq m_0(C, K)$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{(t,x) \in [0,K] \times \mathbb{R}} |L(t, x) - L_m(t, x)| \geq 79CK_*^{1/4} (\log_* K)^{3/4} m^{3/4} 2^{-m/2} \right] \\ \leq \frac{15}{1 - 4^{1-C}} (K2^{2m})^{1-C}, \end{aligned}$$

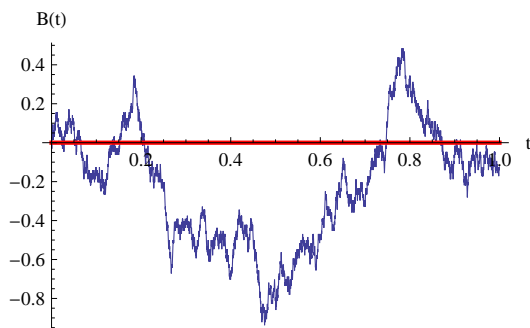
kde $K_* = \max\{1, K\}$ a $\log_* K = \max\{1, \log K\}$.

Kapitola 3

Simulace lokálních časů

V této kapitole se zabýváme aproximacemi lokálního času Brownova pohybu z kapitoly 2.2. Programovali jsme je v prostředí [8]. Zdrojový kód je obsažen na přiloženém CD.

Vygenerovali jsme náhodné procházky $S_m(2^{2(m-1)})$, $m = 1, \dots, 7$. Z nich jsme zkonstruovali aproximaci Brownova pohybu $\{B_6(t) : t \in [0, 1]\}$ pomocí metody Twist & Shrink, která je popsána v kapitole 1.3.1. Zde jsme se opět omezili na lokální čas Brownova pohybu na hladině nula. Vytvořená aproximace Brownova pohybu je zobrazena na obrázku 3.1. Tuto realizaci Brownova pohybu postupně použijeme pro všechny diskutované aproximace.



Obrázek 3.1: Graf zobrazuje aproximaci Brownova pohybu.

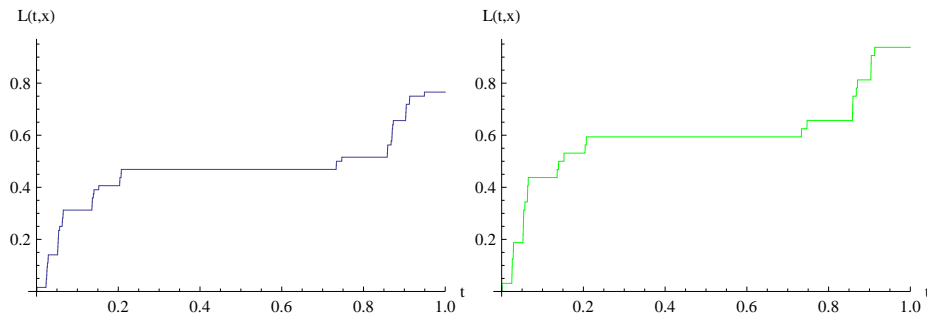
Lokální čas zjemňující se náhodné procházky

Konstrukci lokálního času zjemněné náhodné procházky $B_6(1)$ jsme popsali v kapitole 2.2.3. Věta 2.11 nám říká, že lokální čas zjemňující se náhodné

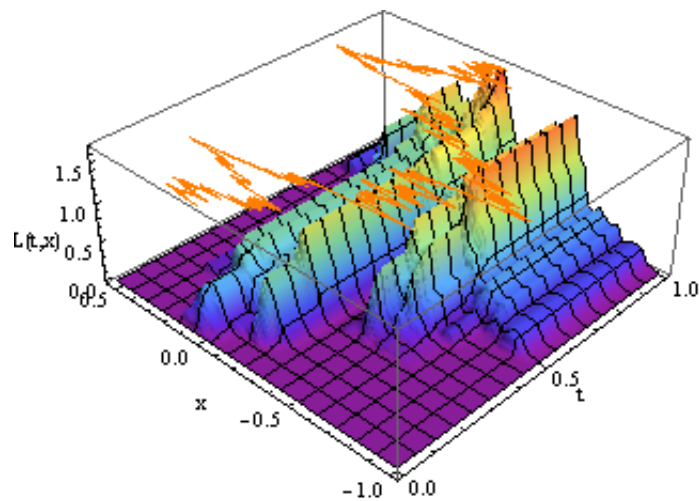
procházkou konverguje k lokálnímu času Brownova pohybu skoro jistě. Výsledná simulace je zobrazena na obrázku 3.2, vlevo.

Tanakova formule

V definici 2.5 jsme integrál na pravé straně (2.3) odhadli pomocí realizace $B_6(1)$. Výsledek je zobrazen na obrázku 3.2, vpravo. Lokální čas pro různé hladiny jsme vykreslili do obrázku (3.3), náhodný proces $B_6(1)$ je oranžově zvýrazněn.



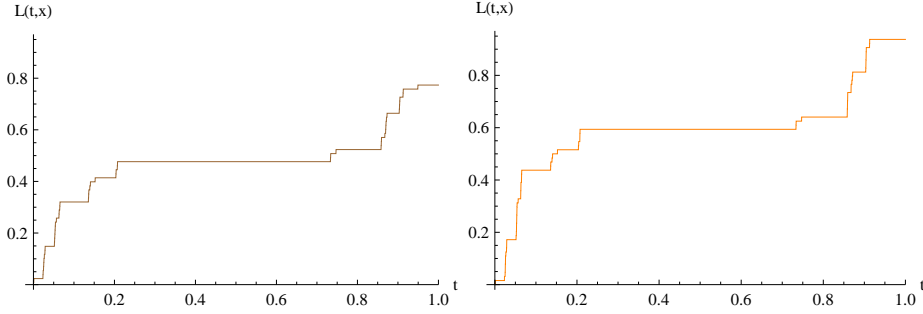
Obrázek 3.2: Levý graf zobrazuje lokální čas náhodného procesu $B_6(1)$, pravý graf zobrazuje lokální čas z Tanakovy definice.



Obrázek 3.3: Lokální čas s použitím aproximace z Tanakovy formule.

Lévyho definice

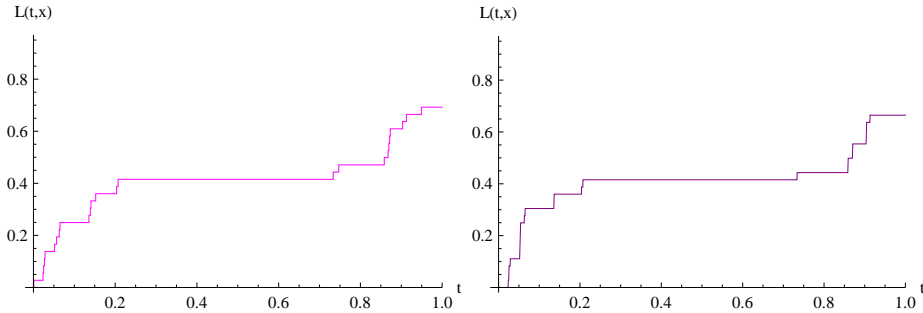
Lévyho definici, jež je uvedena v definici 2.1, budeme dále označovat jako Lévyho definice 1. V poznámce 2.2 je napsána ekvivalentní definice, kterou budeme označovat jako Lévyho definice 2. V simulaci jsme volili $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Obě realizace jsou zobrazeny na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Levý graf je sestaven z Lévyho definice 1, pravý graf z Lévyho definice 2.

Excursion representation

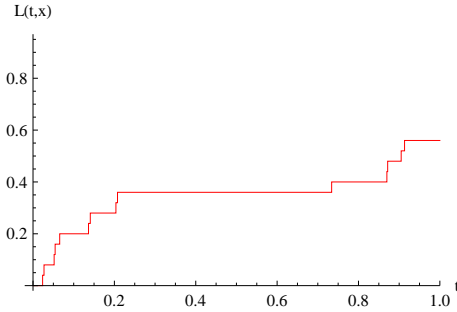
V kapitole 2.2.1 jsme zkonstruovali aproximace lokálního času Brownova pohybu $\mathcal{L}_\varepsilon^{(1)}(t, x)$ a $\mathcal{L}_\varepsilon^{(2)}(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Podle věty 2.9 tyto veličiny konvergují k lokálnímu času Brownova pohybu pro ε jdoucí do nuly. Zde jsme simulovaly $\mathcal{L}_\varepsilon^{(1)}(1, 0)$ a $\mathcal{L}_\varepsilon^{(2)}(1, 0)$ pro $\varepsilon = \frac{2}{2^{16}} = \frac{1}{2048}$. Výsledné realizace jsou zobrazeny na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Levý graf zobrazuje aproximaci lokálního času $\mathcal{L}_{1/2048}^{(1)}(1, 0)$, pravý graf zobrazuje $\mathcal{L}_{1/2048}^{(2)}(1, 0)$.

Downcrossing Representation

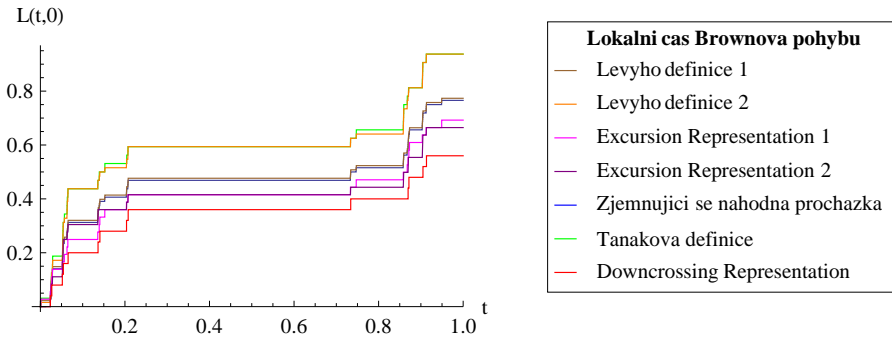
V kapitole 2.2.2 jsme definovali náhodnou veličinu $D(a, b, t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Věta 2.10 zajišťuje konvergenci skoro jistě $2(b - a_n)D(a_n, b_n, t)$ k lokálnímu času Brownova pohybu $L(t, 0)$ pro $a_n \uparrow 0$ a $b_n \downarrow 0$, $a_n < b_n$. V našich simulacích jsme volili $a = -\frac{1}{100}$ a $b = \frac{1}{100}$. Na obrázku 3.6 je zobrazena aproximace lokálního času $2(b - a)D(a, b, 1)$.



Obrázek 3.6: Graf zobrazuje aproximaci lokálního času pomocí metody Downcrossing representation.

Shrnutí

Všechny aproximace lokálního času jsou vykresleny v obrázku 3.7. Lokální čas Tanakovy formule a Lévyho definice 2 vychází velmi podobně. Také graf lokálního času zjemňující se náhodné procházky a Lévyho definice 1 jsou podobné, což nám vychází i při různých realizacích $B_6(1)$.



Obrázek 3.7: Různé simulace lokálního času.

Připomeňme, že z příkladu 2.8 víme, že střední hodnota lokálního času Brownova pohybu v čase jedna na hladině nula je $E[L(1, 0)] \doteq 0,8$ a jeho rozptyl je $\text{var}[L(1, 0)] \doteq 0,36$. Na obrázku 3.7 se hodnoty aproximací lokálního času v čase jedna na hladině nula opravdu pohybují okolo hodnoty 0,8.

Položíme-li si otázku, která z daných aproximací lokálního času Brownova pohybu je nejlepší, narazíme na několik problémů. Zaprvé je to volba parametrů v jednotlivých aproximacích. Zadruhé je to výpočetní složitost. V neposlední řadě narazíme na to, že pracujeme s náhodnými procesy, tudíž pro odlišné trajektorie aproximací Brownova pohybu dostáváme odlišné odhady lokálního času. K prvnímu, tedy k volbě parametrů, jsme přistupovali empiricky. Uvedené volby parametrů jsou výsledkem opakování simulací a jejich lazení. Ohledně výpočetní složitosti nenacházíme vážnějších rozdílů. Z programátorského hlediska však preferujeme Tanakovu definici, protože kód pro tuto simulaci je o mnoho kratší než u jiných simulací.

Literatura

- [1] Mörters P., Peres Y.: *Brownian Motion*, preprint.
- [2] Kadavý M.: *Lokální gaussové časy*, diplomová práce MFF UK, 2009.
- [3] Szabados T., Szekely B.: *An elementary approach to Brownian local time based on simple*, Periodica Mathematica Hungarica, **51**(1): 79-98, 2005.
- [4] Karatzas I., Shreve S.E.: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer, 1991.
- [5] Borodin A.N.: *Brownian local time*, UMN, **44**:2(266): 7-48, 1989.
- [6] Øksendal B.K.: *Stochastic differential equations*, Springer, 2003.
- [7] Csörgö M., Shao M.: *A new proof on the distribution of the local time of a Wiener proces*, Statistics and probability letters 19: 285-290, 1994.
- [8] *Wolfram Mathematica*, verze 7.0.0.