Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vladimír Stroganov

# Náhodné uzavřené množiny

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí práce: Mgr. Ondřej Honzl, Matematický ústav UK
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2010

Rád bych poděkoval panu Mgr. Ondřeji Honzlovi za vstřícný přístup a hodnotné rady.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Vladimír Stroganov

# Obsah

**1 Úvod** **5**

**2 Náhodné množiny a kapacitní funkcionály** **6**
2.1 Uzavřené náhodné množiny . . . . . 6
2.2 Kapacitní funkcionály . . . . . 8
2.3 Choquetova věta . . . . . 10

**3 Měritelnost a selekce** **12**
3.1 Měřitelnost . . . . . 12
3.2 Selekce . . . . . 16

**4 Střední hodnota** **20**
4.1 Integrovatelné selekce . . . . . 20
4.2 Aumannova střední hodnota . . . . . 22

**5 Příklady** **25**

**Literatura** **34**

Název práce: Náhodné uzavřené množiny
Autor: Vladimír Stroganov
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Ondřej Honzl, Matematický ústav UK
e-mail vedoucího: honzl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této bakalářské práci se zabýváme základy teorie náhodných množin. Definujeme v ní takové pojmy, jako kapacitní fukcionál, selekce, měřitelná a integrovatelná multifunkce, Castaingova reprezentace a Aumannova střední hodnota náhodné uzavřené množiny. Uvedeme Choquetovu větu o vztahu kapacitních funkcionálů a náhodných množin, Himmelbergovu větu o měřitelnosti, věty o vlastnostech selekcí a střední hodnoty. Teorii doplníme příklady, které demonstrují danou problematiku.

Klíčová slova: náhodné množiny, multifunkce, Aumannova střední hodnota.

Title: Random closed sets
Author: Vladimír Stroganov
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Ondřej Honzl, Mathematical Institute of Charles University
Supervisor's e-mail address: honzl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this bachelor thesis we are concerned with basic knowledge in random set theory. We define here such terms, as capacity functional, selection, measurable and integrable multifunction, Castaing representation and Aumann expectation of random closed set. We present Choquet theorem, Himmelberg measurability theorem, theorems of properties of selections and expectation. We present also several examples which illustrate the theory.

Keywords: random sets, multifunctions, Aumann expectation.

# Kapitola 1

# Úvod

Jak napovídá název, budeme se v této práci zabývat náhodnými elementy, které nabývají hodnot na množině (uzavřených) podmnožin daného prostoru. Náhodnou veličinu můžeme chápat jako jednobodovou náhodnou množinu, a proto je přirozené čekat, že teorie náhodných množin bude rozšířením teorie pravděpodobnosti. Teorie náhodných množin není jenom abstraktní teorií – má aplikace například ve statistice nebo stochastické geometrii a jiných oblastech, kde hodnoty nějakého procesu jsou množiny.

V této práci definujeme základní pojmy teorie náhodných množin a uvedeme některé jejich vlastnosti. Hned v následující kapitole definujeme pojem náhodné uzavřené množiny a jejího kapacitního funkcionálu. Na konci kapitoly uvedeme Choquetovu větu. V kapitole 3 se budeme zabývat pojmy meřitelnosti multifunkcí a jejích selekcí, rozšíříme definice náhodné množiny na lokálně nekompaktní prostory. V kapitole 4 definujeme integrovatelnost multifunkcí a Aumannovu střední hodnotu náhodné množiny, uvedeme její vlastnosti. Poslední kapitola 5 obsahuje příklady, které demonstrují některé aspekty a aplikace teorie náhodných množin.

# Kapitola 2

# Náhodné množiny a kapacitní funkcionály

## 2.1 Uzavřené náhodné množiny

Na začátku této kapitoly uvedeme použité značení prostorů. V této práci se budeme zabývat vlastnostmi různých zobrazení. Definičním oborem těchto zobrazení bude pravděpodobnostní prostor $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ a jejích hodnoty budou ležet v prostoru $\mathbb{E}$ nebo v prostoru podmnožin $\mathbb{E}$. Označme $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ množiny všech uzavřených, otevřených a kompaktních podmnožin prostoru $\mathbb{E}$.

**Definice 2.1 (Náhodná uzavřená množina)**
*Nechť $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbb{E}$ je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bázi (LCHS-prostor). Zobrazení $X : \mathbf{\Omega} \to \mathcal{F}$ nazýváme náhodnou uzavřenou množinou na $\mathbb{E}$, pokud pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{E}$ platí:*

$$X^{-}(K) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F}. \tag{2.1}$$

*Funkci $X^{-}(K)$ budeme nazývat $X$-vzor množiny $K$.*

Definice 2.1 vlastně říká, že zobrazení $X$ musí být měřitelné, jakožto zobrazení do $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}(\mathcal{F}))$, kde $\mathfrak{B}(\mathcal{F})$ je $\sigma$-algebra generována $\mathcal{F}_K = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K \neq \emptyset\}$; $K \in \mathcal{K}$ (tzv. Effrosova $\sigma$-algebra). Dále se budeme zabývat skoro jistě neprázdnými náhodnými množinami.

Podíváme se nyní na několik jednoduchých příkladu náhodných uzavřených množin.

**Příklady 2.2 (Náhodné uzavřené množiny)**

1. *Je-li $\xi$ náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{E}$, pak náhodný bod $X = \{\xi\}$ je náhodná uzavřená množina.*

2. *Je-li $\xi$ reálná náhodná veličina, potom $X = (-\infty, \xi]$ je náhodná uzavřená množina. Skutečně, $\{X \cap K \neq \emptyset\} = \{\xi \geq \inf K\}$ je měřitelným jevem pro každou kompaktní množinu $K \in \mathcal{K}$.*

3. *Nechť $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ jsou náhodné veličiny v $\mathbb{R}^n$. Potom trojúhelník s vrcholy v $\{\xi_1\}$, $\{\xi_2\}$, $\{\xi_3\}$ je náhodná uzavřená množina. Měřitelnost tohoto trojúhelníku lze dokázat přímo, nebo lze použít tvrzení Věty 3.12, kterou brzy dokážeme.*

4. *Nechť $\xi$ je náhodná veličina v $\mathbb{R}^n$, $\eta$ je nezáporná náhodná veličina. Potom koule se středem v $\{\xi\}$ a o poloměru $\eta$ je náhodná uzavřená množina.*

5. *Nechť $\zeta_x$ je reálný stochastický proces na $\mathbb{E}$ se spojitými trajektoriemi. Potom jeho úrovňová množina $L_t = \{x : \zeta_x \geq t\}$ je náhodná uzavřená množina. Stačí si uvědomit, že pro libovolnou kompaktní množinu $K \in \mathcal{K}$ je $\{X \cap K \neq \emptyset\} = \{\sup_{x \in K} \zeta_x \geq t\}$.*

S pomocí náhodných množin také můžeme generovat náhodné veličiny.

**Příklady 2.3 (Náhodné veličiny, určené náhodnými množinami)**

1. *Je-li $\mathbb{E}$ Banachův prostor a $X$ náhodná uzavřená množina na $\mathbb{E}$, je norma množiny $X$, definována jako $\|X\| = \sup\{\|x\|; x \in X\}$, náhodnou veličinou nabývající hodnot na $[0, \infty]$. Opravdu, jev $\{X > t\}$ znamená, že $X$ má neprázdný průnik s doplňkem uzavřené sféry o poloměru $t$ a se středem v nule.*

2. *Pro každé $x \in \mathbb{E}$ je hodnota indikátorů (náhodné) množiny $X$ v bodě $x$, tj. $\chi_X(x)$, náhodnou veličinou.*
   *To plyne ihned z definice, neboť $\{x\} \in \mathcal{K}$.*

## 2.2 Kapacitní funkcionály

V teorii pravděpodobnosti odpovídá dané reálné náhodné veličině nějaká distribuční funkce, která je zcela jednoznačně určena jejím rozdělením, ale také jednoznačně definuje rozdělení náhodné veličiny. Pokusíme se definovat podobnou funkci i pro náhoné uzavřené množiny a ověřit, zda tato funkce bude s náhodnou množinou v jednoznačném vztahu.

**Definice 2.4 (Kapacitní funkcionály)**
*Funkcionál $T_X : \mathcal{K} \to [0,1]$ daný vzorcem:*

$$T_X(K) = \mathbf{P}\{X \cap K \neq \emptyset\}, \ \ \forall K \in \mathcal{K} \tag{2.2}$$

*nazýváme kapacitním funkcionálem náhodné uzavřené množiny $X$.*

Uvedeme několik příkladů takových funkcionálu.

**Příklady 2.5 (Kapacitní funkcionály náhodných množin)**

1. *Pro náhodný bod $X = \{\xi\}$ je kapacitní funkcionál pravděpodobnostním rozdělením náhodné veličiny $\xi$.*
   *Skutečně, $T_X(K) = \mathbf{P}\{\xi \in K\} = \mathbf{P}_\xi(K)$.*

2. *Nechť $\xi_1$, $\xi_2$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Pak $X = \{\xi_1, \xi_2\}$ má kapacitní funkcionál $T_X(K) = 1 - (1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \in K\})^2$.*

3. *Nechť pro nějakou náhodnou veličinu $\xi$ je $X = (-\infty, \xi]$ náhodná uzavřená množina. Pak její kapacitní funkcionál je: $T_X(K) =$*
   *$= \mathbf{P}\{\xi > \inf K\}$.*

4. *Nechť $X = \{x : \zeta_x \geq t\}$, kde $\zeta_x$ je reálný stochastický proces se spojitými trajektoriemi. Potom $T_X(K) = \mathbf{P}\{\sup_{x \in K} \zeta_x \geq t\}$.*

Podíváme se nyní na vlastnosti kapacitních funkcionálů.

**Věta 2.6 (Elementarní vlastnosti kapacitních funkcionálů)**
*Nechť $X$ je náhodná uzavřená množina na $\mathbb{E}$, $T(K)$ je její kapacitní funkcionál. Pak platí:*

$$T(\emptyset) = 0 \tag{2.3}$$

$$\forall K \in \mathcal{K} : \quad T(K) \in [0,1] \tag{2.4}$$

$$\forall K_n \searrow K : \ \ T(K_n) \searrow T(K) \tag{2.5}$$

**Poznámka 2.7**

*Pokud neklesající zobrazení z prostoru $\mathcal{K}$ kompaktních množin LCHS-prostoru $\mathbb{E}$ do $\mathbb{R}$ má vlastnost (2.5), říkáme, že je zhora polospojité. To, že $T$ je monotónní (ve smyslu množinové inkluze) je snadno vidět:*

$$\textit{Je-li } K_1 \subset K_2 : \quad T(K_1) \leq T(K_2).$$

*$T$ splňuje dokonce mnohem silnější podmínku monotónie: je úplně alternující. Tento a několik dalších pojmů definujeme.*

**Definice 2.8 (Diference)**

*Indukcí definujme diferenci n-tého řádu funkcionálu $T$ definovaného na $\mathcal{K}$ následovně:*

$$\triangle_{K_1} T(K) = T(K) - T(K \cup K_1), \tag{2.6}$$

$$\triangle_{K_n} \cdots \triangle_{K_1} T(K) = \triangle_{K_{n-1}} \cdots \triangle_{K_1} T(K) - \triangle_{K_{n-1}} \cdots \triangle_{K_1} T(K \cup K_n) \tag{2.7}$$

**Definice 2.9 (Úplná alternace)**

*Řekněme, že reálný funkcionál definovaný na $\mathcal{K}$ je úplně alternující, pokud*

$$\triangle_{K_n} \cdots \triangle_{K_1} T(K) \leq 0, \ \text{ pro } \ \forall \mathrm{n} \geq 1, \forall \mathrm{K}, \mathrm{K}_1, ..., \mathrm{K}_\mathrm{n} \in \mathcal{K}. \tag{2.8}$$

Pro kapacitní funkcionál $T$ můžeme zapsat vzoreček pro jeho první diferenci jako pravděpodobnost určitého jevů, tedy:

$$\triangle_{K_1} T(K) = \mathbf{P}\{X \cap K \neq \emptyset\} - \mathbf{P}\{X \cap (K \cup K_1) \neq \emptyset\} \ =$$

$$= -\mathbf{P}\{X \cap K_1 \neq \emptyset, X \cap K = \emptyset\}.$$

Nyní podobně snadno dostaneme vztah n-té diference a rozdělení náhodné uzavřené množiny:

$$\triangle_{K_n} \cdots \triangle_{K_1} T(K) = -\mathbf{P}\{X \in \mathcal{F}^K_{K_1,...,K_n}\}, \tag{2.9}$$

kde

$$\mathcal{F}^K_{K_1,...,K_n} = \{F \in \mathcal{F}; F \cap K = \emptyset, F \cap K_i \neq \emptyset, i = 1, ..., n\}.$$

Tedy kapacitní funkcionál má všechny diference nekladné a je proto úplně alternující.

Vlastnosti kapacitních funkcionálů jsou v jistém smyslu podobné vlastnostem distribučních funkcí – (2.5) je analogií spojitosti zprava u distribučních funkcí a úplná alternace zobecňuje koncepci monotónie. Tedy bychom mohli očekávat, že kapacitní funkcionály budou také aditivní. Ale protipříklad 5.3 na straně 26 ukazuje, že tomu tak není – kapacitní funkcionály jsou pouze subaditivní, tj. platí:

$$T(K_1 \cup K_2) \leq T(K_1) + T(K_2)$$

pro každé dvě kompaktní množiny $K_1$, $K_2$. Subaditivita je snadným důsledkem úplné alternace – stačí položit $n = 2$ a $K = \emptyset$.

Zbývá zjistit, zda funkcionál s takovými vlastnostmi odpovídá našemu hlavnímu požadavku – byti v jednoznačném vztahu s nějakou náhodnou množinou.

## 2.3 Choquetova věta

V předchozí části jsme zjistili, že kapacitní funkcionál $T_X$ má čtyři základní vlastnosti – nabývá nuly na prázdné množině, nabývá hodnot z [0,1] na $\mathcal{K}$, je úplně alternující a je zhora polospojitý. Otázkou je, zda všechny funkcionály s těmito vlastnostmi jsou kapacitními funkcionály nějakých náhodných množin? Rozdělení náhodné množiny je definováno na $\sigma$-algebře $\mathfrak{B}(\mathcal{F})$, mohli bychom očekávat, že lze jednoznačně určit rozdělení jenom s pomocí jeho hodnot na kompaktních množinách, neboť $\mathfrak{B}(\mathcal{F})$ je generována množinami $\mathcal{F}_K$, $K \in \mathcal{K}$.

**Věta 2.10 (Choquetova věta)**
*Nechť $\mathbb{E}$ je LCHS-prostor. Funkcionál $T : \mathcal{K} \to [0,1]$ takový, že $T(\emptyset) = 0$, je kapacitním funkcionálem nějaké uzavřené náhodné množiny v $\mathbb{E}$ právě tehdy, když je úplně alternující a zhora polospojitý. Tato náhodná množina je určena jednoznačně.*

Dva různé důkazy této fundamentální věty uvádí Ilya Molchanov ( [6], 13-18).

**Důsledky 2.11**

*Nechť $\mathbb{E}$ je LCHS-prostor.*

1. *Kapacitní funkcionál $T_X$ náhodné uzavřené množiny $X$ je pravděpodobnostní mírou právě tehdy, když $X$ je náhodný bod, tj. je jednobodovou množinou skoro jistě.*

2. *Náhodná uzavřená množina je deterministická tehdy a jen tehdy, když $T_X$ nabývá pouze hodnot 0 a 1 na $\mathcal{K}$.*

# Kapitola 3

# Měritelnost a selekce

## 3.1 Měřitelnost

V této kapitole definujeme náhodné uzavřené množiny na metrických prostorech, které obecně nemusí být lokálně kompaktní.

**Definice 3.1 (Multifunkce)**
*Nechť* $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ *je pravděpodobnostní prostor,* $\mathbb{E}$ *je separabilní metrický prostor. Skoro jistě neprázdné zobrazení* $X$ *z pravděpodobnostního prostoru* $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ *nabývající hodnot na množině všech podmnožin* $\mathbb{E}$ *nazýváme obecnou multifunkcí. Obecnou multifunckí, jejíž hodnoty jsou uzavřené, nazýváme multifunkcí.*

**Definice 3.2 (Měřitelnost)**
*Řekněme, že (obecná) multifukce* $X$ *je*
*borelovsky měřitelná, pokud*

$$X^{-}(B) = \{\omega : X(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F} \tag{3.1}$$

*pro každou borelovskou množinu* $B$*;*
*silně měřitelná, pokud*

$$X^{-}(F) = \{\omega : X(\omega) \cap F \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F} \tag{3.2}$$

*pro každou uzavřenou množinu* $F \in \mathcal{F}$*;*
*slabě měřitelná, pokud*

$$X^{-}(G) = \{\omega : X(\omega) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F} \tag{3.3}$$

*pro každou otevřenou množinu* $G \in \mathcal{G}$*.*

Uvědomme si, že pokud $\mathbb{E}$ je lokálně kompaktní, pak slabě měřitelnými funkcemi jsou právě skoro jistě neprazdné náhodné uzavřené množiny ve smyslu definice 2.1.

**Věta 3.3**

*Nechť $\mathbb{E}$ je lokálně kompaktní separabilní metrický prostor a nechť $X : (\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \mathcal{F}$ je multifunkce. Potom $X$ je náhodná uzavřená množina právě tehdy, když je slabě měřitelná.*

**Důkaz**

Slabá měřitelnost náhodné uzavřené množiny se dokaže snadno. Ke každé otevřené množině $G$ totiž najdeme takovou rostoucí posloupnost kompaktů $K_n$, která konverguje k $G$. Proto platí

$$X^-(G) = \{X \cap \bigcup_n K_n \neq \emptyset\} = \bigcup_n \{X \cap K_n \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F},$$

a $X$ je měřitelná multifunkce.

Nechť $X$ je slabě měřitelná multifunkce a nechť $\mathbb{H}$ je kompaktní metrický prostor takový, že $\mathbb{E}$ je jeho hustý podprostor. Definujeme na $\mathbb{H}$ multifunkci $\widetilde{X}(\omega) := clo_{\mathbb{H}} X(\omega)$. Není těžké se přesvědčit, že $\widetilde{X}$ je definována korektně: stačí si uvědomit, že každá (slabě) měřitelná multifunkce na podprostoru metrického prostoru je také (slabě) měřitelná obecná multifukce a že uzávěr hodnot slabě měřitelné obecné multifunkce definuje slabě měřitelnou multifunkcí. Tedy $\widetilde{X}$ je slabě měřitelná multifunkce. Ukážeme, že $\widetilde{X}$ je měřitelná.

Vzhledem ke kompaktnosti prostoru $\mathbb{H}$, hodnoty $\widetilde{X}$ jsou jen kompaktní množiny. Zvolme $F \in \mathcal{F}(\mathbb{H})$ libovolně a definujme rostoucí posloupnost uzavřených množin $H_n := \{h \in \mathbb{H}; dist(h, F) \geq 1/n\}, n \in \mathbb{N}$. Sjednocení množin $H_n$ je rovno doplňku množiny $F$. Ukážeme měřitelnost $\widetilde{X}$-vzoru $F$ s pomocí měřitelnosti $\widetilde{X}^-(H_n^c)$:

$$\widetilde{X}^-(F) = \{\widetilde{X} \cap F = \emptyset\}^c =$$

$$= \{\widetilde{X} \subset F^c\}^c = \{\widetilde{X} \subset \bigcup_n H_n\}^c =^{(*)}$$

$$= (\bigcup_n \{\widetilde{X} \subset H_n\})^c = (\bigcup_n \{\widetilde{X} \cap H_n^c = \emptyset\})^c = (\bigcup_n (\widetilde{X}^-(H_n^c))^c)^c \in \mathfrak{F},$$

kde v rovnosti $(*)$ jsme využili kompaktnosti hodnot $\widetilde{X}$. Tedy $\widetilde{X}$ je měřitelná.

Zbývá ukazat, že $X$-vzory kompaktů jsou měřitelné. Pro každou $K \in \mathcal{K}(\mathbb{E})$ máme:

$$X^-(K) = \{\omega; X(\omega) \cap K \neq \emptyset\} =$$

$$= \{\omega; \widetilde{X}(\omega) \cap \mathbb{E} \cap K \neq \emptyset\} =$$

$$= \{\omega; \widetilde{X}(\omega) \cap K \neq \emptyset\} = \widetilde{X}^-(K) \in \mathfrak{F}.$$

Tedy $X$ je náhodná uzavřená množina.

□

**Definice 3.4 (Náhodná uzavřená množina)**
*Náhodnou uzavřenou množinu na separabilním metrickém prostoru definujeme jako slabě měřitelnou multifunkci.*

**Věta 3.5 (O měřitelnosti)**
*Nechť $(\mathbb{E}, \rho)$ je separabilní metrický prostor, $X : (\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \mathbb{E}$ je multifukce. Uvažujme tvrzení:*

1. *$X$ je borelovsky měřitelná;*
2. *$X$ je měřitelná;*
3. *$X$ je slabě měřitelná;*
4. *Vzdálenost $dist(y, X(\omega))$ je náhodnou veličinou pro každé $y \in \mathbb{E}$;*
5. *Graf $X$ patří do součinové $\sigma$-algebry $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{B}(\mathbb{E})$, tj.*

$$\texttt{Graf}(X) = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{E} : x \in X(\omega)\} \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E}). \tag{3.4}$$

*Tato tvrzení jsou v následujícím vztahu: (1)⇒(2)⇒(3)⇔(4)⇒(5). Pokud $\mathbb{E}$ je Polský prostor a $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ je úplný, jsou všechna tvrzení ekvivalentní.*

*Připomeňme, že Polský prostor je úplný separabilní metrický prostor a že pravděpodobnostní prostor je úplný, pokud pravděpodobnostní míra $\mathbf{P}$ je úplná. Vzdálenost množiny $A$ a bodu $a$ v metrickém prostoru s metrikou $\rho$ označme $\rho(a, A) := dist_\rho(a, A) = \inf_{x \in A} \rho(a, x)$.*

**Důkaz**

(1)⇒(2) Měřitelnost borelovsky měřitelné multifunkce je zřejmá.

(2)⇒(3) Nechť multifunkce $X$ je měřitelná. Označme $\mathbb{Q}(A)$ průnik množiny $A$ a husté spočetné množiny $\mathbb{Q}$. Potom libovolnou otevřenou množinu $G \in \mathcal{G}$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení uzavřených koulí: $G = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}(G)} \mathbf{B}(x, \epsilon_x)$, kde $\epsilon_x = \rho(x, G^c)/2$. Teď už je vidět, že $X^-(G)$ je měřitelná:

$$\{X \cap \bigcup_{x\in\mathbb{Q}(G)} \mathbf{B}(x, \epsilon_x) \neq \emptyset\} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}(G)} \{X \cap \mathbf{B}(x, \epsilon_x) \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F}.$$

(3)⇔(4) Měřitelnost vzdálenosti multifunkce $X$ od bodu $y$ je ekvivalentní měřitelnosti množiny $\{\omega; \rho(y, X(\omega)) < \epsilon\}$ pro každé $\epsilon \in (0, \infty)$. Tuto množinu můžeme vyjádřit s pomocí $X^-$ takto:

$$X^-(U(x, \epsilon)) = \{\omega; X(\omega) \cap U(x, \epsilon) \neq \emptyset\} = \{\omega; \rho(y, X(\omega)) < \epsilon\}.$$

Měřitelnost této množiny pro každé kladné $\epsilon$ a pro každý bod $x$ je ekvivalentí slabé měřitelnosti $X$. Skutečně, v separabilním prostoru je otevřená množina spočetným sjednocením $\epsilon$-okolí bodů množiny $\mathbb{Q}$ a proto měřitelnost $X$-vzoru každého z těchto okolí implikuje měřitelnost $X$-vzoru otevřené množiny.

(3)⇒(5) Definujme posloupnost náhodných množin $X_n$ nasledovně:

$$X_n(\omega) = \{x \in \mathbb{E}; \exists y \in \mathbb{Q} : \rho(x, y) < 1/n, \rho(y, X(\omega)) < 1/n\}.$$

Vidíme, že $X(\omega) = \cap_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega)$. Také $Graf(X) = \cap_{n\in\mathbb{N}}(Graf(X_n))$, takže stačí dokazat měřitelnost $Graf(X_n)$. Máme:

$$Graf(X_n) = \bigcup_{y\in\mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega; \rho(y, X(\omega)) < 1/n\} \times \{x \in \mathbb{E}; \rho(x, y) < 1/n\} =$$

$$= \bigcup_{y\in\mathbb{Q}} X^-(U(y, 1/n)) \times (U(y, 1/n)) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E}).$$

(5)⇒(1) Nechť $\mathbb{E}$ je úplný separabilní metrický prostor, a nechť pravděpodobnostní míra $\mathbf{P}$ je úplná. Pro libovolnou borelovskou množinu $B$ máme:

$$X^-(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \cap B \neq \emptyset\} = \pi_\Omega\{Graf(X) \cap (\Omega \times B)\}.$$

Dle věty o projekci (viz ( [1])) a z úplnosti míry $\mathbf{P}$ projekce $\pi_\Omega$ $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E})$-měřitelné množiny je $\mathfrak{F}$-měřitelná. □

## 3.2 Selekce

V metrickém prostoru (nenáhodná) uzavřená množina je plně charakterizovaná jejími body; pokud je prostor separabilní, pak můžeme vybrat spočetně mnoho bodů, jednoznačně určujících danou množinu. V této kapitole ukážeme, že za určitých předpokladů lze analogicky popsát i náhodnou uzavřenou množinu s pomocí náhodných bodů – selekcí.

**Definice 3.6 (Selekce)**
*Náhodnou veličinu $\xi$ nazýváme měřitelnou selekcí multifunkce $X$, pokud $\xi(\omega) \in X(\omega)$ skoro všude na $\Omega$. Množinu všech selekcí $X$ budeme značit $\mathcal{S}(X)$.*

Je zřejmé, že pro každé $\omega$ můžeme vybrat nějaký element $\xi(\omega) \in \mathbf{X}(\omega)$. Ale takto definovaná funkce nemusí být měřitelná. Velmi důležité je, že pro měřitelnou multifunkci v Polském prostoru existuje její měřitelná selekce.

**Věta 3.7 (O selekcích)**
*Nechť $\mathbb{E}$ je úplný separabilní metrický prostor. Je-li $X$ slabě měřitelné zobrazení z $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ do $\mathcal{F}$, které je neprázdné s pravděpodobností jedna, pak $\mathcal{S}(X) \neq \emptyset$.*

Tato věta, dokázaná v ([4]), je fundamentální pro teorii náhodných množin. S její pomocí C.J.Himmelberg ([3]) dokazal i existenci husté spočetné množiny měřitelných selekcí – Castaingové reprezentace náhodné množiny.

**Definice 3.8 (Castaingova reprezentace)**
*Posloupnost měřitelných selekcí $\{\xi_n\}$ nazýváme Castaingovou reprezentací měřitelné multifunkce $X$, pokud $X = clo\{\xi_n, n \geq 1\}$.*

**Věta 3.9 (O reprezentaci)**
*Nechť $\mathbb{E}$ je úplný separabilní metrický prostor. Pak multifunkce je slabě měřitelná právě tehdy, když existuje její Castaingova reprezentace.*

Tato věta říká, že množina měřitelných selekcí jednoznačně definuje náhodnou uzavřenou množinu a tedy i její rozdělení. Tedy rozdělení množiny je určeno rozdělením selekcí. Ale není pravda, že dvě stejně rozdělené náhodné uzavřené množiny definují stejnou množinu rozdělení selekcí: na straně 26 je uveden protipříklad (příklad 5.5).

Dále s pomocí Castaingové reprezentace dokažeme měřitelnost některých operací. Kromě operací uvedených ve větě 3.12 a citovaných z ([6]), v poslední kapitole v příkladech dokažeme měřitelnost dalších množin, například množiny řešení jisté optimálizační ulohy.

**Definice 3.10 (Hausdorffova metrika)**
*Nechť* $(\mathbb{E}, \rho)$ *je metrický prostor. Pro každé dvě neprázdné množiny* $A, B$ *je Hausdorffova metrika definována jako*

$$\rho_H(A, B) = max\Big(\sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{y \in B} \rho(A, y)\Big).$$

**Definice 3.11 (Horní a dolní limity)**
*Nechť* $\{A_n\}$ *je posloupnost podmnožin* $\mathbb{E}$. *Potom definujeme dolní limitu této posloupnosti* $LimInf(A_n)$ *jako množinu limit posloupností bodů* $x_n \in A_n$. *Podobně definujeme horní limitu* $LimSup(A_n)$ *jako množinu hromadných bodů takových posloupností.*

Všimněme si, že právě definované pojmy se liší od klasických horních a dolních limit ($\liminf, \limsup$) posloupnosti množin: $\liminf(A_n)$ je množina bodů, obsazených v každé množině $A_n, n \geq n_0$ a $\limsup(A_n)$ – množina bodů, obsazených v každé množině nějaké vybrané podposloupnosti $A_{n_k}$. Snadno nahlédneme, že pro každou posloupnost množin $\{A_n\}$ platí vztahy: $\liminf(A_n) \subset LimInf(A_n)$, $\limsup(A_n) \subset LimSup(A_n)$.

Dále budeme také používat množinové operace jako uzávěr (*clo*), konvexní obal (*conv*), Minkovského součet a násobení ($A \oplus B, AB$). Definice a vlastnosti těchto operátorů jsou popsany například v ([5]).

**Věta 3.12 (Měřitelnost operací)**
*Nechť* $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ *je úplný pravděpodobnostní prostor,* $\mathbb{E}$ *je úplný a separabilní metrický prostor a* $X$, $X_1$, $X_2$,... , $Y$ *jsou uzavřené náhodné množiny. Potom následující funkce jsou také náhodné množiny:*

*(1) clo(conv(X)), tj. uzávěr konvexního obalu* $X$ *;*

*(2)* $\alpha X$, *kde* $\alpha$ *je náhodná veličina;*

*(3)* $clo(X^C)$, $clo(int(X))$, $\partial X$, *tj. uzávěry doplňku a vnitřku, hranice* $X$*;*

*(4)* $X \cup Y$, $X \cap Y$*;*

*(5)* $clo(X \oplus Y)$*, kde* $X \oplus Y = \{(x+y) \in \mathbb{E}; x \in X, y \in Y\}$*;*

*(6)* $\rho_H(X,Y)$ *(tj. Hausdorffova vzdálenost* $X$ *a* $Y$*) je náhodná veličina, pokud* $X$ *a* $Y$ *jsou omezené;*

*(7)* $clo(\cup_{n\geq 1} X_n)$*,* $\cap_{n\geq 1} X_n$*;*

*(8)* $LimSup(X_n)$ *a* $LimInf(X_n)$*.*

**Důkaz**

(1) Bez újmy na obecnosti předpokládáme $X \neq \emptyset$ skoro jistě. Uvažujme $\{\xi_n, n \geq 1\}$ Castaingovu reprezentaci $X$. Tedy množina konvexních kombinací s racionálními koeficienty prvků z $\{\xi_n, n \geq 1\}$ je hustá v clo(conv($X$)), tj. je její Castaingovou reprezentací.

(2) Podobně, množina $\{\alpha\xi_n, n \geq 1\}$ je Castaingovou reprezentací $\alpha X$.

(3) $clo(int(X)) = clo((clo(X^C))^C)$ a $\partial X = X \cap clo(X^C)$, a tedy stačí dokázat měřitelnost $clo(X^C)$ a dokázat tvrzení (4).

Nechť je dána $G \in \mathcal{G}$. Najdeme rostoucí posloupnost uzavřených množin $F_n$ konvergující k G. Platí

$$\{clo(X^C) \cap G \neq \emptyset\} = (\{G \subset X\})^C = (\cap_{n\geq 1}[F_n \subset X])^C,$$

takže stačí ukázat, že jev $\{F \subset X\}$ je měřitelný pro každou uzavřenou množinu $F$. Separabilita nám umožňuje vybrat posloupnost bodů $\{x_n, n \geq 1\}$ hustou v $F$, a tedy $\{F \subset X\} = \cap_{n\geq 1}\{x_n \in X\} \in \mathfrak{F}$.

(4) Je to speciální případ (7).

(5) Nechť $\{\xi_n, n \geq 1\}$, $\{\theta_m, m \geq 1\}$ jsou Castaingové reprezentace $X$ a $Y$. Potom $\{\xi_n + \theta_m, m \geq 1, n \geq 1\}$ je reprezentací clo($X \oplus Y$).

(6) Hausdorffovu vzdálenost $X$ a $Y$ lze také vyjádřit s pomocí spočetně mnoha reprezentací, odkud bude zřejmá její měřitelnost:

$$\rho_H(X,Y) = \rho_H(\{\xi_n, n \geq 1\}, \{\theta_m, m \geq 1\}).$$

(7) Pro libovolnou $G \in \mathcal{G}$ máme

$$\{clo(\cup_{n\geq 1} X_n) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{n\geq 1} \{X_n \cap G \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F},$$

tj. $clo(\cup_{n\geq 1} X_n)$ je měřitelná. Pro průnik $\cap_{n\geq 1} X_n$ užijeme ekvivalenci ve větě o měřitelnosti a ukážeme měřitelnost příslušného grafu vzhledem k $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E})$:

$$\mathtt{Graf}(\cap_{n\geq 1} X_n) = \bigcap_{n\geq 1} \mathtt{Graf}(X_n).$$

(8) Uvědomme si, že $X^\varepsilon = \{x; \rho(x, X) \leq \varepsilon\}$ je náhodnou množinou:

$$\mathtt{Graf}(X^\varepsilon) = \{(\omega, x); \rho(x, X(\omega)) \leq \varepsilon\}$$

je měřitelný, neboť vzdálenost je $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-měřitelná.

Zapíšeme $LimInf$ a $LimSup$ následovně:

$$LimInf_{n\to\infty}(X_n) = \bigcap_{k\geq 1} clo(\bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} X_n^{1/k}),$$

$$LimSup_{n\to\infty}(X_n) = \bigcap_{m\geq 1} clo(\bigcup_{n\geq m} X_n).$$

Nyní už jejich měřitelnost okamžitě plyne ze (7).

□

Je třeba poznamenat, že s pomocí těchto operací lze konstruovat dosti velkou třídu měřitelných multifunkcí z náhodných bodů a deterministických množin. Takové konstrukce budeme často používat v příkladech v poslední kapitole.

# Kapitola 4

# Střední hodnota

Prostor všech uzavřených množin není lineární, a proto nelze definovat střední hodnotu náhodné uzavřené množiny úplně analogicky, jako u náhodných veličin. Uvažujme například reálnou náhodnou množinu, nabývající s pravděpodobností $1/2$ hodnot $\{0, 1\}$ a $[0, 1]$. Nebo takovou náhodnou množinu, která je kompaktní s pravděpodobností $1/2$. Opravdu, není triviální takovým zobrazením přiřadit nějakou množinu tak, aby měla nějaké rozumné vlastnosti, které od střední hodnoty očekáváme. V závislosti na našich požadavcích můžeme definovat takovou množinu několika způsoby. V této práci uvedeme pouze jeden z nich – definujeme střední hodnotu s pomocí stredních hodnot selekcí dané náhodné množiny, tj. definujeme tak zvanou Aumannovu střední hodnotu.

Dále budeme předpokládat, že prostor $\mathbb{E}$ je Banachův a že zkoumané náhodné množiny jsou skoro jistě neprázdné. Důkazy vět z této kapitoly lze najít v ( [6], 2.1, 145-160).

## 4.1 Integrovatelné selekce

Při definování měřitelných selekcí a zkoumání jejich vlastností jsme nepotřebovali lineárnost prostoru $\mathbb{E}$. I když v rámci této práce uvedeme tvrzení a definice jenom pro lineární prostory, lze je snadno zobecnit; k tomu potřebujeme v podstatě jenom zavést Bochnerovu střední hodnotu pro náhodné veličiny (viz ( [6], 414-415) nebo ( [2], III, 2)).

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Pro $p \in [1, \infty]$ označme $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{E})$ množinu všech náhodných veličin s hodnotami v $\mathbb{E}$ a konečnou $\mathbf{L}^p$-normou

$$\|\xi\|_p = \mathbf{E}\|\xi\|^p, \ p \in [1, \infty),$$

$$\|\xi\|_p = \mathbf{E}esssup_{\omega \in \Omega}\xi(\omega), \ p = \infty,$$

kde $esssup_{\omega \in \Omega}\xi(\omega)$ je supremum v podstatě, tj. $\inf_{\{A \subset \Omega; \mathbf{P}(A)=0\}} \sup_{\omega \in (\Omega \setminus A)}(\xi(\omega))$.

**Definice 4.1 (p-integrovatelné selekce)**

*Nechť $X$ je náhodná uzavřená množina na $\mathbb{E}$, $p \in [1, \infty]$. Definujeme $\mathcal{S}^p(X)$ jako množinu všech p-integrovatelných selekcí dané náhodné množiny $X$, tj.*

$$\mathcal{S}^p(X) = \mathcal{S}(X) \cap \mathbf{L}^p.$$

Je-li selekce 1-integrovatelná, budeme jednoduše říkat, že je to integrovatelná selekce. Následující věta uvádí základní vlastnosti p-integrovatelných selekcí.

**Věta 4.2**

*Nechť $X$, $Y$ jsou náhodné uzavřené množiny na $\mathbb{E}$. Potom pro každé $p \in [1, \infty]$ platí:*

1. *$\mathcal{S}^p(X)$ je uzavřenou podmnožinou $\mathbf{L}^p$;*
2. *pokud $\mathcal{S}^p(X) \neq \emptyset$, pak existuje posloupnost $\{\xi_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{S}^p(X)$ taková, že $X = clo\{\xi_n, n \geq 1\}$;*

Druhé tvrzení této věty zaručuje existenci Castaingové reprezentace multifunkce s pomocí p-integrovatelných selekcí pokud víme, že alespoň jedna taková selekce existuje. Z toho plyne, že jsou-li množiny p-integrovatelných selekcí dvou náhodných uzavřených množin stejné a neprázdné, pak se náhodné množiny rovnají s pravděpodobností jedna.

Další dvě věty ukazují vztah mezi p-integrovatelnými selekcemi a funkcemi náhodných množin.

**Věta 4.3**

*Nechť $X_1$, $X_2$ jsou náhodné uzavřené množiny, $X = clo(X_1 \oplus X_2)$, $p \in [1, \infty)$. Pokud $\mathcal{S}^p(X_1)$ a $\mathcal{S}^p(X_2)$ jsou neprázdné, pak*

$$\mathcal{S}^p(X) = clo(\mathcal{S}^p(X_1) \oplus \mathcal{S}^p(X_2)).$$

**Věta 4.4**

*Pokud pro náhodnou množinu $X$ a dané $p \in [1, \infty)$ existuje aspoň jedna p-integrovatelná selekce, tj. pokud $\mathcal{S}^p(X) \neq \emptyset$, pak*

$$\mathcal{S}^p(clo(conv(X))) = clo(conv(\mathcal{S}^p(X))).$$

*Navíc, $\mathcal{S}^p(X)$ je konvexní (v $\mathbf{L}^p$) právě, když $X$ je konvexní skoro jistě.*

Následující věta nám dává nutnou a postačující podmínku pro existenci p-integrovatelných selekcí pro danou náhodnou množinu.

**Věta 4.5**

*Nechť je dáno $p \in [1, \infty]$ a náhodná množina $X$. Potom $\mathcal{S}^p(X) \neq \emptyset$ právě, když reálná náhodná veličina daná vzdáleností $X$ od nuly*

$$\alpha = \rho(0, X) = \inf\{\|x\|; x \in X\}$$

*je p-integrovatelná, tj. $\alpha \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$.*

## 4.2 Aumannova střední hodnota

Než definujeme samotnou střední hodnotu, zavedeme si ještě dva pomocné pojmy.

**Definice 4.6 (Integrovatelnost náhodných množin)**

*Řekneme, že náhodná uzavřená množina $X$ je integrovatelně omezená, pokud její norma*

$$\|X\| = \sup\{\|x\|; x \in X\}$$

*má konečnou střední hodnotu.*

*Řekneme, že je integrovatelná, pokud má alespoň jednu integrovatelnou selekci, tj. $\mathcal{S}^1(X) \neq \emptyset$.*

Jak jsme ukázali v příkladu 1 na straně 7, je $\|X\|$ skutečně náhodnou veličinou. Je zřejmé, že každá integrovatelně omezená náhodná množina je také integrovatelná. Dokonce každá její selekce je integrovatelná.

**Definice 4.7 (Aumannova střední hodnota)**

*Aumannova střední hodnota náhodné uzavřené množiny je uzávěrem množiny středních hodnot jejích integrovatelných selekcí, tj.*

$$\mathbf{E}X = clo\{\mathbf{E}\xi; \xi \in \mathcal{S}^1(X)\}.$$

**Definice 4.8 (Aumannův integrál)**

*Aumannovým integrálem náhodné množiny $X$ je množina středních hodnot jejích integrovatelných selekcí, tj.*

$$\mathbf{E}_I X = \{\mathbf{E}\xi; \xi \in \mathcal{S}^1(X)\}.$$

Pojmy Aumannova integrálu a Aumannové střední hodnoty jsou si dost podobné, avšak Aumannův integrál není nutně uzavřený. Příklad uzavřené náhodné množiny s neuzavřeným Aumannovým integrálem uvedeme později. Některé podmínky, implikující uzavřenost Aumannova integrálu, jsou popsány ve Větě 4.12.

**Příklad 4.9 (Střední hodnota deterministické náhodné množiny)**

*Nechť $X$ definováná na $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ je rovna $\{0, 1\}$ skoro jistě. Každá selekce $\xi_A$ může být definována, jako charakteristická funkce nějaké měřitelné podmnožiny $A \subset \Omega$:*

$$\xi_A(\omega) = \chi_A(\omega).$$

*Střední hodnota $\xi_A$ je rovna pravděpodobnosti jevu $A$. Tedy*

$$\mathbf{E}X = clo\{\mathbf{P}(A); A \in \mathfrak{F}\}.$$

Vidíme, že narozdíl od střední hodnoty náhodné veličiny v teorii pravděpodobnosti, střední hodnota uzavřené náhodné množiny není jednoznačně určena jejím rozdělením: má význam i pravděpodobnostní prostor $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, na kterém je náhodná množina definována. Příklad dvou stejně rozdělených množin s různými Aumannovými středními hodnotami je uveden na straně 27 (příklad 5.6).

Podstatné je, zda daný pravděpodobnostní prostor obsahuje atomy, či nikoliv. Následující věta uvádí podmínky pro to, aby Aumannova střední hodnota reálné náhodné množiny byla konvexní.

**Věta 4.10 (Konvexifikace v $\mathbf{R}^n$)**

*Nechť $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ a pravděpodobnostní prostor $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ neobsahuje atomy. Pokud $X$ je integrovatelně omezená, pak $\mathbf{E}X$ a $\mathbf{E}_I X$ jsou konvexní, $\mathbf{E}_I X = \mathbf{E}_I conv(X)$ a $\mathbf{E}X = \mathbf{E}conv(X)$.*

**Věta 4.11 (Vlastnosti Aumannovy střední hodnoty)**

*Nechť $\mathbb{E}$ je Banachův prostor a $X$ a $Y$ jsou integrovatelné náhodné množiny. Potom*

1. $\rho_H(\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y) \leq \mathbf{E}\rho_H(X, Y)$, *kde* $\rho_H$ *je Hausdorffova metrika;*
2. $\mathbf{E}clo(conv(X \oplus Y)) = clo(conv(\mathbf{E}X \oplus \mathbf{E}Y))$;
3. $\mathbf{E}clo(conv(X)) = clo(conv(\mathbf{E}X))$.

*Pokud* $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ *neobsahuje atomy, pak* $\mathbf{E}clo(conv(X)) = \mathbf{E}X$.

**Věta 4.12 (Uzavřenost Aumannova integrálu)**

*Nechť $\mathbb{E}$ je Banachův prostor, $X$ je integrovatelně omezená náhodná množina. Potom $\mathbf{E}_I X$ je uzavřená, pokud je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\mathbb{E}$ *má konečnou dimenzi;*
2. $\mathbb{E}$ *je reflexivní (tj.* $\mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$*) a* $X$ *je konvexní skoro jistě.*

*Pokud* $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ *neobsahuje atomy, pak* $\mathbf{E}clo(conv(X)) = \mathbf{E}X$.

**Věta 4.13**

*Nechť duální prostor k $\mathbb{E}$ je separabilní. Pokud $X$ je integrovatelná a má Aumannovu střední hodnotu $\{x\}$ pro nějaký bod $x \in \mathbb{E}$, pak $X$ je skoro jistě jednobodová množina.*

# Kapitola 5

# Příklady

V této kapitole uvedeme několik příkladů, které by ilustrovali použití teorie probrané v předchozích kapitolách, a tak ji vhodně doplňovali.

**Příklad 5.1 (Aplikace věty o měřitelnosti operací)**

*Na začátku první kapitoly jsme si v příkladu 3 na straně 7 jako příklad náhodné uzavřené množiny uvedli trojúhelník, jehož vrcholy jsou náhodné body. Nyní k tomu, abychom si uvědomili, že tato množina je skutečně měřitelná, stačí použít Větu 3.12. Skutečně, takový trojúhelník je pouze konvexním obalem tří náhodných bodů, a tedy je uzavřenou náhodnou množinou.*

*Podobně můžeme kouli z příkladu 4 vyjádřit jako* $\{\xi\} \oplus \eta\mathbf{B}$*, kde* $\xi$ *a* $\eta$ *jsou náhodné veličiny definované v příkladu a* $\mathbf{B}$ *je jednotková koule, kterou chapáme jako deterministickou náhodnou množinu. Tedy podle Věty 3.12 je to náhodná uzavřená množina.*

**Příklad 5.2 (Diference)**

*Uvedeme několik jednoduchých příkladů diferencí vyššího řádu.*
*Nechť* $\{\xi\}$ *je náhodný bod s rozdělením* $\mathbf{P}$*. Potom*

$$-\triangle_{K_n} \cdots \triangle_{K_1} T(K) = \mathbf{P}\{\xi \in K_1 \cap \ldots \cap K_n \cap K^c\}.$$

*Pro* $X = \{x; \zeta_x \geq 0\}$*, kde* $\zeta$ *je spojitá funkce, máme:*

$$-\triangle_{K_n} \cdots \triangle_{K_1} T(K) = \mathbf{P}\{\sup_{x \in K} \zeta_x < 0, \sup_{x \in K_i} \zeta_x \geq 0, i = 1, \ldots, n\}.$$

**Příklad 5.3 (Neaditivita kapacitních funkcionálů)**

*Při zkoumání vlastností kapacitních funkcionálů na straně 10 jsme tvrdili, že kapacitní funkcionál není aditivní, ale je pouze subaditivní. Uvedeme si protipříklad.*

*V* $\mathbb{R}^n$ *nechť* $X = B_r(\xi)$ *je (náhodná) sféra o poloměru* $r$ *se středem, daným náhodnou veličinou* $\xi$, $K_1, K_2$ *jsou dvě disjunktní kompaktní množiny. Potom* $T_X(K) = \mathbf{P}\{dist(\xi, K) \leq r\}$, *což není míra, neboť pokud vzdálenost množin* $K_1$ *a* $K_2$ *je menší než* $r$, *pak* $T_X(K_1 \cup K_2) \neq T_X(K_1) + T_X(K_2)$.

**Příklad 5.4**

*Nechť* $U$ *je náhodná veličiná s rovnoměrným rozdělením na* $[0,1]$, *a nechť* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *je zhora polospojitá funkce, tj. taková, že pro* $\forall y \in [0,1]$ *množina* $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq y\}$ *je uzavřená. Dokažeme, že*

$$\mathbf{X}(\omega) := \{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq U(\omega)\}$$

*je náhodná uzavřená množina a najdeme její kapacitní funkcionál.*

$$\forall K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \qquad \mathbf{X}^-(K) = \{\omega; \mathbf{X}(\omega) \cap K \neq \emptyset\} =$$

$$= \{\omega; \{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq U(\omega)\} \cap K \neq \emptyset\} =$$

$$= \{\omega; U(\omega) < \sup(F(K))\} \in \mathfrak{F},$$

*neboť* $U$ *je měřitelná. Kapacitní funkcionál náhodné množiny* $\mathbf{X}$ *je*

$$T_X(K) = \mathbf{P}[\mathbf{X}^-(K)] =$$

$$= \mathbf{P}[\{\omega; U(\omega) < \sup(F(K))\}] = \sup(F(K)).$$

**Příklad 5.5 (Rozdělení selekcí stejně rozdělených množin)**

*Z věty o reprezentaci 3.9 (strana 16) víme, že náhodnou množinu (neboli slabě měřitelnou multifunkci) lze vyjádřit s pomocí Castaingové reprezentace, tj. jako uzávěr spočetně mnoha selekcí. Ukážeme, že dvě stejně rozdělené náhodné uzavřené množiny můžou mít různé množiny rozdělení svých selekcí.*

*Nechť $\Omega = [0,1]$ s Borelovskou $\sigma$-algebrou a Lebesgueovou mírou $\lambda$ je pravděpodobnostní prostor, na němž jsou definovány dvě reálné uzavřené náhodné množiny $X$ a $Y$. Nechť $X(\omega) = \{-\omega, \omega\}$, $Y(\omega) = \{-s(\omega), s(\omega)\}$, kde $s(\omega) = 2\omega$, pro $\omega \in [0, 1/2)$ a $s(\omega) = 2\omega - 1$, pro $\omega \in [1/2, 1]$. Vidíme, že $X$ a $Y$ jsou stejně rozdělené, ale selekce $Y$*

$$\eta(\omega) = s(\omega)\chi_{[0,1/2)}(\omega) - s(\omega)\chi_{[1/2,1]}(\omega)$$

*má rozdělení, které nemá žadná selekce $X$.*

**Příklad 5.6 (Střední hodnota stejně rozdělených množin)**

*Jako i množina selekcí (v příkladě 5.5), střední hodnota není určena pouze rozdělením uzavřené náhodné množiny. Představme si dva pravděpodobnostní prostory – jednobodový $\Omega_1 = \{0\}$ s triviální $\sigma$-algebrou a $\Omega_2 = [0,1]$ s borelovskou $\sigma$-algebrou. Položme náhodné množiny $X_1$ a $X_2$, definované na příslušných pravděpodobnostních prostorech, deterministicky rovné množině $\{0,1\}$. První množina má Aumannovu střední hodnotu $\mathbf{E}X_1 = \{0,1\}$, zatímco střední hodnota druhé množiny vyplní celý interval a bude se shodovat se střední hodnotou svého konvexního obalu (Věta 4.10): $\mathbf{E}X_2 = [0,1]$.*

**Příklad 5.7 (Neuzavřený Aumannův integrál)**

*Nechť $\mathbb{E}$ je nereflexivní (tj. $\mathbb{E}^{**} \neq \mathbb{E}$) separabilní Banachův prostor. V tomto prostoru existují uzavřené konvexní množiny $F_1$ a $F_2$, které nelze oddělit nadrovinou (jejich vzdálenost je nulová). Nechť se $X$ s pravděpodobnostmi $1/2$ rovná $F_1$ a $-F_2 = \{-x; x \in F_2\}$. Potom*

$$\mathbf{E}_I X = \{(x_1 - x_2)/2; x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}.$$

*$F_1$ a $F_2$ jsou disjunktní, takže $\mathbf{E}_I X$ neobsahuje nulu. Ale $\rho(F_1, F_2) = 0$, takže nula je v uzávěru $clo(\mathbf{E}_I X)$.*

**Příklad 5.8 (Redukovaná střední hodnota a posunutí)**

*V tomto příkladu si ukážeme, že posunutí náhodné množiny ovlivňuje tvar její střední hodnoty.*

*Říkáme, že $\mathbf{E}X^\sharp$ je redukovaná střední hodnota náhodné množiny $X$, pokud je to střední hodnota množiny $X^\sharp$ definované na $(\Omega, \mathfrak{F}_X, \mathbf{P})$ a stejně rozdělené s $X$; $\mathfrak{F}_X$ je minimální $\sigma$-algebra, vůči níž je $X$ měřitelnou multifunkcí.*

*Nechť $\mathbb{E}$ je reálná přímka, $X$ je determimistická náhodná uzavřená množina rovná $\{0,1\}$, $\xi$ je reálná náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na $[-1,1]$. Definujeme $Y = X + \xi$. Potom redukována střední hodnota je $\mathbf{E}X^\sharp = \{0,1\}$ a $\mathbf{E}Y^\sharp = [0,1] \neq \mathbf{E}X^\sharp + \mathbf{E}\xi$. Důvodem je v podstatě to, že přidání náhodného bodu $\xi$ mění strukturu $\sigma$-algebry generované náhodnou množinou.*

**Příklad 5.9**

*Nechť $\mathbf{X}$ je náhodná uzavřená množina na $\mathbb{R}^d$, která má Aumannovu střední hodnotu $\{a\} \in \mathbb{R}^d$. Dokažeme, že kapacitní funkcionál $T_X$ je míra.*

*Duální prostor k $\mathbb{R}^d$ je separabilní, $\mathbf{EX}$ je jednobodová. Proto z věty 4.13 plyne, že $\mathbf{X}$ je skoro jistě jednobodová množina. Prostor $\mathbb{R}^d$ je lokálně kompaktní a tedy platí Choquetova věta 2.10, z níž plyne, že kapacitní funkcionál $T_X$ je určen jednoznačně a je to míra. Navíc víme, že tato míra má střední hodnotu v bodě $a$.*

**Příklad 5.10 (Graf náhodného procesu)**

*Jedním z přirozených nápadů toho, co by mohlo být náhodnou uzavřenou množinou je graf náhodného procesu. Na příkladu Brownova mostu ověříme, zda opravdu jde o náhodnou množinu.*

*Připomeneme, že Brownův most $\{\mathbf{B}_t, t \in [0,1]\}$ je definován jako $\mathbf{B}_t = \mathbf{W}_t - t\mathbf{W}_1$, kde $\{\mathbf{W}_t, t \in [0,1]\}$ je Wienerův proces (Brownův pohyb).*

*Nejprve ověříme měřitelnost. Pro danou kompaktní množinu $K \in \mathcal{K}$ označme $K_t$ její průnik s přímkou $\{(t,x); x \in \mathbb{R}\}$. Zřejmě $K_t$ je $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-měřitelná. Potom jev z definice náhodné množiny je*

$$[X \cap K \neq \emptyset] = \bigcup_{t \in T} [\mathbf{B}_t \in K_t] = \bigcup_{t \in T \cap \mathbb{Q}} [\mathbf{B}_t \in K_t],$$

*kde v poslední rovnosti jsme využili spojitosti trajektorie Brownova mostu. Měřitelnost posledního jevu plyne z měřitelnosti procesu.*

**Příklad 5.11**

*Najdeme střední hodnotu trojúhelníku $\mathbf{X}$ z příkladu 5.1 za předpokladu, že jeho vrcholy $\{\xi_1\}$, $\{\xi_2\}$, $\{\xi_3\}$ jsou nezávislé se stejným rozdělením $\mathbf{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ na $\mathbb{R}^2$. Už jsme dokázali, že $X$ je náhodná množina. Ze symetrie normalního rozdělení kolem nuly je zřejmé, že pokud střední*

*hodnota existuje, pak je to nula nebo koule se středem v nule. V příkladu 5.13 jsme dokázali, že existuje selekce $\xi \in S(\mathbf{X})$ taková, že $\|\xi\| = \|\mathbf{X}\| = \sup(\|\mu\|; \mu \in S(\mathbf{X}))$ skoro jistě. Selekce $\xi$ je integrovatelná a má největší normu. Tedy norma Aumannovy střední hodnoty $\mathbf{X}$ je rovna střední hodnotě normy selekce $\xi$. Tedy*

$$\mathbf{EX} = \mathbf{B}(\{0\}, \mathbf{E}\|\xi\|) = \mathbf{B}(\{0\}, \mathbf{E}\max\{\|\xi_1\|, \|\xi_2\|, \|\xi_3\|\}).$$

*Poslední výraz už umíme spočítat, neboť $\|\xi_i\|$ mají stejné rozdělení, jako norma jednorozměrné normalní náhodné veličiny. Po kratkém výpočtu dostaneme*

$$\mathbf{E}\max\{\|\xi_1\|, \|\xi_2\|, \|\xi_3\|\} = (2/\pi)^{3/2}/3,$$

*a tedy*

$$\mathbf{EX} = \mathbf{B}(\{0\}, (2/\pi)^{3/2}/3).$$

**Příklad 5.12**

*Vyřešíme ještě jeden příklad. Chceme v $(\mathbb{R}^2, \rho_{eukl})$ zkonstruovat náhodnou množinu, která by s pravděpodobností $p \in [0,1]$ byla jednotkovou koulí, s pravděpodobností $(1-p)$ – čtvercem s délkou strany 2, aby její střed měl normované (po složkách nekorelované) normální rozdělení v rovině (resp. rovnoměrně rozdělený úhel a exponenciálně rozdělenou normu). Navíc chceme najít Aumannovu střední hodnotu této množiny.*

*Mějme pravděpodobnostní prostor $(\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, který neobsahuje atomy. Definujeme v $\mathbb{R}^2$ náhodné veličiny $\xi \sim \mathbf{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ a $\eta \sim Alt(p)$. Definujeme dále dvě deterministické uzavřené náhodné množiny: jednotkovou kouli $\mathbf{B} = \mathbf{B}(0,1)$ a čtverec $\mathbf{C} = \mathbf{C}(0,1)$, kde $\mathbf{C}(0,r)$ je kružnice o poloměru $r$ v supremové metrice. Nyní můžeme definovat náhodnou množinu $\mathbf{X}$:*

$$\mathbf{X} = \xi \oplus (\eta\mathbf{B}) \oplus ((1-\eta)\mathbf{C})$$

*Věta 3.12 zaručuje, že definice je korektní a že $\mathbf{X}$ je opravdu náhodná množina.*

*Pro hledaní střední hodnoty použijeme Větu 4.11: můžeme to udělat, neboť $\mathbb{R}^2$ je Banachův a náhodné množiny $\{\xi\}$, $\eta\mathbf{B}$, $(1-\eta)\mathbf{C}$ jsou integrovatelné (pro $\xi$ to lze snadno spočítat; druhá a třetí množina mají omezenou normu). Dostaneme:*

$$\mathbf{EX} = \mathbf{E}[\xi \oplus (\eta\mathbf{B}) \oplus ((1-\eta)\mathbf{C})] =$$

$$= \mathbf{E}[clo(conv(\xi \oplus (\eta\mathbf{B}) \oplus ((1-\eta)\mathbf{C})))] = clo(conv(\mathbf{E}\xi \oplus \mathbf{E}(\eta\mathbf{B}) \oplus \mathbf{E}((1-\eta)\mathbf{C}))) =$$

$$= clo(conv([0,0] \oplus \mathbf{B}(0,p) \oplus \mathbf{C}(0,(1-p)))) = [\mathbf{B}(0,p) \oplus \mathbf{C}(0,(1-p))].$$

*Výsledná množina je konvexním obalem množiny bodů, ležících „mezi“ jednotkovou kružnici a obvodem čtverce* $\mathbf{C}$*, přičemž čím větší je hodnota* $p$*, tím blíž ke kružnici se tyto body nacházejí. Docela jednoduše můžeme hranici množiny* $\mathbf{X}$ *popsat v polárních souřadnicích:*

$$\partial\mathbf{X} = (\alpha, (1-p)\min\{|\tan(\alpha)|, |\cot(\alpha)|\} + p).$$

*Pro druhou verzi příkladu (kde* $\xi$ *je dána úhlem s rovnoměrným rozdělením a vzdáleností s exponenciálním rozdělením) bude výpočet zcela analogický: stačí si uvědomit, že takto definovaná* $\xi$ *má také nulovou střední hodnotu.*

**Příklad 5.13 (Zobecnění ortogonální regrese)**

*Z praxe je znám pojem ortogonální regrese, neboli úlohy o proložení přímky tak, aby součet čtverců vzdaleností daných (náhodných) bodů od ní byl minimalní. V tomto příkladu zobecníme tuto úlohu na minimalizaci vzdáleností (náhodných) množin od náhodné uzavřené množiny. Ukažeme, že existují-li „geometrická“ řešení pro skoro každou realizaci, pak existuje i měřitelné řešení úlohy. V případě, že optimální řešení neexistuje, ukážeme existenci „skoro optimálních“ řešení. Dokážeme, že množiny všech optimálních a skoro optimálních řešení jsou uzavřené náhodné množiny. Ukažeme existenci řešení, maximalizujicích honoty dalších funkcí.*

*Definujme vzdálenost dvou množin* $F_1$ *a* $F_2$ *v metrickém prostoru* $(X, \rho)$ *jako* $dist_X(F_1, F_2) := \inf\{\rho(x,y); x \in F_1, y \in F_2\}$.

*Nechť* $\mathbb{E}, \Theta$ *jsou lokálně kompaktní úplné separabilní metrické prostory. Nechť* $M : (\Theta, \sigma(\theta), \mathbf{P}_\theta) \to \mathbb{E}$ *je náhodná uzavřená množina na pravděpodobnostním prostoru, indukovaném náhodnou veličinou* $\theta : (\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \Theta$*, a nechť* $\Xi_i : (\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \mathbb{E}, i = 1, \ldots, N$ *jsou náhodné uzavřené množiny. Uvědomme si, že* $M(\theta(.)) : (\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \mathbb{E}$ *je taky náhodná uzavřená množina.*

*Pro* $\omega \in \Omega$*,* $y \in \Theta$ *označme* $S(\omega, y) := \sum_{i=1}^{N} (dist_{\mathbb{E}}(\Xi_i(\omega), M(y)))^2$*. Nechť navíc pro každé pevné* $\omega \in \Omega$ *funkce* $S(\omega, \cdot)$ *je spojitá.*

*Úlohou je optimálně (ve smyslu minimalizace součtu čtverců vzdáleností* $\Xi_i(\omega)$ *od* $M(\theta(\omega))$*) definovat náhodný bod* $\theta$ *nebo, pokud optimální řešení neexistuje (nenabývá se minimum), najít pro dané* $\varepsilon > 0$ *takové řešení, aby*

*součet čtverců vzdáleností byl maximalně o $\varepsilon$ větší, než infimum.*

*Například v $\mathbb{R}^m$ mohou být $\Xi_i$ náhodné body a $M(\theta_0, \theta) = \theta_0 \oplus \phi_\theta(B)$, kde $\theta_0$ je náhodný bod, $\theta$ je $m$-rozměrný náhodný vektor na $[0, 2\pi]^{(m-1)}$, $\phi_\theta(.)$ je funkce otočení o úhel $\theta$ a $B$ je uzavřená deterministická množina. V případě, že $B$ je přímka, jde o úlohu ortogonální regrese.*

(1) *Nejprve předpokládejme existenci „geometrických" řešení, tj. neprázdnost množin $A(\omega) := argminS(\omega, \cdot) \subset \Theta$ pro skoro všechna $\omega \in \Omega$. Ukážeme, že $A$ je uzavřená náhodná množina.*

*Uzavřenost jednotlivých $A(\omega)$ je zřejmá ze spojitosti funkce $S(\omega, \cdot)$. Ověřme měřitelnost: zvolme kompaktní množinu $K \in \mathcal{K}(\Theta)$.*

$$A^-(K) = \{\omega; A(\omega) \cap K \neq \emptyset\} = \{\omega; \min_{y \in \Theta} S(\omega, y) = \min_{x \in K} S(\omega, x)\}.$$

*Pro každou náhodnou uzavřenou množinu v $\mathbb{R}$ její infimum (suprémum) je náhodná veličina: skutečně, je-li $Cast(X)$ – Castaingova reprezentace $X$, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ je*

$$\{\omega; \inf X(\omega) < x\} = \bigcup_{\xi \in Cast(X)} \{\omega; \xi(\omega) < x\}.$$

*S pomocí tohoto tvrzení a věty o měřitelnosti operací ukážeme, že $\min_{x \in K} S(\omega, x)$ je náhodná veličina:*

$$dist_{\mathbb{E}}(\Xi_i(\omega), M(x)) =$$

$$= \inf_{r \in Cast(\Xi)} \inf_{z \in Cast(M(x))} dist_{\mathbb{E}}(r(\omega), z(\omega)) =$$

$$= \inf\{\bigcup_{r \in Cast(\Xi)} \bigcup_{z \in Cast(M(x))} \{\rho(r(\omega), z(\omega))\}\} =$$

$$= \inf clo\{\bigcup_{r \in Cast(\Xi)} \bigcup_{z \in Cast(M(x))} \{\rho_H(r(\omega), z(\omega))\}\};$$

$$S(\omega, x) = \sum_{i=1}^{N} (dist_{\mathbb{E}}(\Xi_i(\omega), M(x)))^2;$$

$$\min_{x\in K} S(\omega,x) =^{(*)} \inf\{S(\omega,x(\omega)); x(\omega)\in Cast(K)\} =$$

$$= \inf clo\{\bigcup_{x\in Cast(K)} \{S(\omega,x(\omega))\}\},$$

*kde v rovnosti* $(*)$ *jsme využili spojitosti* $S(\omega,\cdot)$. *Zcela analogicky lze dokázat, že* $\min_{y\in\Theta} S(\omega,y)$ *je náhodná veličina.*

*Potom ale*

$$A^-(K) = (\min_{y\in\Theta} S(\omega,y) - \min_{x\in K} S(\omega,x))^{-1}(0) \in \mathfrak{F},$$

*to jest* $A$ *je měřitelná. Podle věty o reprezentaci (3.9) existuje Castaingova reprezentace množiny* $A$, *a tedy existují měřitelné funkce* $\theta : (\mathbf{\Omega}, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \Theta$, *minimalizující součet čtverců vzdáleností náhodných množin* $\Xi_i$ *a* $M(\cdot)$, *dokonce množina takových řešení je hustá v* $A$.

(2) *Funkce* $S(\omega,\cdot)$ *však nemusí nabývat minima na* $\Theta$. *Například je-li* $\Theta = \mathbb{N}$, $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, $M(\theta) = \theta^{-1}$, $N = 1$ *a* $\Xi_1 = 0$ *skoro jistě, pak* $S(\omega,x) > 0 = m(\omega)$. *V takovém případě můžeme hledat „dostatecně dobré“ řešení.*

*Definujme* $m(\omega) := \inf_{y\in\Theta}\{S(\omega,y)\}$. *Zvolme* $\varepsilon > 0$ *a budeme se zabývat množinou takových řešení* $\theta$, *že* $S(\omega,\theta(\omega)) \le m(\omega)+\varepsilon$. *Definujme množinu*

$$B(\omega) := \{x\in\Theta; S(\omega,x) \le m(\omega)+\varepsilon\}.$$

*Ukážeme, že* $B$ *je uzavřená náhodná množina. Pro* $\forall\omega\in\Omega$ *je* $B(\omega)$ *uzavřená, neboť* $S(\omega,\cdot)$ *je zdola polospojitá. Ověřme měřitelnost:*

$$\forall K\in\mathcal{K}(\Theta): \quad B^-(K) = \{\omega; S(\omega,\cdot)^{-1}\{(-\infty, m(\omega)+\varepsilon]\}\cap K \neq \emptyset\} =$$

$$= \{\omega; \inf_{k\in K} S(\omega,k) < m(\omega)+\varepsilon\} =$$

$$= \{\inf_{k\in K} S(\omega,k) - m(\omega) < \varepsilon\} \in \mathfrak{F},$$

*neboť, jak jsme již dokázali,* $\inf_{k\in K} S(\omega,k)$ *a* $m(\omega)$ *jsou náhodné veličiny. Zbývá dokázat, že* $B$ *je neprázdná:*

$$B \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \forall\omega\exists x \in \Theta: \quad S(\omega,x) \leq m(\omega)+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad m(\omega) \geq \inf_{y\in\Theta} S(\omega,y),$$

*což platí podle definice* $m(\omega)$.

*V obou probraných případech úloha obecně má více řešení. Ze všech možných řešení, tj. ze všech selekcí náhodné množiny* $A(\omega)$*, resp.* $B(\omega)$*, můžeme hledat "nejlepší", tj. maximalizující hodnotu spojité funkce* $F : \Theta \to \mathbb{R}$.

*Důkaz existence řešení bude probíhat velmi podobně.*
*Je-li* $C(\omega)$ *(náhodná uzavřená) množina optimálních řešení úlohy regrese, pak dokážeme, že* $\sup\{F(C)\} = \sup clo\{\cup_{\xi\in Cast(C)} F(\xi)\}$ *je náhodná veličina, dokážeme, že* $D(\omega) := F^{-1}([\sup\{F(C)\}-\varepsilon,\infty])$ *je náhodná uzavřená množina. Dokažeme, že* $C\cap D$ *je neprázdná náhodná uzavřená množina a tedy existuje její Castaingova reprezentace. Hledaná řešení jsou právě selekce množiny* $C \cap D$.

*Analogicky můžeme požadovat optimálitu řešení podle dalších kriterií.*

# Literatura


[1] Aumann J.P.: *Measurable Utility and the Measurable Choice Theorem*, Proc. Internat. Colloq. La Decision, C.N.R.S. (1967)

[2] Dunford N., Schwartz J.T.: *Linear opaerators I. General theory.*, Intersci. Publ., New York. (1958)

[3] Himmelberg C.J.: *Measurable relations.*, Fund. Math. 87 (1975)

[4] Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C.: *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys. 13. (1965)

[5] Lachout P.: *Matematické programování*, http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/Optima1/081026-Opt-text.pdf.

[6] Molchanov I.: *Theory of random sets*, Springer-Verlag London Limited. (2005)