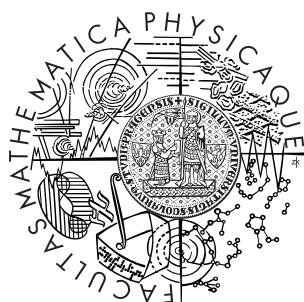


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Tintěra

Fyzikální jevy v anti-de Sitterově a de Sitterově vesmíru

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2010

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce, doc. RNDr. Pavlu Krtoušovi, Ph.D., za jeho ochotu a pomoc při jejím psaní, za trpělivost prokázanou při řešení četných nedorozumění a především za poskytnutí možnosti psát práci na zajímavé téma v oblasti diferenciální geometrie.

Dále bych chtěl poděkovat tvůrcům počítačového systému pro symbolickou manipulaci Maxima, jenž mi byl při psaní dobrým společníkem.

Velký dík patří také mým rodičům, kteří mě v průběhu mého studia psychicky i finančně podporují.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 4. 8. 2010

Tomáš Tintěra

Obsah

Úvod	6
1 Základní pojmy	7
2 Časo-prostorové rozštěpení	11
2.1 Volba parametrizace prostoru	15
2.2 Užitečné vztahy	16
2.3 Skalární vnější křivost	19
2.4 Levi-Civitův tenzor	19
2.5 Hodgeův duál	21
2.6 Divergence	22
2.7 Rotace	22
2.8 Vektory elektrického a magnetického pole	24
2.9 Hustota náboje a hustota proudu	25
2.10 Maxwellovy rovnice	25
3 Anti-de Sitterův vesmír	27
3.1 Sférická parametrizace	28
3.2 Konformní sférická parametrizace	29
3.3 Cylindrická parametrizace	30
3.4 Konformní cylindrická parametrizace	31
3.5 Boost	31
3.6 Boost kolmo na osu z	33
3.7 Dvojitý boost	34
4 Einsteinův vesmír	36
4.1 Konformní spojení s anti-de Sitterovým vesmírem	37
4.2 Sférická parametrizace	37
5 Řešení Maxwellových rovnic v anti-de Sitterově vesmíru	39
5.1 Stokesova věta	39
5.2 Sféricky symetrické elektrostatické pole	40
5.3 Bodový náboj v centru	41
5.4 Stojící bodový náboj v Einsteinově vesmíru	42

5.5	Stojící bodový náboj v anti-de Sitterově vesmíru	44
5.6	Elektrický dipól v centru	46
5.7	Homogenní pole	46
5.8	Nabitý geodetický oscilátor	47
5.9	Geodetický Hertzův dipól	50
5.10	Světelně letící náboj	51
5.11	Geodetický kruhový pohyb bodového náboje	51
5.12	Nabitá geodetická smyčka	54
5.13	Nabitý prstenec	57
5.14	Proudová smyčka	57
5.15	Magnetický dipól v centru	58
5.16	Sféricky symetrická rovnovážná konfigurace	58
	Závěr	60
	Obrazová příloha	61
	Literatura	70

Název práce: Fyzikální jevy v anti-de Sitterově a de Sitterově vesmíru

Autor: Tomáš Tintěra

Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

e-mail vedoucího: `Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz`

Abstrakt: V předložené práci studujeme Maxwellovy rovnice a vlastnosti některých jejich řešení v anti-de Sitterově vesmíru. Je zavedeno časo-prostorové rozštěpení, včetně potřebného formalismu pro přeformulování Maxwellových rovnic. Tyto rovnice jsou pak v rozštěpení anti-de Sitterova vesmíru na čas a časově nezávislý Lobačevského prostor s využitím různých jeho symetrií vyřešeny pro některé konfigurace testovacích zdrojů. Mimo jiné jsou nalezena pole geodeticky oscilujícího bodového náboje a bodového náboje geodeticky se pohybujícího po kružnici. S využitím konformního spojení s Einsteinovým vesmírem je nalezeno pole bodového náboje stojícího v libovolné vzdálenosti od centra. Pro sféricky symetrické rozložení testovacího zdroje s konstantním poměrem hmotnosti a náboje je vyřešena rovnováha elektromagnetické interakce a kosmologické atrakce.

Klíčová slova: anti-de Sitterův vesmír, Maxwellovy rovnice, časo-prostorové rozštěpení

Title: Physical effects in anti-de Sitter and de Sitter universe

Author: Tomáš Tintěra

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: `Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz`

Abstract: In the present work we study Maxwell equations and characteristics of some of their solutions in the anti-de Sitter space. The space-time splitting is introduced, including the formalism necessary to rephrase Maxwell equations. In the splitting of anti-de Sitter space into time and time-independent hyperbolic space, these equations are then solved for certain configurations of test sources, using various symmetries of anti-de Sitter space. Among others, there is solved geodesically oscillating point charge and point charge geodesically moving along a circle. Static point charge with arbitrary distance from the center is solved using conformal relation between Einstein and anti-de Sitter space. Equilibrium between electromagnetic interaction and cosmological attraction is solved for spherically symmetric distribution of test source with constant ratio of mass and charge.

Keywords: anti-de Sitter universe, Maxwell equations, space-time splitting

Úvod

V této práci se budeme zabývat anti-de Sitterovým vesmírem, v němž nalezneme elektromagnetická pole pro různé konfigurace zdrojů. Tato pole interpretujeme v rámci časo-prostorového rozštěpení jako vektorová pole elektrická a magnetická v Lobačevského prostoru, parametricky závislá na čase. Se zdroji budeme přitom pracovat jako s testovacími, tj. zanedbáme, že elektromagnetické pole zpětně ovlivňuje metriku vesmíru.

Anti-de Sitterův vesmír je maximálně symetrický prostoročas s konstantní zápornou skalární křivostí. Je rovněž vakuovým (tj. bez hmotných zdrojů) řešením Einsteinových rovnic se zápornou kosmologickou konstantou.

V současné teoretické fyzice je anti-de Sitterův vesmír významný zejména jako nástroj v různých teoriích usilujících o sjednocení teorie gravitace a kvantové teorie. Jmenovitě se vyskytuje např. v principu nazývaném AdS/CFT korespondence, který s použitím geometrie anti-de Sitterova vesmíru ukazuje souvislosti mezi kvantovou teorií pole a teorií strun.

Při popisu anti-de Sitterova vesmíru budeme používat soustavu jednotek, ve které

$$\begin{aligned}c &= 1 \\G &= 1 \\ \mu_0 &= 1 \\ -\frac{3}{\Lambda} &= 1.\end{aligned}$$

Před studiem anti-de Sitterova vesmíru představíme časo-prostorové rozštěpení, v němž zavedeme pojmy divergence a rotace vektorového pole a odvodíme Maxwellovy rovnice pro vektory elektrického a magnetického pole.

Při řešení Maxwellových rovnic se zaměříme na hledání elektrických a magnetických polí geodeticky se pohybujících nábojů a nábojů s konstantním zrychlením. Vlastní řešení tak bude často spočívat v hledání isometrií anti-de Sitterova vesmíru, pomocí nichž pak transformujeme pole bodového náboje stojícího na centrální geodetice.

Kapitola 1

Základní pojmy

Pro základní pojmy diferenciální geometrie budeme používat převážně definice užívané v [5]. Následuje jejich přehled.

Varieta dimenze n . Varietou budeme rozumět strukturu, která se běžně nazývá diferencovatelnou varietou.

Difeomorfismus variet budeme značit \simeq .

Funkce (na varietě). Funkcí budeme rozumět strukturu, která se běžně nazývá hladká funkce na diferencovatelné varietě.

Křivkou budeme rozumět strukturu, která se běžně nazývá hladká křivka na diferencovatelné varietě.

Tečný prostor v bodě M variety \mathcal{M} budeme značit $T_M\mathcal{M}$. Jeho prvky budeme nazývat *vektory*.

Vektor tečný ke křivce $\gamma(p)$ budeme značit $\frac{d}{dp}$.

Kotečným prostorem v bodě M variety \mathcal{M} budeme rozumět prostor duální k $T_M\mathcal{M}$ a budeme ho značit $T_M^*\mathcal{M}$. Jeho prvky budeme nazývat *formy*.

Úžení vektoru v a formy ω budeme značit $\langle v, \omega \rangle$.

m -krát kovariantním, n -krát kontravariantním tenzorem budeme rozumět lineární kombinaci tenzorových součinů m forem a n vektorů.

Signaturou dvakrát kovariantního symetrického tenzoru rozumíme uspořádanou dvojici (k, l) , kde k , resp. l je počet kladných, resp. záporných prvků posloupnosti

$$\{\omega(v_i, v_i)\}_{i=1}^n,$$

kde $\{v_i\}_{i=1}^n$, je libovolná báze taková, že

$$\omega(v_i, v_j) = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (1.1)$$

Tenzorovým polem budeme rozumět strukturu, která bývá někdy nazývána hladkým tenzorovým polem.

Integrální křivkou vektorového pole v rozumíme takovou křivku, že vektor k ní tečný v libovolném jejím bodě je rovný vektoru v v tomto bodě. Platí následující tvrzení, dokazatelné pomocí věty o lokální existenci řešení Cauchyovy úlohy [5]:

Tvrzení. *Pro každý bod dané variety a pro každé vektorové pole existuje jeho integrální křivka, procházející tímto bodem.*

Tok vektorového pole $\frac{d}{dp}$ budeme značit Φ_p .

Diferenciál funkce. $\langle df, v \rangle$ je definováno jako derivace funkce f podle libovolné křivky, k níž je vektor v tečný.

Lieovu derivaci tenzorového pole T *podle vektorového pole* w budeme značit $\mathcal{L}_w T$. Pro Lieovu derivaci vektorového pole platí následující ekvivalentní charakterizace [5]:

Tvrzení. *Nechť v, w jsou vektorová pole. Potom Lieova derivace w podle v je Lieovou závorkou v a w , neboli pro libovolnou funkci f platí:*

$$\langle df, \mathcal{L}_v w \rangle = \langle d(\langle df, w \rangle), v \rangle - \langle d(\langle df, v \rangle), w \rangle. \quad (1.2)$$

Pseudoriemannovskou varietou dimenze $m + n$ se signaturou (m, n) budeme rozumět varietu, na které je definováno pole g dvakrát kovariantních symetrických tenzorů, které má v každém bodě variety signaturu (m, n) ; toto pole budeme nazývat *metrikou* dané variety.

Díky metrice je v tečném prostoru každého bodu pseudoriemannovské variety definováno přirozené vzájemně jednoznačné zobrazení mezi vektory a formami. Pro toto zobrazení budeme používat notaci použitou v [5]:

$$\forall v \in T_M \mathcal{M} \exists ! v^\flat \in T_M^* \mathcal{M} \forall w \in T_M \mathcal{M} : \langle v^\flat, w \rangle = g(v, w) \quad (1.3)$$

$$\forall \omega \in T_M^* \mathcal{M} \exists ! \omega^\sharp \in T_M \mathcal{M} : (\omega^\sharp)^\flat = \omega. \quad (1.4)$$

Časupodobné a prostorupodobné vektorové pole. Vektorové pole v nazveme časupodobné, jestliže v každém bodě variety je $\langle v^\flat, v \rangle < 0$ a prostorupodobné, jestliže v každém bodě variety je $\langle v^\flat, v \rangle > 0$.

V textu budeme často užívat abstraktní indexovou notaci, popsanou v [4]. Např. zápis jedenkrát kovariantního a dvakrát kontravariantního tenzoru T v ní může vypadat takto:

$$T_\alpha^{\beta\gamma}$$

a jeho zúžení R přes první a třetí index:

$$R^\alpha = T_{\underline{\beta}}^{\alpha\beta}.$$

Někdy ovšem budeme chtít pracovat v konkrétní parametrizaci dané variety (resp. její podmnožiny homeomorfní s \mathbb{R}^k). V takovém případě dáme najevo nepodtržením příslušných indexů, že se na tyto indexy abstraktní notace nevztahuje, např.:

$$T = \sinh(\rho) d\rho \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\rho}$$

$$n^t = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}.$$

Zápisem dx^μ tak rozumíme diferenciál (souřadnicové) funkce x^μ . Zápisem $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ rozumíme vektorové pole ve směru souřadnicových čar souřadnice x^μ . Tedy

$$\left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \left\langle \sum_{\mu} \omega_{\mu} dx^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle = \omega_{\nu} \quad (1.5)$$

$$\langle dx^{\mu}, v \rangle = \left\langle dx^{\mu}, \sum_{\nu} v^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle = v^{\mu}. \quad (1.6)$$

Zavedeme *Kroneckerův tenzor* $\delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\mu}}$ takto:

$$\delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\mu}} \omega_{\underline{\mu}} v^{\underline{\nu}} := \langle \omega, v \rangle. \quad (1.7)$$

Nechť $T_{\underline{\alpha}\dots}^{\beta\dots}$ je tenzorové pole. Potom zápisem $T_{\underline{\alpha}\dots,\lambda}^{\beta\dots}$ budeme rozumět

$$T_{\underline{\alpha}\dots,\lambda}^{\beta\dots} \equiv \left\langle dT_{\underline{\alpha}\dots}^{\beta\dots}, \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \right\rangle \quad (1.8)$$

a budeme ho nazývat *parciální derivace* složky $T_{\underline{\alpha}\dots}^{\beta\dots}$ tenzorového pole T podle souřadnice x^{λ} .

Z definice diferenciálu funkce lze nahlédnout, že

$$f_{,\mu\nu} \equiv \left\langle d\left(\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right\rangle\right), \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle = \left\langle d\left(\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle\right), \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right\rangle \equiv f_{,\nu\mu}, \quad (1.9)$$

neboť derivace funkce podél křivek komutují.

Dosadíme-li do (1.2) souřadnicovou funkci x^μ , souřadnicové vektorové pole $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ a vektorové pole v , získáme:

$$\begin{aligned} \left\langle dx^{\mu}, \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}} v \right\rangle &= \left\langle d(\langle dx^{\mu}, v \rangle), \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle - \left\langle d\left(\left\langle dx^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle\right), v \right\rangle = \\ &= \left\langle dv^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle - \langle d\delta_{\nu}^{\mu}, v \rangle = v^{\mu},_{\nu} - 0 = v^{\mu},_{\nu}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Inverzní metrikou $g^{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ k metrice $g_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ budeme nazývat takové pole dvakrát kontravariantních tenzorů, že

$$g_{\underline{\mu}\underline{\nu}}g^{\underline{\nu}\underline{\sigma}} = \delta_{\underline{\mu}}^{\underline{\sigma}}. \quad (1.11)$$

Víme, že pomocí metriky můžeme zavést isomorfismus mezi vektory a formami: $v \leftrightarrow v^{\flat}$, $\omega \leftrightarrow \omega^{\sharp}$. Totéž můžeme zapsat v indexové notaci:

$$v^{\underline{\mu}} \leftrightarrow g_{\underline{\nu}\underline{\mu}}v^{\underline{\mu}} =: v_{\underline{\nu}} \quad (1.12)$$

$$\omega_{\underline{\mu}} \leftrightarrow g^{\underline{\nu}\underline{\mu}}\omega_{\underline{\mu}} =: \omega^{\underline{\nu}}. \quad (1.13)$$

Obvykle budeme pro zkrácení zápisu rozumět automaticky zdvihání a spouštění indexů pomocí metriky, jak je v rovnicích naznačeno. Vidíme, že inverzní metrika je rovná metrice se zdviženými indexy:

$$g_{\underline{\mu}\underline{\nu}}g^{\underline{\mu}\underline{\alpha}}g^{\underline{\nu}\underline{\beta}} = \delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\alpha}}g^{\underline{\nu}\underline{\beta}} = g^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \quad (1.14)$$

Kovariantní derivaci indukovanou metrikou g (viz např. [1]) budeme značit středníkem: např. kovariantní derivaci vektorového pole $v^{\underline{\mu}}$ podle souřadnice x^{ρ} budeme značit $v^{\underline{\mu}}_{;\rho}$. Kovariantní derivaci lze explicitně vyjádřit pomocí derivací složek metriky podle souřadnicových čar [1]:

$$\Gamma_{\underline{\nu}\underline{\lambda}}^{\underline{\mu}} := \sum_{\kappa} \frac{1}{2} g^{\underline{\mu}\underline{\kappa}} (g_{\kappa\nu,\lambda} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\lambda,\kappa}) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\dots;\lambda}^{\gamma\delta\dots} &= T_{\alpha\beta\dots,\lambda}^{\gamma\delta\dots} + \sum_{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\gamma} T_{\alpha\beta\dots}^{\sigma\delta\dots} + \sum_{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\delta} T_{\alpha\beta\dots}^{\gamma\sigma\dots} + \dots - \\ &\quad - \sum_{\sigma} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} T_{\sigma\beta\dots}^{\gamma\delta\dots} - \sum_{\sigma} \Gamma_{\beta\lambda}^{\sigma} T_{\alpha\sigma\dots}^{\gamma\delta\dots} - \dots, \end{aligned} \quad (1.16)$$

kde $g_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ je uvažovaná metrika. Funkce $\Gamma_{\underline{\nu}\underline{\rho}}^{\underline{\mu}}$ se nazývají *složky afinní konexe*.

Kovariantní derivace vyhovuje Leibnizovu pravidlu:

$$\left(T_{\alpha\dots}^{\beta\dots} R_{\gamma\dots}^{\delta\dots} \right)_{;\lambda} = T_{\alpha\dots;\lambda}^{\beta\dots} R_{\gamma\dots}^{\delta\dots} + T_{\alpha\dots}^{\beta\dots} R_{\gamma\dots;\lambda}^{\delta\dots}. \quad (1.17)$$

Navíc platí [1], že kovariantní derivace metriky je nulová:

$$g_{\underline{\mu}\underline{\nu};\lambda} = 0. \quad (1.18)$$

Proto je možné metriku, jež snižuje, resp. zvyšuje index kovariantně derivovaného tenzoru, před derivací vytknout. Pro kovariantní derivaci platí následující důležité tvrzení [1].

Tvrzení. Pro tenzorová pole $T_{\alpha\dots}^{\beta\dots}$, $S_{\alpha\dots\lambda}^{\beta\dots}$ je tvar rovnice

$$S_{\alpha\dots\lambda}^{\beta\dots} = T_{\alpha\dots;\lambda}^{\beta\dots} \quad (1.19)$$

invariantní vůči změně parametrizace dané variety. $T_{\alpha\dots;\lambda}^{\beta\dots}$ je tedy tenzorovým polem a můžeme pro něj používat abstraktní indexovou notaci:

$$S_{\underline{\alpha}\dots\underline{\lambda}}^{\underline{\beta}\dots} = T_{\underline{\alpha}\dots;\underline{\lambda}}^{\underline{\beta}\dots}. \quad (1.20)$$

Kapitola 2

Časo-prostorové rozštěpení

Mějme pseudoriemannovskou varietu \mathcal{M} se signaturou (k, l) , její metriku označme g . Na \mathcal{M} mějme definovanou funkci t , její obor hodnot označme $T \subset \mathbb{R}$. Předpokládejme, že funkce t je taková, že v každém bodě variety \mathcal{M} platí

$$\langle dt, dt^\sharp \rangle \neq 0. \quad (2.1)$$

Jelikož $\langle dt, dt^\sharp \rangle$ je spojitou nenulovou funkcí na \mathcal{M} , je podle Darbouxovy věty [6, věta 4.23] funkcí buď kladnou, nebo zápornou. Protože tyto dva případy jsou na sebe snadno převoditelné přechodem z g na $-g$, budeme dále předpokládat, že vektorové pole dt^\sharp je časupodobné:

$$\langle dt, dt^\sharp \rangle < 0. \quad (2.2)$$

Symbolem $\frac{\partial}{\partial t}$ označme vektorové pole

$$\frac{\partial}{\partial t} := -N^2 dt^\sharp, \quad (2.3)$$

kde $N > 0$ je funkce na \mathcal{M} taková, že

$$\left\langle dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1. \quad (2.4)$$

Funkci N budeme říkat *laps*. Vidíme, že

$$N = \frac{1}{\sqrt{-\langle dt, dt^\sharp \rangle}}. \quad (2.5)$$

Zaveďme si vektorové pole

$$n := \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Potom n je normovaným vektorovým polem:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &= \langle n^b, n \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \right)^b, \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(-N dt^\sharp \right)^b, -N dt^\sharp \right\rangle = N^2 \langle dt, dt^\sharp \rangle = -1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

s nulovou prostorovou projekcí (tj. úměrným vektorovému poli $\frac{\partial}{\partial t}$).

Pro dané $t_0 \in T$ označme symbolem \mathcal{S}_{t_0} podmnožinu variety \mathcal{M} charakterizovanou příslušnou hodnotou funkce t :

$$\mathcal{S}_{t_0} := \{M \in \mathcal{M} \mid t(M) = t_0\}. \quad (2.8)$$

Tvrzení 1. *Potom množiny \mathcal{S}_{t_0} , kde $t_0 \in T$, jsou pseudoriemannovskými varietami se signaturou $(k-1, l)$.*

Idea důkazu. Zvolme $t_0 \in T$. Z věty o implicitní funkci [6] plyne, že množina \mathcal{S}_{t_0} je lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^{k+l-1} (a je tedy topologickou varietou dimenze $k+l-1$). Protože $\mathcal{S}_{t_0} \subset \mathcal{M}$, můžeme \mathcal{S}_{t_0} doplnit o tutéž diferenciální strukturu (resp. o její restrikcí na \mathcal{S}_{t_0}), jaká je definována na \mathcal{M} . Vidíme tedy, že \mathcal{S}_{t_0} je diferencovatelnou varietou dimenze $k+l-1$.

Pro $t_0 \in T$ definujme na \mathcal{S}_{t_0} tenzorové pole $\bar{g}_{ij}(t_0)$ takto:

$$\bar{g}_{ij}(t_0) T^{ij} := g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

pro každé tenzorové pole T^{ij} , pro které

$$n_\mu T^{\mu\nu} = n_\nu T^{\nu\mu} = 0. \quad (2.10)$$

Signaturu tohoto pole označme (\bar{k}, \bar{l}) . Zbývá dokázat, že $\bar{k} = k-1$, $\bar{l} = l$. Zvolme tedy libovolný bod $M \in \mathcal{S}_{t_0}$. Vektor $\frac{\partial}{\partial t}$ není žádnou lineární kombinací vektorů báze prostoru $\mathbb{T}_M \mathcal{S}_{t_0}$, neboť všechny vektory báze $\mathbb{T}_M \mathcal{S}_{t_0}$, na rozdíl od vektoru $\frac{\partial}{\partial t}$ (viz (2.4)), jsou tečnými vektory ke křivkám, na nichž je hodnota t konstantní. Ze stejného důvodu je vektor $\frac{\partial}{\partial t}$ kolmý na každý prvek v báze prostoru $\mathbb{T}_M \mathcal{S}_{t_0}$:

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b, v \right\rangle = -N^2 \langle dt, v \rangle = 0. \quad (2.11)$$

Doplňme-li tedy nějakou ortogonální¹ bázi prostoru $\mathbb{T}_M \mathcal{S}_{t_0}$ vektorem $\frac{\partial}{\partial t}$ (jenž je časupodobný), získáme lineárně nezávislou množinu o $k+l$ prvcích, tedy bázi prostoru $\mathbb{T}_M \mathcal{M}$, která je navíc ortogonální. Uvědomíme-li si, že každá ortogonální báze prostoru $\mathbb{T}_M \mathcal{M}$, resp. $\mathbb{T}_M \mathcal{S}_{t_0}$ se skládá z k , resp. \bar{k} časupodobných a l , resp. \bar{l} prostorupodobných vektorů, dojdeme konečně k závěru, že $(\bar{k}, \bar{l}) = (k-1, l)$. \square

¹Podmínka (2.9) nám zaručí, že taková báze je ortogonální vzhledem k metrice g i \bar{g} .

Nadále předpokládejme, že konkrétně $k = 1$.

Tvrzení 2. Pak pro dané $t_0 \in T$ každá časupodobná křivka $\gamma(p)$ na \mathcal{M} protne množinu \mathcal{S}_{t_0} nejvýše jednou.

Důkaz. Zkoumejme, jak se mění hodnota t podél křivky $\gamma(p)$, neboli zkoumejme funkci $t(\gamma(p))$. Definiční obor křivky $\gamma(p)$ označme P . Víme, že derivace funkce $t \circ \gamma$ je spojitou reálnou funkcí na otevřeném intervalu P . Ukážeme-li, že tato derivace nemůže být na P nulová, získáme z Darbouxovy věty, že je na P buď kladná, nebo záporná, a tedy funkce $t(\gamma(p))$ je buď rostoucí, nebo klesající; v obou případech pak dospějeme k závěru, že křivka $\gamma(p)$ nemůže protnout žádnou plochu \mathcal{S}_{t_0} vícekrát než jednou, což bylo dokázat.

Derivace funkce $t(\gamma(p))$ je rovná (viz definici diferenciálu funkce)

$$\frac{dt}{dp} = \left\langle dt, \frac{d}{dp} \right\rangle. \quad (2.12)$$

Označme (v_1, \dots, v_l) bázi prostoru $T_{\gamma(p)}\mathcal{S}_{t_0}$. Z předchozího důkazu víme, že doplníme-li (v_1, \dots, v_l) vektorem $\frac{\partial}{\partial t}$, získáme bázi prostoru $T_{\gamma(p)}\mathcal{M}$. Rozložme do této báze vektor $\frac{d}{dp}$:

$$\frac{d}{dp} = c_0 \frac{\partial}{\partial t} + c_1 v_1 + \dots + c_l v_l, \quad (2.13)$$

$$c_0, \dots, c_l \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

$$c_0 \neq 0. \quad (2.15)$$

Poslední nerovnost plyne z časupodobnosti vektoru $\frac{d}{dp}$ a z toho, že $\frac{\partial}{\partial t}$ je jediným časupodobným vektorem uvažované báze. Dosadíme do (2.12):

$$\frac{dt}{dp} = c_0 \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + c_1 \langle dt, v_1 \rangle + \dots + c_l \langle dt, v_l \rangle. \quad (2.16)$$

Dále zřejmě

$$\forall i \in \{1, \dots, l\} : \langle dt, v_i \rangle = 0, \quad (2.17)$$

neboť vektory v_i , kde $i \in \{1, \dots, l\}$, jsou tečnými vektory ke křivkám, na nichž je hodnota t konstantní. (2.16) tedy můžeme, s využitím (2.4), konečně zapsat ve tvaru

$$\frac{dt}{dp} = c_0 \neq 0, \quad (2.18)$$

čímž je důkaz završen. \square

Dále předpokládejme, že pro každé $t_0, t_1 \in T$ je tok $\Phi_{t_1-t_0}$ vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$ spojitě zobrazení.

Tvrzení 3. *Potom variety \mathcal{S}_{t_0} jsou pro $t_0 \in T$ navíc vzájemně difeomorfní, tedy existuje pseudoriemannovská varieta \mathcal{S} se signaturou $(0, l)$ taková, že*

$$\forall t_0 \in T: \mathcal{S}_{t_0} \simeq \mathcal{S}. \quad (2.19)$$

Důkaz. Chceme ukázat, že pro každé $t_0, t_1 \in T$ existuje hladké vzájemně jednoznačné zobrazení, zobrazující \mathcal{S}_{t_0} na \mathcal{S}_{t_1} . Tvrdíme, že tímto zobrazením je tok $\Phi_{t_1-t_0}$ vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$. Je zřejmé, že $\Phi_{t_1-t_0}$ je prosté zobrazení, zobrazující \mathcal{S}_{t_0} na \mathcal{S}_{t_1} , dále víme, že je spojitě. Zbývá dokázat, že zobrazení $\Phi_{t_1-t_0}$ je hladké, tedy že obrazy hladkých křivek v \mathcal{S}_{t_0} jsou hladké křivky v \mathcal{S}_{t_1} .

Zvolme v \mathcal{S}_{t_0} hladkou křivku $\gamma(p)$. Stačí nám ukázat, že ke každému bodu křivky $\gamma(p)$ existuje nějaké jeho okolí $\Omega_0 \subset \mathcal{S}_{t_0}$ takové, že restrikce křivky $\gamma(p)$ na toto okolí je zobrazena na hladkou křivku v \mathcal{S}_{t_1} . Za okolí Ω_0 vyberme takové okolí, které je homeomorfní s \mathbb{R}^l (existenci takového okolí nám zaručuje definice variety); restrikci křivky $\gamma(p)$ na Ω_0 označme $\tilde{\gamma}(p)$. Protože je tok vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$ spojitě zobrazení, je množina $\{M \in \mathcal{M} \mid \exists t' \in T \exists M_0 \in \mathcal{S}_{t_0}: M = \Phi_{t'-t_0}(M_0)\}$ homeomorfní (a tedy (z definice diferencovatelné variety) i difeomorfní) s $T \times \mathbb{R}^l$. V $T \times \mathbb{R}^l$ je ovšem zobrazení $\Phi_{t_1-t_0}$ realizováno pouhým posunutím první souřadnice o $t_1 - t_0$, a tedy je hladké. Vidíme tedy, že zobrazení $\Phi_{t_1-t_0}: \mathcal{S}_{t_0} \rightarrow \mathcal{S}_{t_1}$ zachovává hladkost křivek, protože ji zachovává lokálně. \square

Vidíme, že tato struktura nám umožňuje (pomocí toku vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$) interpretovat obraz libovolné časupodobné křivky $\gamma(p)$ na \mathcal{M} jako parametrický pohyb po varietě \mathcal{S} s parametrem t . Tuto interpretaci nazýváme *časoprostorové rozštěpení*. Parametr t můžeme nahlížet jako *čas* a varietu \mathcal{S} jako *prostor*.

Má-li nějaké vektorové pole v na \mathcal{M} nulovou časovou projekci:

$$\langle dt, v \rangle = 0, \quad (2.20)$$

pak pro každou jeho integrální křivku $\gamma(p)$ existuje takové $t_0 \in T$, že obraz $\gamma(p)$ leží v \mathcal{S}_{t_0} (neboť derivace funkce t podle křivky $\gamma(p)$ je nulová). Vektorové pole v na \mathcal{M} tak lze interpretovat jako vektorové pole $v(t)$ (často budeme psát jenom v) na \mathcal{S} , parametricky závislé na čase t .

Je vidět z definice Lieovy derivace, že časová derivace takového vektorového pole $v(t)$ (budeme ji značit \dot{v}) je Lieovou derivací vektorového pole v na \mathcal{M} podle vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\dot{v} \equiv \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} v. \quad (2.21)$$

Dosadíme-li nyní (2.21) do (1.10), zjistíme, že složka časové derivace vektoru je rovna derivaci příslušné složky tohoto vektoru podle integrální křivky vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$ (říkáme, že je rovna parciální derivaci této složky podle časové souřadnice):

$$\dot{v}^\mu = \langle dx^\mu, \dot{v} \rangle \equiv \left\langle dx^\mu, \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} v \right\rangle = v^{\mu, t}. \quad (2.22)$$

2.1 Volba parametrizace prostoru

Pro zjednodušení výpočtů budeme dále předpokládat, že máme takovou parametrizaci (x^0, \dots, x^l) variety \mathcal{M} , ve které je metrika diagonální:

$$g = g_{00} (dx^0)^2 + \dots + g_{ll} (dx^l)^2 \quad (2.23)$$

a kde $x_0 \equiv t$ je dříve zavedená funkce t . Potom zřejmě

$$g_{00} = -N^2 \quad (2.24)$$

a pro každou ze souřadnicových křivek souřadnic x^1, \dots, x^l existuje takové $t_0 \in T$, že obraz této křivky leží v \mathcal{S}_{t_0} (neboť $\langle dt, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = 0$ pro $i \in \{1, \dots, l\}$, a tedy se hodnota funkce t nemění podél integrálních křivek $\frac{\partial}{\partial x^i}$). Variety \mathcal{S}_{t_0} , kde $t_0 \in T$, lze tedy parametrizovat souřadnicovými křivkami x^1, \dots, x^l .

V této parametrizaci má pro $t \in T$ tenzorové pole $\bar{g}(t)$, zavedené v (2.9), tvar

$$\bar{g}_{ij}(t) = g_{ij}, \quad (2.25)$$

a tedy také (neboť signatura metriky \bar{g} je $(0, l)$):

$$g_{ii} > 0 \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, l\}. \quad (2.26)$$

Odtud také

$$g = -n^b \otimes n^b + \bar{g} \quad (2.27)$$

Označíme-li tedy symbolem $\bar{\Gamma}_{jk}^i(t)$ složky afinní konexe variety \mathcal{S}_t , pak

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \sum_{p=1}^l \frac{1}{2} \bar{g}^{ip} (\bar{g}_{pj,k} + \bar{g}_{kp,j} - \bar{g}_{jk,p}) = \sum_{p=1}^l \frac{1}{2} g^{ip} (g_{pj,k} + g_{kp,j} - g_{jk,p}). \quad (2.28)$$

V tomto případě můžeme také jednoduše vyjádřit inverzní metriku $g_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{g_{\mu\nu}} & \text{pro } \mu = \nu \\ 0 & \text{pro } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.29)$$

a inverzní metriku \bar{g}^{ij} k \bar{g} :

$$\bar{g}^{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{g}_{ij}} & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

2.2 Užitečné vztahy

Kovariantní derivaci na \mathcal{S}_t , $t \in T$, budeme značit dvojtečkou: např. kovariantní derivaci vektorového pole v^i na \mathcal{S}_t podle souřadnice x^k ($k \in \{1, \dots, l\}$) budeme značit $v^i{}_{;k}$. Tedy:

$$v^i{}_{;k} = v^i{}_{,k} + \sum_{j=1}^l \bar{\Gamma}_{jk}^i v^j. \quad (2.31)$$

Tenzor $v^{\underline{\mu}}{}_{;\underline{\nu}}$ můžeme podle zavedeného ztotožnění \mathcal{M} a \mathcal{S} opět chápat jako tenzor na \mathcal{M} . V uvažované parametrizaci pak podle (2.28) a (2.29), s uvážením toho, že $\langle dt, v \rangle = 0$, platí:

$$\begin{aligned} v^i{}_{;k} &= v^i{}_{,k} + \sum_{j=1}^l \sum_{p=1}^l \frac{1}{2} g^{ip} (g_{pj,k} + g_{kp,j} - g_{jk,p}) v^j = \\ &= v^i{}_{,k} + \sum_{j=0}^l \sum_{p=0}^l \frac{1}{2} g^{ip} (g_{pj,k} + g_{kp,j} - g_{jk,p}) v^j - \\ &\quad - \sum_{p=1}^l \frac{1}{2} g^{ip} (g_{p0,k} + g_{kp,0} - g_{0k,p}) v^0 - \\ &\quad - \sum_{j=0}^l \frac{1}{2} g^{i0} (g_{0j,k} + g_{k0,j} - g_{jk,0}) v^j = \\ &= v^i{}_{,k} + \sum_{j=0}^l \sum_{p=0}^l \frac{1}{2} g^{ip} (g_{pj,k} + g_{kp,j} - g_{jk,p}) v^j = v^i{}_{;k}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Vztah (2.32) je třeba chápat jako soubor rovností, parametrizovaných $i, k \in \{1, \dots, l\}$. Tento výsledek ovšem můžeme vyjádřit i kovariantně, pomocí prostorového projektoru $(\delta_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}} + n^{\underline{\mu}} n_{\underline{\alpha}})(\delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\beta}} + n_{\underline{\nu}} n^{\underline{\beta}})$:

Tvrzení 4. *Pro vektorové pole v^i na \mathcal{S} (tj. $\langle dt, v \rangle = 0$) platí:*

$$v^{\underline{\mu}}{}_{;\underline{\nu}} = \left(\delta_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}} + n^{\underline{\mu}} n_{\underline{\alpha}} \right) \left(\delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\beta}} + n_{\underline{\nu}} n^{\underline{\beta}} \right) v^{\underline{\alpha}}{}_{;\underline{\beta}}. \quad (2.33)$$

Důkaz. Tvrzení ověříme po složkách. Po dosazení $\mu, \nu \in \{1, \dots, l\}$ přejde (2.33) na (2.32). Po dosazení $\mu = 0$ je levá strana nulová, stejně jako první faktor pravé strany. Obdobně po dosazení $\nu = 0$ je levá strana nulová, stejně jako druhý faktor pravé strany. \square

Důsledek 1. *Pro vektorové pole v^i na \mathcal{S} platí:*

$$v^{\underline{\nu}}{}_{;\underline{\nu}} = v^{\underline{\nu}}{}_{;\underline{\nu}} + n_{\underline{\alpha}} n^{\underline{\nu}} v^{\underline{\alpha}}{}_{;\underline{\nu}}. \quad (2.34)$$

Důkaz. Když rovnici (2.33) roznásobíme:

$$v_{;\underline{\nu}}^{\underline{\mu}} = v_{;\underline{\nu}}^{\underline{\mu}} + n^{\underline{\mu}} n_{\underline{\alpha}} v_{;\underline{\nu}}^{\underline{\alpha}} + n_{\underline{\nu}} n^{\underline{\beta}} v_{;\underline{\beta}}^{\underline{\mu}} + n^{\underline{\mu}} n_{\underline{\nu}} n_{\underline{\alpha}} n^{\underline{\beta}} v_{;\underline{\beta}}^{\underline{\alpha}}, \quad (2.35)$$

vidíme, že po vynásobení $\delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\mu}}$ přejde na (2.34), neboť $n^{\underline{\nu}} n_{\underline{\nu}} = -1$ (viz (2.7)). \square

Důsledek 2. Pro vektorové pole $v^{\underline{i}}$ na \mathcal{S} platí:

$$v_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} = -3n^{\underline{\alpha}} n_{[\underline{\alpha}} v_{\underline{\mu};\underline{\nu}]}, \quad (2.36)$$

kde hranaté závorky označují antisymetrizaci v jimi uzavřených indexech.

Důkaz. Rovnice (2.35) přejde po vynásobení $g_{\underline{\mu}\sigma}$, za použití (2.9) a (2.7), na

$$v_{\underline{\sigma};\underline{\nu}} = n^{\underline{\alpha}} \left(n_{\underline{\sigma}} v_{\underline{\alpha};\underline{\nu}} + n_{\underline{\nu}} v_{\underline{\sigma};\underline{\alpha}} - n_{\underline{\alpha}} v_{\underline{\sigma};\underline{\nu}} \right) + n_{\underline{\sigma}} n_{\underline{\nu}} n^{\underline{\alpha}} n^{\underline{\beta}} v_{\underline{\alpha};\underline{\beta}}. \quad (2.37)$$

Antisymetrizací v indexech σ, ν pak získáme dokazované tvrzení. \square

Tvrzení 5. Necht $\omega_{\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_p}$ je pole p -krát kovariantních tenzorů. Potom

$$\omega_{[\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_p; \lambda]} = \omega_{[\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_p, \lambda]}. \quad (2.38)$$

Důkaz. Dle definice kovariantní derivace:

$$\begin{aligned} \omega_{[\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_p; \lambda]} &= \omega_{[\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_p, \lambda]} - (-1)^{p-1} \sum_{\sigma=0}^l \omega_{\sigma[\underline{\mu}_2 \dots \underline{\mu}_p} \Gamma_{\underline{\mu}_1 \lambda]}^{\sigma} - \dots - \\ &\quad - (-1)^{p-p} \sum_{\sigma=0}^l \omega_{[\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_{p-1} | \sigma} \Gamma_{\underline{\mu}_p \lambda]}^{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ovšem

$$\Gamma_{\underline{\mu}\lambda}^{\sigma} = \sum_{\alpha=0}^l \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (g_{\alpha\mu, \lambda} + g_{\lambda\alpha, \mu} - g_{\mu\lambda, \alpha}) \quad (2.40)$$

je symetrické v indexech μ, λ , a tak jsou druhý až poslední člen na pravé straně nulové. \square

Tvrzení 6. Platí:

$$n_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} = \frac{-1}{N} \left(N_{;[\underline{\mu}} n_{\underline{\nu}]} \right). \quad (2.41)$$

Důkaz. Tvrzení ověříme po složkách. Dle tvrzení 5:

$$\begin{aligned} 2n_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} &= n_{\underline{\mu}, \underline{\nu}} - n_{\underline{\nu}, \underline{\mu}} = \frac{n_{\underline{\mu}}}{-N} (-N)_{;\underline{\nu}} - \frac{n_{\underline{\nu}}}{-N} (-N)_{;\underline{\mu}} = \frac{-1}{N} (N_{;\underline{\mu}} n_{\underline{\nu}} - N_{;\underline{\nu}} n_{\underline{\mu}}) = \\ &= \frac{-1}{N} \left((\delta_{\underline{\mu}}^{\underline{\alpha}} + n_{\underline{\mu}} n^{\underline{\alpha}}) N_{;\underline{\alpha}} n_{\underline{\nu}} - (\delta_{\underline{\nu}}^{\underline{\alpha}} + n_{\underline{\nu}} n^{\underline{\alpha}}) N_{;\underline{\alpha}} n_{\underline{\mu}} \right) = \\ &= \frac{-1}{N} (N_{;\underline{\mu}} n_{\underline{\nu}} - N_{;\underline{\nu}} n_{\underline{\mu}}) \equiv \frac{-2}{N} (N_{;[\underline{\mu}} n_{\underline{\nu}]}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

\square

Tvrzení 7. Pro vektorové pole v^i na \mathcal{S} platí:

$$v^\alpha{}_{;\underline{\nu}} n^\nu \left(\delta_{\underline{\alpha}}^\mu + n^\mu n_{\underline{\alpha}} \right) = n^\mu{}_{;\underline{\nu}} v^\nu + \frac{1}{N} \dot{v}^\mu. \quad (2.43)$$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že

$$n_{\underline{\alpha}} n^\alpha{}_{;\underline{\nu}} = \frac{1}{2} \left(n_{\underline{\alpha}} n^\alpha{}_{;\underline{\nu}} + n_{\underline{\alpha};\underline{\nu}} n^\alpha \right) = \frac{1}{2} (n_{\underline{\alpha}} n^\alpha)_{;\underline{\nu}} = \frac{1}{2} (-1)_{;\underline{\nu}} = 0. \quad (2.44)$$

Stačí tedy dokázat

$$(v^\alpha{}_{;\underline{\nu}} n^\nu - n^\alpha{}_{;\underline{\nu}} v^\nu) \left(\delta_{\underline{\alpha}}^\mu + n^\mu n_{\underline{\alpha}} \right) = \frac{1}{N} \dot{v}^\mu, \quad (2.45)$$

kde jsme vzali v úvahu (2.22). Rovnost ověříme po složkách. $\delta_{\underline{\alpha}}^\mu + n^\mu n_{\underline{\alpha}}$ je projektor na ortogonální doplněk n , pro $\mu = 0$ tedy platnost rovnice odhaluje obdobná úvaha jako v důkazu tvrzení 4.

Pro $\mu \in \{1, \dots, l\}$ přejde rovnice na

$$v^\mu{}_{;0} n^0 - \sum_{\nu} n^\mu{}_{;\nu} v^\nu = \frac{1}{N} v^\mu{}_{,0}, \quad \mu \in \{1, \dots, l\}. \quad (2.46)$$

Pro $\mu \in \{1, \dots, l\}$ podle definice kovariantní derivace, (2.29) a s přihlédnutím k podmínce $\langle dt, v \rangle = 0$ v souvislosti s (2.23) platí:

$$\begin{aligned} v^\mu{}_{;0} &= v^\mu{}_{,0} + \sum_{\alpha=0}^l \frac{1}{2} g^{\mu\mu} (g_{\mu\alpha,0} + g_{0\mu,\alpha} - g_{\alpha 0,\mu}) v^\alpha = \\ &= v^\mu{}_{,0} + \frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{\mu\mu,0} v^\mu, \end{aligned} \quad (2.47)$$

odkud

$$v^\mu{}_{;0} n^0 = \frac{1}{N} \left(v^\mu{}_{,0} + \frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{\mu\mu,0} v^\mu \right), \quad \mu \in \{1, \dots, l\}. \quad (2.48)$$

Dále pro $\mu, \nu \in \{1, \dots, l\}$ podle definice kovariantní derivace, (2.29) a podobné úvahy:

$$n^\mu{}_{;\nu} = 0 + \sum_{\alpha=0}^l \frac{1}{2} g^{\mu\mu} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu}) n^\alpha = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{\nu\mu,0} n^0, \quad (2.49)$$

odkud s použitím $\langle dt, v \rangle = 0$:

$$\sum_{\nu} n^\mu{}_{;\nu} v^\nu = \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{\nu\mu,0} n^0 v^\nu = \frac{1}{N} \frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{\mu\mu,0} v^\mu, \quad \mu \in \{1, \dots, l\}. \quad (2.50)$$

Konečně odečtením (2.48) a (2.50) získáme (2.46). \square

Tvrzení 8. *Platí:*

$$n_{\underline{\mu};\underline{\nu}} n^{\underline{\nu}} = \frac{1}{N} N_{;\underline{\mu}}. \quad (2.51)$$

Důkaz. Uvědomíme-li si (2.44), můžeme použít tvrzení 6:

$$n_{\underline{\mu};\underline{\nu}} n^{\underline{\nu}} = 2n_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} n^{\underline{\nu}} = \frac{-2}{N} \left(N_{;[\underline{\mu} n_{\underline{\nu}]} \right) n^{\underline{\nu}} = \frac{1}{N} \left(N_{;\underline{\mu}} + N_{;\underline{\nu}} n^{\underline{\nu}} n_{\underline{\mu}} \right) = \frac{1}{N} N_{;\underline{\mu}}. \quad (2.52)$$

□

2.3 Skalární vnější křivost

Funkci

$$K := n^{\underline{\mu}}_{;\underline{\mu}} \quad (2.53)$$

na \mathcal{M} nazvěme *skalární vnější křivost*. Vzhledem k (2.44), (2.49) je

$$K = \sum_{\mu=1}^l n^{\mu}_{;\mu} = \sum_{\mu=1}^l \frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{\mu\mu,0} n^0 = \frac{1}{N} (\ln \sqrt{g_{11} \cdots g_{ll}})_{,0}. \quad (2.54)$$

2.4 Levi-Civitův tenzor

Dále budeme předpokládat, že signatura variety \mathcal{M} je konkrétně (1, 3).

Pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, 2, 3\}$ (resp. pro $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$) budeme zápisem $\text{sgn}(\alpha\beta\gamma\delta)$ (resp. $\text{sgn}(i, j, k)$) myslet 0, pokud $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (resp. i, j, k) není permutací na množině $\{0, 1, 2, 3\}$ (resp. $\{1, 2, 3\}$), a znaménko² této permutace, pokud takovou permutací je.

Nechť $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ značí *Levi-Civitův tenzor* (viz např. [3]):

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} := \text{sgn}(\alpha\beta\gamma\delta) \sqrt{|g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} g_{\delta\delta}|}. \quad (2.55)$$

Pro složky jeho kontravariantní verze zřejmě platí:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\text{sgn}(\alpha\beta\gamma\delta) \frac{1}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} g_{\delta\delta}|}}. \quad (2.56)$$

Je zřejmé, že tenzor ϵ je antisymetrický vůči záměně libovolných dvou jeho indexů.

²Přiřazení čísel $0, \dots, 3$ jednotlivým bázovým funkcím zvolené parametrizace je libovolné. Tímto přiřazením však určujeme znaménko tenzoru ϵ (viz dále), a přiřazení čísel bázovým funkcím jiné ortogonální parametrizace je potom třeba volit tak, aby definice ϵ zůstala nezávislá na volbě ortogonální parametrizace. V praxi to znamená, že volíme takové pořadí bázových funkcí, aby jakobiány přechodů mezi parametrizacemi byly kladné. Pořadí bázových funkcí, které má znaménko permutace 1, nazýváme *pravotočivé*.

Zaveďme pole

$$\bar{\epsilon}_{\mu\nu\sigma} := \epsilon_{\underline{\alpha}\underline{\mu}\underline{\nu}\underline{\sigma}} n^\alpha. \quad (2.57)$$

Z antisymetričnosti tenzorů ϵ a $\bar{\epsilon}$ plyne, že $\bar{\epsilon}$ má nulovou časovou projekci v každém indexu:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\delta\underline{\beta}\underline{\gamma}} n^\beta &= \bar{\epsilon}_{\underline{\gamma}\underline{\delta}\underline{\beta}} n^\beta = \bar{\epsilon}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} n^\beta = \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} n^\alpha n^\beta = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} n^\alpha n^\beta - \epsilon_{\underline{\beta}\underline{\alpha}\underline{\gamma}\underline{\delta}} n^\alpha n^\beta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} n^\alpha n^\beta - \epsilon_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} n^\beta n^\alpha \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Z vyjádření (2.55), (2.56) tenzoru ϵ ve složkách je vidět, že pro libovolná $A_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}}$, $B_{\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}}$, $C_{\underline{\gamma}\underline{\delta}}$, $D_{\underline{\delta}}$ platí:

$$\sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \epsilon_{\mu\nu\sigma\kappa} \epsilon^{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} A_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} = - \sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \text{sgn}(\mu\nu\sigma\kappa) \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}) A_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} = -0! 4! A_{[\underline{\mu}\underline{\nu}\underline{\sigma}\underline{\kappa}]} \quad (2.59)$$

$$\sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \epsilon_{\alpha\underline{\mu}\underline{\nu}\underline{\sigma}} \epsilon^{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} B_{\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} = - \sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \text{sgn}(\alpha\underline{\mu}\underline{\nu}\underline{\sigma}) \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}) B_{\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} = -1! 3! B_{[\underline{\mu}\underline{\nu}\underline{\sigma}]} \quad (2.60)$$

$$\sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\mu}\underline{\nu}} \epsilon^{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} C_{\underline{\gamma}\underline{\delta}} = - \sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\mu}\underline{\nu}) \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}) C_{\underline{\gamma}\underline{\delta}} = -2! 2! C_{[\underline{\mu}\underline{\nu}]} \quad (2.61)$$

$$\sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\mu}} \epsilon^{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} D_{\underline{\delta}} = - \sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\mu}) \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}) D_{\underline{\delta}} = -3! 1! D_{\underline{\mu}} \quad (2.62)$$

$$\sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \epsilon^{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} = - \sum_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}) \text{sgn}(\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}) = -4! 0! \quad (2.63)$$

Tvrzení 9. Platí:

$$\epsilon_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta};\lambda} = 0. \quad (2.64)$$

Důkaz. Tvrzení ověříme po složkách. Platí:

$$\epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta};\lambda} = \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta},\lambda} + A, \quad (2.65)$$

kde

$$A = - \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \epsilon_{\sigma\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} - \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\beta\lambda}^\sigma \epsilon_{\alpha\underline{\sigma}\underline{\gamma}\underline{\delta}} - \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\gamma\lambda}^\sigma \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\sigma}\underline{\delta}} - \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\delta\lambda}^\sigma \epsilon_{\alpha\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\sigma}}. \quad (2.66)$$

Není-li $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ permutací na množině $\{0, 1, 2, 3\}$, pak mezi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ existuje dvojice indexů, které se vzájemně rovnají. Potom je ovšem $A = 0$, neboť záměna libovolných dvou členů má znaménko permutace -1 . Tak např. pro $\alpha = \gamma$:

$$A = - \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \epsilon_{\sigma\underline{\beta}\underline{\gamma}\underline{\delta}} - 0 + \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\gamma\lambda}^\sigma \epsilon_{\sigma\underline{\beta}\underline{\alpha}\underline{\delta}} - 0 = 0. \quad (2.67)$$

Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} A &= - \sum_{\sigma=0}^4 \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \sum_{\sigma=0}^4 \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} (g_{\sigma\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\sigma} - g_{\sigma\lambda,\sigma}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \\ &= - \sum_{\sigma=0}^4 \frac{g_{\sigma\sigma,\lambda}}{2g_{\sigma\sigma}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Vyjádříme-li ještě $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda} &= \left(\operatorname{sgn}(\alpha\beta\gamma\delta) \sqrt{|g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}g_{\gamma\gamma}g_{\delta\delta}|} \right)_{,\lambda} = \\ &= \sum_{\sigma=0}^4 \operatorname{sgn}(\alpha\beta\gamma\delta) \sqrt{\frac{|g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}g_{\gamma\gamma}g_{\delta\delta}|}{|g_{\sigma\sigma}|}} \left(\sqrt{|g_{\sigma\sigma}|} \right)_{,\lambda} = \sum_{\sigma=0}^4 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{g_{\sigma\sigma,\lambda}}{2g_{\sigma\sigma}}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

ověříme dosazením do (2.65) dokazované tvrzení. \square

2.5 Hodgeův duál

Nechť $F_{\underline{\mu\nu}}$ je antisymetrický tenzor na \mathcal{M} : $F_{\underline{\mu\nu}} = F_{[\underline{\mu\nu}]}$. Potom tenzor $\star F$, definovaný:

$$\star F^{\alpha\beta} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\underline{\mu\nu}}, \quad (2.70)$$

budeme nazývat *Hodgeův duál* k $F_{\underline{\mu\nu}}$. Vidíme, že tenzor $\star F$ je také antisymetrický.

Tvrzení 10. *Pro antisymetrický tenzor $F_{\underline{\mu\nu}}$ platí:*

$$\star\star F_{\underline{\mu\nu}} = -F_{\underline{\mu\nu}}. \quad (2.71)$$

Důkaz. Dle (2.61) je

$$\star\star F_{\underline{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\delta\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\underline{\alpha\beta}} = \frac{1}{4} \epsilon_{\gamma\delta\mu\nu} \epsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} F_{\underline{\alpha\beta}} = -F_{[\underline{\mu\nu}]} = -F_{\underline{\mu\nu}}. \quad (2.72)$$

\square

Tvrzení 11. *Pro antisymetrický tenzor $F_{\underline{\mu\nu}}$ platí:*

$$F_{[\underline{\mu\nu};\underline{\sigma}]} = -\frac{1}{3} \epsilon_{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} \left(\star F^{\alpha\beta} \right)_{;\underline{\beta}} \quad (2.73)$$

$$\left(\star F^{\alpha\beta} \right)_{;\underline{\beta}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} F_{[\underline{\mu\nu};\underline{\sigma}]} \quad (2.74)$$

$$\left(\star F_{[\underline{\mu\nu}]} \right)_{;\underline{\sigma]} = \frac{1}{3} \epsilon_{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} F^{\alpha\beta}_{;\underline{\beta}} \quad (2.75)$$

$$F^{\alpha\beta}_{;\underline{\beta}} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} \left(\star F_{[\underline{\mu\nu}]} \right)_{;\underline{\sigma]} \quad (2.76)$$

Důkaz. Pro důkaz (2.73) použijme postupně vztah (2.60), tvrzení 9, antisymetričnost tenzoru ϵ a definici Hodgeova duálu (2.70):

$$\begin{aligned} F_{[\underline{\mu\nu};\underline{\sigma}]} &= -\frac{1}{3!} \epsilon_{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} \epsilon^{\underline{\alpha\beta\gamma\delta}} F_{\underline{\beta\gamma;\delta}} = -\frac{1}{3!} \epsilon_{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} \left(\epsilon^{\underline{\beta\gamma\alpha\delta}} F_{\underline{\beta\gamma}} \right)_{;\underline{\delta}} = \\ &= -\frac{1}{3} \epsilon_{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} \left(\star F^{\underline{\alpha\delta}} \right)_{;\underline{\delta}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Pro důkaz (2.74) vynásobme (2.73) výrazem $\epsilon^{\underline{\gamma\mu\nu\sigma}}$. S použitím (2.62) pak:

$$\epsilon^{\underline{\gamma\mu\nu\sigma}} F_{[\underline{\mu\nu};\underline{\sigma}]} = -\frac{1}{3} \epsilon^{\underline{\gamma\mu\nu\sigma}} \epsilon_{\underline{\alpha\mu\nu\sigma}} \left(\star F^{\underline{\alpha\beta}} \right)_{;\underline{\beta}} = -\frac{1}{3} (-3!) \left(\star F^{\underline{\gamma\beta}} \right)_{;\underline{\beta}} = 2 \left(\star F^{\underline{\gamma\beta}} \right)_{;\underline{\beta}}. \quad (2.78)$$

Dosazením $\star F_{\underline{\mu\nu}}$ za $F_{\underline{\mu\nu}}$ do (2.73), resp. (2.74), dokážeme s použitím tvrzení 10 platnost (2.75), resp. (2.76). \square

2.6 Divergence

Nechť $v^{\underline{i}}$ je vektorové pole na \mathcal{S} (tj. $\langle dt, v \rangle = 0$). Jeho divergenci označme $\nabla \cdot v$:

$$\nabla \cdot v := v^{\underline{i}}_{;\underline{i}} = v^{\underline{\nu}}_{;\underline{\nu}} + n_{\underline{\alpha}} n^{\underline{\nu}} v^{\underline{\alpha}}_{;\underline{\nu}}. \quad (2.79)$$

Tvrzení 12. Pro vektorové pole $v^{\underline{i}}$ na \mathcal{S} platí:

$$2 \left(n^{[\underline{\mu} v^{\underline{\nu]}]} \right)_{;\underline{\nu}} = (\nabla \cdot v) n^{\underline{\mu}} - \frac{1}{N} \dot{v}^{\underline{\mu}} - K v^{\underline{\mu}}. \quad (2.80)$$

Důkaz. Dle důsledku 1 a tvrzení 7 je:

$$2n^{[\underline{\mu} v^{\underline{\nu]}]}_{;\underline{\nu}} = n^{\underline{\mu}} v^{\underline{\nu}}_{;\underline{\nu}} - n^{\underline{\nu}} v^{\underline{\mu}}_{;\underline{\nu}} = n^{\underline{\mu}} \underbrace{\left(v^{\underline{\nu}}_{;\underline{\nu}} + n_{\underline{\alpha}} n^{\underline{\nu}} v^{\underline{\alpha}}_{;\underline{\nu}} \right)}_{v^{\underline{\nu}}_{;\underline{\nu}}} - \underbrace{n^{\underline{\nu}} v^{\underline{\alpha}}_{;\underline{\nu}} \left(\delta_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}} + n_{\underline{\alpha}} n^{\underline{\mu}} \right)}_{n^{\underline{\mu}}_{;\underline{\nu}} v^{\underline{\nu}} + \frac{1}{N} \dot{v}^{\underline{\mu}}}. \quad (2.81)$$

Proto, s použitím (2.53):

$$2 \left(n^{[\underline{\mu} v^{\underline{\nu]}]} \right)_{;\underline{\nu}} = 2n^{[\underline{\mu} v^{\underline{\nu]}]}_{;\underline{\nu}} + n^{\underline{\mu}}_{;\underline{\nu}} v^{\underline{\nu}} - n^{\underline{\nu}}_{;\underline{\nu}} v^{\underline{\mu}} = v^{\underline{\nu}}_{;\underline{\nu}} n^{\underline{\mu}} - \frac{1}{N} \dot{v}^{\underline{\mu}} - K v^{\underline{\mu}}. \quad (2.82)$$

\square

2.7 Rotace

Pro vektorové pole $v^{\underline{i}}$ na \mathcal{S} (tj. $\langle dt, v \rangle = 0$) nazvěme vektorové pole

$$\nabla^{\underline{\mu}} \times v := \bar{\epsilon}^{\underline{\mu\nu\sigma}} v_{\underline{\sigma};\underline{\nu}} \quad (2.83)$$

rotací v .

Tvrzení 13. Pro vektorové pole $v^{\underline{i}}$ na \mathcal{S} platí:

$$\bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}} = \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}}. \quad (2.84)$$

Důkaz. Využijeme postupně antisymetričnosti ϵ , důsledku 2 a znovu antisymetričnosti ϵ :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}} &= \bar{\epsilon}^{\sigma[\underline{\mu}\underline{\nu}]}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}} = \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}v_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} = -3\epsilon^{\beta\sigma\mu\nu}n_{\underline{\beta}}n_{\underline{\alpha}}n_{[\underline{\alpha}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}}]} = \\ &= -\epsilon^{\beta\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha}} \left(n_{\underline{\beta}}n_{\underline{\alpha}}v_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} + n_{\underline{\beta}}n_{\underline{\mu}}v_{[\underline{\nu};\underline{\alpha}]} + n_{\underline{\beta}}n_{\underline{\nu}}v_{[\underline{\alpha};\underline{\mu}]} \right) = \\ &= -\epsilon^{\beta\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha}}n_{\underline{\beta}}n_{\underline{\alpha}}v_{[\underline{\mu};\underline{\nu}]} = \epsilon^{\beta\sigma[\underline{\mu}\underline{\nu}]}n_{\underline{\beta}}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}} = \\ &= \epsilon^{\beta\sigma\mu\nu}n_{\underline{\beta}}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}} = \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}v_{\underline{\mu};\underline{\nu}}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

□

Tvrzení 14. Pro vektorové pole $v^{\underline{i}}$ na \mathcal{S} platí:

$$\epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha};\underline{\nu}} = \frac{1}{N} \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}N_{;\underline{\nu}}. \quad (2.86)$$

Důkaz. K důkazu využijeme tvrzení 6:

$$\epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha};\underline{\nu}} = \epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{[\underline{\alpha};\underline{\nu}]} = \epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu} \frac{-1}{N} (N_{;[\underline{\alpha}n_{\underline{\nu}]}) = \frac{1}{N} \epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha}}N_{;\underline{\nu}} = \frac{1}{N} \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}N_{;\underline{\nu}}. \quad (2.87)$$

□

Důsledek 3. Pro vektorové pole $v^{\underline{i}}$ na \mathcal{S} platí:

$$2 \left(\star(n^{[\underline{\mu}v^{\underline{\nu}]}) \right)_{;\underline{\nu}} = \frac{1}{N} \bar{\epsilon}^{\mu\nu\sigma} (Nv_{\underline{\sigma}})_{;\underline{\nu}}, \quad (2.88)$$

neboli

$$2 \left(\star(n^{[\underline{\mu}v^{\underline{\nu}]}) \right)_{;\underline{\nu}} = \frac{1}{N} \nabla^{\underline{\mu}} \times (Nv). \quad (2.89)$$

Důkaz. Využijme tvrzení 9, 14 a 13:

$$\begin{aligned} 2 \left(\star(n^{[\underline{\mu}v^{\underline{\nu}]}) \right)_{;\underline{\nu}} &= \left(\epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{[\underline{\alpha}v_{\underline{\sigma}}]} \right)_{;\underline{\nu}} = \left(\epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha}}v_{\underline{\sigma}} \right)_{;\underline{\nu}} = \\ &= \epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha};\underline{\nu}}v_{\underline{\sigma}} + \epsilon^{\alpha\sigma\mu\nu}n_{\underline{\alpha}}v_{\underline{\sigma};\underline{\nu}} = \\ &= \frac{1}{N} \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}N_{;\underline{\nu}}v_{\underline{\sigma}} + \bar{\epsilon}^{\sigma\mu\nu}v_{\underline{\sigma};\underline{\nu}} = \frac{1}{N} \bar{\epsilon}^{\mu\nu\sigma} (Nv_{\underline{\sigma}})_{;\underline{\nu}}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

□

2.8 Vektory elektrického a magnetického pole

Nechť antisymetrické tenzorové pole $F_{\underline{\mu\nu}}$ na \mathcal{M} značí *tenzor elektromagnetického pole*. Zavedeme na \mathcal{M} vektorová pole E^μ , B^μ takto:

$$E^\mu = F^{\underline{\mu\nu}} n_\nu \quad (2.91)$$

$$B^\mu = -(\star F^{\underline{\mu\nu}}) n_\nu. \quad (2.92)$$

Vektorové pole E nazveme *vektorem elektrického pole*, vektorové pole B nazveme *vektorem magnetického pole*.

Tvrzení 15. *Vektory E a B je tenzor elektromagnetického pole určen jednoznačně, konkrétně:*

$$F_{\underline{\mu\nu}} = 2(n_{[\underline{\mu}} E_{\underline{\nu]}} + \star(n_{[\underline{\mu}} B_{\underline{\nu]}})). \quad (2.93)$$

Důkaz. Je

$$2(n_{[\underline{\mu}} E_{\underline{\nu]}} + \star(n_{[\underline{\mu}} B_{\underline{\nu]}})) = 2(n_{[\underline{\mu}} F_{\underline{\nu]}\sigma} n^\sigma - \star(n_{[\underline{\mu}} (\star F_{\underline{\nu]}\sigma}) n^\sigma)). \quad (2.94)$$

Podle (2.60) přitom:

$$\begin{aligned} 2\star(n_{[\underline{\mu}} (\star F_{\underline{\nu]}\sigma}) n^\sigma) &= \epsilon_{\underline{\mu\nu}\alpha\beta} n^{[\alpha} (\star F^{\beta]\sigma}) n_\sigma = \frac{1}{2} \epsilon_{\underline{\mu\nu}\alpha\beta} n^{[\alpha} \epsilon^{\beta]\sigma\gamma\delta} F_{\gamma\delta} n_\sigma = \\ &= -\frac{1}{2} n^\alpha \epsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \epsilon^{\beta\sigma\gamma\delta} F_{\gamma\delta} n_\sigma = \frac{1}{2} 3! n^\alpha F_{[\underline{\nu}\alpha} n_{\underline{\mu}]} = \\ &= \frac{1}{2} 2! n^\alpha (F_{[\underline{\nu}\alpha]} n_{\underline{\mu}} + F_{[\underline{\alpha}\underline{\mu}]} n_{\underline{\nu}} + F_{[\underline{\mu}\underline{\nu}]} n_\alpha) = \\ &= n^\alpha (2n_{[\underline{\mu}} F_{\underline{\nu]}\alpha} + F_{\underline{\mu\nu}} n_\alpha) = 2n_{[\underline{\mu}} F_{\underline{\nu]}\alpha} n^\alpha - F_{\underline{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

□

Poznámka. Dle tvrzení 10 je

$$\star F_{\underline{\mu\nu}} = 2(-n_{[\underline{\mu}} B_{\underline{\nu]}} + \star(n_{[\underline{\mu}} E_{\underline{\nu]}})). \quad (2.96)$$

Poznámka. Vektorová pole E , B mají nulovou časovou projekci:

$$E^\mu n_\mu = F^{\underline{\mu\nu}} n_\nu n_\mu = \frac{1}{2} (F^{\underline{\mu\nu}} n_\nu n_\mu - F^{\underline{\nu\mu}} n_\nu n_\mu) = 0 \quad (2.97)$$

$$B^\mu n_\mu = -(\star F^{\underline{\mu\nu}}) n_\nu n_\mu = -\frac{1}{2} ((\star F^{\underline{\mu\nu}}) n_\nu n_\mu - (\star F^{\underline{\nu\mu}}) n_\nu n_\mu) = 0. \quad (2.98)$$

Můžeme je tedy (jak jsme ukázali výše – viz text pod rovnicí (2.20)) interpretovat jako vektorová pole na \mathcal{S} , parametricky závislá na čase t .

2.9 Hustota náboje a hustota proudu

Nechť vektorové pole J^μ na \mathcal{M} značí *vektor čtyřproudu*. Potom funkci ϱ na \mathcal{M} , definovanou

$$\varrho := -J^\mu n_\mu, \quad (2.99)$$

nazveme *hustotou náboje*³ a vektorové pole j^μ , definované

$$j^\mu = J^\mu - \varrho n^\mu, \quad (2.100)$$

nazveme *hustotou proudu*.

Poznámka. Z (2.100) je vidět, že funkcí ϱ a vektorem j je vektor čtyřproudu určen jednoznačně, konkrétně:

$$J^\mu = \varrho n^\mu + j^\mu. \quad (2.101)$$

Poznámka. Vektorové pole j má nulovou časovou projekci:

$$j^\mu n_\mu = J^\mu n_\mu + J^\nu n_\nu n^\mu n_\mu = 0, \quad (2.102)$$

můžeme ho tedy, podobně jako vektory elektrického a magnetického pole, interpretovat jako vektorové pole na \mathcal{S} , parametricky závislé na čase t .

2.10 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice (viz např. [3])

$$F^{\mu\nu}{}_{;\underline{\nu}} = J^\mu \quad (2.103)$$

$$F_{[\underline{\mu\nu};\underline{\sigma}]} = 0 \quad (2.104)$$

lze podle (2.73), (2.74) z tvrzení 11 ekvivalentně zapsat:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\underline{\nu}} = J^\mu \quad (2.105)$$

$$(\star F^{\mu\nu})_{;\underline{\nu}} = 0. \quad (2.106)$$

Případně

$$(\star F_{[\underline{\mu\nu}];\underline{\sigma}}) = \frac{1}{3} \epsilon_{\alpha\mu\nu\sigma} J^\alpha \quad (2.107)$$

$$F_{[\underline{\mu\nu};\underline{\sigma}]} = 0 \quad (2.108)$$

je podle (2.75) z tvrzení 11 a (2.62) další ekvivalentní podobou Maxwellových rovnic.

³Je vhodné poznamenat, že hustotu náboje nelze zaměňovat s klidovou hustotou náboje, jinou často používanou veličinou.

Vektory $F^{\mu\nu}{}_{;\underline{\nu}}$ a $\star(F^{\mu\nu})_{;\underline{\nu}}$, vyjádřené podle (2.93) z tvrzení 15 a (2.96)

$$F^{\mu\nu}{}_{;\underline{\nu}} = 2(n^{[\underline{\mu}}E^{\underline{\nu}]})_{;\underline{\nu}} + 2(\star(n^{[\underline{\mu}}B^{\underline{\nu}]}))_{;\underline{\nu}} \quad (2.109)$$

$$\star(F^{\mu\nu})_{;\underline{\nu}} = -2(n^{[\underline{\mu}}B^{\underline{\nu}]})_{;\underline{\nu}} + 2(\star(n^{[\underline{\mu}}E^{\underline{\nu}]}))_{;\underline{\nu}} \quad (2.110)$$

můžeme pomocí tvrzení 12 a důsledku 3 upravit:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\underline{\nu}} = (\nabla \cdot E) n^\mu - \frac{1}{N} \dot{E}^\mu - KE^\mu + \frac{1}{N} \nabla^\mu \times (NB) \quad (2.111)$$

$$\star(F^{\mu\nu})_{;\underline{\nu}} = -(\nabla \cdot B) n^\mu + \frac{1}{N} \dot{B}^\mu + KB^\mu + \frac{1}{N} \nabla^\mu \times (NE) \quad (2.112)$$

a vyjádřit tak Maxwellovy rovnice (2.105) a (2.106) s použitím nově zavedených veličin:

$$(\nabla \cdot E) n^\mu - \frac{1}{N} \dot{E}^\mu - KE^\mu + \frac{1}{N} \nabla^\mu \times (NB) = \varrho n^\mu + j^\mu \quad (2.113)$$

$$-(\nabla \cdot B) n^\mu + \frac{1}{N} \dot{B}^\mu + KB^\mu + \frac{1}{N} \nabla^\mu \times (NE) = 0 \quad (2.114)$$

Zapůsobením prostorovou projekcí $\delta_{\underline{\mu}}^{\underline{\nu}} + n_{\underline{\mu}}n^{\underline{\nu}}$ na (2.113) a (2.114), resp. jejich vynásobením $-n_{\underline{\mu}}$ (čímž získáme jejich časové složky), dospějeme k ekvivalentní formulaci Maxwellových rovnic prostřednictvím rovností vektorů na tečném bandlu variety \mathcal{S} , parametrizované časem $t \in T$; po přenásobení prostorové projekce nenulovým lappsem:

$$-\dot{E} - NKE + \nabla \times (NB) = Nj \quad (2.115)$$

$$\nabla \cdot E = \varrho \quad (2.116)$$

$$\dot{B} + NKB + \nabla \times (NE) = 0 \quad (2.117)$$

$$-\nabla \cdot B = 0 \quad (2.118)$$

Kapitola 3

Anti-de Sitterův vesmír

Nechť \mathcal{A} je pseudoriemannovská varieta, nechť t, X_1, X_2, X_3 jsou funkce na \mathcal{A} . Nechť pro každé $t_0, X_{10}, X_{20}, X_{30} \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno

$$M(t_0, X_{10}, X_{20}, X_{30}) \in \mathcal{A}$$

takové, že

$$t(M(t_0, X_{10}, X_{20}, X_{30})) = t_0 \quad (3.1)$$

$$X_i(M(t_0, X_{10}, X_{20}, X_{30})) = X_{i0}, \quad i \in \{1, \dots, 3\} \quad (3.2)$$

Nechť metrika g na \mathcal{A} lze pomocí funkcí t, X_1, X_2, X_3 vyjádřit takto:

$$g = -N^2 dt^2 - dN^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2, \quad (3.3)$$

kde jsme označili

$$N := \sqrt{1 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}. \quad (3.4)$$

Potom \mathcal{A} nazveme *anti-de Sitterovým vesmírem*.

Bázové vektorové pole $\frac{\partial}{\partial t}$ v souřadnicové bázi parametrizace t, X_1, X_2, X_3 splňuje podmínku (2.3) (protože metrika (3.3) je v této parametrizaci blokově diagonální s blokem u dt), a tedy i podmínku (2.2), neboť (2.4) je při našem postupu splněno automaticky. Jsou tedy splněny předpoklady tvrzení 1.

Dále vidíme, že tok $\Phi_{t'}$ vektorového pole $\frac{\partial}{\partial t}$ je spojitě zobrazení (jak je požadováno v předpokladu tvrzení 3), neboť v parametrizaci pomocí t, X_1, X_2, X_3 je $\Phi_{t'}$ vyjádřeno:

$$\begin{aligned} t &\longmapsto t + t' \\ X_1 &\longmapsto X_1 \\ X_2 &\longmapsto X_2 \\ X_3 &\longmapsto X_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Protože v této parametrizaci část metriky

$$-dN^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2$$

nezávisí na t (ona na t nezávisí dokonce celá metrika g), je podle (2.54) skalární vnější křivost časupodobných nadploch

$$\mathcal{S}_{t_0} := \{M \in \mathcal{A} \mid t(M) = t_0\} \quad (3.6)$$

nulová:

$$K = 0. \quad (3.7)$$

Rotací anti-de Sitterova vesmíru nazvěme takový difeomorfismus $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, že

$$\forall M \in \mathcal{A} \forall i \in \{1, \dots, 3\} : X_i(R(M)) = \sum_{j=1}^3 R_{ij} X_j(M), \quad (3.8)$$

kde R_{ij} je speciální ortogonální 3×3 matice. Invarianci vůči rotaci budeme nazývat *sférická symetrie*.

Lze snadno nahlédnout, že metrika (3.3) anti-de Sitterova vesmíru je sféricky symetrická.

3.1 Sférická parametrizace

Množina

$$\mathcal{O} := \{M \in \mathcal{A} \mid X_3(M) \neq 0 \vee X_2(M) > 0\} \quad (3.9)$$

je otevřená hustá podmnožina \mathcal{A} . Definujme na \mathcal{O} funkce ρ, θ, φ takto:

$$\begin{aligned} \rho &= \operatorname{acosh} N \\ \theta &= \operatorname{acos} \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}} \\ \varphi &= \operatorname{sign}(X_3) \operatorname{acos} \frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Potom na \mathcal{O} platí:

$$N = \cosh \rho \quad (3.11)$$

$$X_1 = \sinh \rho \cos \theta \quad (3.12)$$

$$X_2 = \sinh \rho \sin \theta \cos \varphi \quad (3.13)$$

$$X_3 = \sinh \rho \sin \theta \sin \varphi. \quad (3.14)$$

Vidíme tedy, že funkce t, ρ, θ, φ (stejně jako funkce t, X_1, X_2, X_3) parametrizují varietu \mathcal{O} , přičemž jejich obory hodnot na \mathcal{O} jsou následující:

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, \infty) \\ \rho &\in (0, \infty) \\ \theta &\in (0, \pi) \\ \varphi &\in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vyjádříme-li formy dN , dX_1 , dX_2 , dX_3 v duální souřadnicové bázi dt , $d\rho$, $d\theta$, $d\varphi$ (viz [5]):

$$\begin{aligned} dN &= \frac{\partial N}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial N}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial N}{\partial \varphi} d\varphi \\ dX_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial X_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} d\varphi \\ dX_2 &= \frac{\partial X_2}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial X_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial X_2}{\partial \varphi} d\varphi \\ dX_3 &= \frac{\partial X_3}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial X_3}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial X_3}{\partial \varphi} d\varphi, \end{aligned} \tag{3.16}$$

můžeme pak v duální souřadnicové bázi sférické parametrizace získat dosazením do (3.3) také vyjádření metriky:

$$g = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \tag{3.17}$$

Vidíme, že parametrizace t, ρ, θ, φ variety \mathcal{O} je ortogonální (2.23) a že signatura \mathcal{O} je $(1, 3)$. Z hustoty \mathcal{O} v \mathcal{A} pak plyne, že signatura g je $(1, 3)$ na celém anti-de Sitterově vesmíru \mathcal{A} . Jsou tedy splněny také předpoklady tvrzení 2 a 3, a funkce t tak na \mathcal{A} určuje časo-prostorové rozštěpení.

Vidíme, že vektorové pole $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ je *Killingovo*, neboli že se vyjádření metriky nezmění, budeme-li namísto funkce φ uvažovat funkci posunutou o konstantu.

3.2 Konformní sférická parametrizace

Zavedme na \mathcal{O} funkci r takto:

$$r = \operatorname{acos} \frac{1}{\cosh \rho}. \tag{3.18}$$

Potom

$$\rho = \operatorname{acosh} \frac{1}{\cos r}, \tag{3.19}$$

a tedy funkce t, r, θ, φ parametrizují varietu \mathcal{O} , přičemž obor hodnot r je $(0, \pi/2)$.

Je

$$d\rho = \frac{d\rho}{dr} dr = \frac{1}{\cos r} dr, \tag{3.20}$$

a tedy metrika (3.17) má v konformních sférických souřadnicích tvar

$$g = \frac{1}{\cos^2 r} (-dt^2 + dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \tag{3.21}$$

3.3 Cylindrická parametrizace

Definujme na \mathcal{O} funkce z , R takto:

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{asinh} \frac{X_1}{\sqrt{1 + X_2^2 + X_3^2}} \\ R &= \operatorname{asinh} \sqrt{X_2^2 + X_3^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Potom na \mathcal{O} platí:

$$N = \cosh R \cosh z \quad (3.23)$$

$$X_1 = \cosh R \sinh z \quad (3.24)$$

$$X_2 = \sinh R \cos \varphi \quad (3.25)$$

$$X_3 = \sinh R \sin \varphi, \quad (3.26)$$

a tedy funkce t , z , R , φ parametrizují varietu \mathcal{O} , přičemž jejich obory hodnot na \mathcal{O} jsou následující:

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, \infty) \\ z &\in (-\infty, \infty) \\ R &\in (0, \infty) \\ \varphi &\in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Porovnáním (3.23) – (3.26) s (3.11) – (3.14) získáme převodní vztahy mezi cylindrickou a sférickou parametrizací a z nich pak Jacobiho matice příslušných přechodů:

$$\begin{aligned} \tanh z &= \tanh \rho \cos \theta & \cosh \rho &= \cosh z \cosh R \\ \sinh R &= \sinh \rho \sin \theta & \tan \theta &= \frac{\tanh R}{\sinh z} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial R}{\partial \rho} & \frac{\partial R}{\partial \theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta}{1 + \sinh^2 \rho \sin^2 \theta} & -\frac{\sinh \rho \cosh \rho \sin \theta}{1 + \sinh^2 \rho \sin^2 \theta} \\ \frac{\cosh \rho \sin \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \rho \sin^2 \theta}} & \frac{\sinh \rho \cos \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \rho \sin^2 \theta}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sinh z \operatorname{sech} R}{\sqrt{\cosh^2 z \cosh^2 R - 1}} & -\cosh z \tanh R \\ \frac{\cosh z \sinh R}{\sqrt{\cosh^2 z \cosh^2 R - 1}} & \sinh z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \rho}{\partial R} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial R} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sinh z \cosh R}{\sqrt{\cosh^2 z \cosh^2 R - 1}} & \frac{\cosh z \sinh R}{\sqrt{\cosh^2 z \cosh^2 R - 1}} \\ -\frac{\cosh z \sinh R \cosh R}{\cosh^2 z \cosh^2 R - 1} & \frac{\sinh z}{\cosh^2 z \cosh^2 R - 1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{\cosh \rho \sin \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \rho \sin^2 \theta}} \\ -\operatorname{cotanh} \rho \sin \theta & \frac{\operatorname{csch} \rho \cos \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \rho \sin^2 \theta}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Převodem (3.17) do cylindrických souřadnic získáme vyjádření metriky:

$$g = -\cosh^2 z \cosh^2 R dt^2 + \cosh^2 R dz^2 + dR^2 + \sinh^2 R d\varphi^2. \quad (3.31)$$

Vidíme, že vektorové pole $\frac{\partial}{\partial z}$ je Killingovo vektorové pole variety \mathcal{S} (ale již nikoliv variety \mathcal{A}).

3.4 Konformní cylindrická parametrizace

Zavedme na \mathcal{O} funkce ζ, η takto:

$$\begin{aligned} \zeta &= a \tan \sinh z \\ \eta &= a \tan \sinh R. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Potom

$$\begin{aligned} z &= a \sinh \tan \zeta \\ R &= a \sinh \tan \eta, \end{aligned} \quad (3.33)$$

a tedy funkce t, ζ, η, φ parametrizují varietu \mathcal{O} , přičemž obory hodnot ζ a η jsou:

$$\begin{aligned} \zeta &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \eta &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Je

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{\cos \zeta} d\zeta \\ dR &= \frac{dR}{d\eta} d\eta = \frac{1}{\cos \eta} d\eta, \end{aligned} \quad (3.35)$$

a tedy metrika (3.31) má v konformních cylindrických souřadnicích tvar

$$g = \frac{1}{\cos^2 \zeta \cos^2 \eta} (-dt^2 + d\zeta^2 + \cos^2 \zeta (d\eta^2 + \sin^2 \eta d\varphi^2)). \quad (3.36)$$

3.5 Boost

Pro $a \in \mathbb{R}$ budeme zobrazení $(t, \zeta) \mapsto (t', \zeta')$ prostoru $t \in (-\infty, \infty)$, $\zeta \in (-\pi/2, \pi/2)$, definované

$$\begin{aligned} \tan t' &= \frac{1}{\cos t} (\sin t \cosh a + \sin \zeta \sinh a), \\ \tan \zeta' &= \frac{1}{\cos \zeta} (\sin \zeta \cosh a + \sin t \sinh a), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$t \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2) \Rightarrow t' \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\zeta' \in (-\pi/2, \pi/2)$$

nazývat *boostem* (s parametrem a).

Tvrzení 16. *Nechť t' , ζ' jsou boostem $t \in (-\infty, \infty)$, $\zeta \in (-\pi/2, \pi/2)$ s parametrem a . Potom*

$$\begin{aligned}\tan t &= \frac{1}{\cos t'} (\sin t' \cosh a - \sin \zeta' \sinh a), \\ \tan \zeta &= \frac{1}{\cos \zeta'} (\sin \zeta' \cosh a - \sin t' \sinh a),\end{aligned}\quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}t' \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2) &\Rightarrow t \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \zeta &\in (-\pi/2, \pi/2).\end{aligned}$$

Každý boost je navíc difeomorfismem prostoru $(-\infty, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ na sebe.

Důkaz. Důkaz přechodem do statických souřadnic typu II je proveden v [2]. \square

Nechť t' , ζ' jsou boostem $t \in (-\infty, \infty)$, $\zeta \in (-\pi/2, \pi/2)$ s parametrem a . Potom označme

$$q := (\cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a)^2 - \cos^2 t \cos^2 \zeta \sinh^2 a \quad (3.39)$$

$$q' := (\cosh a - \sin t' \sin \zeta' \sinh a)^2 - \cos^2 t' \cos^2 \zeta' \sinh^2 a. \quad (3.40)$$

Přímým výpočtem lze ověřit, že pak:

$$\begin{aligned}q &= \cos^2 t + (\sin t \cosh a + \sin \zeta \sinh a)^2 = \\ &= \cos^2 \zeta + (\sin \zeta \cosh a + \sin t \sinh a)^2 = \\ &= \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t'} = \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \zeta'} = \frac{\cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a}{\cosh a - \sin t' \sin \zeta' \sinh a} = \frac{\cos t \cos \zeta}{\cos t' \cos \zeta'},\end{aligned}\quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}q' &= \cos^2 t' + (\sin t' \cosh a - \sin \zeta' \sinh a)^2 = \\ &= \cos^2 \zeta' + (\sin \zeta' \cosh a - \sin t' \sinh a)^2 = \\ &= \frac{\cos^2 t'}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 \zeta'}{\cos^2 \zeta} = \frac{\cosh a - \sin t' \sin \zeta' \sinh a}{\cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a} = \frac{\cos t' \cos \zeta'}{\cos t \cos \zeta}.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Vidíme, že $q' = \frac{1}{q}$ a že funkce $\frac{\cos t}{\cos \zeta}$ je invariantní vůči boostu:

$$\frac{\cos t}{\cos \zeta} = \frac{\cos t'}{\cos \zeta'}. \quad (3.43)$$

Dále je již jednoduché spočítat Jacobiho matici boostu a její inverzi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{\cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a}{q} = \cosh a - \sin t' \sin \zeta' \sinh a & \frac{\partial t'}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial t} &= \frac{\cos t \cos \zeta \sinh a}{q} = \cos t' \cos \zeta' \sinh a & \frac{\partial \zeta'}{\partial \zeta} &= \frac{\partial t'}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial t'} &= \frac{\cosh a - \sin t' \sin \zeta' \sinh a}{q'} = \cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a & \frac{\partial t}{\partial \zeta'} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t'} \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t'} &= -\frac{\cos t' \cos \zeta' \sinh a}{q'} = -\cos t \cos \zeta \sinh a & \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} &= \frac{\partial t}{\partial t'}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Je vidět, že q' představuje jakobián boostu.

Nyní již můžeme snadno nahlédnout, že metrika anti-de Sitterova vesmíru (3.36) je vůči boostu¹ invariantní²:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{\cos^2 \zeta \cos^2 \eta} (-dt^2 + d\zeta^2 + \cos^2 \zeta (d\eta^2 + \sin^2 \eta d\varphi^2)) = \\
&= \frac{1}{\cos^2 \zeta' \cos^2 \eta} (-dt'^2 + d\zeta'^2 + \cos^2 \zeta' (d\eta^2 + \sin^2 \eta d\varphi^2)).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

3.6 Boost kolmo na osu z

Označme

$$\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tan \tilde{\zeta} \sec \tilde{\eta} \\ \tan \tilde{\eta} \cos \tilde{\varphi} \\ \tan \tilde{\eta} \sin \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \tan \zeta \sec \eta \\ \tan \eta \cos \varphi \\ \tan \eta \sin \varphi \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Nechť dále \tilde{t}' , $\tilde{\zeta}'$, $\tilde{\eta}'$, $\tilde{\varphi}'$ označují boost (s parametrem a) souřadnic \tilde{t} , $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
\tan \tilde{t}' &= \frac{1}{\cos \tilde{t}} (\sin \tilde{t} \cosh a + \sin \tilde{\zeta} \sinh a) \\
\tan \tilde{\zeta}' &= \frac{1}{\cos \tilde{\zeta}} (\sin \tilde{\zeta} \cosh a + \sin \tilde{t} \sinh a) \\
\tilde{\eta}' &= \tilde{\eta} \\
\tilde{\varphi}' &= \tilde{\varphi}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Zavedme funkce t' , ζ' , η' , φ' takto:

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}' \\ \tan \tilde{\zeta}' \sec \tilde{\eta}' \\ \tan \tilde{\eta}' \cos \tilde{\varphi}' \\ \tan \tilde{\eta}' \sin \tilde{\varphi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ \tan \zeta' \sec \eta' \\ \tan \eta' \cos \varphi' \\ \tan \eta' \sin \varphi' \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

Vidíme, že značí-li t , ζ , η , φ konformní cylindrické souřadnice, pak jsou přechody (3.47) a (3.49) rotacemi anti-de Sitterova vesmíru, a zachovávají tedy

¹Boostem anti-de Sitterova vesmíru rozumíme boost konformních cylindrických souřadnic t , ζ .

²Boost je tedy isometrií anti-de Sitterova vesmíru. Killingovo vektorové pole $\frac{d}{da}$, generované boosty parametrizovanými a , se nazývá boostovým vektorovým polem.

– stejně jako boost (3.48) – tvar metriky. Proto:

$$g = \frac{1}{\cos^2 \zeta' \cos^2 \eta'} (-dt'^2 + d\zeta'^2 + \cos^2 \zeta' (d\eta'^2 + \sin^2 \eta' d\varphi'^2)). \quad (3.50)$$

Jednoduchým výpočtem můžeme vyloučit všechny vlnkované souřadnice, a vyjádřit tak přímý přechod mezi souřadnicemi t, ζ, η, φ a $t', \zeta', \eta', \varphi'$:

$$\begin{aligned} \tan \eta' \cos \varphi' &= \tan \eta \cos \varphi \\ \frac{\tan \zeta'}{\cos \eta'} &= \frac{\tan \zeta}{\cos \eta} \\ \tan \eta' \sin \varphi' &= \tan \eta \sin \varphi \cosh a + \frac{\sin t}{\cos \zeta \cos \eta} \sinh a \\ \tan t' &= \tan t \cosh a + \frac{\cos \zeta \sin \eta \sin \varphi}{\cos t} \sinh a. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Pro úplnost uvedme třetí nezávislý invariant, snadno odvoditelný z (3.51):

$$\frac{\sin \zeta}{\cos t} = \frac{\sin \zeta'}{\cos t'}. \quad (3.52)$$

Rovnice opačného přechodu získáme z (3.51) záměnou

$$\begin{aligned} t &\longleftrightarrow t' \\ \zeta &\longleftrightarrow \zeta' \\ \eta &\longleftrightarrow \eta' \\ \varphi &\longleftrightarrow \varphi' \\ a &\longleftrightarrow -a. \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.7 Dvojitý boost

Z vyjádření metriky (3.36) je vidět, že vektorová pole $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ jsou Killingova, neboli že se vyjádření metriky nezmění, budeme-li namísto funkce t , resp. φ uvažovat funkce posunuté o konstantu. Proto i následující přechod, odvozený od (3.51), zachovává tvar metriky:

$$\begin{aligned} \tan \eta'' \cos \left(\varphi'' - \frac{\pi}{2} \right) &= \tan \eta' \cos \left(\varphi' - \frac{\pi}{2} \right) \\ \frac{\tan \zeta''}{\cos \eta''} &= \frac{\tan \zeta'}{\cos \eta'} \\ \tan \eta'' \sin \left(\varphi'' - \frac{\pi}{2} \right) &= \tan \eta' \sin \left(\varphi' - \frac{\pi}{2} \right) \cosh a + \frac{\sin \left(t' - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \zeta' \cos \eta'} \sinh a \\ \tan \left(t'' - \frac{\pi}{2} \right) &= \tan \left(t' - \frac{\pi}{2} \right) \cosh a + \frac{\cos \zeta' \sin \eta' \sin \left(\varphi' - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(t' - \frac{\pi}{2} \right)} \sinh a. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Vezmeme-li v úvahu též (3.51), můžeme vyloučit t' , ζ' , η' , φ' , a vyjádřit tak přímý přechod mezi souřadnicemi t , ζ , η , φ a t'' , ζ'' , η'' , φ'' . Po nenáročném výpočtu:

$$\tan t'' = \frac{\sin t \cosh a + \sin \varphi \cos \zeta \sin \eta \sinh a}{\cos t \cosh a + \cos \varphi \cos \zeta \sin \eta \sinh a} \quad (3.55)$$

$$\tan \varphi'' = \frac{\sin \varphi \cos \zeta \sin \eta \cosh a + \sin t \sinh a}{\cos \varphi \cos \zeta \sin \eta \cosh a + \cos t \sinh a} \quad (3.56)$$

$$\tan^2 \eta'' = \frac{\sinh^2 a + \cos^2 \zeta \sin^2 \eta \cosh^2 a + 2 \cos \zeta \sin \eta \cos(\varphi - t) \sinh a \cosh a}{\cos^2 \zeta \cos^2 \eta} \quad (3.57)$$

$$\frac{\tan \zeta''}{\cos \eta''} = \frac{\tan \zeta}{\cos \eta}. \quad (3.58)$$

Podobně lze ukázat, že rovnice opačného přechodu získáme záměnou (3.53). Převedme rovnice přechodu ještě do cylindrických a do sférických souřadnic:

$$\tan t'' = \frac{\sin t \cosh z \cosh a + \sin \varphi \tanh R \sinh a}{\cos t \cosh z \cosh a + \cos \varphi \tanh R \sinh a} \quad (3.59)$$

$$\tan \varphi'' = \frac{\sin \varphi \tanh R \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a}{\cos \varphi \tanh R \cosh a + \cos t \cosh z \sinh a} \quad (3.60)$$

$$\sinh^2 R'' = \cosh^2 z \cosh^2 R \sinh^2 a + \sinh^2 R \cosh^2 a + 2 \cosh z \sinh R \cosh R \cos(\varphi - t) \sinh a \cosh a \quad (3.61)$$

$$\sinh z'' \cosh R'' = \sinh z \cosh R, \quad (3.62)$$

respektive

$$\tan t'' = \frac{\sin t \cosh \rho \cosh a + \sin \varphi \sinh \rho \sin \theta \sinh a}{\cos t \cosh \rho \cosh a + \cos \varphi \sinh \rho \sin \theta \sinh a} \quad (3.63)$$

$$\tan \varphi'' = \frac{\sin \varphi \sinh \rho \sin \theta \cosh a + \sin t \cosh \rho \sinh a}{\cos \varphi \sinh \rho \sin \theta \cosh a + \cos t \cosh \rho \sinh a} \quad (3.64)$$

$$\cosh^2 \rho'' = \sinh^2 \rho \sin^2 \theta \sinh^2 a + \cosh^2 \rho \cosh^2 a + 2 \sinh \rho \cosh \rho \sin \theta \cos(\varphi - t) \sinh a \cosh a \quad (3.65)$$

$$\sinh \rho'' \cos \theta'' = \sinh \rho \cos \theta. \quad (3.66)$$

Kapitola 4

Einsteinův vesmír

Nechť \mathcal{E} je pseudoriemannovská varieta, nechť t, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 jsou funkce na \mathcal{E} . Nechť

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1 \quad (4.1)$$

a nechť pro každé $t_0, Y_{00}, Y_{10}, Y_{20}, Y_{30} \in \mathbb{R}$, splňující

$$Y_{00}^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2 + Y_{03}^2 = 1, \quad (4.2)$$

existuje právě jedno $E(t_0, Y_{00}, Y_{10}, Y_{20}, Y_{30}) \in \mathcal{E}$ takové, že

$$t(E(t_0, Y_{00}, Y_{10}, Y_{20}, Y_{30})) = t_0 \quad (4.3)$$

$$Y_i(E(t_0, Y_{00}, Y_{10}, Y_{20}, Y_{30})) = Y_{i0}, \quad i \in \{0, \dots, 3\} \quad (4.4)$$

Nechť metrika \tilde{g} na \mathcal{E} lze pomocí funkcí t, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 vyjádřit takto:

$$\tilde{g} = -dt^2 + dY_0^2 + dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2. \quad (4.5)$$

Potom \mathcal{E} nazveme *Einsteinovým vesmírem*.

Hyperrotací Einsteinova vesmíru nazvěme takový difeomorfismus $R : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, že

$$\forall M \in \mathcal{E} \forall i \in \{0, \dots, 3\} : Y_i(R(M)) = \sum_{j=0}^3 R_{ij} Y_j(M), \quad (4.6)$$

kde R_{ij} je speciální ortogonální 4×4 matice. Invarianci vůči hyperrotaci budeme nazývat *hypersférická symetrie*.

Lze snadno nahlédnout, že metrika (4.5) Einsteinova vesmíru je hypersféricky symetrická.

Dle argumentů obdobných jako v případě anti-de Sitterova vesmíru určuje funkce t na \mathcal{E} časo-prostorové rozštěpení¹.

¹To, že metrika \tilde{g} má signaturu tvaru $(1, l)$, nahlédneme v podkapitole 4.1.

4.1 Konformní spojení s anti-de Sitterovým vesmírem

Zavedeme-li na \mathcal{E} funkce

$$X_1 = \frac{Y_1}{Y_0} \quad (4.7)$$

$$X_2 = \frac{Y_2}{Y_0} \quad (4.8)$$

$$X_3 = \frac{Y_3}{Y_0} \quad (4.9)$$

$$N = \sqrt{1 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \quad (4.10)$$

potom na varietě

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{P \in \mathcal{E} \mid Y_0 > 0\} \quad (4.11)$$

platí:

$$Y_0 = \frac{1}{N} \quad (4.12)$$

$$Y_1 = \frac{X_1}{N} \quad (4.13)$$

$$Y_2 = \frac{X_2}{N} \quad (4.14)$$

$$Y_3 = \frac{X_3}{N}. \quad (4.15)$$

Varieta $\tilde{\mathcal{A}}$ je tedy parametrizována funkcemi t, X_1, X_2, X_3 , z nichž každá má na $\tilde{\mathcal{A}}$ obor hodnot \mathbb{R} . Výpočtem lze ověřit, že na $\tilde{\mathcal{A}}$ platí:

$$\begin{aligned} -N^2 dt^2 - dN^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 &= \\ &= \frac{1}{Y_0^2} (-dt^2 + dY_0^2 + dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2), \end{aligned} \quad (4.16)$$

a tedy varieta $\tilde{\mathcal{A}}$ je anti-de Sitterovým vesmírem, uvážíme-li na ní metriku

$$g = \frac{1}{Y_0^2} \tilde{g}. \quad (4.17)$$

4.2 Sférická parametrizace

Množina

$$\mathcal{P} := \{M \in \mathcal{E} \mid Y_3(M) \neq 0 \vee Y_2(M) > 0\} \quad (4.18)$$

je otevřená hustá podmnožina \mathcal{E} . Definujme na \mathcal{P} funkce r, θ, φ takto:

$$\begin{aligned} r &= \arccos Y_0 \\ \theta &= \arccos \frac{Y_1}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2}} \\ \varphi &= \text{sign}(Y_3) \arccos \frac{Y_2}{\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Potom na \mathcal{P} platí:

$$Y_0 = \cos r \quad (4.20)$$

$$Y_1 = \sin r \cos \theta \quad (4.21)$$

$$Y_2 = \sin r \sin \theta \cos \varphi \quad (4.22)$$

$$Y_3 = \sin r \sin \theta \sin \varphi. \quad (4.23)$$

Vidíme tedy, že funkce t, r, θ, φ parametrizují varietu \mathcal{P} , přičemž jejich obory hodnot na \mathcal{P} jsou následující:

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, \infty) \\ r &\in (0, \pi) \\ \theta &\in (0, \pi) \\ \varphi &\in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Vyjádříme-li formy dY_0, dY_1, dY_2, dY_3 v duální souřadnicové bázi sférické parametrizace $dt, dr, d\theta, d\varphi$ obdobně jako v případě anti-de Sitterova vesmíru, můžeme v této bázi získat dosazením také vyjádření metriky:

$$\tilde{g} = -dt^2 + dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.25)$$

Porovnáním (4.17) s (4.25) a (3.21) vidíme, že sférická parametrizace t, r, θ, φ na \mathcal{P} a konformní sférická parametrizace t, r, θ, φ na \mathcal{O} realizují zmíněné konformní spojení těchto variet.

Kapitola 5

Řešení Maxwellových rovnic v anti-de Sitterově vesmíru

Zkoumejme různá pole, která jsou řešením Maxwellových rovnic v anti-de Sitterově vesmíru.

5.1 Stokesova věta

Formulujeme si Stokesovu větu [6] pro případ pole forem druhého řádu na čtyřrozměrné varietě v adaptovaných souřadnicích.

Nechť $\omega_{\underline{\mu\nu}}$ je antisymetrické tenzorové pole na 4-rozměrné diferencovatelné varietě \mathcal{V} . Nechť x^0, x^1, x^2, x^3 je libovolná parametrizace \mathcal{V} . Nechť

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

jsou čísla taková, že

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \{(x^1(M), x^2(M), x^3(M)) \mid M \in \mathcal{V}\}. \quad (5.1)$$

Potom:

$$\begin{aligned} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} 3 \omega_{[12,3]} dx^1 dx^2 dx^3 &= \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} (\omega_{23}|_{x^1=b_1} - \omega_{23}|_{x^1=a_1}) dx^2 dx^3 + \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} (\omega_{31}|_{x^2=b_2} - \omega_{31}|_{x^2=a_2}) dx^3 dx^1 + \\ &+ \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (\omega_{12}|_{x^3=b_3} - \omega_{12}|_{x^3=a_3}) dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Poznámka. Je-li na \mathcal{V} definována metrika, pak je podle tvrzení 5:

$$\omega_{[\underline{\mu\nu}, \sigma]} = \omega_{[\underline{\mu\nu}; \sigma]}. \quad (5.3)$$

5.2 Sféricky symetrické elektrostatické pole

Budeme na \mathcal{A} hledat elektrické pole $\overset{1}{E}$ sféricky symetrické hustoty náboje ϱ (pozor – odlišné od souřadnicové funkce ρ).

Použijme na \mathcal{O} ve sférické parametrizaci Stokesovu větu, ve které za ω dosadíme $\star F$. Po dosazení z Maxwellovy rovnice (2.107), z rovnice (2.96) a po uvážení, že ve sférické parametrizaci (3.17) je $n_\rho = n_\theta = n_\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \epsilon_{t\rho\theta\varphi} J^t d\rho d\theta d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} 2 (\star(n_{[\theta} E_{\varphi]})_{\rho=\rho_1} - \\ &\quad - \star(n_{[\theta} E_{\varphi]})_{\rho=\rho_0}) d\theta d\varphi + \\ &\quad + \int_{\rho_0}^{\rho_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} 2 (\star(n_{[\varphi} E_{\rho]})_{\theta=\theta_1} - \\ &\quad - \star(n_{[\varphi} E_{\rho]})_{\theta=\theta_0}) d\varphi d\rho + \\ &\quad + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} 2 (\star(n_{[\rho} E_{\theta]})_{\varphi=\varphi_1} - \\ &\quad - \star(n_{[\rho} E_{\theta]})_{\varphi=\varphi_0}) d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Protože náboj je dle předpokladu sféricky symetricky rozložený a metrika je také sféricky symetrická, tak musí díky linearitě Maxwellových rovnic existovat sféricky symetrické řešení Maxwellových rovnic. Dále budeme hledat pouze takové řešení. Lze ukázat, že je-li E sféricky symetrické vektorové pole, pak $E(\rho, \theta, \varphi) = E^\rho(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho}$. Dosadíme-li tento požadavek do (5.4) a použijeme-li definice Hodgeova duálu (2.70) a antisymetričnosti Levi-Civitova tenzoru, zbude:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \varrho \bar{\epsilon}_{\rho\theta\varphi} d\rho d\theta d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} 2 (\star(n_{[\theta} E_{\varphi]})_{\rho=\rho_1} - \star(n_{[\theta} E_{\varphi]})_{\rho=\rho_0}) d\theta d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} ((\bar{\epsilon}_{\theta\varphi\rho} E^\rho)_{\rho=\rho_1} - (\bar{\epsilon}_{\theta\varphi\rho} E^\rho)_{\rho=\rho_0}) d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dosadíme z vyjádření (2.55) Levi-Civitova tenzoru ve složkách:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} (\sinh^2 \rho \sin \theta) \varrho(\rho) d\rho d\theta d\varphi &= \\ = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} ((\sinh^2 \rho_1 \sin \theta) E^\rho(\varrho_1) - (\sinh^2 \rho_0 \sin \theta) E^\rho(\varrho_0)) d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Po vykrácení $(\varphi_1 - \varphi_0) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin \theta d\theta$ a provedení limity $\varrho_0 \rightarrow 0$:

$$\int_0^{\rho_1} \sinh^2 \rho \varrho(\rho) d\rho = \sinh^2 \rho_1 E^\rho(\varrho_1) \quad (5.7)$$

dospíváme k výsledku:

$$\overset{1}{E} = \sinh^{-2} \rho \int_0^\rho \sinh^2 \hat{\rho} \varrho(\hat{\rho}) d\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (5.8)$$

Nechť x^1, x^2, x^3 je parametrizace \mathcal{S} . Potom pro

$$\Omega \subset \{(x^1(M), x^2(M), x^3(M)) \mid M \in \mathcal{S}\} \quad (5.9)$$

budeme integrálu (srov. s (5.5))

$$Q := \int_{\Omega} \varrho \bar{\epsilon}_{123} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.10)$$

říkat *celkový náboj uvnitř Ω* .

Poznámka. Převodem na větu o substituci lze ukázat [6], že tato definice nezávisí na volbě parametrizace \mathcal{S} .

Označíme-li $Q(\hat{\rho})$ celkový náboj v oblasti $\rho < \hat{\rho}$, pak tedy

$$Q(\rho) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\rho (\sinh^2 \hat{\rho} \sin \theta) \varrho(\hat{\rho}) d\hat{\rho} d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^\rho \sinh^2(\hat{\rho}) \varrho(\hat{\rho}) d\hat{\rho} \quad (5.11)$$

a místo (5.8) můžeme psát:

$$\overset{1}{E} = \frac{Q(\rho)}{4\pi} \frac{1}{\sinh^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (5.12)$$

5.3 Bodový náboj v centru

Sféricky symetrické elektrické pole $\overset{2}{E}$ bodového náboje velikosti Q , stojícího v místě $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, získáme z (5.12) dosazením $\forall \rho > 0: Q(\rho) = Q$:

$$\overset{2}{E} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sinh^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (5.13)$$

Toto pole je tedy na $\{M \in \mathcal{S} \mid X_1(M) \neq 0 \vee X_2(M) \neq 0 \vee X_3(M) \neq 0\}$ řešením statických Maxwellových rovnic s nulovými zdroji:

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (5.14)$$

$$\nabla \times (NE) = 0 \quad (5.15)$$

5.4 Stojící bodový náboj v Einsteinově vesmíru

Dle obdobných argumentů jako v případě anti-de Sitterova vesmíru je elektrické pole \tilde{E} bodového náboje velikosti \tilde{Q} , stojícího v místě $Y_0 = 1, Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$ Einsteinova vesmíru, rovno

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{Q}}{4\pi \sin^2 r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (5.16)$$

Pro tenzor elektromagnetického pole F tedy:

$$F = -\frac{\tilde{Q}}{4\pi \sin^2 r} dt \wedge dr, \quad (5.17)$$

kde jsme označili $dt \wedge dr = dt dr - dr dt$.

Nyní se pokusme vyjádřit pole bodového náboje, stojícího v dané vzdálenosti $\tilde{\Delta}$ od centra zvolené sférické parametrizace. Pro pevné $\tilde{\Delta} \in [-\pi, \pi]$ nyní označme

$$\begin{pmatrix} Y'_0 \\ Y'_1 \\ Y'_2 \\ Y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\Delta} & -\sin \tilde{\Delta} & 0 & 0 \\ \sin \tilde{\Delta} & \cos \tilde{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

neboli

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\Delta} & \sin \tilde{\Delta} & 0 & 0 \\ -\sin \tilde{\Delta} & \cos \tilde{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_0 \\ Y'_1 \\ Y'_2 \\ Y'_3 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

a na množině

$$\mathcal{P}' = \{M \in \mathcal{E} \mid Y'_3(M) \neq 0 \vee Y'_2(M) > 0\} \quad (5.20)$$

zavedme (srov. s (4.19))

$$\begin{aligned} r' &= \arccos Y'_0 \\ \theta' &= \arccos \frac{Y'_1}{\sqrt{Y_1'^2 + Y_2'^2 + Y_3'^2}} \\ \varphi' &= \text{sign}(Y'_3) \arccos \frac{Y'_2}{\sqrt{Y_2'^2 + Y_3'^2}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Odtud:

$$Y'_0 = \cos r' \quad (5.22)$$

$$Y'_1 = \sin r' \cos \theta' \quad (5.23)$$

$$Y'_2 = \sin r' \sin \theta' \cos \varphi' \quad (5.24)$$

$$Y'_3 = \sin r' \sin \theta' \sin \varphi'. \quad (5.25)$$

Chceme vyjádřit F v parametrizaci t, r', θ', φ' . Z (5.19) máme:

$$\cos r = \cos \tilde{\Delta} \cos r' + \sin \tilde{\Delta} \sin r' \cos \theta', \quad (5.26)$$

odkud

$$dr = \frac{\partial r}{\partial r'} dr' + \frac{\partial r}{\partial \theta'} d\theta' + \frac{\partial r}{\partial \varphi'} d\varphi' = \quad (5.27)$$

$$= \frac{1}{-\sin r} \left((-\cos \tilde{\Delta} \sin r' + \sin \tilde{\Delta} \cos r' \cos \theta') dr' - \sin \tilde{\Delta} \sin r' \sin \theta' d\theta' \right). \quad (5.28)$$

Po dosazení do (5.17) získáme vyjádření F v parametrizaci t, r', θ', φ' :

$$F = \frac{\tilde{Q}}{4\pi} \frac{-1}{\left(1 - (\cos \tilde{\Delta} \cos r' + \sin \tilde{\Delta} \sin r' \cos \theta')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left((\cos \tilde{\Delta} \sin r' - \sin \tilde{\Delta} \cos r' \cos \theta') dt \wedge dr' + \sin \tilde{\Delta} \sin r' \sin \theta' dt \wedge d\theta' \right). \quad (5.29)$$

Umístění náboje je podle (5.18): $Y'_0 = \cos \tilde{\Delta}, Y'_1 = \sin \tilde{\Delta}, Y'_2 = Y'_3 = 0$.

(5.18) představuje hyperrotaci, a zachovává tedy tvar metriky:

$$\tilde{g} = -dt^2 + dY_0'^2 + dY_1'^2 + dY_2'^2 + dY_3'^2. \quad (5.30)$$

Parametrizace t, r', θ', φ' je proto rovněž sférickou parametrizací Einsteinova vesmíru. Můžeme tedy psát, že

$$F = \frac{\tilde{Q}}{4\pi} \frac{-1}{\left(1 - (\cos \tilde{\Delta} \cos r + \sin \tilde{\Delta} \sin r \cos \theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left((\cos \tilde{\Delta} \sin r - \sin \tilde{\Delta} \cos r \cos \theta) dt \wedge dr + \sin \tilde{\Delta} \sin r \sin \theta dt \wedge d\theta \right) \quad (5.31)$$

je elektrické pole bodového náboje velikosti Q , stojícího dle (5.18) v Einsteinově vesmíru na souřadnicích

$$\begin{aligned} Y_0 &= \cos \tilde{\Delta} \\ Y_1 &= \sin \tilde{\Delta} \\ Y_2 &= 0 \\ Y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.5 Stojící bodový náboj v anti-de Sitterově vesmíru

Tvrzení 17. *Nechť \mathcal{V} je pseudoriemannovská varieta s metrikou g . Zavedme na \mathcal{V} tenzorové pole \tilde{g} :*

$$\tilde{g} = \Omega^2 g, \quad (5.33)$$

kde

$$\Omega > 0 \quad (5.34)$$

je funkce na \mathcal{V} . Nechť $F_{\underline{\mu\nu}}$, \tilde{J}^μ jsou pole na \mathcal{V} taková, že

$$(\star F_{\underline{\mu\nu}})_{;\sigma} = \frac{1}{3} \tilde{\epsilon}_{\alpha\mu\nu\sigma} \tilde{J}^\alpha \quad (5.35)$$

$$F_{\underline{\mu\nu};\sigma} = 0, \quad (5.36)$$

kde symbolem $\tilde{}$ značíme kovariantní derivaci pomocí metriky \tilde{g} . Označíme-li

$$J = \Omega^4 \tilde{J}, \quad (5.37)$$

potom pole F , J splňují na \mathcal{V} Maxwellovy rovnice (2.107), (2.108).

Důkaz. Důkaz provedeme s použitím tvrzení 5. Je

$$F_{\underline{\mu\nu};\sigma} = F_{\underline{\mu\nu},\sigma} = F_{\underline{\mu\nu};\tilde{\sigma}} = 0, \quad (5.38)$$

čímž je dokázáno (2.108). Dále je z vyjádření Levi-Civitova tenzoru ve složkách ortogonální parametrizace (2.55) zřejmé

$$\tilde{\epsilon} = \Omega^4 \epsilon, \quad (5.39)$$

odkud

$$(\star F_{\underline{\mu\nu}})_{;\sigma} = (\star F_{\underline{\mu\nu}})_{,\sigma} = (\star F_{\underline{\mu\nu}})_{;\tilde{\sigma}} = \frac{1}{3} \tilde{\epsilon}_{\alpha\mu\nu\sigma} \tilde{J}^\alpha = \frac{1}{3} \epsilon_{\alpha\mu\nu\sigma} J^\alpha, \quad (5.40)$$

čímž je dokázáno (2.107). \square

Použijeme-li v tvrzení 17 jako varietu \mathcal{V} anti-de Sitterův vesmír \mathcal{A} , jako Ω funkci $1/\cos r$ a jako F pole stojícího bodového náboje v Einsteinově vesmíru (5.31), získáme (s uvážením vztahů (4.7) – (4.9)), že pole F splňuje Maxwellovy rovnice v anti-de Sitterově vesmíru pro hustotu náboje J , kde J je na \mathcal{A} nulové všude kromě křivky:

$$\begin{aligned} X_1 &= \tan \tilde{\Delta} \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.41)$$

je-li $\tilde{\Delta} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, resp. kde J je na \mathcal{A} nulové všude, je-li $|\tilde{\Delta}| \in (\pi/2, \pi]$.

Vidíme tedy, že pole F z (5.31) je zároveň elektromagnetickým polem bodového náboje (jehož velikostí $Q(\tilde{Q}, \tilde{\Delta})$ jsme se nezabývali, ale o níž z (5.37) víme,

že je úměrná \tilde{Q}), stojícího v anti-de Sitterově vesmíru na místě $M(\tan \tilde{\Delta}, 0, 0)$, je-li $\tilde{\Delta} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, resp. bezedrožovým elektromagnetickým polem, je-li $|\tilde{\Delta}| \in (\pi/2, \pi]$. Dále se budeme zajímat jen o případ $\tilde{\Delta} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Elektrické pole $\overset{3}{E}$ vyjádříme z (5.31) pomocí (2.91):¹

$$\overset{3}{E}^b = \frac{\tilde{Q}}{4\pi} \frac{\cos r}{\left(1 - (\cos \tilde{\Delta} \cos r + \sin \tilde{\Delta} \sin r \cos \theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot ((\cos \tilde{\Delta} \sin r - \sin \tilde{\Delta} \cos r \cos \theta) dr + \sin \tilde{\Delta} \sin r \sin \theta d\theta), \quad (5.42)$$

neboli ve sférických souřadnicích:

$$\overset{3}{E}^b = \frac{\tilde{Q}}{4\pi} \frac{1}{\left(\cosh^2 \rho - (\cos \tilde{\Delta} + \sin \tilde{\Delta} \sinh \rho \cos \theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot ((\cos \tilde{\Delta} \sinh \rho - \sin \tilde{\Delta} \cos \theta) d\rho + \sin \tilde{\Delta} \sinh \rho \cosh \rho \sin \theta d\theta), \quad (5.43)$$

tedy

$$\overset{3}{E} = \frac{\tilde{Q}}{4\pi} \frac{1}{\left(\cosh^2 \rho - (\cos \tilde{\Delta} + \sin \tilde{\Delta} \sinh \rho \cos \theta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left((\cos \tilde{\Delta} \sinh \rho - \sin \tilde{\Delta} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin \tilde{\Delta} \cosh \rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (5.44)$$

Vidíme, že pro $\tilde{\Delta} = 0$ přejde toto pole ve sféricky symetrické pole bodového náboje (5.13) (a tedy také, že $\lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} Q(\tilde{Q}, \tilde{\Delta}) = \tilde{Q}$).

Převědme ještě pole $\overset{3}{E}$ do cylindrické parametrizace:

$$\overset{3}{E} = \frac{\tilde{Q}}{4\pi} \frac{1}{\left(\cosh^2 z \cosh^2 R - (\cos \tilde{\Delta} + \sin \tilde{\Delta} \sinh z \cosh R)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\left(\cos \tilde{\Delta} \frac{\sinh z}{\cosh R} - \sin \tilde{\Delta} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \cos \tilde{\Delta} \cosh z \sinh R \frac{\partial}{\partial R} \right). \quad (5.45)$$

Poznámka. Vektor čtyřrychlosti u stojícího náboje je rovný n , a proto je jeho čtyřzrychlení $\alpha^\mu := u^\mu{}_{;\nu} u^\nu$ konstantní a podle (2.51) v tvrzení 8 rovné

$$\alpha_\mu = n_{\mu;\nu} n^\nu = \frac{1}{N} N_{;\mu}. \quad (5.46)$$

Konkrétně ve sférických souřadnicích (dosazením z (3.11)) tedy:

$$\alpha = \tanh \Delta \frac{\partial}{\partial \rho} = \sin \tilde{\Delta} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (5.47)$$

kde $\Delta = \operatorname{acosh}(1/\cos \tilde{\Delta})$ je vzdálenost náboje od centra.

Řez v ploše $\varphi = \text{konst.}$ indukčními čarami bodového náboje stojícího ve vzdálenosti $\Delta = 1$ od centra je zobrazen v grafech 1, 2.

¹Symbolem b máme pochopitelně na mysli snížení indexu pomocí metriky g .

5.6 Elektrický dipól v centru

Využijeme linearity $\overset{5}{M}$ axwellových rovnic pro získání dalších zajímavých polí.

Elektrické pole $\overset{5}{E}$ elektrického dipólu v centru anti-de Sitterova vesmíru získáme jako limitu pole konečného elektrického dipólu $\overset{4}{E}$:

$$\overset{5}{E}(Q) = \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \frac{\overset{4}{E}(Q, \tilde{\Delta})}{\tilde{\Delta}}, \quad (5.48)$$

kde

$$\overset{4}{E}(Q, \tilde{\Delta}) = \left(\overset{3}{E}(Q, \tilde{\Delta}) + \overset{3}{E}(-Q, -\tilde{\Delta}) \right). \quad (5.49)$$

Explicitně:

$$\overset{5}{E} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sinh^3 \rho} \left(2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \cotanh \rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (5.50)$$

respektive:

$$\overset{5}{E}^b = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sinh^3 \rho} (2 \cos \theta d\rho + \sinh \rho \cosh \rho \sin \theta d\theta). \quad (5.51)$$

Ve sférických souřadnicích má pole tvar:

$$\overset{5}{E} = \frac{Q}{2\pi} \frac{(2 \sinh^2 z - \cosh^2 z \sinh^2 R) \frac{\partial}{\partial z} + 3 \sinh z \cosh z \sinh R \cosh R \frac{\partial}{\partial R}}{(\cosh^2 z \cosh^2 R - 1)^{\frac{5}{2}}}. \quad (5.52)$$

Řez v ploše $\varphi = \text{konst.}$ indukčními čarami konečného elektrického dipólu se vzdálenostmi $\Delta = 1$ nábojů od centra, resp. elementárního elektrického dipólu, je zobrazen v grafech 3 a 4, resp. 5 a 6.

5.7 Homogenní pole

V analogii s případem plochého prostoročasu pojmenujeme limitu

$$\overset{6}{E}(Q) = \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \overset{4}{E}(Q, \tilde{\Delta}) \quad (5.53)$$

homogenním polem. Explicitně:

$$\overset{6}{E} = \frac{\tilde{Q}}{2\pi} \frac{1}{\cosh^3 R} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.54)$$

Vidíme, že toto pole je symetrické vůči posunutí v souřadnicích z a φ , ale již ne v souřadnici R .

5.8 Nabitý geodetický oscilátor

Nechť $t', \zeta', \eta, \varphi$ jsou boostem konformních cylindrických souřadnic t, ζ, η, φ . V duchu (2.5), (2.6) zavedme:

$$N' := \frac{1}{\sqrt{-\langle dt', dt'^{\sharp} \rangle}}, \quad (5.55)$$

$$n' := \frac{1}{N'} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (5.56)$$

Vidíme, že

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{q}. \quad (5.57)$$

Tvrzení 18. *Nechť $J = \varrho n + j$ je takový vektor čtyřproudu na \mathcal{A} , že*

$$J = \varrho' n', \quad (5.58)$$

kde ϱ' je funkce na \mathcal{A} splňující

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t'} = 0. \quad (5.59)$$

Potom pro každé $t_0, t'_0 \in \mathbb{R}$ je celkový náboj

$$Q(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho \sqrt{g_{\zeta\zeta} g_{\eta\eta} g_{\varphi\varphi}} d\zeta d\eta d\varphi \quad (5.60)$$

na \mathcal{S}_{t_0} rovný celkovému náboji

$$Q' = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho' \sqrt{g_{\zeta'\zeta'} g_{\eta\eta} g_{\varphi\varphi}} d\zeta' d\eta d\varphi \quad (5.61)$$

na $\mathcal{S}'_{t'_0} := \langle M \in \mathcal{A} \mid t'(M) = t'_0 \rangle$.

Důkaz. Dosazením za J z (5.58) do (2.99)

$$\varrho = -J^\mu n_\mu = -\varrho' n'_\mu n'^\mu = -\varrho' \langle n^\flat, n' \rangle = -\varrho' \left\langle -N dt, \frac{1}{N'} \frac{\partial}{\partial t'} \right\rangle = \varrho' \frac{N}{N'} \frac{\partial t}{\partial t'} \quad (5.62)$$

a následným dosazením za ϱ do (5.60):

$$\begin{aligned} Q(t_0) &= \iiint \varrho' \frac{N}{N'} \frac{\partial t}{\partial t'} \sqrt{g_{\zeta\zeta} g_{\eta\eta} g_{\varphi\varphi}} d\zeta d\eta d\varphi = \\ &= \iiint \varrho' \frac{N}{N'} \underbrace{\frac{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}{\sqrt{g_{\zeta'\zeta'}}} \frac{1}{\frac{\partial \zeta'}{\partial \zeta}}}_{\frac{1}{\sqrt{q}}} \frac{\partial t}{\partial t'} \sqrt{g_{\zeta'\zeta'} g_{\eta\eta} g_{\varphi\varphi}} \frac{\partial \zeta'}{\partial \zeta} d\zeta d\eta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{q}{\cosh a + \sin t_0 \sin \zeta \sinh a} (\cosh a + \sin t_0 \sin \zeta \sinh a) = 1$$

Nakonec provedeme substituci (viz (3.37))

$$\begin{aligned}\tan \zeta' &= \frac{1}{\cos \zeta} (\sin \zeta \cosh a + \sin t \sinh a) \\ d\zeta' &= \frac{\partial \zeta'}{\partial \zeta} d\zeta,\end{aligned}\tag{5.64}$$

čímž dospějeme k dokazované rovnosti:

$$Q(t_0) = \iiint \varrho' \sqrt{g_{\zeta'\zeta'} g_{\eta\eta} g_{\varphi\varphi}} d\zeta' d\eta d\varphi = Q'.\tag{5.65}$$

□

Zapišme elektromagnetické pole $\overset{1}{F}$ bodového náboje velikosti Q , stojícího v centru anti-de Sitterova vesmíru v konformních cylindrických souřadnicích (např. pomocí limity $\Delta \rightarrow 0$ v (5.45) a dále (2.93)):

$$\begin{aligned}\overset{1}{F} &= \frac{Q}{4\pi} \frac{-1}{(\cosh^2 z \cosh^2 R - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ &\quad \cdot (\sinh z \cosh z \cosh^2 R dt \wedge dz + \cosh^2 z \sinh R \cosh R dt \wedge dR) = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \frac{-1}{(1 - \cos^2 \zeta \cos^2 \eta)^{\frac{3}{2}}} (\sin \zeta \cos \eta dt \wedge d\zeta + \cos \zeta \sin \eta dt \wedge d\eta)\end{aligned}\tag{5.66}$$

Vidíme, že pole

$$\overset{7}{F} = \frac{Q}{4\pi} \frac{-1}{(1 - \cos^2 \zeta' \cos^2 \eta)^{\frac{3}{2}}} (\sin \zeta' \cos \eta dt' \wedge d\zeta' + \cos \zeta' \sin \eta dt' \wedge d\eta)\tag{5.67}$$

splňuje Maxwellovy rovnice pro čtyřproud J takový, že v konformních cylindrických souřadnicích t' , ζ' , η , φ představuje stojící bodový náboj velikosti Q . J je tedy nulové všude kromě křivky:

$$\begin{aligned}\zeta' &= 0 \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= 0,\end{aligned}\tag{5.68}$$

neboli (po dosazení $\zeta' = 0$ do druhé rovnice z (3.37)):

$$\begin{aligned}\tanh z &= -\sin t \tanh a \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= 0.\end{aligned}\tag{5.69}$$

Čtyřproud J tak představuje bodový náboj, pohybující se po křivce určené (5.69). Z tvrzení 18 navíc víme, že velikost tohoto náboje je v každém čase t_0 rovna Q .

Vyjádříme ještě pole $\overset{7}{F}$ v neboostovaných konformních cylindrických souřadnicích t, ζ, η, φ . Máme

$$\overset{7}{F} = \frac{Q}{4\pi} \frac{-q^{\frac{3}{2}}}{(q - \cos^2 \zeta \cos^2 \eta)^{\frac{3}{2}}} (\sin \zeta' \cos \eta dt' \wedge d\zeta' + \cos \zeta' \sin \eta dt' \wedge d\eta). \quad (5.70)$$

Přitom podle (3.41), (3.37):

$$\sqrt{q} \cos \zeta' = \cos \zeta \quad (5.71)$$

$$\sqrt{q} \sin \zeta' = \sqrt{q} \cos \zeta' \tan \zeta' = \cos \zeta \tan \zeta' = \sinh \zeta \cosh a + \sin t \sinh a \quad (5.72)$$

$$q dt' \wedge d\zeta' = q \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \zeta'}{\partial \zeta} - \frac{\partial t'}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \right) dt \wedge d\zeta = dt \wedge d\zeta \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} q dt' \wedge d\eta &= q \left(\frac{\partial t'}{\partial t} dt \wedge d\eta + \frac{\partial t'}{\partial \zeta} d\zeta \wedge d\eta \right) = \\ &= (\cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a) dt \wedge d\eta + \cos t \cos \zeta \sinh a d\zeta \wedge d\eta \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$q - \cos^2 \zeta \cos^2 \eta = \cos^2 \zeta \sin^2 \eta + (\sin \zeta \cosh a + \sin t \sinh a)^2. \quad (5.75)$$

Odtud:

$$\begin{aligned} \overset{7}{F} &= \frac{Q}{4\pi} \frac{-1}{(\cos^2 \zeta \sin^2 \eta + (\sin \zeta \cosh a + \sin t \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ &\quad \cdot (\cos \eta (\sin \zeta \cosh a + \sin t \sinh a) dt \wedge d\zeta + \\ &\quad + \cos \zeta \sin \eta (\cosh a + \sin t \sin \zeta \sinh a) dt \wedge d\eta + \\ &\quad + \cos t \cos^2 \zeta \sin \eta \sinh a d\zeta \wedge d\eta). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Pomocí (2.91) a (2.92)² vyjádříme vektory $\overset{7}{E}, \overset{7}{B}$ elektrického a magnetického pole a převedeme je do cylindrických souřadnic:

$$\begin{aligned} \overset{7}{E} &= \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{(\sinh^2 R + \cosh^2 R (\sinh z \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\sinh z \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a}{\cosh R} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. \sinh R (\cosh z \cosh a + \sin t \sinh z \sinh a) \frac{\partial}{\partial R} \right) \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\overset{7}{B} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\cos t \sinh a}{(\sinh^2 R + \cosh^2 R (\sinh z \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (5.78)$$

²Soustavu souřadnic t, ζ, η, φ považujeme za pravotočivou, což odpovídá pravotočivosti soustavy t, X_1, X_2, X_3 .

Vyjádření elektrického pole je symetričtější, zapíšeme-li jej jako formu:

$$\begin{aligned} \overset{7}{E}^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{(\sinh^2 R + \cosh^2 R (\sinh z \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ \cdot (\cosh R (\sinh z \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a) dz + \\ \sinh R (\cosh z \cosh a + \sin t \sinh z \sinh a) dR) \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\overset{7}{B}^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{\cos t \sinh^2 R \sinh a}{(\sinh^2 R + \cosh^2 R (\sinh z \cosh a + \sin t \cosh z \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (5.80)$$

Po převedení do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} \overset{7}{E}^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{(\sinh^2 \rho \sin^2 \theta + (\sinh \rho \cos \theta \cosh a + \sin t \cosh \rho \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ \cdot ((\sin t \cosh \rho \cos \theta \sinh a + \sinh \rho \cosh a) d\rho - \\ - \sin t \sinh \rho \sin \theta \sinh a d\theta) \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\overset{7}{B}^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{\cos t \sinh^2 \rho \sin^2 \theta \sinh a}{(\sinh^2 \rho \sin^2 \theta + (\sinh \rho \cos \theta \cosh a + \sin t \cosh \rho \sinh a)^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (5.82)$$

5.9 Geodetický Hertzův dipól

S použitím linearity Maxwellových rovnic opět odvodíme několik dalších zajímavých polí.

Geodetickým Hertzovým dipólem v centru anti-de Sitterova vesmíru nazveme limitu

$$\overset{9}{E}(Q) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\overset{8}{E}(Q, a)}{a} \quad (5.83)$$

$$\overset{9}{B}(Q) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\overset{8}{B}(Q, a)}{a}, \quad (5.84)$$

kde

$$\overset{8}{E}(Q, a) = \left(\overset{7}{E}(Q, a) + \overset{7}{E}(-Q, -a) \right) \quad (5.85)$$

$$\overset{8}{B}(Q, a) = \left(\overset{7}{B}(Q, a) + \overset{7}{B}(-Q, -a) \right) \quad (5.86)$$

nazveme konečným geodetickým Hertzovým dipólem. Vyjádřeme pole geodetického Hertzova dipólu explicitně ve sférických souřadnicích:

$$\overset{9}{E}^b = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\sin t}{\sinh^3 \rho} (2 \cosh \rho \cos \theta d\rho + \sinh \rho \sin \theta d\theta) \quad (5.87)$$

$$\overset{9}{B}^b = \frac{Q}{2\pi} \frac{\cos t \sin^2 \theta}{\sinh \rho} d\varphi. \quad (5.88)$$

5.10 Světelně letící náboj

Limitou $a \rightarrow \infty$ nabitého geodetického oscilátoru získáme světelně letící náboj (srov. s (3.36)):

$$\sin \zeta = -\sin t \quad (5.89)$$

$$X_2 = 0 \quad (5.90)$$

$$X_3 = 0. \quad (5.91)$$

Abychom získali konečné, nenulové pole, je třeba ovšem spolu s parametrem boostu a zvětšovat i velikost náboje:

$${}^{10}E(Q) = \lim_{a \rightarrow \infty} (\sinh^2 a {}^7E(Q, a)) \quad (5.92)$$

$${}^{10}B(Q) = \lim_{a \rightarrow \infty} (\sinh^2 a {}^7B(Q, a)). \quad (5.93)$$

Zapišme pole světelně letícího náboje explicitně v cylindrických souřadnicích:

$${}^{10}E^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{\cosh R (\sinh z + \sin t \cosh z) dz + \sinh R (\cosh z + \sin t \sinh z) dR}{\cosh^3 R |\sinh z + \sin t \cosh z|^3} \quad (5.94)$$

$${}^{10}B^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{\cos t \sinh^2 R}{\cosh^3 R |\sinh z + \sin t \cosh z|^3} d\varphi \quad (5.95)$$

a ve sférických souřadnicích:

$${}^{10}E^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{(\sin t \cosh \rho \cos \theta + \sinh \rho) d\rho - \sin t \sinh \rho \sin \theta d\theta}{|\sinh \rho \cos \theta + \sin t \cosh \rho|^3} \quad (5.96)$$

$${}^{10}B^b = \frac{Q}{4\pi} \frac{\cos t \sinh^2 \rho \sin^2 \theta}{|\sinh \rho \cos \theta + \sin t \cosh \rho|^3} d\varphi. \quad (5.97)$$

5.11 Geodetický kruhový pohyb bodového náboje

Dosazením 2E z (5.13) do (2.93) získáme elektromagnetické pole 2F bodového náboje v centru anti-de Sitterova vesmíru ve sférických souřadnicích:

$${}^2F = -\frac{Q}{4\pi} \frac{\cosh \rho}{\sinh^2 \rho} dt \wedge d\rho. \quad (5.98)$$

Nechť t'' , ρ'' , θ'' , φ'' jsou dvojitým boostem (s parametrem a) (3.63) – (3.66) sférických souřadnic t , ρ , θ , φ . Víme, že dvojitý boost zachovává tvar metriky, a tedy že pole

$${}^{11}F = -\frac{Q}{4\pi} \frac{\cosh \rho''}{\sinh^2 \rho''} dt'' \wedge d\rho'' \quad (5.99)$$

splňuje Maxwellovy rovnice pro čtyřproud J takový, že ve sférických souřadnicích $t'', \rho'', \theta'', \varphi''$ představuje stojící bodový náboj velikosti Q . J je tedy nulové všude kromě křivky $\rho'' \rightarrow 0$, neboli (po dosazení $\rho'' \rightarrow 0$ do transformačních rovnic (3.63) – (3.66), invertovaných podle (3.53))³:

$$\begin{aligned} t &= t'' \\ \sin \varphi &= \sin t'' \\ \cos \varphi &= \cos t'' \\ \rho &= |a| \\ \theta &= 0. \end{aligned} \tag{5.100}$$

Čtyřproud J tak představuje bodový náboj, pohybující se rovnoměrně po kružnici se středem v centru anti-de Sitterova vesmíru a poloměrem a . Z tvrzení 18 a poznámky v kapitole 5.2 navíc víme, že velikost tohoto náboje je v každém čase t_0 rovna Q .

Vyjádříme ještě pole $\overset{11}{F}$ v neboostovaných sférických souřadnicích t, ρ, θ, φ . Je

$$d(\tan t'') = \frac{1}{\cos^2 t''} dt'' \tag{5.101}$$

$$d(\cosh^2 \rho'') = 2 \sinh \rho'' \cosh \rho'' d\rho'', \tag{5.102}$$

odkud

$$\frac{\cosh \rho''}{\sinh^2 \rho''} dt'' \wedge d\rho'' = \frac{1}{1 + \tan^2 t''} \frac{1}{2 (\cosh^2 \rho'' - 1)^{\frac{3}{2}}} d(\tan t'') \wedge d(\cosh^2 \rho''). \tag{5.103}$$

Přítom:

$$\begin{aligned} d(\tan t'') \wedge d(\cosh^2 \rho'') &= \left(\frac{\partial \tan t''}{\partial t} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \rho} - \frac{\partial \tan t''}{\partial \rho} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial t} \right) dt \wedge d\rho + \\ &+ \left(\frac{\partial \tan t''}{\partial t} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \theta} - \frac{\partial \tan t''}{\partial \theta} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial t} \right) dt \wedge d\theta + \\ &+ \left(\frac{\partial \tan t''}{\partial t} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \varphi} - \frac{\partial \tan t''}{\partial \varphi} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial t} \right) dt \wedge d\varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial \tan t''}{\partial \theta} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \varphi} - \frac{\partial \tan t''}{\partial \varphi} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \theta} \right) d\theta \wedge d\varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial \tan t''}{\partial \varphi} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \rho} - \frac{\partial \tan t''}{\partial \rho} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \varphi} \right) d\varphi \wedge d\rho + \\ &+ \left(\frac{\partial \tan t''}{\partial \rho} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \theta} - \frac{\partial \tan t''}{\partial \theta} \frac{\partial \cosh^2 \rho''}{\partial \rho} \right) d\rho \wedge d\theta. \end{aligned} \tag{5.104}$$

³Platí, že znaménko čitatele v (3.64) je rovno znaménku $\sin \varphi''$ a znaménko jmenovatele je rovno znaménku $\cos \varphi''$, totéž pro vztah invertovaný podle (3.53).

Po dosazení z (3.63) a (3.65) a zjednodušení:

$$\begin{aligned} \overset{11}{F} = & \frac{Q}{4\pi} \frac{-1}{(\cosh^2 \rho'' - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left(\cosh \rho \cosh a (\sinh \rho \cosh a + \cosh \rho \sin \theta \cos \sigma \sinh a) dt \wedge d\rho + \right. \\ & + \sinh \rho \cosh \rho \cos \theta \cos \sigma \sinh a \cosh a dt \wedge d\theta - \\ & - \sinh \rho \cosh \rho \sin \theta \sin \sigma \sinh a \cosh a dt \wedge d\varphi - \\ & - \sinh^2 \rho \sin \theta \cos \theta \sinh^2 a d\theta \wedge d\varphi + \\ & + \sinh \rho \sin \theta \sinh a (\sinh \rho \cos \sigma \cosh a + \cosh \rho \sin \theta \sinh a) d\varphi \wedge d\rho - \\ & \left. - \sinh^2 \rho \cos \theta \sin \sigma \sinh a \cosh a d\rho \wedge d\theta \right), \end{aligned} \quad (5.105)$$

kde jsme označili

$$\sigma = \varphi - t \quad (5.106)$$

a kde $\cosh^2 \rho''$ je vyjádřeno v (3.65). Pomocí (2.91) a (2.92) vyjádříme vektory $\overset{11}{E}$, $\overset{11}{B}$ elektrického a magnetického pole:

$$\begin{aligned} \overset{11}{E}{}^b = & \frac{Q}{4\pi} \frac{\cosh a}{(\cosh^2 \rho'' - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left((\sinh \rho \cosh a + \cosh \rho \sin \theta \cos \sigma \sinh a) d\rho + \right. \\ & + \sinh \rho \cos \theta \cos \sigma \sinh a d\theta - \\ & \left. - \sinh \rho \sin \theta \sin \sigma \sinh a d\varphi \right) \end{aligned} \quad (5.107)$$

$$\begin{aligned} \overset{11}{B}{}^b = & \frac{Q}{4\pi} \frac{\sinh a}{(\cosh^2 \rho'' - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left(\cos \theta \sinh a d\rho - \right. \\ & - \sinh \rho (\sinh \rho \cos \sigma \cosh a + \cosh \rho \sin \theta \sinh a) d\theta + \\ & \left. + \sinh^2 \rho \sin \theta \cos \theta \sin \sigma \cosh a d\varphi \right). \end{aligned} \quad (5.108)$$

Po převedení do cylindrických souřadnic:

$$\begin{aligned} \overset{11}{E}{}^b = & \frac{Q}{4\pi} \frac{\cosh a}{(\cosh^2 \rho'' - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left(\sinh z \cosh R \cosh a dz + \right. \\ & + (\cosh z \sinh R \cosh a + \cosh R \cos \sigma \sinh a) dR - \\ & \left. - \sinh R \sin \sigma \sinh a d\varphi \right) \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} \overset{11}{B}{}^b = & \frac{Q}{4\pi} \frac{\sinh a}{(\cosh^2 \rho'' - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left((\cosh z \sinh R \cosh R \cos \sigma \cosh a + \cosh^2 R \sinh a) dz - \right. \\ & - \sinh z \cos \sigma \cosh a dR + \\ & \left. + \sinh z \sinh R \cosh R \sin \sigma \cosh a d\varphi \right), \end{aligned} \quad (5.110)$$

kde

$$\begin{aligned} \cosh^2 \rho'' &= \cosh^2 z \cosh^2 R \cosh^2 a + \sinh^2 R \sinh^2 a + \\ &+ 2 \cosh z \sinh R \cosh R \cos \sigma \sinh a \cosh a. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Pole $\overset{11}{F}'$, odvozené od $\overset{11}{F}$, avšak pro opačný směr pohybu náboje, bychom získali z $\overset{11}{F}$ záměnou $\varphi \mapsto -\varphi$ (víme, že metrika (3.17) je vůči této záměně invariantní).

5.12 Nabitá geodetická smyčka

$\frac{\partial}{\partial \varphi}$ je Killingovo vektorové pole anti-de Sitterova vesmíru, a proto přičteme-li ve vyjádření pole $\overset{11}{F}$ k souřadnici φ konstantu $\hat{\varphi}$, získáme opět řešení Maxwellových rovnic. Superpozicí

$$\overset{12}{F}(Q, a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{11}{F}(Q, a, \varphi + \hat{\varphi}) d\hat{\varphi} \quad (5.112)$$

tak získáme pole náboje rovnoměrně rozloženého na kružnici

$$\begin{aligned} \rho &= |a| \\ \theta &= 0 \end{aligned} \quad (5.113)$$

a geodeticky se po ní pohybujícího. Pokusme se vyjádřit pole $\overset{12}{E}$, $\overset{12}{B}$ této konfigurace zdrojů explicitně.

Pro dané $a \neq 0$ definujme na \mathcal{A} funkce

$$\alpha := \sinh R \sinh a = \sinh \rho \sin \theta \sinh a \quad (5.114)$$

$$\beta := \cosh z \cosh R \cosh a = \cosh \rho \cosh a. \quad (5.115)$$

Potom

$$\cosh^2 \rho'' = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \sigma. \quad (5.116)$$

Dále na \mathcal{A} definujme funkce

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \hat{\sigma} - 1)^{\frac{3}{2}}} d\hat{\sigma} \quad (5.117)$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \hat{\sigma}}{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \hat{\sigma} - 1)^{\frac{3}{2}}} d\hat{\sigma}. \quad (5.118)$$

Potom

$$\begin{aligned} \overset{12}{E}^b &= \frac{Q}{8\pi^2} \cosh a \left((I_1 \sinh \rho \cosh a + I_2 \cosh \rho \sin \theta \sinh a) d\rho + \right. \\ &\quad \left. + I_2 \sinh \rho \cos \theta \sinh a d\theta \right) \end{aligned} \quad (5.119)$$

$$\begin{aligned} \overset{12}{B}^b &= \frac{Q}{8\pi^2} \sinh a \left(I_1 \cos \theta \sinh a d\rho - \right. \\ &\quad \left. - \sinh \rho (I_2 \sinh \rho \cosh a + I_1 \cosh \rho \sin \theta \sinh a) d\theta \right), \end{aligned} \quad (5.120)$$

respektive v cylindrických souřadnicích:

$$\begin{aligned} \overset{12}{E}^b = \frac{Q}{8\pi^2} \cosh a \left(I_1 \sinh z \cosh R \cosh a \, dz + \right. \\ \left. + (I_1 \cosh z \sinh R \cosh a + I_2 \cosh R \sinh a) \, dR \right) \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} \overset{12}{B}^b = \frac{Q}{8\pi^2} \sinh a \left((I_2 \cosh z \sinh R \cosh R \cosh a + I_1 \cosh^2 R \sinh a) \, dz - \right. \\ \left. - I_2 \sinh z \cosh a \, dR \right). \end{aligned} \quad (5.122)$$

Pole $\overset{12}{F}'$, odvozené od $\overset{12}{F}$, avšak pro opačný směr pohybu náboje, získáme z $\overset{12}{F}$ záměnou $\varphi \mapsto -\varphi$ (víme, že metrika (3.17) je vůči této záměně invariantní). Vzhledem k tomu, že vektory $\overset{12}{E}$ a $\overset{12}{B}$ mají nulovou projekci ve směru $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, platí pro příslušné elektrické a magnetické pole $\overset{12}{E}'$ a $\overset{12}{B}'$:

$$\overset{12}{E}' = \overset{12}{E} \quad (5.123)$$

$$\overset{12}{B}' = -\overset{12}{B}. \quad (5.124)$$

Vektor magnetického pole změnil znaménko proto, že v rovnici (2.92) je třeba provést záměnu

$$\begin{aligned} d\theta \wedge d\varphi &\mapsto -d\theta \wedge d\varphi \\ d\varphi \wedge d\rho &\mapsto -d\varphi \wedge d\rho. \end{aligned}$$

Pro $k \in (0, 1)$ označme zápisem $K(k)$, resp. $E(k)$ *úplný eliptický integrál prvního*, resp. *druhého druhu*:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 p}} \, dp \quad (5.125)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 p} \, dp. \quad (5.126)$$

Tvrzení 19. Pro $-1 < A < 1$ platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1 + A \cos \sigma)^{\frac{3}{2}}} \, d\sigma = \frac{4}{(1 - |A|)\sqrt{1 + |A|}} E\left(\sqrt{\frac{2|A|}{1+|A|}}\right). \quad (5.127)$$

Důkaz. Využijeme sudosti integrované funkce, použijeme substituce

$$y = \frac{\sigma}{2}, \quad (5.128)$$

$$1 - \frac{2A}{1+A} \sin^2 y = \frac{1 - \frac{2A}{1+A}}{1 - \frac{2A}{1+A} \sin^2 t} \quad (5.129)$$

a upravíme:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+A \cos \sigma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{(1+A(1-2 \sin^2 \frac{\sigma}{2}))^{\frac{3}{2}}} d\sigma = \\
&= \frac{4}{(1+A)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1-\frac{2A}{1+A} \sin^2 y)^{\frac{3}{2}}} dy = \\
&= \frac{4}{(1+A)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{1-\frac{2A}{1+A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{2A}{1+A} \sin^2 t} dt = \\
&= \frac{4}{(1-A)\sqrt{1+A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{2A}{1+A} \sin^2 t} dt. \quad (5.130)
\end{aligned}$$

Navíc, aplikujeme-li dále substituci $z = \frac{\pi}{2} - t$, získáme:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(1-A)\sqrt{1+A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{2A}{1+A} \sin^2 t} dt &= \\
= \frac{4}{(1-A)\sqrt{1+A}} \sqrt{1-\frac{2A}{1+A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{\frac{2A}{1+A}}{1-\frac{2A}{1+A}} \sin^2 z} dz &= \\
= \frac{4}{(1+A)\sqrt{1-A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{-2A}{1-A} \sin^2 z} dz. \quad (5.131)
\end{aligned}$$

□

Tvrzení 20. Pro $-1 < A < 1$, $A \neq 0$ platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \sigma}{(1+A \cos \sigma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = \frac{4}{A\sqrt{1+|A|}} \left(K\left(\sqrt{\frac{2|A|}{1+|A|}}\right) - \frac{1}{1-|A|} E\left(\sqrt{\frac{2|A|}{1+|A|}}\right) \right). \quad (5.132)$$

Důkaz. S použitím tvrzení 19 máme:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \sigma}{(1+A \cos \sigma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma &= \frac{1}{A} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+A \cos \sigma - 1}{(1+A \cos \sigma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = \\
&= \frac{1}{A} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+A \cos \sigma}} d\sigma - \frac{1}{A} \frac{4}{(1-|A|)\sqrt{1+|A|}} E\left(\sqrt{\frac{2|A|}{1+|A|}}\right). \quad (5.133)
\end{aligned}$$

Dále využijeme sudosti integrované funkce a použijeme substituci $y = \frac{\sigma}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+A \cos \sigma}} d\sigma &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+A(1-2 \sin^2 \frac{\sigma}{2})}} d\sigma = \\
&= \frac{4}{\sqrt{1+A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2A}{1+A} \sin^2 y}} dy. \quad (5.134)
\end{aligned}$$

Navíc, aplikujeme-li dále substituci $z = \frac{\pi}{2} - y$, získáme:

$$\frac{4}{\sqrt{1+A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2A}{1+A} \sin^2 y}} dy = \frac{4}{\sqrt{1-A}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{-2A}{1-A} \sin^2 z}} dz. \quad (5.135)$$

□

Důsledek 4. Na \mathcal{A} platí:

$$I_1 = \frac{4}{((\beta - |\alpha|)^2 - 1) \sqrt{(\beta + |\alpha|)^2 - 1}} E\left(\sqrt{\frac{4|\alpha|\beta}{(\beta + |\alpha|)^2 - 1}}\right) \quad (5.136)$$

$$I_2 = \frac{2}{\alpha\beta\sqrt{(\beta + |\alpha|)^2 - 1}} K\left(\sqrt{\frac{4|\alpha|\beta}{(\beta + |\alpha|)^2 - 1}}\right) - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2\alpha\beta} I_1, \quad (5.137)$$

kde pro $\alpha = 0$ je rovnost třeba chápat ve smyslu limity $\alpha \rightarrow 0$, tedy:

$$I_2|_{\alpha=0} = 0. \quad (5.138)$$

Řez v ploše $\varphi = \text{konst.}$ indukčními čarami nabitě geodetické smyčky s poloměrem $a = 1$ je zobrazen v grafech 7, 8.

5.13 Nabitý prstenec

Superpozicí

$${}^{13}\bar{F}(Q, a) = \frac{1}{2} ({}^{12}\bar{F}(Q, a) + {}^{12}\bar{F}'(Q, a)) \quad (5.139)$$

získáme pole stojícího náboje, homogenně rozloženého na kružnici (5.113). Z (5.123), (5.124) vidíme, že pro příslušné elektrické a magnetické pole ${}^{13}\bar{E}$ a ${}^{13}\bar{B}$:

$${}^{13}\bar{E} = \bar{E} \quad (5.140)$$

$${}^{13}\bar{B} = 0. \quad (5.141)$$

5.14 Proudová smyčka

Superpozicí

$${}^{14}\bar{F}(Q, a) = \frac{1}{2} ({}^{12}\bar{F}(Q, a) + {}^{12}\bar{F}'(-Q, a)) \quad (5.142)$$

získáme pole proudové smyčky na kružnici (5.113). Z (5.123), (5.124) vidíme, že pro příslušné elektrické a magnetické pole ${}^{14}\bar{E}$ a ${}^{14}\bar{B}$:

$${}^{14}\bar{E} = 0 \quad (5.143)$$

$${}^{14}\bar{B} = \bar{B}. \quad (5.144)$$

5.15 Magnetický dipól v centru

Elektromagnetické pole $\overset{15}{F}$ magnetického dipólu v centru anti-de Sitterova vesmíru získáme jako limitu pole proudové smyčky:

$$\overset{15}{F}(Q) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\overset{14}{F}(Q, a)}{a^2}. \quad (5.145)$$

Pro příslušné magnetické pole $\overset{15}{B}$ tak:

$$\overset{15}{B}^\flat = \frac{Q}{8\pi} \frac{1}{\sinh^3 \rho} (2 \cos \theta d\rho + \sinh \rho \cosh \rho \sin \theta d\theta), \quad (5.146)$$

neboť (druhou rovnost získáme např. použitím Lebesgueovy věty a l'Hospitova pravidla):

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_1 = 2\pi \frac{1}{\sinh^3 \rho} \quad (5.147)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{I_2}{a} = -3\pi \frac{\cosh \rho \sin \theta}{\sinh^4 \rho}. \quad (5.148)$$

Vidíme, že magnetické pole magnetického dipólu v centru je úměrné elektrickému poli elektrického dipólu v centru:

$$\overset{15}{B} \propto \overset{5}{E}. \quad (5.149)$$

Ve sférických souřadnicích tedy:

$$\overset{15}{B} = \frac{Q}{8\pi} \frac{(2 \sinh^2 z - \cosh^2 z \sinh^2 R) \frac{\partial}{\partial z} + 3 \sinh z \cosh z \sinh R \cosh R \frac{\partial}{\partial R}}{(\cosh^2 z \cosh^2 R - 1)^{\frac{5}{2}}}. \quad (5.150)$$

5.16 Sféricky symetrická rovnovážná konfigurace

Hledejme rovnovážné rozložení náboje, charakterizovaného konstantním poměrem κ hmotnostní hustoty⁴ a hustoty testovacího náboje ϱ (pozor – odlišné od souřadnicové funkce ρ). Vektor čtyřrychlosti u náboje v rovnováze je rovný n , odkud také

$$J = \varrho n, \quad (5.151)$$

a tedy pohybová rovnice

$$\kappa u_{\underline{\mu};\underline{\nu}} J^{\underline{\nu}} = F_{\underline{\mu}\underline{\nu}} J^{\underline{\nu}} \quad (5.152)$$

přejde pro rovnovážný případ na podmínku rovnováhy kosmologické atrakce a elektromagnetické interakce

$$\varrho \kappa n_{\underline{\mu};\underline{\nu}} n^{\underline{\nu}} = \varrho \overset{16}{F}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} n^{\underline{\nu}}. \quad (5.153)$$

⁴Hmotnost považujeme také za testovací, a tedy předpokládáme $\kappa \approx 1$.

Do levé strany dosadíme z (2.51) v tvrzení 8 a do pravé strany z definice E (2.91):

$$\varrho\kappa \frac{1}{N} N_{;\underline{\mu}} = \varrho \overset{16}{E}_{\underline{\mu}}. \quad (5.154)$$

Konkrétně ve sférických souřadnicích (dosazením z (3.11)) tedy:

$$\varrho \overset{16}{E}^{\flat} = \varrho\kappa \tanh \rho \, d\rho \quad (5.155)$$

Dále se omezme na sféricky symetrické rozložení náboje, nenulové pro $\rho < \rho_0$ a nulové pro $\rho > \rho_0$. Abychom toto rozložení našli explicitně, porovnáme vyjádření $\overset{16}{E}$ v (5.155) s vyjádřením $\overset{1}{E}$ v (5.8). Pro $\rho > \rho_0$:

$$\kappa \tanh \rho = \frac{1}{\sinh^2 \rho} \int_0^{\rho} \sinh^2 \hat{\rho} \, \varrho(\hat{\rho}) \, d\hat{\rho}. \quad (5.156)$$

Po přenásobení $\sinh^2 \rho$ a zderivování podle ρ :

$$\kappa \tanh^2 \rho (1 + 2 \cosh^2 \rho) = \sinh^2 \rho \, \varrho(\rho), \quad \rho < \rho_0 \quad (5.157)$$

získáváme podmínku pro rozložení náboje:

$$\varrho(\rho) = \begin{cases} \kappa \left(2 + \frac{1}{\cosh^2 \rho} \right) & \text{pro } \rho < \rho_0 \\ 0 & \text{pro } \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (5.158)$$

Zopakujme, že pak má elektrické pole tvar

$$\overset{16}{E}^{\flat} = \begin{cases} \kappa \tanh \rho \, d\rho & \text{pro } \rho < \rho_0 \\ \kappa \frac{1}{\sinh^2 \rho} \frac{\sinh^3 \rho_0}{\cosh \rho_0} \, d\rho & \text{pro } \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (5.159)$$

Můžeme si všimnout, že pro $\rho_0 = \infty$ je

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varrho(\rho) = 2\kappa. \quad (5.160)$$

Závěr

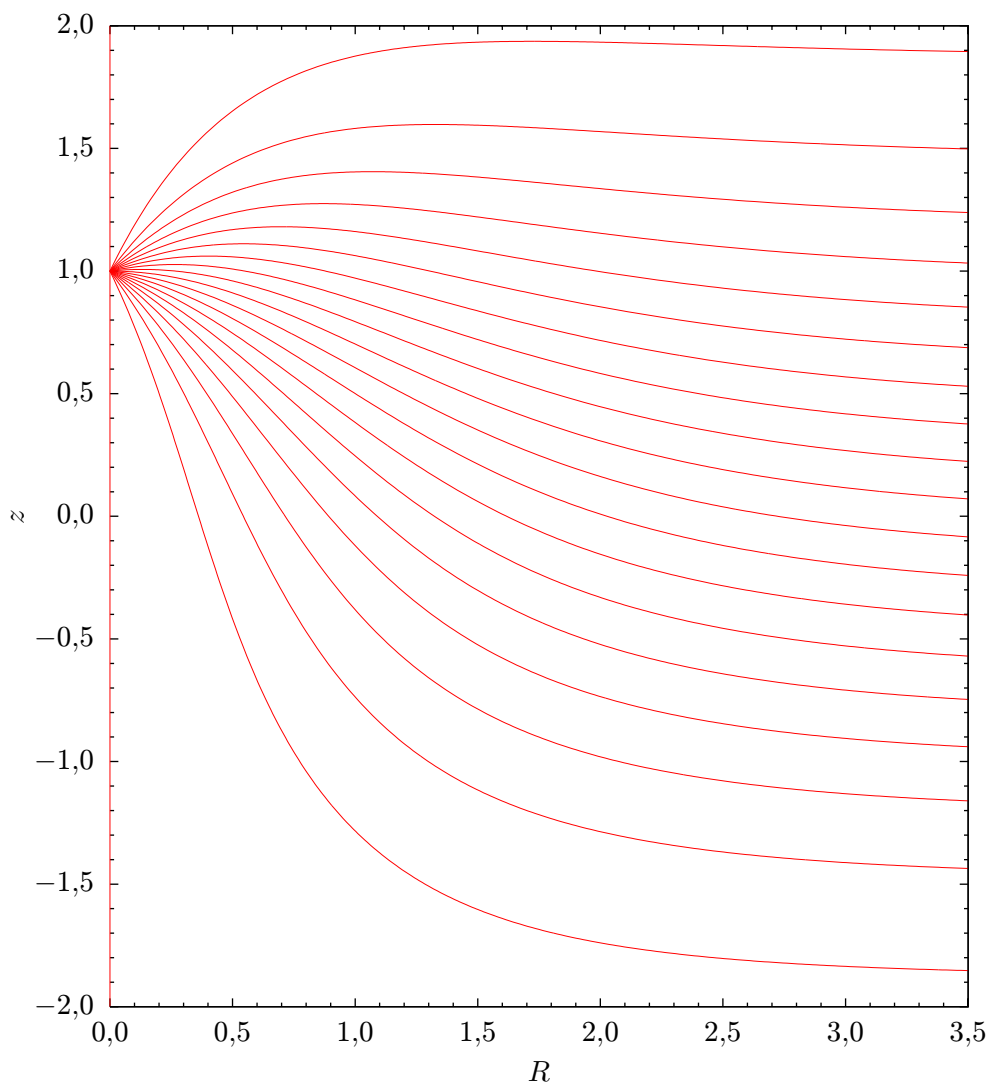
V této práci jsme zavedli časo-prostorové rozštěpení a formulovali v něm Maxwellovy rovnice.

V časo-prostorovém rozštěpení anti-de Sitterova vesmíru na čas a časově nezávislý Lobačevského prostor jsme našli řešení Maxwellových rovnic pro některé konfigurace zdrojů. Našli jsme pole některých geodeticky se pohybujících či rovnoměrně urychlených zdrojů. Studovali jsme tak např. geodeticky oscilující bodový náboj či bodový náboj pohybující se geodeticky po kružnici se středem v centru. Dále jsme pomocí konformního spojení s Einsteinovým vesmírem našli pole statického bodového náboje, libovolně vzdáleného od centra.

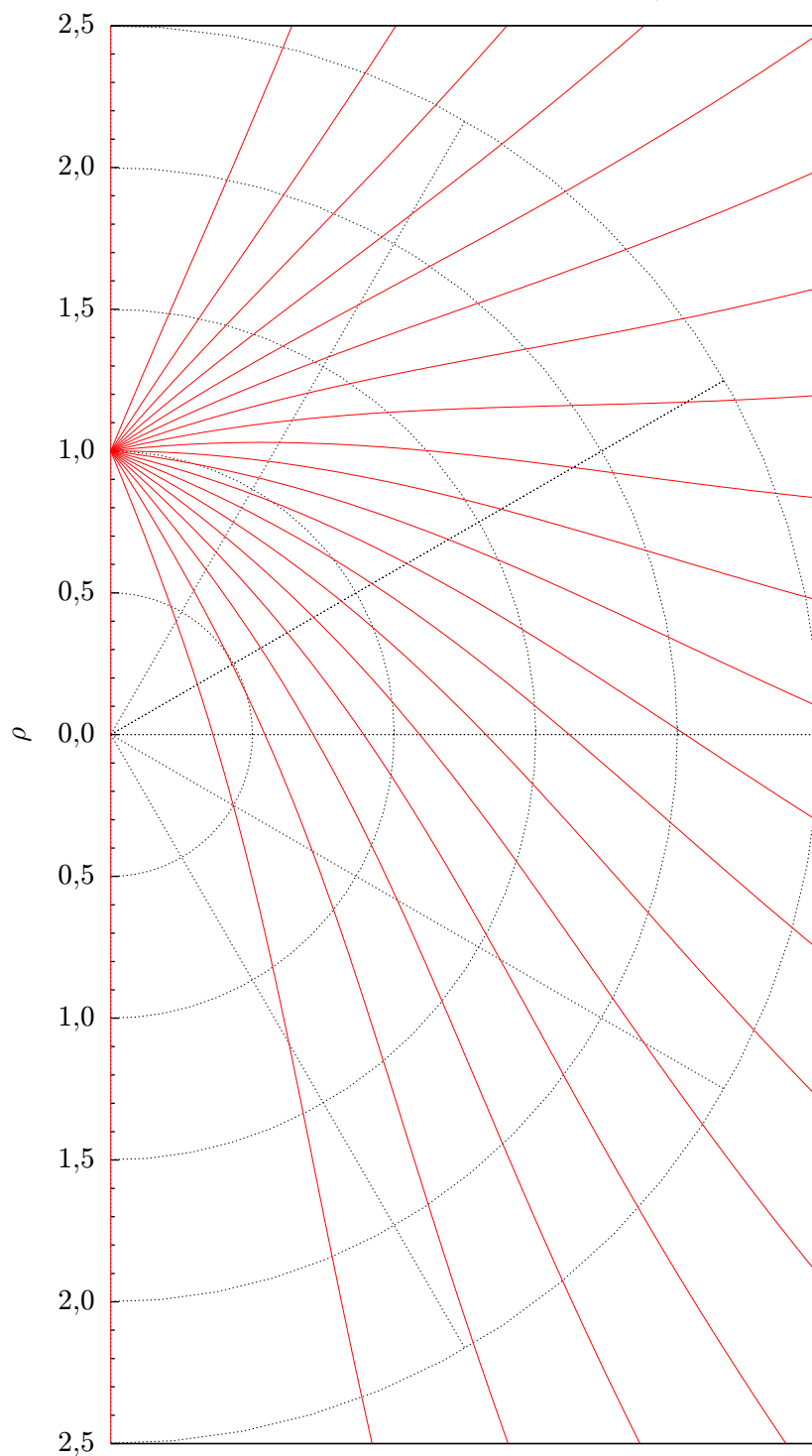
Obrazová příloha

Následují řezy v ploše $\varphi = \text{konst.}$ indukčními čarami různých diskutovaných statických rotačně symetrických elektrických a magnetických polí. Zobrazeny jsou vždy v cylindrických souřadnicích a v polárním grafu ve sférických souřadnicích (zde jsme pro lepší vizuální korespondenci s cylindrickými souřadnicemi volili poloosu $\theta = -\pi/2$ nahoře a poloosu $\theta = \pi/2$ dole).

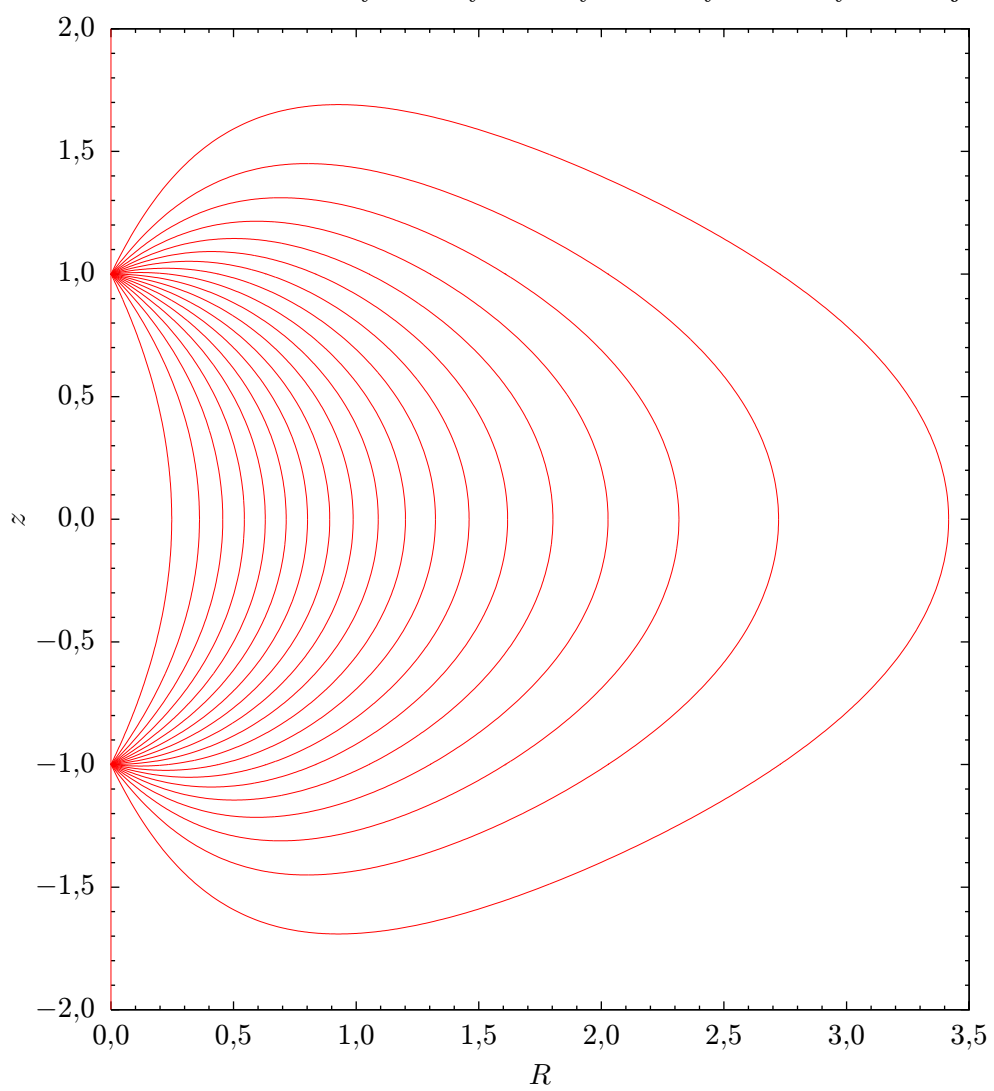
Graf 1. Indukční čáry stojícího bodového náboje



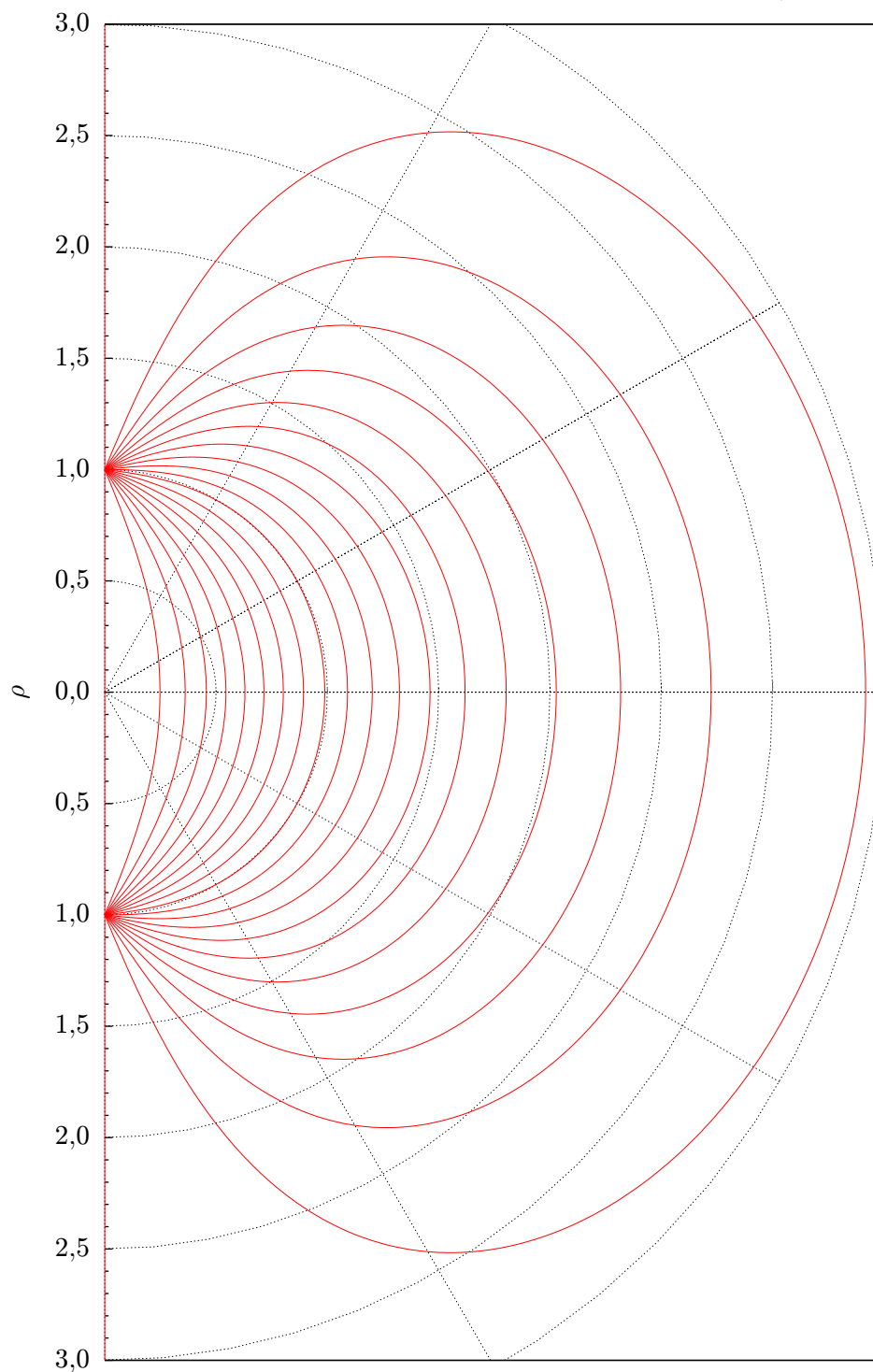
Graf 2. Indukční čáry stojícího bodového náboje (sférické souřadnice)



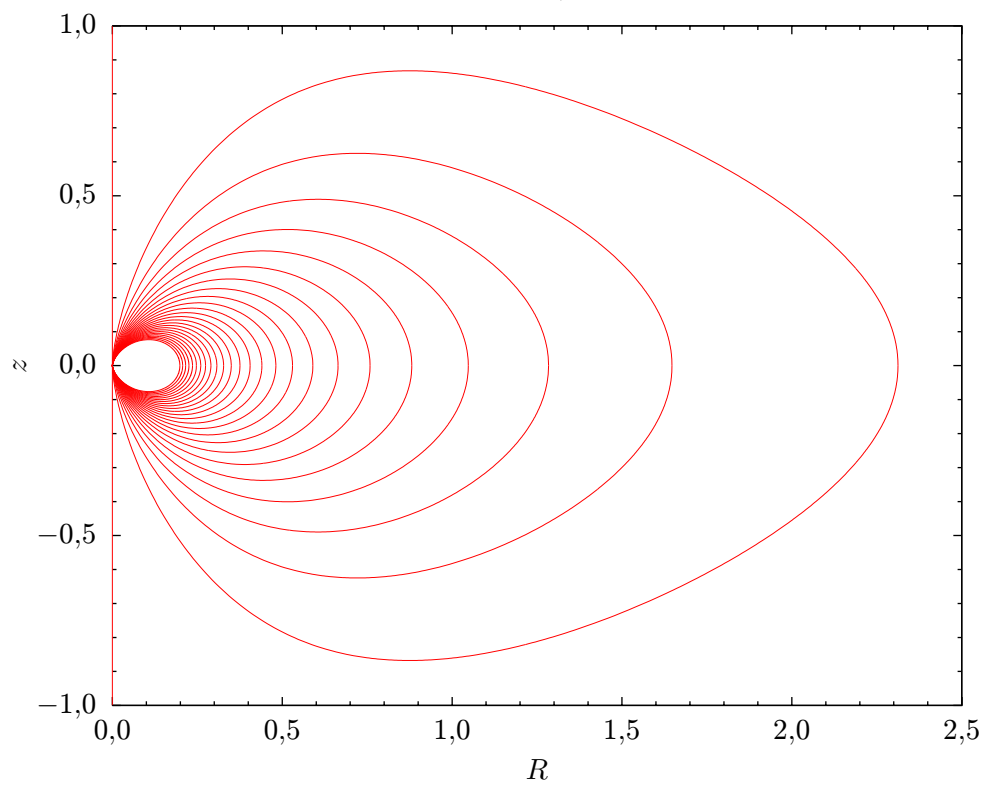
Graf 3. Indukční čáry dvou symetricky umístěných bodových nábojů



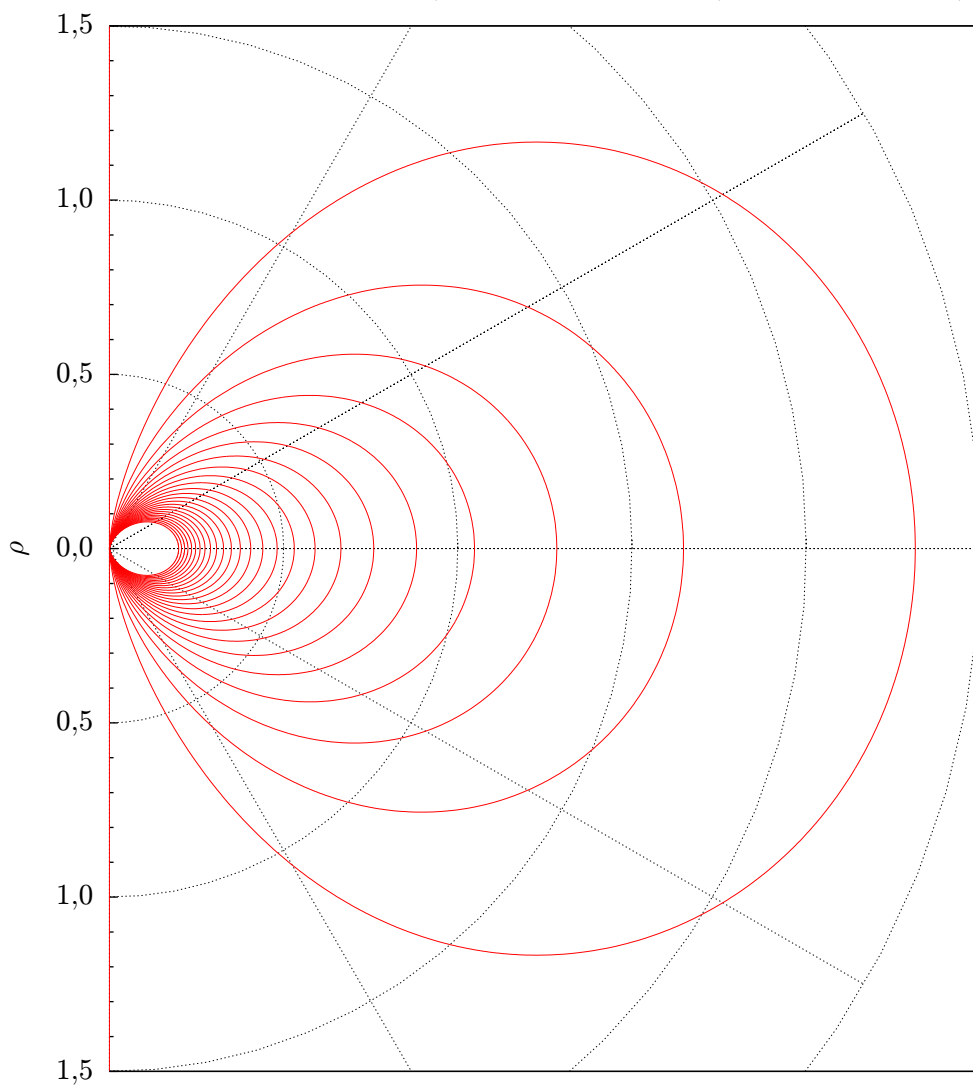
Graf 4. Indukční čáry dvou sym. umístěných bod. nábojů (sfér. souř.)



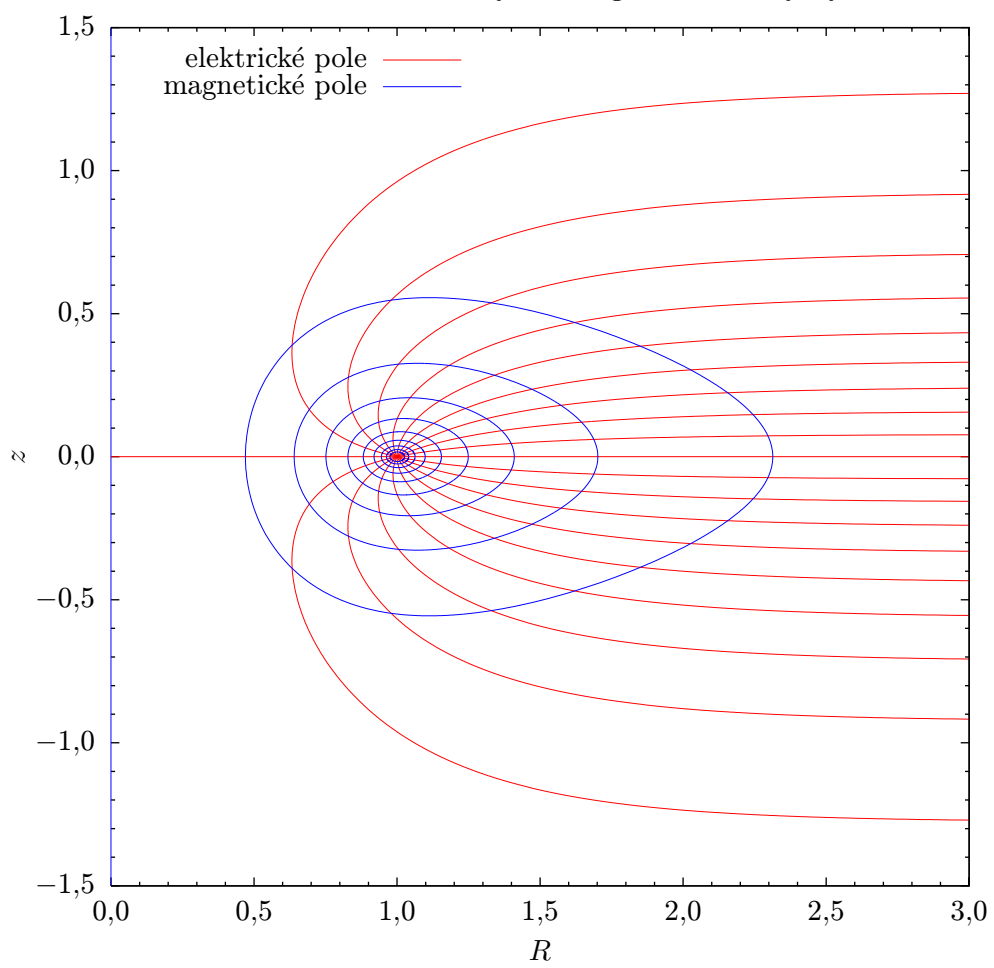
Graf 5. Indukční čáry elektrického/magnetického dipólu v centru



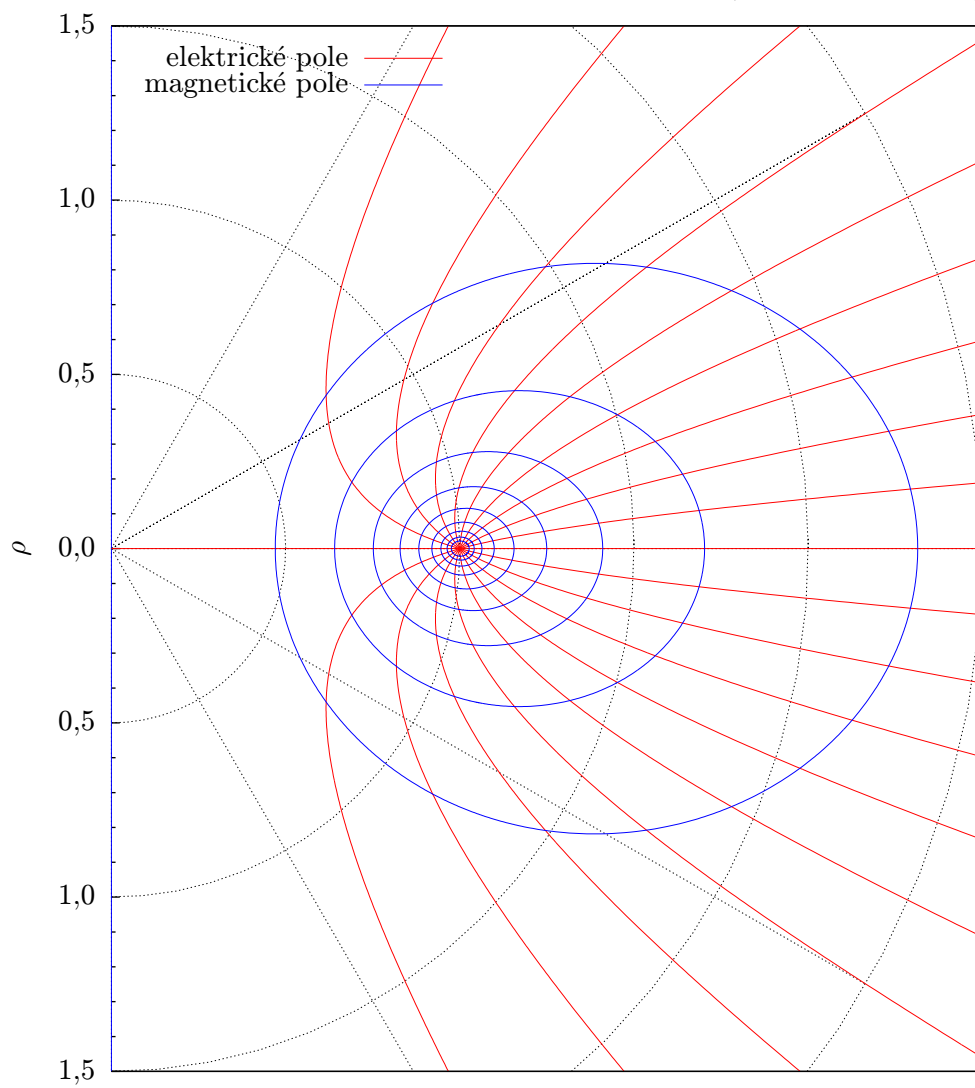
Graf 6. Indukční čáry el./mg. dipólu v centru (sférické souřadnice)



Graf 7. Indukční čáry nabité geodetické smyčky



Graf 8. Indukční čáry nabitě geodetické smyčky (sférické souřadnice)



Literatura

- [1] HAWKING, S., ELLIS, G. *The Large Scale Structure of Space–Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 0521099064.
- [2] LUBER, T. *Lobačevského geometrie v anti-de Sitterově vesmíru: bakalářská práce*. [Praha]: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2008. Vedoucí bakalářské práce Pavel Krtouš.
- [3] MISNER, C., THORNE, K., WHEELER, J. *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973. (Physics Series). ISBN 0716703440.
- [4] PENROSE, R., RINDLER, W. *Spinors and Space–Time. Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 0521245273.
- [5] PODOLSKÝ, J. *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie: studijní text k prosemináři TMF069 „Proseminář teoretické fyziky I“* [online]. 2006-12 [cit. 2010-06-14]. URL: <<http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF069/tmf069.pdf>>.
- [6] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976. (International Series in Pure and Applied Mathematics). ISBN 007054235X.