Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Antonín Holub

Banach-Tarského paradox

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2010

Děkuji svému vedoucímu práce, RNDr. Romanu Lávičkovi, Ph.D., za odborné vedení, cenné rady a poskytnutí literatury.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Antonín Holub

Obsah

Název práce: Banach-Tarského paradox
Autor: Antonín Holub
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
e-mail vedoucího: Roman.Lavicka@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme Banach-Tarského paradoxem nejen v trojrozměrném prostoru, ale i v ostatních dimenzích. Proto studujeme rotace, rozklady, ekvivalenci vzhledem ke konečnému rozkladu, grupy a jejich vlastnosti. Budeme se také zabývat ekvivalencí vzhledem ke spočetnému rozkladu a ukážeme si paradoxy, které jsou analogické Banach-Tarskému paradoxu pro dimenzi 1 a 2. Poté se podíváme, jaký má Banach-Tarského paradox a jeho spočetná analogie vztah k existenci rozšíření Lebesgueovi míry na všechny podmnožiny daného prostoru. Na závěr sestrojíme některé paradoxní rozklady, které nevyžadují axiom výběru.

Klíčová slova: Banach-Tarského paradox, paradoxní rozklady, axiom výběru

Title: The Banach-Tarski paradox
Author: Antonín Holub
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Roman.Lavicka@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we deal with the Banach-Tarski paradox not only in three dimensional space, but also in all other dimensions. Therefore we study rotations, decompositions, equidecomposability via finite decomposition, groups and their properties. We also consider equidecomposability via countable decomposition and construct paradoxes analogous to the Banach-Tarski paradox in dimensions 1 and 2. Further we take a look at how the Banach-Tarski paradox and its countable analogy relate to the existence of extensions of Lebesgue measure to all subsets of the given space. Lastly we present some paradoxical decompositions which do not require the axiom of choice.

Keywords: Banach-Tarski paradox, axiom of choice, paradoxical decompositions

Kapitola 1

Úvod

Cílem této práce je podat základní přehled známých výsledků o Banach-Tarského paradoxu. Práce je psaná tak, aby k jejímu plnému pochopení stačilo absolvování prvního ročníku bakalářského programu oboru Matematika na MFF UK.

Banach-Tarského paradox říká, že můžeme vzít libovolný objekt v třírozměrném prostoru (například fotbalový míč), rozbít ho na konečné množství kousků a z nich poskládat jakýkoliv jiný objekt (například Slunce, nebo fotbalový stadion, anebo oboje). Na první pohled je patrné, proč se takovému tvrzení říká paradox - odporuje základní geometrické intuici. A co víc, odporuje i základním fyzikálním zákonům. Přesto je to tvrzení pravdivé, protože daný objekt můžeme rozložit na takzvané "neměřitelné" kusy. Ukazuje se, že takovýto paradoxní rozklad dostaneme pouze za předpokladu platnosti axiomu výběru, dále jen AC. Co vlastně AC říká? Pouze to, že pokud máme libovolný soubor množin, tak jsme schopni z každé množiny v tomto souboru vybrat právě jeden prvek, a to v jednom okamžiku pro všechny množiny zároveň. Ač by se mohlo zdát, že toto tvrzení je triviální, opak je pravdou - AC je nezávislý na ostatních axiomech standardní teorie množin v tom smyslu, že z nich nevyplývá ani jeho pravdivost, ani pravdivost jeho negace. AC se také na první pohled jeví jako velice intuitivní tvrzení, odpovídající naší každodenní zkušenosti. V čem je tedy problém? Axiom výběru říká, že existuje nějaký objekt, v tomto případě výběr, ale neříká, jak takový objekt zkonstruovat a tím se zásadně liší od ostatních axiomů teorie množin. Není se tedy čemu divit, že od roku 1904, kdy byl prvně zformulován německým matematikem Ernstem Zermelem vyvolával bouřlivé diskuze na hranici matematiky a filozofie o tom, zda má být vůbec akceptován.

V roce 1914 použil známý německý matematik Felix Hausdorff AC k paradoxnímu rozložení sféry. Až na jistou spočetnou podmnožinu, rozložil totiž sféru na konečně mnoho dílů, ze kterých pak poskládal tytéž sféry dvě. Roku 1924 na tento výsledek navázali polský matematik Stefan Banach a logik Alfred Tarski a nejenom, že se dokázali zbavit oné spočetné množiny, ale místo sféry rozložili kouli a díky tomu i jakoukoliv omezenou množinu s neprázdným vnitřkem. Jelikož byli oba odpůrci AC, jejich motivací bylo ukázat, že AC vede k silně neintuitivním tvrzením, a tudíž by neměl být brán jako jeden z axiomů teorie množin.

Situace se naštěstí po nějaké době uklidnila, a ačkoliv se často použití AC v nějakém důkazu zmiňuje (použití jiného z axiomů teorie množin většinou zůstává beze zmínky), je nyní bez problémů přijímán.

V první části třetí kapitoly si ukážeme, jak pánové Hausdorff, Banach a Tarski zkonstruovali něco tak neuvěřitelného jako je Banach-Tarského paradox. A nejenom to - v druhé části třetí kapitoly se pokusíme rozšířit Banach-Tarského paradox z trojrozměrného prostoru do ostatních dimenzí. V kapitole čtyři si také ukážeme, jaký má Banach-Tarského paradox vliv na velice důležité odvětví matematiky - teorii míry a integrálu. Na závěr zkonstruujeme několik rozkladů bez použití axiomu výběru, které sice nejsou tak "paradoxní" jako Banach-Tarského paradox, přesto jsou ale pozoruhodné.

Kapitola 2

Základní pojmy a tvrzení

2.1 Rotace a grupa $SO(n)$

V této části si zavedeme některé pojmy, které budeme používat. Většina pojmů je dobře známá.

Pro každé přirozené číslo n budeme prostorem $\mathbb{R}^n$ rozumět množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat *n-rozměrné vektory*, nebo pouze *vektory*. Každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ můžeme psát ve tvaru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, je reálné číslo, které nazýváme *i-tou složkou* vektoru x. Vektory budeme sčítat po složkách a násobit libovolným prvkem z $\mathbb{R}$ (tzv. *skalárem*) také po složkách. Pro všechna přirozená n budeme nazývat vektor $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *počátkem*, *nulovým vektorem*, nebo pouze *nulou* a značit 0. Rozměr nulového vektoru bude jasný z kontextu.

Vzdáleností n-rozměrných vektorů x a y budeme rozumět číslo

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Vzdálenost vektoru x od počátku budeme nazývat *normou* x a číslu

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

budeme říkat *skalární součin* dvou n-rozměrných vektorů x a y.

Soubor reálných čísel

$$a = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

budeme nazývat *maticí s reálnými koeficienty* $a_{i,j}$ (dále jen *matice*) řádu $n \times m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Matice o stejné velikosti budeme sčítat po složkách. Skálárem budeme matici násobit také po složkách. Součinem matice $a \in \mathbb{R}^{n\times p}$ s maticí $b \in \mathbb{R}^{p\times m}$ budeme rozumět matici $ab \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pro kterou platí

$$(ab)_{i,j} = \sum_{r=1}^{p} a_{i,r} b_{r,j}.$$

Násobení matice zprava sloupcovým vektorem je speciálním případem násobení dvou matic, kde $m = 1$.

Transponovanou maticí k matici $a \in \mathbb{R}^{n\times m}$ budeme rozumět matici $a^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pro jejíž všechny prvky platí $a^T_{i,j} = a_{j,i}$. Matici řádu $n\times n$ s koeficienty $a_{i,j} = 1$, pro $i = j$, a $a_{i,j} = 0$ jinak, budeme nazývat *jednotkovou maticí* a budeme ji značit e. *Inverzní maticí* k matici a budeme rozumět matici a^{-1}, pro kterou platí $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Zobrazení r z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, budeme nazývat *izometrické zobrazení* (neboli *izometrie*), pokud zachovává vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$, tj. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $|x - y| = |r(x) - r(y)|$.

Definice 1. Matici, pro kterou platí, že její transpozice je zároveň její inverzí, budeme nazývat *ortogonální matice. Rotací v* $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět $n \times n$ ortogonální matici ρ, jejíž determinant je roven 1. Jak je obvyklé, budeme takové ρ ztotožňovat s funkcí $\rho(x)$ z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$, kde $\rho(x)$ se rovná vektoru, který vznikne vynásobením matice ρ zprava sloupcovým vektorem x. Zobrazení r z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$, pro které platí $r(x) = \rho(x) + a$, kde $x \in \mathbb{R}^n$, ρ je daná rotace a $a \in \mathbb{R}^n$ pevné, budeme nazývat *euklidovský pohyb.*

Příklad 1. Matice $\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ je rotace.

Poznámka 1. *Ačkoliv je rotace zadefinovaná jako matice, můžeme ji díky ztotožnění chápat i jako funkci. Pokud tedy o funkci řekneme, že je rotace, máme tím na mysli, že existuje rotace, která se s ní dá ztotožnit.*

Tvrzení 1. Nechť ρ je rotace v $\mathbb{R}^n$. Potom platí následující:

(1) Zobrazení ρ zobrazuje přímky na přímky, tj., $\rho(b + tc) = \rho(b) + t\rho(c)$ pro všechna $b, c \in \mathbb{R}^n$ a $t \in \mathbb{R}$.

(2) Zobrazení ρ zachovává skalární součin, tj., pokud x a $y \in \mathbb{R}^n$, tak platí

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(y_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{2.1}$$

(3) Zobrazení ρ zachovává vzdálenosti, tj., pokud $x \in \mathbb{R}^n$, tak $|\rho(x)| = |x|$. A tedy ρ je izometrie.

(4) Jestliže $\rho \neq e$, pak množina $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \rho(x) = x\}$ je přímka procházející počátkem. Existuje tedy $p \in \mathbb{R}^n$ takové, že $A = \{tp : t \in \mathbb{R}^3\}$ a $|p| = 1$.

(5) Nechť A a p jsou jako v (4). Pokud $n = 3$ a q je jakýkoliv bod $\mathbb{R}^3$, pro který platí $A = \{tq : t \in \mathbb{R}\}$ a $|q| = 1$, potom $q = p$ nebo $q = -p$.

Důkaz. (1) je jasná a (3) plyne z (2), pokud $x = y$. Nyní se pokusíme dokázat (5). Stačí si uvědomit, že z $\{tp : t \in \mathbb{R}\} = \{tq : t \in \mathbb{R}\}$ vyplývá, že existuje nějaké $s \in \mathbb{R}$ takové, že $q = sp$. Pokud ještě použijeme, že $|p| = |q| = 1$, dostaneme $s^2 = s^2|p|^2 = |sp|^2 = |q|^2 = 1$. Tedy $s = 1$ nebo -1.

Abychom dokázali (2) použijeme, že ρ je ortogonální matice. Přímo z definice ortogonální matice vyplývá, že $\sum_{i=1}^{n} \rho_{ij}\rho_{ik} = e_{jk} = 1$, pokud $j = k$ a 0, pokud $j \neq k$, kde $j, k = 1, \ldots, n$. Díky tomu můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \rho(x)_i \rho(y)_i &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_j)(\sum_{k=1}^{n} \rho_{ik} y_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \rho_{ij}\rho_{ik} x_j y_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_{jk} x_j y_k = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.
\end{aligned}$$

Důkaz (4) bude o trochu obtížnější. Charakteristický polynom $f(\lambda) = det(\rho - \lambda e)$ matice ρ je kubický polynom s reálnými koeficienty, a tedy má alespoň jeden reálný kořen (viz [4, str. 238, Věta 130]). Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou

3, ne nutně různé, komplexní kořeny $f(\lambda)$ a λ_1 je největší reálný kořen. Potom můžeme psát $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$, tedy

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = f(0) = det\rho = 1. \tag{2.2}$$

V případě, že λ_k je reálný kořen, tak determinant matice $\rho - \lambda_k e$ je nulový a tudíž má rovnice

$$\rho - \lambda_k e = 0 \tag{2.3}$$

nějaké nenulové řešení $x \in \mathbb{R}^3$. Tedy platí $\rho(x) = \lambda_k x$. Ze (3) vyplývá, že $|\lambda_k| = 1$, tedy $\lambda_k = 1$ nebo -1. Pokud λ_2 není reálné, tak λ_3 je k němu číslo komplexně združené (tzn. pokud $\lambda_2 = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka, tak $\lambda_3 = a - ib$). Rovnost (2.2) můžeme tedy zapsat ve tvaru $\lambda_1 |\lambda_2|^2 = 1$, a tedy $\lambda_1 = 1$. Na druhou stranu, pokud λ_2 je reálné číslo, tak musí být i λ_3 reálná. Všechny tři kořeny jsou tedy 1 nebo -1. Z rovnosti (2.2) vyplývá, že $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \lambda_3$.

Jelikož $\lambda_1 = 1$, můžeme v rovnosti (2.3) za k psát 1 a najít vektor $p \in \mathbb{R}^3$, $|p| = 1$. Očividně platí $\rho(p) = p$ a $tp \in A$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Nyní musíme dokázat, že v A nejsou jiné vektory než tvaru tp, kde $t \in \mathbb{R}$. Předpokládejme tedy, že existuje nějaké $u \in A$ a $u \neq tp$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Vyberme nějaký vektor v kolmý na plochu obsahující p, u a 0. Tj.

$$\sum v_j p_j = \sum v_j u_j = 0.$$

Jelikož $\rho(p) = p$ a $\rho(u) = u$, tak z (2) plyne, že $\rho(v)$ je také kolmý na tuto plochu. Pokud ještě použijeme (3), dostaneme, že $\rho(v) = v$ nebo $-v$. Vektory p, u a v jsou tedy lineárně nezávislé, a tak každý vektor $x \in \mathbb{R}^3$ se dá zapsat ve tvaru $x = \alpha p + \beta u + \gamma v$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ jsou vhodná čísla. Z (1) plyne, že $\rho(x) = \alpha p + \beta u + \gamma \rho(v)$. Protože $\rho \neq e$, nemůže platit $\rho(v) = v$, a tedy platí $\rho(v) = -v$.

Matice

$$\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & u_1 & v_1 \\ p_2 & u_2 & v_2 \\ p_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

má nenulový determinant, protože p, u a v jsou lineárně nezávislé. Pro součin matic

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} p_1 & u_1 & -v_1 \\ p_2 & u_2 & -v_2 \\ p_3 & u_3 & -v_3 \end{pmatrix}$$

platí

$$-det\sigma = det(\rho\sigma) = (det\rho)(det\sigma) = det\sigma, \tag{2.4}$$

a tedy $det\sigma = 0$, což je spor. Tím jsme dokázali (4) a celé Tvrzení 1. $\square$

Definice 2. Množinu A z předchozí věty budeme nazývat *osou rotace* ρ. Body p a $-p$ budeme nazývat *póly rotace* ρ.

Příklad 2. Nechť $F = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom funkce $f(x) := Fx$, pro $x \in \mathbb{R}^3$ je ortogonální a izometrická, ale není to rotace.

Definice 3. *Grupou* budeme rozumět dvojici $(G, \bullet)$, kde G je neprázdná množina a $\bullet$ je binární operace, která každé uspořádané dvojici (a, b) prvků z G přiřadí nějaký prvek c z G (značíme $c = a \bullet b$) a má následující vlastnosti:

1. Pro všechna $a, b, c \in G$ platí $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.
2. Existuje prvek $1 \in G$, že $1 \bullet a = a \bullet 1 = a$ pro všechna $a \in G$. Prvek 1 se nazývá *neutrální prvek*.
3. Ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek $a^{-1} \in G$ takový, že $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$. Prvku a^{-1} říkáme *inverzní prvek k a*.

Pozorování 1. Množina všech rotací v $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s operací násobení matic tvoří grupu. Tuto grupu budeme značit $SO(n)$.

Důkaz. Násobení matic je asociativní operace, tedy i složení rotací je asociativní. Neutrální prvek je jednotková matice a inverzní prvek k rotaci ρ je její inverzní matice $\rho^{-1} = \rho^T$, kde ρ^T značí transponovanou matici. Matice ρ^{-1} je prvkem $SO(n)$, protože $det(\rho^{-1}) = (det\rho)^{-1} = 1$ a $(\rho^{-1})^{-1} = \rho = (\rho^{-1})^T$.

Zbývá ukázat, že složením dvou rotací vznikne rotace. Musíme tedy ověřit, že $\rho \cdot \sigma \in SO(n)$, pro libovolná $\rho, \sigma \in SO(n)$. K tomu stačí ověřit, že $det(\rho \cdot \sigma) = 1$ a $(\rho \cdot \sigma)^{-1} = (\rho \cdot \sigma)^T$. První se dokáže jednoduše: $det(\rho \cdot \sigma) = (det\rho) \cdot (det\sigma)$. Druhé také: $(\rho \cdot \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \rho^{-1} = \sigma^{-T} \cdot \rho^{-T} = (\rho \cdot \sigma)^T$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Definice 4. Nechť G je grupa a $g_1, \ldots, g_r \in G$, potom $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_n}$, kde $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, r\}$, je *slovo délky n*, vytvořené z písmen $g_1, \ldots, g_r$. Slovo v nejkratším možném tvaru se nazývá *redukovaným slovem*.

Tvrzení 2. Nechť G značí grupu generovanou rotacemi

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Potom G sestává z identity e, rotace a a rotací tvaru

$$r = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \ldots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\epsilon_2}, \tag{2.5}$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i \in \{0,1\}$ a $n_i \in \{1,2\}$, a každý prvek množiny $G \setminus \{e,a\}$ se dá zapsat jednoznačně ve tvaru (2.5).

Důkaz. Grupa G je vlastně grupa slov vytvořených z písmen a a b, pokud jediná redukční pravidla jsou $a^2 = b^3 = e$. Je jasné, že se každý prvek G dá zapsat ve tvaru (2.5). K ověření jednoznačnosti stačí dokázat, že součin $b^{n_1} a b^{n_2} a \ldots a b^{n_k} a$ se nikdy nerovná a ani e, pro $k \in \mathbb{N}$ a $n_i \in \{1,2\}$. Toto doopravdy stačí, protože každý případ rovnosti dvou redukovaných slov se dá přepsat do tohoto tvaru. Z indukce podle k se dá zjistit, že tento součin je tvaru

$$\frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3\sqrt{3} \\ l_1 & s_4 & l_2\sqrt{3} \\ l_3\sqrt{3} & s_5\sqrt{3} & l_4 \end{pmatrix},$$

kde s_j jsou sudá celá čísla (to znamená i 0) a l_j jsou lichá celá čísla. Z čehož dokazované pozorování okamžitě vyplývá.

Zbývá tedy provést indukci. Případ $k = 1$ je jasný. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí, pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Tedy platí

$$b^{n_1} a b^{n_2} a \ldots a b^{n_m} a = \frac{1}{2^m} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3\sqrt{3} \\ l_1 & s_4 & l_2\sqrt{3} \\ l_3\sqrt{3} & s_5\sqrt{3} & l_4 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Případ $k = m + 1$ rozdělíme na případ, kdy k tomuto slovu přidáme zleva slovo ba a slovo $b^2 a$.

V prvním případě získáme rotaci tvaru

$$\frac{1}{2^{m+1}} \begin{pmatrix} -s_2 - 3s_3 & 2s_1 & \sqrt{3}(s_3 - s_2) \\ -s_4 - 3l_2 & 2l_1 & \sqrt{3}(l_2 - s_4) \\ \sqrt{3}(-s_5 - l_4) & 2\sqrt{3} l_3 & l_4 - 3s_5 \end{pmatrix},$$

ve druhém získáme rotaci tvaru

$$\frac{1}{2^{m+1}}\begin{pmatrix} -s_2+3s_3 & 2s_1 & \sqrt{3}(s_3+s_2) \\ -s_4+3l_2 & 2l_1 & \sqrt{3}(l_2+s_4) \\ \sqrt{3}(-s_5+l_4) & 2\sqrt{3}l_3 & l_4+3s_5 \end{pmatrix}.$$

Tím je důkaz hotov. □

2.2 Ekvivalence vzhledem ke konečnému rozkladu

Nyní si zadefinujeme pojmy rozklad a ekvivalence vzhledem ke konečnému rozkladu a zformulujeme a dokážeme Větu o vlastnostech ekvivalence vzhledem ke konečnému rozkladu.

Definice 5. Nechť X je množina. *Rozkladem* množiny X budeme rozumět soubor po dvou disjunktních množin, jejichž sjednocení je X.

Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^n$, potom $X \cong Y$ značí, že existuje euklidovský pohyb r takový, že $r(X) = Y$. V takovém případě říkáme, že X a Y jsou *ekvivalentní*.

Řekneme, že X a Y jsou *ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu*, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že existuje rozklad $(X_1, \ldots, X_n)$ množiny X a rozklad $(Y_1, \ldots, Y_n)$ množiny Y, tak, že platí $X_1 \cong Y_1, X_2 \cong Y_2, \ldots, X_n \cong Y_n$. V takovém případě budeme psát $X \sim Y$.

Věta 1. *[O vlastnostech ekvivalence vzhledem ke konečnému rozkladu] Nechť X a Y jsou podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Ekvivalence vzhledem ke konečnému rozkladu má následující tři vlastnosti:*

1. *vlastnost disjunktního sjednocení: Je-li $Y \cap Y' = X \cap X' = \emptyset$ a platí $X \sim Y$ a $X' \sim Y'$, pak $X \cup X' \sim Y \cup Y'$;*
2. *tranzitivnost: jestliže $X \sim Y$ a $Y \sim Z$, pak $X \sim Z$;*
3. *vlastnost rozšíření: jestliže pro $\tilde{X} \subset X$ a $\tilde{Y} \subset Y$ platí $X \sim \tilde{Y}$ a $Y \sim \tilde{X}$, pak $X \sim Y$.*

Důkaz. Vlastnost 1 je jasná. U důkazu vlastnosti 2 stačí využít toho, že složení dvou euklidovských pohybů je euklidovský pohyb. Důkaz vlastnosti 3 je složitější.

Nechť $(X_1, \dots, X_n)$ (resp. $(Y_1, \dots, Y_m)$) je daný konečný rozklad množiny X (resp. Y). Víme, že existují euklidovské pohyby $r_i, i \in \{1, \dots, n\}$ a $s_i, i \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $(r_1(X_1), \dots, r_n(X_n))$ je konečný rozklad množiny $\tilde{Y}$ a $(s_1(Y_1), \dots, s_m(Y_m))$ je konečný rozklad množiny $\tilde{X}$. Můžeme tedy definovat zobrazení r (resp. s) takové, že $r(x) = r_i(x)$ (resp. $s(x) = s_i(x)$) pro $x \in X_i$ (resp. $x \in Y_i$).

Dále pro každou množinu $E \subset X$ definujme

$$E' = X \backslash s(Y \backslash r(E)). \tag{2.7}$$

Je patrné, že

$$E \subset F \subset X \Rightarrow E' \subset F' \subset X. \tag{2.8}$$

Nechť $\Delta = \{E : E \subset X, E \subset E'\}$. Všimněme si, že $\emptyset \in \Delta$. Nechť

$$D = \bigcup_{E \in \Delta} E.$$

Z (2.8) vyplývá, že pro každé $E \in \Delta$ platí, že $E' \subset D'$, a tedy $E \subset D'$. Z toho vyplývá, že $D \subset D'$ a z (2.8) plyne, že $D' \subset (D')'$. Čili $D' \in \Delta, D' \subset D$ a $D' = D$.

V (2.7) položme $E = D$ a dostaneme

$$D = X \backslash s(Y \backslash r(D)),\ X \backslash D = s(Y \backslash r(D)).$$

Je vidět, že $X \backslash D \subset X^\circ$. Nyní, pro $1 \leq j \leq n$ a $1 \leq i \leq m$, zadefinujme

$$A_j = D \cap X_j, A_{n+i} = s_i(Y_i \backslash r(D)), t_j = r_j \ a \ t_{n+i} = r_i^{-1}.$$

Je zřejmé, že $(A_1, \dots, A_n)$ je rozkladem D, $(A_{n+1}, \dots, A_{n+m})$ je rozkladem $X \backslash D$, $(t_1(A_1), \dots, t_n(A_n))$ je rozkladem $t(D)$ a $Y \backslash t(D)$ se dá rozložit na $(t_{n+1}(A_{n+1}), \dots, t_{n+m}(A_{n+m}))$. Tedy $X \sim Y$. □

Poznámka 2. *Vlastnost 3 je analogická Cantor-Bernsteinově větě a stejně tak i důkaz je obdobný. Cantor-Bernsteinova věta místo o ekvivalenci vůči konečnému rozkladu mluví o stejné mohutnosti. Viz B. Balcar, P. Štěpánek: Teorie množin, Academia, Praha, 1985, str. 78.*

Kapitola 3

Banach-Tarského paradox

3.1 Banach-Tarského paradox v $\mathbb{R}^3$

V roce 1914 použil známý německý matematik Felix Hausdorff axiom výběru ke konstrukci paradoxního rozložení sféry. Paradoxnímu proto, že, až na jistou spočetnou podmnožinu, rozložil sféru na konečně mnoho dílů, ze kterých pak poskládal tytéž sféry dvě. Roku 1924 na tento výsledek navázali polský matematik Stefan Banach a logik Alfred Tarski a nejenom, že se dokázali zbavit oné spočetné množiny, ale místo sféry rozložili kouli a díky tomu i jakoukoliv omezenou množinu s neprázdným vnitřkem.

V této části si ukážeme, jak to tito pánové udělali. Důkaz je převzat z [2] a je obohacen o některé detaily z [8].

Definice 6. Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom množinu

$$S^n(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

budeme nazývat *n-rozměrnou sférou o poloměru r a středu a* a *uzavřenou n-rozměrnou koulí o poloměru r a středu a* budeme rozumět množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\} .$$

Řekneme, že $X \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud existuje uzavřená n-rozměrná koule B, že $X \subset B$. Řekneme, že $X \subset \mathbb{R}^n$ má *neprázdný vnitřek*, pokud obsahuje nějakou uzavřenou n-rozměrnou kouli.

Poznámka 3. *Místo n-rozměrná koule (resp. sféra), budeme často říkat pouze koule (resp. sféra).*

Věta 2 (Banach-Tarského paradox)**.** *Nechť X a Y jsou omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdnými vnitřky. Potom $X \sim Y$.*

Axiom 1 (Axiom výběru)**.** Pro každou množinu množin Λ existuje funkce $\mathcal{F}$ definovaná na Λ, která každé množině $G \in \Lambda$ přiřadí nějaký její prvek $\mathcal{F}(G) \in G$.

Lemma 1. *Nechť S je jednotková sféra, tj. $S = S(0,1)$. Nechť a a b jsou rotace jako v Tvrzení 2, tedy*

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Potom existuje rozklad (S_1, S_2, S_3, P) sféry S takový, že P je spočetná množina a platí

$$S_3 = bS_2 = b^2 S_1, \ S_1 = a(S_2 \cup S_3).$$

Důkaz. Mějme grupu redukovaných slov G jako v Tvrzení 2. Konečný rozklad (G_1, G_2, G_3) grupy G můžeme vytvořit takto: do G_1 zařadíme slova tvaru $(b^2a)^n$, do G_2 slova tvaru $a(b^2a)^n$ a do G_3 slova tvaru $ba(b^2a)^n$, kde $n \geq 0$. Ostatní slova zařadíme do G_1 (resp. G_2, resp. G_3), začínají-li zleva slovem a (resp. b, resp. b^2). Všimněme si, že platí $G_3 = bG_2 = b^2G_1$ a $G_1 = a(G_2 \cup G_3)$.

Nechť

$$P = \{x \in S : \exists \rho \in G \setminus \{e\} : \rho(x) = x\}. \tag{3.1}$$

Množina P je tvořena průniky os rotací prvků $\rho \in G \setminus \{e\}$ se sférou S a tudíž je spočetná. Dále nechť $G(x) = \{\rho(x) : \rho \in G\}$ pro každé $x \in S \setminus P$. Pak každá taková množina $G(x)$ je podmnožinou $S \setminus P$. Skutečně, jestliže platí $\rho(x) \in P$ pro nějaké ρ, potom $\sigma\rho(x) = \rho(x)$ pro nějaké $\sigma \neq e$, tedy $\rho^{-1}\sigma\rho(x) = x$, ale $\rho^{-1}\sigma\rho \neq e$, a tedy $x \in P$.

Dále platí, že $x \in G(x)$ a každé dvě množiny $G(x)$ a $G(y)$ jsou buď disjunktní, nebo identické. To je vidět z následujícího. Máme-li $t \in G(x) \cap G(y)$ a $z \in G(x)$, pak existují ρ, σ a $\tau \in G$, že $\rho(x) = t = \sigma(y)$ a $z = \tau(x)$. Můžeme tedy psát

$$z = \tau(x) = \tau\rho^{-1}(t) = \tau\rho^{-1}\sigma(y) \in G(y).$$

Čili $G(x) = G(y)$. Tedy množina $\Lambda = \{G(x) : x \in S \setminus P\}$ je rozkladem množiny $S \setminus P$.

Nyní použijeme axiom výběru, abychom z každé množiny v Λ mohli vybrat jeden prvek, jejího reprezentanta. Axiom výběru říká, že existuje funkce $\mathcal{F}$, která každé množině $A \in \Lambda$ přiřadí právě jeden prvek $\mathcal{F}(A) \in A$. Nechť

$$C := \{\mathcal{F}(A) : A \in \Lambda\}.$$

Je okamžitě vidět, že množina C má následující vlastnosti:

$$C \subset S \backslash P, \tag{3.2}$$

$$c_1 \neq c_2 \in C \Rightarrow G(c_1) \cap G(c_2) = \emptyset, \tag{3.3}$$

$$x \in S \backslash P \Rightarrow \exists c \in C : x \in G(c). \tag{3.4}$$

Nyní definujme $S_j = G_j(C) = \{\rho(c) : \rho \in G_j, c \in C\}$ pro $j = 1, 2, 3$. Jelikož pro $x \in S \backslash P$ platí $G(x) \subset S \backslash P$, vidíme, že $S_j \subset S \backslash P$ pro všechna j. Ze skutečnosti, že $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ a z vlastnosti (3.4) vyplývá, že $S \backslash P = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Dále platí, že pokud $j \neq i \in \{1, 2, 3\}$, pak $S_j \cap S_i = \emptyset$. V opačném případě totiž existuje $x \in S_j \cap S_i$ a můžeme psát $x = \rho(c_1) = \sigma(c_2)$ pro nějaké $c_1, c_2 \in C, \rho \in G_j, \sigma \in G_i$. Z implikace (3.3) potom vyplývá, že $c_1 = c_2 = c$, a tedy $\sigma^{-1}\rho(c) = c$. Ovšem $c \notin P$, a tedy $\sigma^{-1}\rho = e$ a $\rho = \sigma$, což je ve sporu s $G_j \cap G_i = \emptyset$. Tím jsme dokázali, že (S_1, S_2, S_3, P) je rozklad S.

Z definice množin G_1, G_2, G_3 vyplývá následující:

$$S_1 = \{\rho(c) : \rho \in G_1, c \in C\} = \{a\tau(c) : \tau \in G_2 \cup G_3, c \in C\} = a(S_2 \cup S_3),$$

$$bS_1 = \{b\rho(c) : \rho \in G_1, c \in C\} = \{\tau(c) : \tau \in G_2, c \in C\} = S_2,$$

$$b^2 S_1 = \left\{b^2\rho(c) : \rho \in G_1, c \in C\right\} = \{\tau(c) : \tau \in G_3, c \in C\} = S_3,$$

čímž jsme Lemma dokázali. $\square$

Tvrzení 3. Nechť S, S' a S'' jsou disjunktní sféry o poloměru 1. Potom

$$S \sim S' \cup S''.$$

Důkaz. Dle Lemmatu 1 můžeme najít takový rozklad S (resp. S' a S'') (S_1, S_2, S_3, P) (resp. (S_1', S_2', S_3', P') a $(S_1'', S_2'', S_3'', P'')$), že každé dvě z množin S_1, S_2, S_3, S_1', S_2', S_3', S_1'', S_2'' a S_3'' jsou ekvivalentní a $S_1 \sim S_2 \cup S_3$. Z toho vyplývá, že $S_1 \sim S_1' \cup S_1''$, $S_2 \sim S_2' \cup S_2''$, $S_3 \sim S_3' \cup S_3''$, a tedy

$$(S \backslash P) \sim (S' \backslash P') \cup (S'' \backslash P''). \tag{3.5}$$

Abychom se zbavili množiny P, budeme postupovat následovně. Zvolme p takové, že p i $-p$ patří do $S \backslash P$. Všimněme si, že množina všech rotací ρ kolem osy $O_p = \{pt : t \in \mathbb{R}\}$ takových, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in P\, \forall y \in P : \ \rho^n x \neq y$$

je neprázdná, protože její doplněk je spočetný a všech rotací kolem osy O_p je nespočetně mnoho. Vezměme tedy nějaké takové ρ. Je zřejmé, že množiny $P, \rho P, \ldots, \rho^n P, \ldots$ jsou po dvou disjunktní a označíme-li U jejich sjednocení, platí $\rho U = U \backslash P$, tedy $U \cong U \backslash P$. Odtud plyne, že $U \cup (S \backslash U) \sim (U \backslash P) \cup (S \backslash U)$, a tedy $S \sim (S \backslash P)$ (analogicky pro S' a S'') a z toho a z (3.5) plyne dokazované tvrzení. $\square$

Lemma 2. *Nechť T, T' a T'' jsou disjunktní uzavřené koule o poloměru jedna. Potom $T \sim T' \cup T''$.*

Důkaz. Nechť S (resp. S', resp. S'') je sféra o poloměru jedna a stejném středu jako T (resp. T', resp. T''). Tvrzení 3 nám říká, že existují rozklady $(S_1, \ldots, S_{m+n})$, $(S'_1, \ldots, S'_m)$, $(S''_1, \ldots, S''_n)$ sfér S, S' a S'' takové, že

$$S_1 \sim S'_1, \ldots, S_m \sim S'_m, S_{m+1} \sim S''_1, \ldots, S_{m+n} \sim S''_n.$$

Množiny S_i nyní můžeme nahradit množinami $\bigcup_{0<t\leq 1} tS_i$ (analogicky pro S'_i a S''_i) a psát

$$T \backslash \{a\} \sim (T' \backslash \{a'\}) \cup (T'' \backslash \{a''\}),$$

kde a (resp. a', resp. a'') je střed koule T (resp. T', resp. T'').

Je jasné, že $T \backslash \{a\} \sim T \backslash \{x\}$ pro každé $x \in S$ a stejně jako v důkazu Tvrzení 3 se dá ukázat, že $S \backslash \{x\} \sim S$, čímž jsme lemma dokázali. $\square$

Důkaz Věty o Banach-Tarského paradoxu. Indukcí lze ukázat, že sjednocení n disjunktních jednotkových koulí je ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu s jednou jednotkovou koulí pro každé $n \geq 1$ a výsledek Lemmatu 2 lze zobecnit na koule s libovolným kladným poloměrem, pomocí stejnolehlosti.

Nechť X je omezená podmnožina $\mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem. Jelikož X má neprázdný vnitřek, existuje uzavřená koule X' o nějakém poloměru $r > 0$ taková, že $X' \subset X$. Protože je množina X omezená, je možno ji rozložit na konečný počet částí, řekněme n, takových, že každá tato část je obsažena v nějaké kouli o poloměru r.

Označme Z sjednocení n disjunktních uzavřených koulí o poloměru r. Z definice čísla n vyplývá, že X je ekvivalentní vzhledem ke konečnému rozkladu jisté části $Z' \subset Z$. Na druhé straně, Lemma 2 zobecněné na n koulí o poloměru r říká, že $X' \sim Z$. Díky 3. vlastnosti ve Větě 1 dostáváme $X \sim Z$, a z toho plyne, že $X \sim X'$.

Mějme tedy dvě omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdnými vnitřky X a Y. Pak X a Y obsahují koule X' a Y' téhož poloměru $r > 0$ a z $X \sim X'$ a $Y \sim Y'$ plyne $X \sim Y$. Tím je paradox dokázán. $\square$

Nyní, když už jsme zkonstruovali Banach-Tarského paradox je otázkou, jak tento paradox interpretovat. Na první pohled je zřejmé, že toto tvrzení neplatí v reálném světě kolem nás. To je způsobeno tím, že svět kolem nás není totožný s abstraktním světem matematiky. Například reálná kulečníková koule se skládá z určitého konečného počtu atomů nebo molekul, zatímco abstraktní koule v trojrozměrném prostoru se skládá z nekonečného množství prvků množiny $\mathbb{R}^3$. Banach-Tarského paradox tedy není možné prakticky využít, protože reálný svět jednoduše nesplňuje předpoklady, které Věta o Banach-Tarského paradoxu vyžaduje.

3.2 Banach-Tarského paradox v $\mathbb{R}^n$

Nyní se podíváme, jak je to s platností Věty o Banach-Tarského paradoxu v $\mathbb{R}^n$ pro $n \neq 3$. Využijeme toho, že již známe řešení pro $n = 3$ a pokusíme se ho vhodně rozšířit i na dimenze vyšší. Následující tvrzení a jeho důkaz je převzat z [10, str. 53, Theorem 5.1].

Tvrzení 4. Nechť $n \geq 3$ a X a Y jsou omezené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ s neprázdným vnitřkem. Potom $X \sim Y$.

Důkaz. Očividně nám stačí dokázat tvrzení analogické Tvrzení 3, tedy, že pokud máme tři disjunktní n-rozměrné koule B, B', B'', tak platí $B \sim B' \cup B''$. Pak stačí postupovat jako v případě $n = 3$. Důkaz provedeme indukcí.

Případ $n = 3$ je jasný. Nechť tvrzení platí pro $n = m$. Mějme tedy $(S_1^m, \ldots, S_k^m, S_{k+1}^m, \ldots, S_{k+l}^m)$ rozklad sféry S^m a rotace $\rho_i, \sigma_j \in SO(n)$ $(i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots l)$, takové, že $(\rho_1 S_1^m, \ldots, \rho_k S_k^m)$ a $(\sigma_1 S_{k+1}^m, \ldots, \sigma_l S_{k+l}^m)$ jsou rozklady S^m.

Množinu $S^{m+1} \setminus \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\}$ rozložíme následovně: do množiny S_i^{m+1}, $i = 1, \ldots, k + l$ dáme bod $(x_1, \ldots, x_n, z) \in S^{m+1} \setminus \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\}$, právě když $(x_1, \dots, x_n)/|(x_1, \dots, x_n)| \in S_i^m$. Abychom získali patřičné rotace, rozšíříme stávající rotace ρ_i následovně:

$$\rho_i' = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \rho_i & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(analogicky pro σ_j).

Máme tedy rozklad množiny $S^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ a k němu patřičné rotace. Je vidět, že $(\rho_1' S_1^{m+1}, \dots, \rho_k' S_k^{m+1})$ a $(\sigma_1' S_{k+1}^{m+1}, \dots, \sigma_l' S_{k+l}^{m+1})$ jsou rozklady $S^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$.

Nyní se stačí zbavit množiny $\{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$. Ovšem spočetnou množinu můžeme snadno odstranit jako v Tvrzení 3. Tím je důkaz hotov. $\square$

V $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ Věta o Banach-Tarského paradoxu neplatí. Zde si podrobně ukážeme, proč tomu tak je v $\mathbb{R}$ a v kapitole 5 se podíváme na případ s $\mathbb{R}^2$. Důkaz je převzat z [6]. Nejdříve několik definic.

Definice 7. Nechť G je grupa a X je množina. Potom *levou akcí* (dále jen akcí) grupy G na X je funkce z $G \times X$ do X,

$$(g, x) \mapsto g \cdot x,$$

která má následující dvě vlastnosti:

- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, pro všechna $g, h \in G$ a $x \in X$,
- $1 \cdot x = x$, pro všechna $x \in X$, kde 1 je jednotka grupy G.

Pokud existuje akce grupy G na X, budeme říkat, že *G má akci* na X. Z vlastností grupy a akce okamžitě vyplývá, že pro každé $g \in G$ je funkce, která x přiřadí $g \cdot x$, bijekce. Tuto funkci budeme značit g, aniž by mohlo dojít k nedorozumění, zda jde o funkci, nebo prvek grupy.

Množiny $A, B \subset X$ jsou *G-ekvivalentní*, pokud existuje $g \in G$, že $g(A) = B$. Toto budeme značit $A \cong_G B$. Množiny $A, B \subset X$ jsou *G-ekvivalentní vůči konečnému rozkladu*, pokud existuje $(A_1, \dots, A_k)$ (resp. $(B_1, \dots, B_k)$) rozklad množiny A (resp. B), že $A_i \cong_G B_i$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. Toto budeme značit $A \sim_G B$. Množina $A \subset X$ je *G-paradoxní*, pokud existuje takový rozklad (A_1, A_2) množiny A, že $A \sim_G A_1 \sim_G A_2$.

Poznámka 4. *Tvrzení 3 tedy říká, že sféra je $SO(3)$-paradoxní.*

Definice 8. Řekneme, že grupa G je *exponenciálně omezená*, pokud ke každému $r \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ a $g_1, \ldots, g_r \in G$ existuje n_0, že pro všechna $n > n_0$ platí, že počet slov délky nejvýše n vytvořených z $g_1, \ldots, g_r$ je maximálně $(1+\epsilon)^n$.

Následující tvrzení a jeho důkaz je převzat z [3, str. 240-242].

Tvrzení 5. Každá izometrie $\mathbb{R}^n$ je tvaru $g(x) = ax + b$, kde a je ortogonální matice řádu n a b je vektor v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. To, že zobrazení g tvaru $g(x) = ax + b$ je izometrie jsme již dokázali v Tvrzení 1.

Nechť tedy g je izometrie na $\mathbb{R}^n$. Každému bodu $g(x)$ přiřadím bod $f(x) = g(x) - g(0)$. Tím získám nové zobrazení f, které zobrazuje počátek na počátek a je izometrické, právě když g je izometrické. Zobrazení f je izometrické, právě když pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n}(f_j(x) - f_j(y))^2. \tag{3.6}$$

Pro $y = 0$ dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)^2. \tag{3.7}$$

Po umocnění a s použitím rovnosti (3.7) dostáváme ze vztahu (3.6), že nutná a postačující podmínka pro izometričnost f je

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) f_j(y) \tag{3.8}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Nechť $e^{(k)}$ je prvek $\mathbb{R}^n$, jehož k-tá složka je rovna jedné a ostatní jsou nulové. Z rovnosti (3.8) dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(e^{(k)}) f_j(e^{(l)}) = \delta_{k,l}, \tag{3.9}$$

kde $\delta_{k,l} = 1$ pro $k = l$ a $\delta_{k,l} = 0$ jinak. Nechť F je matice s koeficienty $F_{i,j} = f(e^{(j)})_i$. Rovnost (3.9) říká, že $FF^T = e$, z čehož plyne, že F je ortogonální. Z

$FF^T = e$ vyplývá, že $F^T F = e$. Pokud tuto rovnost rozepíšeme, dostaneme vztah

$$\sum_{k=1}^{n} f_j(e^{(k)}) f_l(e^{(k)}) = \delta_{j,l}. \tag{3.10}$$

Do rovnosti (3.8) nyní dosaďme $y = e^{(k)}$. Dostaneme

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) f_j(e^{(k)}), \tag{3.11}$$

pro $k = 1, \ldots, n$. Pokud k-tou rovnici (3.11) vynásobím číslem $f(e^{(k)})_l$ a sečteme podle k, získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{n} f_l(e^{(k)}) x_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_j(x) f_j(e^{(k)}) f_l(e^{(k)}).$$

Dále použijme rovnost (3.10) a dostaneme

$$f_l(x) = \sum_{k=1}^{n} f_l(e^{(k)}) x_k,$$

pro $l = 1, \ldots, n$. To ovšem znamená, že $f(x) = Fx$ a

$$g(x) = Fx + a,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Pozorování 2. Množina izometrií na $\mathbb{R}^n$ tvoří grupu. Tuto grupu budeme značit G_n.

Tvrzení 6. G_1 je exponenciálně omezená.

Důkaz. Nechť $\epsilon > 0$, $g_1, \ldots, g_r \in G_1$, $g_i(x) = a_i x + b_i$ a $g = g_{i_1} \ldots g_{i_n}$. Potom $g(x) = ax + b$, kde $a = \pm 1$ a $b = \pm k_1 b_1 \pm \ldots \pm k_r b_r$ ($k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \leq n$). Tedy různých b může být maximálně $(2n+1)^r$ a množství různých izometrií tvaru $g_{i_1} \ldots g_{i_n}$ je maximálně $2(2n+1)^r < (1+\epsilon)^n$ pro dostatečně velké n. □

Tvrzení 7. Jestliže exponenciálně omezená grupa G má akci na X, potom X neobsahuje neprázdné G-paradoxní podmnožiny.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy $\emptyset \neq A \subset X$ je G-paradoxní. Potom můžeme psát $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, $A \sim_G B \sim_G C$. Potom existuje rozklad $(B_1, \dots B_r)$ (resp. $(C_1, \dots C_s)$) množiny B (resp. C), rozklady $(A_1, \dots A_r)$ a $(A'_1, \dots A'_s)$ množiny A a prvky $f_i, g_j \in G$ takové, že $f_i(A_i) = B_i$ a $g_j(A'_j) = C_j$ $(i = 1, \dots r, j = 1, \dots s)$.

Položme $F_1(x) = f_i(x)$, kdykoliv $x \in A_i, i = 1, \dots, r$. Položme $F_2(x) = g_j(x)$, kdykoliv $x \in A'_j, j = 1, \dots, s$. Tvrdím, že obrazy pevného $x \in X$ při zobrazení $F_{i_1}F_{i_2} \dots F_{i_n}$, pro různé posloupnosti indexů $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$ jsou různé. Budu postupovat indukcí. Případ $n = 1$ je jasný, protože $F_1(A) = B$ a $F_2(A) = C$. Nechť tedy tvrzení platí pro $n = m$. Pro všechna $x \in X$ a všechny uspořádané n-tice $(i_2, \dots, i_{m+1}) \neq (j_2, \dots, j_{m+1})$ tedy platí

$$F_{i_2} \dots F_{i_{m+1}}(x) \neq F_{j_2} \dots F_{j_{m+1}}(x).$$

Nyní na obě strany nerovnosti aplikujeme F_1 (resp. F_2). Jelikož F_1 (resp. F_2) je bijekce, nerovnost stále platí. Pokud na jednu stranu nerovnosti aplikujeme F_1 a na druhou F_2, nerovnost stále platí díky argumentu pro $n = 1$. Tedy každý z těchto obrazů je tvaru $h_1 \dots h_n(x)$, kde $h_1, \dots h_n$ jsou prvky množiny $\{f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s\}$. Tedy slova délky nejvýše n z písmen f_i, g_j tvoří alespoň 2^n prvků z G, což je ve sporu s tím, že G je exponenciálně omezená. $\square$

Důsledek 1. $\mathbb{R}$ neobsahuje žádné neprázdné G_1-paradoxní podmnožiny.

Důkaz. Stačí aplikovat předchozí tvrzení na množinu $\mathbb{R}$ a grupu G_1. $\square$

3.3 Spočetný paradoxní rozklad $\mathbb{R}$

Tato část je převzata z [9] a ukážeme si v ní, že ačkoliv v $\mathbb{R}$ neplatí Věta o Banach-Tarského paradoxu, tak platí její slabší verze. Banach-Tarského paradox oslabíme tím, že použijeme místo konečného rozkladu rozklad spočetný.

Definice 9. Nechť X je množina a G je grupa, která má akci na X. Řekneme, že $A, B \subset X$ jsou *G-ekvivalentní vůči spočetnému rozkladu*, pokud existuje spočetný rozklad $(A_1, A_{2,\dots})$ (resp. $(B_1, B_{2,\dots})$) množiny A (resp. B), že $A_i \cong_G B_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Toto budeme značit $A \approx_G B$

Poznámka 5. *Snadno se nahlédne, že Věta 1 se dá rozšířit na případ množin G-ekvivalentních vůči spočetnému rozkladu.*

Pozorování 3. Množina $\mathbb{R}^n$ s operací sčítání tvoří pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ grupu, kterou budeme značit $(\mathbb{R}^n, +)$.

Lemma 3. *Každé dvě spočetné nekonečné podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou $(\mathbb{R}, +)$-ekvivalentní vůči spočetnému rozkladu.*

Důkaz. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou spočetně nekonečné množiny. Potom existuje bijekce f z A na $\mathbb{N}$ a g z B na $\mathbb{N}$. Je jasné, že $(f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots)$ je rozklad A, $(g^{-1}(1), g^{-1}(2), \dots)$ je rozklad B a $g^{-1}(1) - f^{-1}(1), g^{-1}(2) - f^{-1}(2), \dots$ jsou prvky $(\mathbb{R}, +)$, pro které platí

$$g^{-1}(n) - f^{-1}(n) + f^{-1}(n) = g^{-1}(n)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 3. *Interval $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ jsou $(\mathbb{R}, +)$-ekvivalentní vůči spočetnému rozkladu.*

Důkaz. Díky Větě 1 rozšířené na případ množin G-ekvivalentní vůči spočetnému rozkladu nám bude stačit dokázat, že existuje podmnožina $[0,1]$ G_1-ekvivalentní vůči spočetnému rozkladu s $\mathbb{R}$.

Uvažujme množinu $\Lambda := \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$. Axiom výběru říká, že existuje funkce $\mathcal{F}$, která každé množině z Λ přiřadí jeden její prvek. Nechť

$$E := \{\mathcal{F}(A) : A \in \Lambda\}.$$

Pokud $x \in E \setminus [0, 1/2]$, tak určitě existuje $q \in \mathbb{Q}$, že $x - q \in [0, 1/2]$ a platí

$$x + \mathbb{Q} = x - q + \mathbb{Q}.$$

Díky tomu můžeme předpokládat, že $E \subset [0, 1/2]$.

Množina $\{x + \mathbb{Q} : x \in E\}$ je tedy rozklad $\mathbb{R}$. Lemma 3 říká, že $\mathbb{Q} \cap [0, 1/2] \approx_{(\mathbb{R},+)} \mathbb{Q}$. Z toho vyplývá, že

$$E + (\mathbb{Q} \cap [0, 1/2]) \approx_{(\mathbb{R},+)} E + \mathbb{Q},$$

kde $E + \mathbb{Q} := \{a + b : a \in E, b \in \mathbb{Q}\}$. Protože levá strana rovnosti je podmnožinou $[0,1]$ a pravá strana rovnosti je $\mathbb{R}$, je věta dokázaná. $\square$

Důsledek 2. Množina $[0,1]^2$ a $[0,1] \times \mathbb{R}$ jsou $(\mathbb{R}^2, +)$-ekvivalentní vůči spočetnému rozkladu.

Důkaz. Díky Větě 3 víme, že existují rozklady $(A_1, A_2, \ldots)$ množiny $[0,1]$ a $(B_1, B_2, \ldots)$ množiny $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ a $r_1, r_2, \ldots \in (\mathbb{R}, +)$, že $r_n + A_n = B_n$. Nechť $A'_n := \{(x,y) : x \in A_n, y \in [0,1]\}$, $B'_n := \{(x,y) : x \in B_n, y \in [0,1]\}$ a $r'_n := (r_n, 0)$. Potom $(A'_1, A'_2, \ldots)$ je rozklad množiny $[0,1]^2$, $(B'_1, B'_2, \ldots)$ je rozklad množiny $[0,1] \times \mathbb{R}$, $r'_n \in (\mathbb{R}^2, +)$ a $r'_n + A'_n = B'_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Kapitola 4

Paradoxní rozklady a míry

Nyní si ukážeme důsledky některých předchozích vět a tvrzení na existenci, nebo spíše neexistenci některých druhů měr. Jak si ukážeme, z Banach-Tarského paradoxu vyplývá, že pro všechna $n \geq 3$ není možné přiřadit každé podmnožině $\mathbb{R}^n$ její velikost (tzv. Lebesgueovu míru). Nejdříve si ale řekneme, co to vůbec míra je.

Definice 10. Nechť X je množina a Σ je množina podmnožin X splňující:

- $X \in \Sigma$,
- $A \in \Sigma \Rightarrow X \backslash A \in \Sigma$,
- $A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$,

Pak Σ je *σ-algebra* (sigma algebra) na množině X.

Definice 11. Nechť Σ je σ-algebra na množině X. Funkce μ ze Σ do $[0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud splňuje následující podmínky:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $E_i \in \Sigma$ je spočetně mnoho po dvou disjunktních množin, pak

$$\mu(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} \mu(E_i)$$

.

Nejčastěji používaná míra v prostorech $\mathbb{R}^n$ je (n-dimenzionální) Lebesgueova míra, kterou značíme λ_n. Množiny, které patří do σ-algebry Lebesgueovy míry se nazývají měřitelné (případně λ_n-měřitelné). Nastává otázka, zda jsou všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$ měřitelné a pokud ne, zda se dá Lebesgueova míra rozšířit na všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$ tak, aby si zachovala některé své důležité vlastnosti.

Tvrzení 8. Lebesgueova míra je izometricky invariatní. Tj. pro f izometrické zobrazení a E měřitelnou množinu platí $\lambda_n(E) = \lambda_n(f(E))$.

Důkaz. Viz [7, str. 50-51, Theorem 2.20] □

Tvrzení 9. Lebesgueova míra λ_n nelze rozšířit na všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$ tak, aby toto rozšíření bylo σ-aditivní a izometricky invariantní.

Důkaz. Pro různá n je důkaz téměř stejný, dokážeme tedy tvrzení pouze pro $n = 1$. Pro spor nechť existuje míra μ, která je σ-aditivním a izometricky invariatním rozšířením λ. Věta 3 říká, že existují rozklady $(A_1, A_2, \ldots)$ množiny $[0, 1]$ a $(B_1, B_2, \ldots)$ množiny $\mathbb{R}$ a $r_1, r_2, \ldots \in (\mathbb{R}, +)$, že $r_n + A_n = B_n$. Je patrné, že funkce $r_n(x) = r_n + x$ je izometrie. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup B_i) &= \sum \mu(B_i) = \sum \mu(r_i + A_i) = \sum \mu(A_i)\\ &= \mu(\bigcup A_i) = \lambda([0, 1]) = 1\end{aligned}$$

a máme spor. Pro $n = 2$ užijeme místo Věty 3 Důsledek 2 a pro $n \geq 3$ Větu o Banach-Tarského paradoxu. □

Tvrzení 10. Je-li $n \geq 3$, pak Lebesgueova míra λ_n nelze rozšířit na všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$ tak, aby toto rozšíření bylo konečně aditivní a izometricky invariantní.

Důkaz. Důkaz je analogický předchozímu důkazu, kde místo Věty 3 použijeme Banach-Tarského paradox. Přesněji ekvivalenci vůči konečnému rozkladu dvou disjunktních koulí o různém poloměru. □

Tvrzení 11. Pro $n = 1$ a $n = 2$ můžeme Lebesgueovu míru rozšířit na všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$ se zachováním konečné aditivity a izometrické invariantnosti.

Důkaz. Viz [1]. □

Poznámka 6. *Rozšíření Lebesgueovy míry z Tvrzení 11 se nazývá Banachova míra. Nejde o míru v pravém slova smyslu, protože míra musí být σ-aditivní, což Banachova míra není. Je však σ-aditivní na λ_n-měřitelných množinách.*

Následující důsledek a jeho důkaz je převzat z [5].

Důsledek 3. Nechť $n = 1$, nebo $n = 2$. Pokud měřitelné množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní vůči konečnému rozkladu, pak $\lambda_n(A) = \lambda_n(B)$.

Důkaz. Pro $n = 1$ a $n = 2$ je důkaz identický. Nechť tedy existuje rozklad $(A_1, \ldots, A_k)$ množiny A a rozklad $(B_1, \ldots, B_k)$ množiny B, takový, že $A_i \cong B_i$, pro všechna $i = 1, \ldots, k$ a μ je banachova míra, pak můžeme psát

$$\lambda(A) = \mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \mu(B) = \lambda(B).$$

□

Poznámka 7. *Důsledek 3 ukazuje, že zobecnění Věty o Banach-Tarského paradoxu neplatí v $\mathbb{R}$, ani v $\mathbb{R}^2$.*

Kapitola 5

Příklady jiných paradoxních rozkladů

V této části si ukážeme několik "paradoxů" a paradoxních rozkladů, které nevyužívají axiom výběru. Jistě si všimnete, že tyto rozklady jsou v jistém smyslu jiné než ty, se kterými jsme se setkali v předchozí kapitole. Tato odlišnost je způsobena právě tím, že k jejich konstrukci nebyl použit axiom výběru. Navíc všechny množiny, se kterými budeme pracovat, jsou měřitelné a množiny, které jsou ekvivalentní, mají nutně i stejnou míru. Následující tvrzení jsou převzata z [5].

Tvrzení 12. Interval $[0,1]$ je G_1-ekvivalentní vůči konečnému rozkladu s intervalem $(0,1]$.

Důkaz. Nechť $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x a $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$. Mějme nějaké iracionální číslo $\alpha \in (0,1)$. Definujme $A = \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}^+\}$. Označme $A_1 = A \cap [0, 1-\alpha)\,, A_2 = A \cap [1-\alpha, 1]\,, B_1 = B \cap [\alpha, 1]\,, B_2 = B \cap [0, \alpha)$.

Nyní stačí ověřit, že $B_1 = A_1 + \alpha$ a $B_2 = A_2 + \alpha - 1$. Ověřím pouze první rovnost, druhá se ověří obdobně. Mějme $x \in B_1$, tedy existuje nějaké $p \in \mathbb{N}^+$, že

$$x = \{p\alpha\} = \{(n-1)\alpha + \alpha\} = \{(n-1)\alpha\} + \alpha,$$

kde $\{(n-1)\alpha\} \in [0, 1-\alpha)$. A jelikož $\{n\alpha\}$ se nikdy nemůže rovnat 1, protože α je iracionální, je jasné, že $x \in A_1 + \alpha$. Obrácená implikace se dokáže analogicky.

Nechť $A_3 = B_3 = [0,1] \setminus A = (0,1] \setminus B$. Získali jsme rozklad (A_1, A_2, A_3) (resp. (B_1, B_2, B_3)) intervalu $[0,1]$ (resp. $(0,1]$) takový, že $A_i \cong_{G_1} B_i, i = 1,2,3$. Tedy $[0,1] \sim_{G_1} (0,1]$. $\square$

K dalšímu příkladu budeme nejdříve potřebovat znát několik nových pojmů.

Definice 12. Řekneme, že $x \in \mathbb{C}$ je *algebraické číslo*, pokud je kořenem nějakého netriviálního polynomu s celočíselnými koeficienty. Řekneme, že $x \in \mathbb{C}$ je *transcendentální číslo*, jestliže není kořenem žádného netriviálního polynomu s algebraickými koeficienty.

Poznámka 8. *Obvykle se transcendentální čísla definují jakožto prvky $\mathbb{C}$, které nejsou algebraické. Obě definice jsou ekvivalentní, ale důkaz této ekvivalence je nad rámec této práce.*

Tvrzení 13. Existují neprázdné množiny $A, A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$ takové, že $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ a $A \cong_{G_2} A_1 \cong_{G_2} A_2$.

Důkaz. Nechť P značí množinu polynomů s nezápornými celočíselnými koeficienty včetně identicky nulového polynomu. Nechť c je transcendentální komplexní číslo a $|c| = 1$. Definujme $A = \{p(c) : p \in P\}$, $A_1 = A + 1$ a $A_2 = cA$. Zřejmě platí, že $A = A_1 \cup A_2$ a $A \cong_{G_2} A_1 \cong_{G_2} A_2$. Zbývá tedy ukázat, že $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy existuje nějaký prvek $x = q(c) + 1 = cr(c)$, kde q a r jsou vhodné polynomy z P. Tedy můžeme psát $q(c) + 1 - cr(c) = 0$, ale c je transcendentální číslo, tedy polynom $q(x) + 1 - xr(x)$ musí být identicky nulový. Pokud do tohoto polynomu dosadíme 0, získáme $q(0) + 1 \equiv 0$. To je ovšem ve sporu s nezáporností koeficientů polynomu q.

Tím je důkaz hotov. $\square$

Tvrzení 14. Existuje neprázdná a omezená G_2-paradoxní podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Důkaz. Nechť $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ a $\epsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$, kde i je imaginární jednotka. Potom pro každé $z \in D$ platí, že alespoň jedno z čísel $z + 1, z + \epsilon, z + \epsilon^2$ je prvkem D. Mějme například nějaké $z \in D$ a nechť ϕ značí úhel mezi vektorem reprezentujícím z a kladnou částí reálné osy. Pokud $\phi \in [0, 2\pi/3]$, pak $z + \epsilon^2 \in D$, pokud $\phi \in [2\pi/3, 4\pi/3]$, pak $z + 1 \in D$ a pokud $\phi \in [4\pi/3, 2\pi]$, pak $z + \epsilon \in D$. Tedy existuje funkce $f : D \to D$ taková, že $f(z) \in \{z + 1, z + \epsilon, z + \epsilon^2\}$ pro všechna $z \in D$.

Nechť c je transcendentální číslo a $|c| = 1$. Nechť A značí nejmenší množinu, která splňuje tyto podmínky: $0 \in A$ a pokud $z \in A$, pak i $cz \in A$ a $f(cz) \in A$. Očividně je A spočetná a každé $z \in A$ je polynomem c s koeficienty $0, 1, \epsilon$, nebo ϵ^2. Také platí, že $A \subset D$ a tedy A je omezená.

Zadefinujme si množiny $A_1 = cA$, $A_2 = \{z \in cA : f(z) = z + 1\}$, $A_3 = \{z \in cA : f(z) = z + \epsilon\}$ a $A_4 = \{z \in cA : f(z) = z + \epsilon^2\}$. Očividně $A_1 = cA \cong_{G_2} A$ a $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = cA \cong_{G_2} A$. Mějme nějaké $z \in A$, pak z definice A můžeme psát $z = cy$, nebo $z = f(cy)$ pro nějaké vhodné $y \in A$. Platí tedy, že $A = A_1 \cup (A_2 + 1) \cup (A_3 + \epsilon) \cup (A_4 + \epsilon^2)$, neboť pokud $z = cy$, tak $z \in A_1$, $z = f(cy) = cy + 1$, tak $z \in (A_2 + 1)$, atd.

Také platí, že množiny $A_1, A_2 + 1, A_3 + \epsilon, A_4 + \epsilon^2$ jsou po dvou disjunktní. To dokážeme následovně. Nechť x je prvkem nějakých dvou množin $A_1, A_2 + 1, A_3 + \epsilon, A_4 + \epsilon^2$, potom x můžeme zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=0}^{n} \mu_k c^k = \sum_{l=0}^{m} \nu_l c^l,$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$, $\mu_k, \nu_l \in \{0, 1, \epsilon, \epsilon^2\}$ a $\mu_0 \neq \nu_0$. Potom můžeme psát

$$x = \sum_{k=0}^{n} \mu_k c^k - \sum_{l=0}^{m} \nu_l c^l = 0,$$

ale c je transcendentální číslo, a tudíž se musí jednat o identicky nulový polynom. Dosaďme tedy do něj 0 a dostaneme, že $\mu_0 = \nu_0$, což je spor. Tím je důkaz hotov. □

Literatura

[1] Banach S.: *Sur la problème de la measure*, Fund. Math. **4** (1923), 7–33.

[2] Dubins L.E.: *Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski*, Gazette des mathématiciens **12** (1979), 71–76; český překlad: Kolář I.: *Hausdorffův-Banachův-Tarského paradox*, PMFS **26** (1981), 151–155.

[3] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1976.

[4] Jarník V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1984.

[5] Laczkovich M.: *Paradoxical Decompositions: A Survey of Recent Results*, First European Congress of Mathematics, vol. II, Paris, 1992, 159–184.

[6] Laczkovich M.: *Equidecomposability of sets, invariant measures, and paradoxes*, School on Measure Theory and Real Analysis (Grado, 1991); Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **23** (1991), no. 1, 145–176 (1993).

[7] Rudin W.: *Real and Complex Analysis*, B & Jo Enterprise Pte Ltd., Singapore, 1986.

[8] Stromberg K.: *The Banach-Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly **86** (1979), 151–161.

[9] Tao T.: *Terence Tao's blog* [online], 245B, notes 2: Amenability, the ping-pong lemma, and the Banach-Tarski paradox (optional), 2009 [cit. 2010-04-20], dostupné z WWW: <http://terrytao.wordpress.com/2009/01/08/245b-notes-2-amenability-the-ping-pong-lemma-and-the-banach-tarski-paradox-optional/>.

[10] Wagon S.: *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.