Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Szilárd Kálosi

Kellyho kritérium

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2011

Na tomto místě bych chtěl poděkovat za pomoc při psaní bakalářské práce vedoucímu Ing. Markovi Omelkovi, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Název práce: Kellyho kritérium

Autor: Szilárd Kálosi

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Abstrakt: V předložené práci se věnujeme Kellyho strategii, která je jednoduchým návodem, jak zvolit sázený podíl kapitálu při hraní hazardních her, které mají kladnou střední hodnotu. V první části práce seznámíme čtenáře s matematickým zdůvodněním, prozkoumáme vývoj kapitálu po n pokusech v závislosti na volbě sázeného podílu, dlouhodobou míru výnosnosti a asymptotické vlastnosti růstu kapitálu. V druhé části se pokusíme zobecnit Kellyho kritérium z první části pro některé situace. Pro ilustraci vlastností Kellyho kritéria uvedeme v poslední části práce příklady pro jednoduchou hru i zobecněné situace a aplikujeme na ně získané znalosti z předcházejících částí.

Klíčová slova: Kellyho kritérium, sázený podíl, dlouhodobá míra výnosnosti

Title: The Kelly Criterion

Author: Szilárd Kálosi

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Ing. Marek Omelka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract:

The present work is devoted to the Kelly criterion, which is a simple method for choosing the amount of the bet for gambles with a positive expected value. In the first part of the work we introduce the mathematical explanation of the criterion, examine the capital after n trials as a function of the bet, the long-run rate of return and asymptotical properties of the capital growth. In the second part we attempt to generalize the Kelly criterion from the first part for some other situations. Examples for a simple game and generalized situations illustrating the properties of the Kelly criterion and results from previous parts compose the last part of the work.

Keywords: The Kelly criterion, fixed fraction betting, long-run rate of return

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá Kellyho metodou určení sázeného podílu kapitálu při hraní hazardních her. Práce čerpá zejména z článku [Thorp (1998)] a knihy [Tijms (2007)].

Při hraní hazardních her, které mají kladnou střední hodnotu, je největší výzvou nalézt vhodnou metodu sázení tak, abychom dosáhli největší možný výnos a přitom minimalizovali pravděpodobnost bankrotu. Problém je analogický u investování. Ukazuje se, že výnos a jeho pravděpodobnost můžeme ovlivnit zvolením podílu sázeného kapitálu.

Jedna z možností řešení je zvolit sázený podíl takovým způsobem, aby pravděpodobnost ztráty v N pokusech byla minimální, kde N je předem zvolené číslo. Další možnost je maximalizování pravděpodobnosti dosažení předem voleného cíle c za N pokusů, nebo maximalizování očekávaného výnosu sázení za N pokusů bez ohledu na maximalizování jeho pravděpodobnosti.

Jiná cesta k určení výše sázené částky využívá užitkové funkce, které jsou často uplatňovány v ekonomii. Definici užitkové funkce lze najít např. v článku [Norstad (2010)]. Užitková funkce znázorňuje závislost mezi užitkem, tj. subjektivní hodnotou, a konečnou hodnotou z investice. Užitkové funkce jsou typicky definovanépro nezáporná reálná čísla s hodnotami na rozšířené reálné ose a jsou neklesající, t.jvíce peněz má alespoň takový užitek jako méně peněz. Investor, který má averzi k riziku, používá konkávní užitkovou funkci, t.j. výnosy dosažené na začátku investování mají větší užitek, než výnosy dosažené později. Investor, který má k riziku neutrální postoj, používá lineární užitkovou funkci, pro něho každý výnos má stejný užitek. Riskující investor používá konvexní užitkovou funkci, t.j. dosáhnutí většího výnosu má pro něho větší subjektivní hodnotu. Často používané užitkové funkce jsou například $U(x) = x^a$, kde $0 < a < \infty$, nebo $U(x) = \log(x)$.

Kellyho princíp pro užitkovou funkci používá logaritmus a maximalizuje střední hodnotu logaritmu výhry jako funkci sázeného podílu.

Kapitola 1 je věnována zavedením a základním vlastnostem Kellyho kritéria. V kapitole 2 se zabýváme odvozením Kellyho kritéria pro některé obecnější případy. Kapitola 3 slouží k ilustraci získaných znalostí na vybrané příklady.

1. Základní vlastnosti Kellyho kritéria

1.1 Odvození Kellyho kritéria

Předpokládejme, že hrajeme takovou hru, kdy v každém pokuse buď vyhrajeme a dostaneme f násobek sázené částky, kde $f > 1$, anebo ztrácíme sázenou částku. Nechť p je pravděpodobnost výhry, která splňuje $0 < p < 1$ a $pf > 1$ (aby sázení bylo z našeho hlediska výhodné). Důležitým předpokladem je nezávislost jednotlivých pokusů. Nechť x_0 je náš počáteční kapitál a definujme náhodné veličiny X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ následovně

$$X_n = \text{velikost našeho kapitálu po n pokusech.}$$

Dále předpokládejme, že náš kapitál je nekonečně dělitelný a v každém pokusu sázíme α-násobek našeho kapitálu (takové sázení se nazývá sázení stejného podílu). Pro odvození Kellyho kritéria je důležité vědět, jak vlastně vypadají náhodné veličiny X_n. Proto zaveďme pomocné náhodné veličiny R_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ které definujeme následujícím způsobem

$$R_k := \begin{cases} f, & \text{pokud jsme v } k\text{-tém pokusu vyhráli,} \\ 0, & \text{pokud jsme v } k\text{-tém pokusu prohráli.} \end{cases}$$

Potom pro náhodné veličiny X_n platí následující vztah

$$X_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha + \alpha R_k)\,,\ \forall\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

V matematice je růst častokrát vyjádřen pomocí exponenciální funkce, proto bychom také potřebovali zavést vhodný aparát pro měření růstu zmíněným způsobem. Proto si definujme míru exponenciálního růstu G_n vztahem

$$X_n = x_0 e^{nG_n}. \tag{1.1}$$

Míra exponenciálního růstu je tedy náhodná veličina, kterou můžeme vyjádřit pomocí náhodných veličin R_k. Ze vztahu (1.1) vidíme, že G_n splňuje vztah

$$G_n = \frac{1}{n} \log\left(\frac{X_n}{x_0}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $X_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha + \alpha R_k)$ a logaritmus převádí součin čísel na součet, dostáváme

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \alpha + \alpha R_k\right).$$

Víme, že náhodné veličiny R_k jsou nezávislé stejně rozdělené, tedy jsou také náhodné veličiny

$$\log\left(1 - \alpha + \alpha R_k\right),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

nezávislé a stejně rozdělené. Ze silného zákona velkých čísel pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, který lze najít např. v knize [Lachout (2004)], dostáváme, že jejich průměr konverguje skoro jistě k střední hodnotě $\mathrm{E}\log(1-\alpha+\alpha R_1)$. Tedy pro G_n platí

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \mathrm{E}\log(1-\alpha+\alpha R_1) = p\log(1-\alpha+f\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha) \ \text{s.j.} \tag{1.2}$$

Střední hodnotu náhodné veličiny $\log(1-\alpha+\alpha R_1)$ označme

$$g(\alpha) := \mathrm{E}\log(1-\alpha+\alpha R_1).$$

Ze vztahu (1.2) je zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} G_n = g(\alpha)$ s.j.. Funkce $g(\alpha)$ se nazývá dlouhodobá míra exponenciálního růstu, jejím argumentem α je sázený podíl kapitálu.

Ze vztahu $\mathrm{E}\log(X_n) = n\mathrm{E}\log(1-\alpha+\alpha R_1)+\log(x_0)$ je zřejmé, že pro maximimalizaci střední hodnoty logaritmu našeho kapitálu potřebujeme nalézt globální maximum dlouhodobé míry exponenciálního růstu na intervalu $(0,1)$. Při hledání lokálního maxima použijeme znalosti z reálné analýzy. Nejprve zderivujeme funkci $g(\alpha)$, dostáváme

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{p(f-1)}{1-\alpha+f\alpha} - \frac{1-p}{1-\alpha} = \\ &= \frac{pf-pf\alpha-p+p\alpha+p-p\alpha+pf\alpha-1+\alpha-f\alpha}{(1-\alpha+f\alpha)(1-\alpha)} = \\ &= \frac{\alpha(1-f)+pf-1}{(1-\alpha+f\alpha)(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Derivace $g'(\alpha)$ je na intervalu $(0,1)$ nulová pouze v bodě

$$\alpha^* = \frac{pf-1}{f-1}, \tag{1.3}$$

tudíž v bodě α^* je lokální extrém. Zderivujme funkci $g(\alpha)$ jeste jednou. Pak platí

$$g''(\alpha) = -\frac{p(f-1)^2}{(1-\alpha+f\alpha)^2} - \frac{1-p}{(1-\alpha)^2} < 0 \ \forall\ \alpha \in (0,1).$$

Dostáváme, že funkce $g(\alpha)$ je na intervalu $(0,1)$ konkávní, tudíž bod α^* je skutečně globálním maximem na intervalu $(0,1)$.

Číslo α^* se nazývá **Kellyho kritérium**.

1.2 Vlastnosti dlouhodobé míry exponenciálního růstu

Abychom si byli jisti, jak se chová dlouhodobá míra exponenciálního růstu při různých sázených podílech α, potřebujeme ji dobře vyšetřit. Nejprve potřebujeme informace o monotonii, nulových bodech v intervalu $(0,1)$ a znaménku funkčních hodnot.

Z derivace funkce $g(\alpha)$ dostáváme

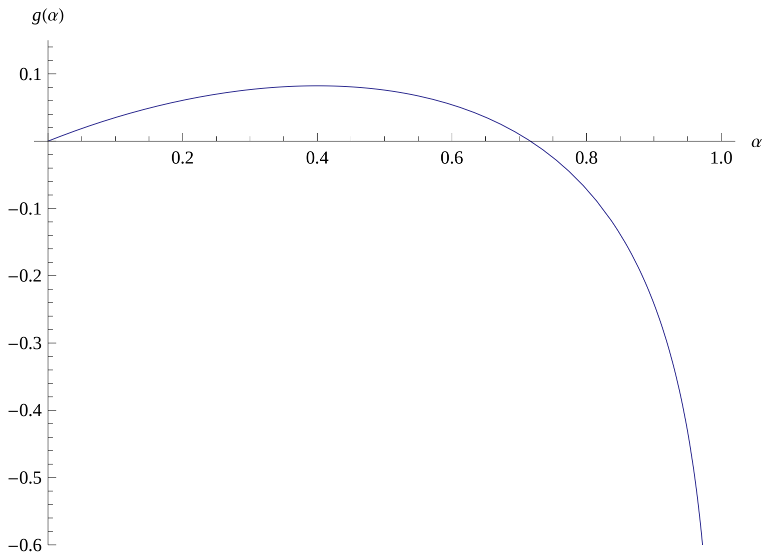
$$g'(\alpha) = \frac{\alpha(1-f) + pf - 1}{(1 - \alpha + f\alpha)(1-\alpha)} > 0 \ \forall \ \alpha \in (0, \alpha^*),$$

neboť pro každé $\alpha \in (0, \alpha^*)$ platí $(1-\alpha) > 0$, $1 + \alpha(f-1) > 0$ a $pf - 1 + \alpha(1-f) > 0$. Tedy $g(\alpha)$ je rostoucí na intervalu $(0, \alpha^*)$. Také dostáváme, že

$$g'(\alpha) = \frac{\alpha(1-f) + pf - 1}{(1 - \alpha + f\alpha)(1-\alpha)} < 0 \ \forall \ \alpha \in (\alpha^*, 1),$$

neboť pro každé $\alpha \in (\alpha^*, 1)$ platí $(1-\alpha) > 0$, $1 + \alpha(f-1) > 0$ a $pf - 1 + \alpha(1-f) < 0$. Tedy $g(\alpha)$ je klesající na intervalu $(\alpha^*, 1)$.

Vzhledem k tomu, že $g(0) = 0$ a $g(\alpha)$ je rostoucí na intervalu $(0, \alpha^*)$, $g(\alpha)$ na $(0, \alpha^*)$ nemá žádný nulový bod. Vzhledem k tomu, že $g(\alpha)$ má v bodě α^* maximum, $\lim\limits_{\alpha \to 1-} g(\alpha) = -\infty$ a $g(\alpha)$ je klesající na $(\alpha^*, 1)$, existuje právě jeden nulový bod α_0 v intervalu $(0, 1)$. Potom z existence jediného nulového bodu pro $g(\alpha)$ platí, že $g(\alpha) > 0$ na intervalu $(0, \alpha_0)$ a $g(\alpha) < 0$ na intervalu $(\alpha_0, 1)$.



Obrázek 1.1: Funkce $g(\alpha)$ s parametry $p = 0.7$ a $f = 2$

Na obrázku 1.1 je ilustrována funkce $g(\alpha)$ s parametry $p = 0.7$ a $f = 2$. Pro takové parametry dostáváme $\alpha^* = 0.4$ a $\alpha_0 \approx 0.7165$.

Definujme posloupnost náhodných veličin $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde náhodná veličina S_n udává počet výher v prvních n krocích. Zřejmě veličinu X_n můžeme vyjádřit pomocí S_n následujícím způsobem

$$X_n = x_0 (1 - \alpha + f\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n - S_n}.$$

Pak pro míru exponenciálního růstu platí

$$G_n = \frac{1}{n} \log\left(\frac{X_n}{x_0}\right) = \frac{1}{n} \log\left((1 - \alpha + f\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n-S_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\log\left((1 - \alpha + f\alpha)^{S_n}\right) + \log\left((1-\alpha)^{n-S_n}\right)\right) =$$

$$= \frac{S_n}{n} \log (1 - \alpha + f\alpha) + \frac{n - S_n}{n} \log (1 - \alpha) \tag{1.4}$$

V následující větě popisujeme souvislost mezi dlouhodobou mírou exponenciálního růstu $g(\alpha)$ a vývojem kapitálu.

Věta 1. *Pro náhodnou veličinu X_n platí*

(i) Je-li $g(\alpha) > 0$, potom $\lim_{n \to \infty} X_n = \infty$ skoro jistě,

(ii) Je-li $g(\alpha) < 0$, potom $\lim_{n \to \infty} X_n = 0$ skoro jistě,

(iii) Je-li $g(\alpha) = 0$, potom $\limsup_{n \to \infty} X_n = \infty$ skoro jistě a $\liminf_{n \to \infty} X_n = 0$ skoro jistě.

Důkaz. (i) Z definice míry exponenciálního růstu víme, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \log \left(\frac{X_n}{x_0} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{X_n}{x_0} \right) = \lim_{n \to \infty} G_n = g(\alpha) > 0. \text{ s.j.}$$

Tudíž existuje nějaká množina $A \subset \Omega, \mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 0$, že $\forall\, \omega \in A$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\omega) \in \mathbb{N}\colon\ \forall\, n \geq n_0(\omega) \left| \log \left(\frac{X_n(\omega)}{x_0} \right)^{\frac{1}{n}} - g(\alpha) \right| < \varepsilon.$$

Odtud pro každé $\omega \in A$, $n \geq n_0(\omega)$ dostáváme, že

$$\log \left(\frac{X_n(\omega)}{x_0} \right)^{\frac{1}{n}} > -\varepsilon + g(\alpha) > 0$$

pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Pak máme

$$\forall\, \omega \in A\ \forall\, n \geq n_0(\omega) : X_n(\omega) \geq e^{n(g(\alpha) - \varepsilon)} x_0.$$

Vzhledem k tomu, že $x_0 > 0$ a $\lim_{n \to \infty} e^{n(g(\alpha)-\varepsilon)} x_0 = \infty$ pro X_n dostáváme

$$\lim_{n \to \infty} X_n = \infty \text{ s.j.}$$

(ii) Obdobně pro X_n platí

$$\lim_{n \to \infty} \log \left(\frac{X_n}{x_0} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{X_n}{x_0} \right) = \lim_{n \to \infty} G_n = g(\alpha) < 0.$$

Tedy existuje nějaká množina $B \subset \Omega, \mathrm{P}(\Omega \setminus B) = 0$, že $\forall\, \omega \in B$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\omega) \in \mathbb{N}\colon\ \forall\, n \geq n_0(\omega) \left| \log \left(\frac{X_n(\omega)}{x_0} \right)^{\frac{1}{n}} - g(\alpha) \right| < \varepsilon.$$

Odtud pro každé $\omega \in B$, $n \geq n_0(\omega)$ dostáváme, že

$$\log \left(\frac{X_n(\omega)}{x_0} \right)^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + g(\alpha) < 0$$

pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Pak máme

$$\forall\, \omega \in A\ \forall\, n \geq n_0(\omega) : X_n(\omega) \leq e^{n(g(\alpha) + \varepsilon)} x_0.$$

Vzhledem k tomu, že $x_0 > 0$, $\lim_{n \to \infty} e^{n(g(\alpha)+\varepsilon)} x_0 = 0$ a $X_n \geq 0$ s.j. dostáváme

$$\lim_{n \to \infty} X_n = 0 \text{ s.j.}$$

(iii) Jelikož náhodná veličina S_n má binomické rozdělení $\mathrm{Bi}\,(n, p)$, víme, že je součtem nezávislých náhodných veličin P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, které mají alternativní rozdělení s parametrem p. Pak ze zákona iterovaného logaritmu, který lze najít např. v knize [Lachout (2004)], dostáváme, že pro S_n platí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2p(1-p)n\log(\log n)}} = 1 \text{ s.j.}$$

To pak znamená, že existuje množina $C \subset \Omega$, $\mathrm{P}\,(\Omega \setminus C) = 0$ taková, že

$$\forall\ \omega \in C\ \ \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n\,(\omega) - np}{\sqrt{2p(1-p)n\log(\log n)}} = 1.$$

Tedy pro každé $\omega \in C$ existuje vybraná posloupnost $\{S_{n_k}\,(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{S_n\,(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}\,(\omega) - n_k p}{\sqrt{2p(1-p)n_k\log(\log n_k)}} = 1,$$

tudíž $\forall\ \omega \in C$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_{k_0}\,(\omega) \in \mathbb{N}\colon\ \ \forall\ n_k \geq n_{k_0}\,(\omega)\ \frac{S_{n_k}\,(\omega) - n_k p}{\sqrt{2p(1-p)n_k\log(\log n_k)}} > 1 - \varepsilon.$$

Pak pro každé $\omega \in C$ a pro každé $n_k \geq n_{k_0}\,(\omega)$ máme

$$S_{n_k}\,(\omega) \geq n_k p + (1-\varepsilon)\sqrt{2p(1-p)n_k\log(\log n_k)}.$$

Označme $M_{n_k}\,(\varepsilon) := (1-\varepsilon)\sqrt{2p(1-p)n_k\log(\log n_k)}$. Pak ze vztahu (1.4) pro každé $\omega \in C$ a pro každé $n_k \geq n_{k_0}\,(\omega)$ dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_k}\log\left(\frac{X_{n_k}\,(\omega)}{x_0}\right) &= \frac{S_{n_k}\,(\omega)}{n_k}\log\,(1-\alpha+f\alpha) + \frac{n_k - S_{n_k}\,(\omega)}{n_k}\log\,(1-\alpha) \geq \\ &\geq \frac{n_k p + M_{n_k}\,(\varepsilon)}{n_k}\log\,(1-\alpha+f\alpha) + \frac{n_k\,(1-p) - M_{n_k}\,(\varepsilon)}{n_k}\log\,(1-\alpha) = \\ &= g\,(\alpha) + \frac{M_{n_k}\,(\varepsilon)}{n_k}\log\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{M_{n_k}\,(\varepsilon)}{n_k}\log\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right),\end{aligned}$$

neboli

$$X_{n_k}\,(\omega) \geq x_0\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right)^{M_{n_k}(\varepsilon)}. \tag{1.5}$$

Zřejmě pro posloupnost $\{M_{n_k}\,(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k}\,(\varepsilon) = \infty$ pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že $\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha} > 1$, dostáváme

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right)^{M_{n_k}(\varepsilon)} = \infty$$

pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že $x_0 > 0$, z nerovnosti (1.5) pro každé $\omega \in C$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k}\,(\omega) = \infty.$$

Tedy pro každé $\omega \in C$ jsme našli vybranou posloupnost $\{X_{n_k}(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = \infty.$$

To pak ale znamená, že pro posloupnost $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = \infty.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathrm{P}(C) = 1$, dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty \text{ s.j.}$$

Ze zákona iterovaného logaritmu také dostáváme, že pro S_n platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2p(1-p)n\log(\log n)}} = -1 \text{ s.j.},$$

neboli existuje množina $D \subset \Omega$, $\mathrm{P}(\Omega \setminus D) = 0$ taková, že

$$\forall\ \omega \in D\ \ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega) - np}{\sqrt{2p(1-p)n\log(\log n)}} = -1.$$

Tedy pro každé $\omega \in D$ existuje vybraná posloupnost $\{S_{n_l}(\omega)\}_{l=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{S_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

$$\lim_{l\to\infty} \frac{S_{n_l}(\omega) - n_l p}{\sqrt{2p(1-p)n_l\log(\log n_l)}} = 1,$$

tudíž $\forall\ \omega \in D$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_{l_0}(\omega) \in \mathbb{N}\colon\ \forall\ n_l \geq n_{l_0}(\omega)\ \frac{S_{n_l}(\omega) - n_l p}{\sqrt{2p(1-p)n_l\log(\log n_l)}} < -1 + \varepsilon.$$

Pak pro každé $\omega \in D$ a pro každé $n_l \geq n_{l_0}(\omega)$ máme

$$S_{n_l}(\omega) \leq n_l p + (-1+\varepsilon)\sqrt{2p(1-p)n_l\log(\log n_l)}.$$

Označme $M_{n_l}(\varepsilon) := (-1+\varepsilon)\sqrt{2p(1-p)n_l\log(\log n_l)}$, pak ze vztahu (1.4) pro každé $\omega \in D$ a pro každé $n_l \geq n_{l_0}(\omega)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n_l}\log\left(\frac{X_{n_l}(\omega)}{x_0}\right) &= \frac{S_{n_l}(\omega)}{n_l}\log(1-\alpha+f\alpha) + \frac{n_l - S_{n_l}(\omega)}{n_l}\log(1-\alpha) \leq \\
&\leq \frac{n_l p + M_{n_l}(\varepsilon)}{n_l}\log(1-\alpha+f\alpha) + \frac{n_l(1-p) - M_{n_l}(\varepsilon)}{n_l}\log(1-\alpha) = \\
&= g(\alpha) + \frac{M_{n_l}(\varepsilon)}{n_l}\log\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{M_{n_l}(\varepsilon)}{n_l}\log\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right),
\end{aligned}$$

neboli

$$X_{n_l}(\omega) \leq x_0\left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right)^{M_{n_l}(\varepsilon)}. \tag{1.6}$$

Zřejmě pro posloupnost $\{M_{n_l}(\varepsilon)\}_{l=1}^{\infty}$ platí $\lim_{l\to\infty} M_{n_l}(\varepsilon) = -\infty$ pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že $\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha} > 1$, dostáváme

$$\lim_{l\to\infty} \left(\frac{1-\alpha+f\alpha}{1-\alpha}\right)^{M_{n_l}(\varepsilon)} = 0$$

pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Vzlehdem k tomu, že $x_0 > 0$ a $X_n \geq 0$ s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$, z nerovnosti (1.6) pro každé $\omega \in D$ dostáváme

$$\lim_{l\to\infty} X_{n_l}(\omega) = 0.$$

Tudíž pro každé $\omega \in D$ jsme našli vybranou posloupnost $\{X_{n_l}(\omega)\}_{l=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

$$\lim_{l\to\infty} X_{n_l}(\omega) = 0.$$

To pak ale znamená, že pro posloupnost $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathrm{P}(D) = 1$, dostáváme

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = 0 \text{ s.j.}$$

$\square$

Zjistili jsme, že pokud je sázený podíl α zvolený z intervalu $(\alpha_0, 1)$, pak bankrot je skoro jistý. Je-li sázený podíl α zvolený z intervalu $(0, \alpha_0)$, pak náš kapitál přesáhne jakoukoli mez $K > 0$ po dostatečném počtu pokusů. Je-li sázený podíl přesně α_0, pak náš kapitál bude náhodně oscilovat mezi 0 a ∞.

1.3 Dlouhodobá míra výnosnosti

Informace o míře výnosnosti je důležitým faktorem pro hráče i pro investora. Definujme si náhodnou veličinu Γ_n následovně

$$X_n = (1+\Gamma_n)^n x_0.$$

Veličina Γ_n udává míru výnosnosti po n pokusech. Ze vztahu $X_n = e^{nG_n} x_0$ plyne, že pro Γ_n platí vztah

$$\Gamma_n = e^{G_n} - 1.$$

Z vlastnosi míry exponenciálního růstu a spojitosti exponenciální funkce dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \lim_{n\to\infty} \left(e^{G_n} - 1\right) = e^{g(\alpha)} - 1 =: \gamma \text{ s.j.} \tag{1.7}$$

Odtud máme, že γ udává dlouhodobou míru výnosnosti. Po dosazení $g(\alpha) = p\log(1-\alpha+f\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha)$ do (1.7) dostáváme

$$\gamma = (1-\alpha+f\alpha)^p (1-\alpha)^{1-p} - 1. \tag{1.8}$$

1.4 Porovnání rychlosti růstu kapitálu

Zajímavé je znát, kolik pokusů potřebujeme, aby střední hodnota výhry dosáhla A násobek základního kapitálu x_0. Vzhledem k tomu, že pro náhodnou veličinu platí vztah

$$X_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha + \alpha R_k)\,,$$

kde R_k, $k = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, pro střední hodnotu veličiny X_n dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_n = \mathrm{E}x_0 \prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha + \alpha R_k) = x_0 \left(\mathrm{E}\left(1 - \alpha + \alpha R_1\right)\right)^n = \\ = x_0 \left(p\left(1 - \alpha + f\alpha\right) + (1-p)\left(1-\alpha\right)\right)^n. \end{aligned}$$

Odtud pro počet pokusů máme

$$\mathrm{E}X_n = x_0 \left(p\left(1 - \alpha + f\alpha\right) + (1-p)\left(1-\alpha\right)\right)^n = Ax_0,$$

neboli

$$n = \frac{\log(A)}{\log\left(p\left(1-\alpha+f\alpha\right) + (1-p)\left(1-\alpha\right)\right)} = \frac{\log(A)}{\log\left(1-\alpha+pf\alpha\right)}. \tag{1.9}$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{\log(A)}{\log(1-\alpha+pf\alpha)}$ není nutně celé číslo, pro počet pokusů n platí

$$n = \min\left\{k \in \mathbb{N}\colon k \geq \frac{\log(A)}{\log\left(1-\alpha+pf\alpha\right)}\right\}.$$

V předchozích úvahách jsme zjistili, že míra exponenciálního růstu je součtem nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečným a nenulovým rozptylem, proto se na ni můžeme použít centrální limitní větu, kterou lze najít např. v knize [Lachout (2004)]. Nejprve vypočítejme rozptyl náhodné veličiny $\log\left(1-\alpha+R_1\alpha\right)$. Tedy máme

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left[\log\left(1-\alpha+R_1\alpha\right)\right] = \\ = p\left(\log\left(1-\alpha+f\alpha\right) - g(\alpha)\right)^2 + (1-p)\left(\log\left(1-\alpha\right) - g(\alpha)\right)^2 =: \sigma^2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Z centrální limitní věty pro stejně rozdělené náhodné veličiny dostáváme

$$\frac{nG_n - ng(\alpha)}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} Z,\ Z \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$$

Po rozepsání veličiny G_n máme

$$\frac{\log(X_n) - \left(ng(\alpha) + \log(x_0)\right)}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} Z,\ Z \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$$

Představme si, že na začátku hry zvolíme číslo $0 < q < 1$, které reprezentuje naši představu o jistotě výhry. Chtěli bychom vědět, kolik n_0 pokusů potřebujeme, aby výhra byla alespoň A-krát větší než základní kapitál s pravděpodobností alespoň q, čili

$$n_0 := \min \{n \in \mathbb{N} \colon \mathrm{P}\left(X_n > Ax_0\right) \geq q\}.$$

Nejprve si vypočítejme pravděpodobnost jevu $[X_n \geq Ax_0]$. Jednoduchým výpočtem dostaneme, že

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X_n > Ax_0\right) = \mathrm{P}\left(\log\left(X_n\right) > \log\left(Ax_0\right)\right) = \\ = \mathrm{P}\left(\frac{\log\left(X_n\right) - \left(ng\left(\alpha\right) + \log\left(x_0\right)\right)}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{\log\left(Ax_0\right) - \left(ng\left(\alpha\right) + \log\left(x_0\right)\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \\ = \mathrm{P}\left(\frac{\log\left(X_n\right) - \left(ng\left(\alpha\right) + \log\left(x_0\right)\right)}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{\log\left(A\right) - ng\left(\alpha\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \\ = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\log\left(X_n\right) - \left(ng\left(\alpha\right) + \log\left(x_0\right)\right)}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{\log\left(A\right) - ng\left(\alpha\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right)\end{aligned}$$

Pravděpodobnost jevu $\left[\frac{\log(X_n) - (ng(\alpha) + \log(x_0))}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{\log(A) - ng(\alpha)}{\sqrt{n}\sigma}\right]$ můžeme aproximovat pomocí distribuční funkce $\mathrm{N}\left(0,1\right)$ rozdělení. Nechť Φ značí distribuční funkci $\mathrm{N}\left(0,1\right)$ rozdělení. Pak máme, že

$$\mathrm{P}\left(\frac{\log\left(X_n\right) - \left(ng\left(\alpha\right) + \log\left(x_0\right)\right)}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{\log\left(A\right) - ng\left(\alpha\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{\log\left(A\right) - ng\left(\alpha\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

Vzhledem k tomu, že pro distribuční funkci $\mathrm{N}\left(0,1\right)$ rozdělení platí vztah $1 - \Phi\left(x\right) = \Phi\left(-x\right)$, pro pravděpodobnost jevu $[X_n \geq AX_0]$ dostáváme aproximaci

$$\mathrm{P}\left(X_n > Ax_0\right) \approx \Phi\left(\frac{ng\left(\alpha\right) - \log\left(A\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

Tedy

$$\Phi\left(\frac{ng\left(\alpha\right) - \log\left(A\right)}{\sqrt{n}\sigma}\right) \geq q.$$

Nechť u_q značí q-kvantil $\mathrm{N}\left(0,1\right)$ rozdělení, pak vzhledem k tomu, že distribuční funkce $\mathrm{N}\left(0,1\right)$ rozdělení je rostoucí, dostáváme podmínku

$$\frac{ng\left(\alpha\right) - \log\left(A\right)}{\sqrt{n}\sigma} \geq u_q. \tag{1.11}$$

Položme $m := \sqrt{n}$ a vyřešme rovnici

$$g\left(\alpha\right) m^2 - u_q \sigma m - \log\left(A\right) = 0. \tag{1.12}$$

Řešení rovnice (1.12) jsou

$$m_{1,2} = \frac{u_q\sigma \pm \sqrt{u_q^2\sigma^2 + 4g\left(\alpha\right)\log\left(A\right)}}{2g\left(\alpha\right)}.$$

Vzhledem k tomu, že $\sqrt{n} > 0$ a $m_2 = \frac{u_q\sigma - \sqrt{u_q^2\sigma^2 + 4g(\alpha)\log(A)}}{2g(\alpha)} < 0$ máme, že nerovnice (1.11) je splněna, pokud $n \geq m_1^2$. Pro m_1^2 platí

$$m_1^2 = \left(\frac{u_q\sigma + \sqrt{u_q^2\sigma^2 + 4g(\alpha)\log(A)}}{2g(\alpha)}\right)^2 =$$

$$= \frac{u_q^2\sigma^2 + 2u_q\sigma\sqrt{u_q^2\sigma^2 + 4g(\alpha)\log(A)} + u_q^2\sigma^2 + 4g(\alpha)\log(A)}{4g(\alpha)^2} =$$

$$= \frac{u_q^2\sigma^2 + 2g(\alpha)\log(A) + \sqrt{u_q^4\sigma^4 + 4g(\alpha)u_q^2\sigma^2\log(A)}}{2g(\alpha)^2}.$$

Pak pro n_0 dostáváme vztah

$$n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geq \frac{u_q^2\sigma^2 + 2g(\alpha)\log(A) + \sqrt{u_q^4\sigma^4 + 4g(\alpha)u_q^2\sigma^2\log(A)}}{2g(\alpha)^2}\right\}. \tag{1.13}$$

Na závěr ještě uveďme jednu důležitou vlastnost Kellyho kritéria.

Věta 2. *Nechť X_n^* je náhodná veličina, která udává velikost kapitálu po n pokusech, v kterých jsme sázeli podle Kellyho kritéria, a X_n je náhodná veličina, která udává velikost kapitálu po n pokusech, v kterých jsme sázeli jiný α-násobek kapitálu. Pak platí*

$$\frac{X_n^*}{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ s.j.}.$$

Důkaz. Pro náhodnou veličinu $\frac{X_n^*}{X_n}$ platí

$$\frac{X_n^*}{X_n} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\alpha^* + \alpha^* R_k}{1-\alpha+\alpha R_k}\right).$$

Po logaritmování dostáváme, že $\log\left(\frac{X_n^*}{X_n}\right)$ je součtem nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\log\left(\frac{1-\alpha^*+\alpha^* R_1}{1-\alpha+\alpha R_1}\right)$. Ze silného zákona velkých čísel pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny pro veličinu $\log\left(\frac{X_n^*}{X_n}\right)$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{X_n^*}{X_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{E}\log\left(\frac{1-\alpha^*+\alpha^* R_1}{1-\alpha+\alpha R_1}\right) = g(\alpha^*) - g(\alpha) \text{ s.j.}.$$

Tudíž existuje množina $A \subset \Omega$, $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 0$, že $\forall\ \omega \in A$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\omega) \in \mathbb{N} \colon \forall\ n \geq n_0(\omega) \left|\log\left(\frac{X_n^*(\omega)}{X_n(\omega)}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(g(\alpha^*) - g(\alpha)\right)\right| < \varepsilon.$$

Odtud pro každé $\omega \in A$, $n \geq n_0(\omega)$ dostáváme

$$\log\left(\frac{X_n^*(\omega)}{X_n(\omega)}\right)^{\frac{1}{n}} > -\varepsilon + g(\alpha^*) - g(\alpha) > 0$$

pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že $g\left(\alpha^*\right) - g\left(\alpha\right) > 0$, neboť v bodě α^* má funkce $g\left(\alpha\right)$ jediné maximum na itervalu $(0,1)$, takové $\varepsilon > 0$ existuje. Pak máme

$$\forall\ \omega \in A\ \forall\ n \geq n_0\left(\omega\right) : \frac{X_n^*\left(\omega\right)}{X_n\left(\omega\right)} \geq e^{n\left(g\left(\alpha^*\right) - g\left(\alpha\right) - \varepsilon\right)}.$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\lim_{n\to\infty} e^{n\left(g\left(\alpha^*\right) - g\left(\alpha\right) - \varepsilon\right)} = \infty,$$

pro náhodnou veličinu $\frac{X_n^*}{X_n}$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n^*}{X_n} = \infty \text{ s.j.}.$$

$\square$

2. Zobecnění Kellyho kritéria

2.1 Měnící se pravděpodobnost výhry

Představme si, že hrajeme takovou hru, ve které se v každém pokusu mění pravděpodobnost výhry a také výše výhry. Předpokládejme, že na základě minulých pozorování jsme si zjistili tyto pravděpodobnosti. Uspořádejme je do posloupnosti $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde $0 < p_i < 1$ značí pravděpodobnost výhry v i-tém pokusu.

Věta 3. *Nechť $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde $0 < p_i < 1$, je posloupnost pravděpodobností výhry, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost násobků výhry, t.j. $f_i > 1$ značí násobek výhry v i-tém pokusu a $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost sázených podílů. Definujme posloupnost $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ nezávislých náhodných veličin následovně*

$$R_k := \begin{cases} f_k, & \textit{pokud jsme v } k\textit{-tém pokusu vyhráli} \\ 0, & \textit{pokud jsme v } k\textit{-tém pokusu prohráli.} \end{cases}$$

Potom pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$ je $\mathrm{E} \log (X_n)$ maximální pokud

$$\alpha_i = \frac{p_i f_i - 1}{f_i - 1}, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ máme

$$\mathrm{E} \log \left(\frac{X_1}{x_0} \right) = \mathrm{E} \log (1 - \alpha_1 + \alpha_1 R_1) = p_1 \log (1 - \alpha_1 + f_1 \alpha_1) + (1 - p_1) \log (1 - \alpha_1).$$

Zderivujme výraz nahoře podle α_1, pak dostaneme

$$\frac{p_1 (f_1 - 1)}{1 - \alpha_1 + f_1 \alpha_1} - \frac{1 - p_1}{1 - \alpha_1} =$$
$$= \frac{p_1 f_1 - p_1 f_1 \alpha_1 - p_1 + p_1 \alpha_1 + p_1 - p_1 \alpha_1 + p_1 f_1 \alpha_1 + \alpha_1 - f_1 \alpha_1}{(1 - \alpha_1 + f_1 \alpha_1)(1 - \alpha_1)} =$$
$$= \frac{\alpha_1 (1 - f_1) + p_1 f_1 - 1}{(1 - \alpha_1 + f_1 \alpha_1)(1 - \alpha_1)}.$$

Tedy derivace je na intervalu $(0, 1)$ nulová pouze v bodě

$$\alpha_1 = \frac{p_1 f_1 - 1}{f_1 - 1}.$$

Po druhé derivaci zjistíme, že

$$\frac{p_1 (1 - f_1)}{(1 - \alpha_1 + f_1 \alpha_1)^2} - \frac{1 - p}{(1 - \alpha_1)^2} < 0 \ \forall \ \alpha_1 \in (0, 1),$$

to pak ale znamená, že pro $n = 1$ věta platí. Nechť věta platí pro $n > 1$, chceme dokázat platnost pro $n + 1$. Podobnými úvahami dostaneme, že

$$\mathrm{E} \log \left(\frac{X_{n+1}}{X_n} \right) = \mathrm{E} \log (1 - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} R_{n+1}) =$$
$$= p_{n+1} log (1 - \alpha_1 + f_{n+1} \alpha_{n+1}) + (1 - p_{n+1}) \log (1 - \alpha_{n+1})$$

je maximální v bodě

$$\alpha_{n+1} = \frac{p_{n+1}f_{n+1} - 1}{f_{n+1} - 1}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\log(X_{n+1}) = \log(\frac{X_{n+1}}{X_n})\log(X_n)$, veličiny $\log(\frac{X_{n+1}}{X_n})$ a $\log(X_n)$ jsou nezávislé, tudíž $\mathrm{E}\log(X_{n+1}) = \mathrm{E}\log(\frac{X_{n+1}}{X_n})\mathrm{E}\log(X_n)$, a podle indukčního předpokladu je $\mathrm{E}\log(X_n)$ maximalizován pro $\alpha_i = \frac{p_i f_i - 1}{f_i - 1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dostáváme platnost věty. □

2.2 Bezriziková úroková míra

Mějme situaci, kde α násobek našeho kapitálu X_0 investujeme do rizikové investice. Nechť riziko investice je q, tedy pravděpodobnost, že investice se vyplatí je $p = 1 - q$ a nechť výnos investice je f násobek investované částky. Dále předpokládejme, že banka nabízí bezrizikovou úrokovou míru r, co využijeme pro zbylou část počátečního kapitálu. Aby investování mělo smysl, předpokládejme, že platí $pf > 1 + r$.

Podobně jako v první kapitole náhodná veličina X_n reprezentuje velikost kapitálu po n obdobích a nezávislé náhodné veličiny R_k pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ jsou definované stejně. Zřejmě pro X_n platí vztah

$$X_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} \left((1-\alpha)(1+r) + \alpha R_k\right).$$

Pak pro míru exponenciálního růstu G_n, která je definovaná stejně jako v první kapitole, platí

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \mathrm{E}\log\left((1-\alpha)(1+r) + \alpha R_1\right) =$$
$$= p\log\left((1-\alpha)(1+r) + f\alpha\right) + (1-p)\log\left((1-\alpha)(1+r)\right) \text{ s.j.}$$

Tedy dlouhodobá míra exponenciálního růstu $g(\alpha)$ má tvar

$$g(\alpha) = p\log\left((1-\alpha)(1+r) + f\alpha\right) + (1-p)\log\left((1-\alpha)(1+r)\right). \tag{2.1}$$

Zderivujme výraz podle α, tedy dostáváme

$$g'(\alpha) = \frac{p(f-(1+r))}{(1-\alpha)(1+r) + f\alpha} - \frac{1-p}{1-\alpha} =$$
$$= \frac{pf - (1+r) - (f-(1+r))\alpha}{((1-\alpha)(1+r) + f\alpha)(1-\alpha)}.$$

Derivace je na intervalu $(0, 1)$ nulová pouze v bodě

$$\alpha^* = \frac{pf - (1+r)}{f - (1+r)}. \tag{2.2}$$

Pro druhou derivaci funkce $g(\alpha)$ platí

$$g''(\alpha) = -\frac{p(f-(1+r))^2}{((1-\alpha)(1+r) + f\alpha)^2} - \frac{1-p}{(1-\alpha)^2} < 0 \ \forall\ \alpha \in (0,1).$$

Pro bod $\alpha^* = \frac{pf-(1+r)}{f-(1+r)}$ platí, že je lokálním maximem na intervalu $(0, 1)$, neboť funkce $g(\alpha)$ je konkávní na intervalu $(0, 1)$. Tedy α^* je modifikované Kellyho kritérium pro takovou situaci.

Vypočítejme ještě dlouhodobou míru výnosnosti. V kapitole 1.3 jsme zjistili, že pro dlouhodobou míru výnosnosti platí vztah

$$\gamma = e^{g(\alpha)} - 1.$$

V našem případě tedy máme, že dlouhodobá míra výnosnosti je dána vztahem

$$\gamma = ((1-\alpha)(1+r) + f\alpha)^p \left((1-\alpha)(1+r)\right)^{1-p} - 1. \tag{2.3}$$

2.3 Více možných výsledků

Předpokládejme, že naše hra nekončí jenom výhrou nebo prohrou, ale existuje více možností, kterými může končit. Nechť $\{f_i\}_{i=1}^n$, $f_i \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, n$ je posloupnost násobitelů sázené částky a $\{p_i\}_{i=1}^n$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ je posloupnost pravděpodobností násobitelu f_i. Dále předpokládejme, že v každém pokusu sázíme α násobek kapitálu a hra je výhodná pro nás, tj. $\sum_{i=1}^n p_i f_i > 1$.

Nechť náhodné veličiny X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ udávají velikost našeho kapitálu po n pokusech. Definujme nezávislé náhodné veličiny R_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ následovně

$$R_k := \begin{cases} f_1, & \text{s pravděpodobností } p_1, \\ f_2, & \text{s pravděpodobností } p_1, \\ \vdots & \\ f_n, & \text{s pravděpodobností } p_n, \end{cases}$$

Podobně jako v první kapitole pro X_n platí vztah

$$X_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha + \alpha R_k).$$

Tedy také pro míru exponenciálního růstu G_n, která je definována stejně, platí

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \mathrm{E} \log (1 - \alpha + \alpha R_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log (1 - \alpha + f_i\alpha) \ \text{s.j.}$$

Pak dlouhodobá míra exponenciálního růstu má tvar

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log (1 - \alpha + f_i\alpha).$$

Zderivujme výraz podle α, pak dostáváme

$$g'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f_i - 1}{1 - \alpha + f_i\alpha}. \tag{2.4}$$

Pak Kellyho kritérium dostáváme jako řešení rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f_i - 1}{1 - \alpha + f_i\alpha} = 0 \tag{2.5}$$

na intervalu $(0,1)$, pokud existuje. Pokud řešení rovnice (2.5) je větší, nebo rovno 1, pak Kellyho kritérium položíme rovno 1, neboť nelze sázet víc než celý kapitál. Je-li alespoň jeden z násobitelů f_i je nulová, pak existuje řešení rovnice (2.5) v intervalu $(0,1)$, neboť $g'(\alpha)$ je spojitá na intervalu $[0,1)$, $g'(0) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i - 1 > 0$ a $\lim_{\alpha \to 1-} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f_i - 1}{1-\alpha+f_i\alpha} = -\infty$. Pro druhou derivaci funkce $g(\alpha)$ platí

$$g''(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{(f_i - 1)^2}{(1-\alpha+f_i\alpha)^2} < 0 \;\forall\; \alpha \in (0,1)\,,$$

tedy bod $\alpha^* := \left\{\alpha \in (0,1) : \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f_i-1}{1-\alpha+f_i\alpha} = 0\right\}$, pokud existuje, je jednoznačně určen a je bodem lokálního maxima, neboť funkce $g(\alpha)$ je konkávní na intervalu $(0,1)$.

Vypočítejme také dlouhodobou míru výnosnosti. Z kapitoly 1.3 víme, že pro dlouhodobou míru výnosnosti platí vztah

$$\gamma = e^{g(\alpha)} - 1.$$

Pak po dosazení $g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log(1-\alpha+f_i\alpha)$ máme, že pro dlouhodobou míru výnosnosti pro takovou situaci platí vztah

$$\gamma = \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha+f_i\alpha)^{p_i} - 1. \tag{2.6}$$

2.3.1 Částečná ztráta

Speciálním případem více možných výsledků je částečná ztráta, kde máme dva výsledky hry, buď vyhrajeme f_1 násobek sázené částky s pravděpodobností $0 < p < 1$ nebo f_2 násobek sázené částky s pravděpodobností $1-p$, kde $f_1 > 1$ a $1 > f_2 > 0$. Tedy náhodné veličiny R_k, $k = 1,2,3,\ldots$ pro takovou hru vypadají následovně

$$R_k := \begin{cases} f_1, & \text{s pravděpodobností } p, \\ f_2, & \text{s pravděpodobností } 1-p. \end{cases} \tag{2.7}$$

Pak dlouhodobá míra exponenciálního růstu má tvar

$$g(\alpha) = p\log(1-\alpha+f_1\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha+f_2\alpha)\,. \tag{2.8}$$

Dosaďme příslušné hodnoty do vzorce (2.4), pak derivace funkce $g(\alpha)$ má tvar

$$g'(\alpha) = \frac{p(f_1-1)}{1-\alpha+f_1\alpha} + \frac{(1-p)(f_2-1)}{1-\alpha+f_2\alpha} =$$
$$\frac{(f_1-1)(f_2-1)\alpha + pf_1 + (1-p)f_2 - 1}{(1-\alpha+f_1\alpha)(1-\alpha+f_2\alpha)}.$$

Derivace je na intervalu $(0,1)$ nulová pouze v bodě

$$\alpha^* = \frac{pf_1 + (1-p)f_2 - 1}{(f_1-1)(1-f_2)}.$$

Z kapitoly 2.3 víme, že α^* je lokálním maximem funkce $g(\alpha)$ na intervalu $(0,1)$. Vzhledem k tomu, že existují trojice (p, f_1, f_2) pro které je $\frac{pf_1+(1-p)f_2-1}{(f_1-1)(1-f_2)} > 1$, pro Kellyho kritérium pro takovou hru obecně platí vztah

$$\alpha^* = \min\left(\frac{pf_1 + (1-p)\,f_2 - 1}{(f_1 - 1)\,(1 - f_2)}, 1\right). \tag{2.9}$$

Po dosazení příslušných hodnot do vzorce (2.6) dostaneme dlouhodobou míru výnosnosti, tedy máme

$$\gamma = (1 - \alpha + f_1\alpha)^p\,(1 - \alpha + f_2\alpha)^{1-p} - 1. \tag{2.10}$$

3. Příklady

3.1 Výhodná karetní hra

Předpokládejme, že hrajeme následující hru. Máme jednu sadu dvouhlavých hracích karet, v níž je celkem 32 karet, 4 barvy po 8 kartách, ze které vytáhneme po sobě 4 karty. Vytáhnutou kartu vracíme hned po tahu. Vyhrajeme, pokud mezi vytáhnutými kartami není žádná červená nebo mezi nimi jsou právě dvě červené karty. Vyhrajeme-li, dostaneme od soupeře sázenou částku, jinak částku ztrácíme. Náš počáteční kapitál je 1000 Kč. Odtud vidíme, že $f = 2$ a $x_0 = 1000$.

Vypočítejme pravděpodobnost naší výhry. Celkem máme 32^4 kombinací vytáhnutých karet, neboť v každém tahu máme 32 možností a táhneme 4 krát. Součet takových kombinací, ve kterých se nevyskytuje žádná červená karta je 24^4. Součet takových kombinací, ve kterých jsou právě dvě červené karty je $\binom{4}{2} \cdot 8^2 \cdot 24^2$, neboť musíme vytáhnout 2 krát červenou kartu, 2 krát jinou kartu a na pořadí vytáhnutých karet nezáleží (proto je tam kombinační číslo). Tedy pravděpodobnost naší výhry je

$$p = \frac{24^4 + \binom{4}{2} 8^2 24^2}{32^4} = \frac{135}{256} \doteq 0{,}527.$$

Vypočítejme velikost sázené části kapitálu. Po dosazení našich f a p do rovnice (1.3) dostaneme, že Kellyho kritérium pro naši hru je rovno

$$\alpha^* = 2p - 1 \doteq 0{,}054,$$

tedy přibližně 5,40% kapitálu. Vypočítejme ještě dlouhodobou míru výnosnosti pro naši hru. Tedy po dosazení do vzorce (1.8) dostaneme, že

$$\gamma \doteq 0{,}0014,$$

tedy dlouhodobá míra výnosnosti je přibližně 0,14%.

Zajímá nás kolik pokusů n_0 potřebujeme, aby střední hodnota výhry dosáhla dvojnásobek základního kapitálu, tedy $A = 2$. Po dosazení příslušných hodnot do vzorce (1.9) dostáváme

$$\frac{\log(2)}{\log(1 - 0{,}054 + 2 \cdot 0{,}527 \cdot 0{,}54)} = 238{,}06,$$

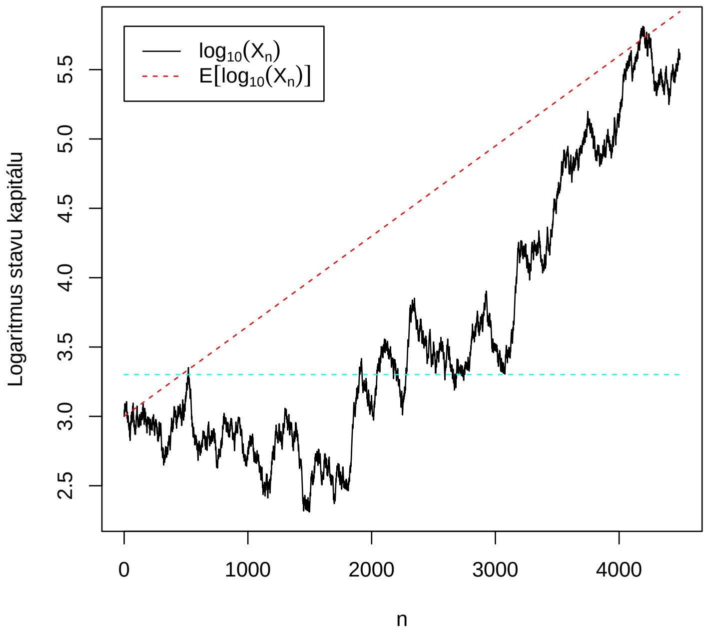
tedy počet pokusů je roven 239.

Vypočítejme ještě kolik pokusů n_0' potřebujeme k tomu, aby výhra se zdvojnásobila s pravděpodobností 0,95. Ze vzorce (1.13) vidíme, že k vypočítání hodnoty n_0' potřebujeme znát hodnotu 0,95-kvantilu $\mathrm{N}(0,1)$ rozdělění, který je uveden v příslušných tabulkách. Tedy máme, že $u_{0,95} = 1,645$. Pak po dosazení příslušných hodnot do vzorce (1.13) dostáváme

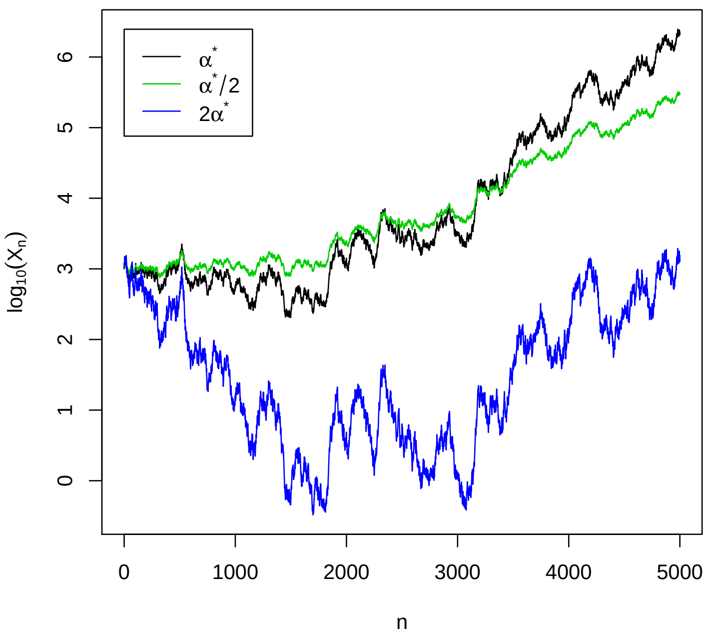
$$\frac{u_q^2\sigma^2 + 2g(\alpha)\log(A) + \sqrt{u_q^4\sigma^4 + 4g(\alpha)\,u_q^2\sigma^2\log(A)}}{2g(\alpha)^2} = 4490{,}8,$$

tedy počet pokusů je roven

$$n_0' = 4491.$$



Obrázek 3.1: Průběh hodnot $\log_{10}(X_n)$ a $\mathrm{E}\log_{10}(X_n)$ při simulaci s počtem pokusů 4491.



Obrázek 3.2: Průběh hodnot $\log_{10}(X_n)$ s různými sázenými podíly kapitálu α při simulaci s počtem pokusů 5000.

Na obrázku 3.1 je znázorněn průběh hodnot $\log_{10}(X_n)$ a $\mathrm{E}\log_{10}(X_n)$ při simulaci s počtem pokusů 4491, tedy kdy pravděpodobnost zdvojnásobení základního kapitálu je 0,95. Vodorovní čárka značí místo zdvojnásobení kapitálu.

Na obrázku 3.2 je znázorněn průběh hodnot $\log_{10}(X_n)$ s různými sázeními podíly, α^* značí sázení při užití Kellyho kritéria, $\alpha^*/2$ značí sázení při užití polovičního Kellyho kritéria a $2\alpha^*$ značí sázení při užití dvojnásobného Kellyho kritéria.

3.2 Příklad na bezrizikovou úrokovou míru

Nechť jistá investiční společnost nabízí investování do fondu a slibuje zhodnocení investice za měsíc na 2,5 násobek investované částky s pravděpodobností 0,6, a s pravděpodobností 0,4 investovanou částku ztratíme. Dále předpokládejme, že banka nabízí vkládat nevyužité finanční prostředky na spořící účet s měsíční úrokovou mírou 0,33%. Nechť náš základní kapitál je 10 000\$. Zajímá nás, jaký podíl našeho kapitálu je optimální investovat a počet měsíců n_0 potřebných k tomu, aby se náš kapitál alespoň zdvojnásobil s pravděpodobností 0,95.

Ze zadání je jasné, že platí $p = 0{,}6$, $f = 2{,}5$ a $r = 0{,}0033$. Kellyho kritérium pro naši investici dostaneme ze vzorce 2.2, tedy máme

$$\alpha^* \doteq 0{,}33.$$

Tudíž přibližně 33% našeho kapitálu je optimální investovat. V kapitole 1.4 jsme zjistili, že pro počet pokusů potřebných k dosažení A násobku kapitálu platí vztah (1.13). Tento vztah můžeme aplikovat i u naší situace, jen ho musíme modifikovat. Pro naši situaci je

$$\sigma^2 = p\left(\log\left((1+r)-\alpha+f\alpha\right)\right)^2 + (1-p)\left(\log\left((1+r)-\alpha\right)\right)^2 - g(\alpha)^2,$$

kde $g(\alpha)$ je definované vztahem (2.1). Po dosazení dostáváme

$$g(\alpha^*) = 0{,}0843827$$

a

$$\sigma^2 = 0{,}078082.$$

Ze zadání máme, že $q = 0{,}95$ a $A = 2$. Z příkladu 3.1 víme, že $u_{0{,}95} = 1,645$. Tedy po dosazení našich $g(\alpha^*)$, σ^2 a ostatních hodnot do vzorce (1.13) bude

$$\frac{u_q^2\sigma^2 + 2g(\alpha)\log(A) + \sqrt{u_q^4\sigma^4 + 4g(\alpha)\,u_q^2\sigma^2\log(A)}}{2g(\alpha)^2} = 35{,}2644,$$

tedy počet měsíců 36.

Na závěr ještě vypočítejme dlouhodobou míru výnosnosti. Po dosazení do vzorce (2.3) dostáváme

$$\gamma \doteq 0{,}086,$$

tedy dlouhodobá míra výnosnosti pro takovou investici je přibližně 8,6%.

3.3 Příklad na více možných výsledků

Nechť jistá společnost plánuje vydat do konce měsíce 3 produkty, označme je produkt 1, 2 a 3. Jelikož výroba více než jednoho produktu je z kapacitních důvodů nemožná, po vydání nejdříve dokončeného produktu další produkty již nevydají. Pravděpodobnost vydání produktu 1 je 0,2, produktu 2 je 0,15 a produktu 3 je 0,25. Pokud se firmě podaří vydat produkt 1, pak cena jejich akcií se navýší o 7%, v případě produktu 2 o 9% a produktu 3 o 6%. Pokud firma nevydá žádný produkt, cena jejich akcií poklesne o 10%.

Zajímá nás, jaký podíl našeho kapitálu je optimální investovat do akcií firmy a dlouhodobá míra výnosnosti investice.

Je jasné, že se jedná o situaci, kde jsou 4 možné výsledky. Tedy máme následující násobitele $f_1 = 1{,}07$, $f_2 = 1{,}09$, $f_3 = 1{,}06$ a $f_4 = 0{,}9$ a jejich pravděpodobnosti $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}15$, $p_3 = 0{,}25$ a $p_4 = 0{,}4$. Po dosazení příslušných hodnot do rovnice (2.5) máme

$$\frac{0{,}2 \cdot 0{,}07}{1 - \alpha + 1{,}07\alpha} + \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{1 - \alpha + 1{,}09\alpha} + \frac{0{,}25 \cdot 0{,}06}{1 - \alpha + 1{,}06\alpha} - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1}{1 - \alpha + 0{,}9\alpha} = 0.$$

Jejím řešením v intervalu $(0, 1)$ je $\alpha^* \doteq 0{,}349$. Tedy optimální procento kapitálu pro investování do akcií je 34,9%. Dlouhodobou míru výnosnosti dostaneme ze vzorce (2.6), tedy po dosazení dostáváme

$$\gamma \doteq 0{,}00043.$$

3.4 Příklad na částečnou ztrátu

Předpokládejme, že každý týden je alespoň jedna nová firma uváděna na burzu a po prvním týdnu cena akcií poloviny firem se navýší o 80% a cena akcií zbylé poloviny klesne o 60%. Nechť náš počáteční kapitál je 10 000\$. Náš plán investování vypadá následovně: každé pondělí investujeme jistou část našeho kapitálu do akcií nové firmy a každý pátek zakoupené akcie prodáme. Zajímá nás jaký podíl kapitálu je optimální investovat do akcií nových firem, dlouhodobá míra výnosnosti investice a střední hodnota našeho kapitálu po 52 týdnech.

Nejprve si vypočítejme Kellyho kritérium pro takovou situaci. Z výše uvedeného vidíme, že se jedná o situaci, kde neztrácíme celou sázenou částku. Naše koeficienty jsou $p = 0{,}5$, $f_1 = 1{,}8$ a $f_2 = 0{,}4$. Po dosazení do vzorce (2.9) dostáváme, že

$$\alpha^* = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 - 1}{0{,}8 \cdot 0{,}6} \doteq 0{,}208,$$

tedy přibližně 20,8% kapitálu máme investovat do akcií nových firem. Dlouhodobou míru výnosnosti investice zjistíme ze vzorce (2.10), dostáváme

$$\gamma \doteq 0{,}0103.$$

Střední hodnotu $\mathrm{E}X_{52}$ dostaneme obdobně jako v kapitole 1.4, kde jsme zjistili, že pro $\mathrm{E}X_n$ platí

$$\mathrm{E}X_n = x_0 \left(\mathrm{E}\left(1 - \alpha + \alpha R_1\right)\right)^n,$$

kde pro naši situaci je R_1 definována vztahem (2.7). Pro střední hodnotu veličiny $(1-\alpha+\alpha R_1)$ dostáváme vztah

$$\mathrm{E}\left(1-\alpha+\alpha R_1\right)=p\left(1-\alpha+f_1\alpha\right)+\left(1-p\right)\left(1-\alpha+f_2\alpha\right).$$

Nyní již máme vypočteny všechny potřebné vztahy. Střední hodnota kapitálu po uplynutí jednoho roku je tedy

$$\mathrm{E}X_{52}=29218.$$

Závěr

Cílem této práce bylo popsat Kellyho strategii, včetně jejího matematického zdůvodnění, a představit některé aplikace této strategie. V práci jsem odvodil Kellyho kritérium pro jednoduchý typ hry a uvedl jsem větu, včetně jejího důkazu, která popisuje vývoj kapitálu v závislosti na volbě sázeného podílu kapitálu. Rovněž jsem uvedl větu, která říká, že když volíme sázený podíl kapitálu jiný, než Kellyho kritérium, pak růst kapitálu je pomalejší, než v případě použití Kellyho kritéria. Dále jsem se snažil odvodit Kellyho kritérium pro obecnější typy her a uvést příklady, které ukazují praktickou užitečnost Kellyho kritéria. Pomocí grafů jsem ilustroval porovnání vývoje logaritmu kapitálu při použití Kellyho kritéria a vývoje střední hodnoty logaritmu kapitálu, a vývoj kapitálu při použití jiných sázených podílů.

Tato práce je vhodná ke vzbuzení zájmu čtenáře o použití Kellyho kritéria, nebo zájmu o jeho další studium.

Možným pokračováním této práce by bylo vyšetřit pravděpodobnost dosažení předem voleného cíle za maximálně n pokusů, pravděpodobnost, že se kapitál sníží pod předem zvolenou hodnotu, a pravděpodobnost dosažení alespoň předem zvoleného cíle po vykonání n pokusů. Další možností pro rozšíření práce je zkoumat vlastnosti menších sázených podílů, než podíl z Kellyho kritéria, z hlediska pravděpodobnosti ztráty.

Seznam použité literatury

[Thorp (1998)] THORP, Edward O. *The Kelly Criterion In Blackjack Sports Betting, And The Stock Market*. Finding the Edge:Mathematical Analysis of Casino Games, Vancura, Eadington and Cornelius, editors, Univ. of Nev., Reno, 1998

[Tijms (2007)] TIJMS, Henk. *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life*. 2. vydání. Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-70172-3.

[Lachout (2004)] LACHOUT, Petr. *Teorie pravděpodobnosti*. 2. vydání. Karolinum, Praha, 2004. ISBN 80-246-0872-3.

[Norstad (2010)] NORSTAD, John. *An Introduction to Utility Theory*. http://homepage.mac.com/j.norstad/finance/util.pdf