Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Ducháček

Bezčasová dynamika

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

Studijní program: Fyzika, Obecná fyzika

2010

Předně bych chtěl poděkovat vedoucímu této práce za zodpovídání mých častých dotazů. Dále také všem učitelům, kteří mi předali znalosti, které mi nakonec pomohli v psaní této práce. A obrovské poděkování samozřejmě patří i mým rodičům za neustávající podporu ve všem, co dělám.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Petr Ducháček

Název práce: Bezčasová dynamika
Autor: Petr Ducháček
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.
e-mail vedoucího: Otakar.Svitek@mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci je podána bezčasová formulace mechaniky. Důležitý je zde koncept relativních změn konfigurací. Jednou z možností, jak dojít k bezčasové formulaci mechaniky, je použití Jacobiho variačního principu v konfiguračním prostoru a aplikování zákona zachování energie. Pro konkrétní systém můžeme následně definovat operacionalistický čas (např. efemeridový čas ve sluneční soustavě). Další způsob je inspirován relativistickou mechanikou a jejími odlišnostmi od nerelativistické. Používám zde hamiltonovský formalismus mechaniky, Hamiltonův – Jacobiho formalismus a geometrický formalismus. Tyto formalismy jsou zde zopakovány i v klasické podobě. Tato práce je založena na myšlenkách Barboura a Rovelliho.

Klíčová slova: konfigurace, mechanika, bezčasová, energie, hamiltonián

Title: Timeless dynamics
Author: Petr Ducháček
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: RNDr. Otakar Svítek Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Otakar.Svitek@mff.cuni.cz
Abstract: In this work a timeless formulation of mechanics is developed. An important concept is relative changes of configurations. One of the ways how to formulate timeless mechanics is using Jacobi's variational principle in the configurational space and then applying the law of conservation of energy. Then we can define operational time (for example the ephemeris time in the solar system). Another way is inspired by the relativistic mechanics and its differences from the non-relativistic. I use there hamiltonian formalism, Hamilton – Jacobi formalism and geometric formalism. I repeat here these formalisms also in their classical form. This work is based on ideas of Barbour and Rovelli.
Keywords: configuration, mechanics, timeless, energy, hamiltonian

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Stručná historie času

Lidská civilizace přijala v průběhu dějin koncept času jako fundamentální vlastnosti vesmíru. Již pravěký člověk si všiml, že v přírodě existují jisté děje, které se pravidelně opakují. Na základě těchto dějů vzniklo převládající pojetí času. Pojetí, které čas bere jako všudypřítomnou základní vlastnost vesmíru. Čas, který plyne všude stejným tempem. Čas, který jsme začali měřit pomocí těchto dějů. Nejočividnějšími periodickými změnami jsou rotace Země kolem své osy, změny měsíčních fází a střídání ročních období. V průběhu vývoje jsme byli schopni vynalézt přístroje pro měření času – sluneční hodiny, přesýpací hodiny, kyvadlové hodiny a v poslední době atomové hodiny.

Filozofové rozebírají čas již od pradávna, ale k žádnému velkému úspěchu nedošli. Z dob antiky vyšel po dlouhou dobu převládající názor, podle kterého je čas mírou periodických změn a nemá smysl přemýšlet o okamžicích menších než jsou dané periody, protože dle definice neexistují. Se vznikem moderní vědy si doménu času osvojili fyzikové. Během čtyř století vývoje fyziky došlo ke dvěma hlavním revolucím v pojetí času.

Galileo jako první začal k ověřování svých hypotéz používat experiment. Tato změna v postoji ke zkoumání světa znamenala vznik moderní vědy. Z jeho experimentů s padajícími tělesy vyplynulo, že dráha padajícího tělesa je úměrná čtverci času. Kepler, současník Galilea, zkoumal detailně pohyby na hvězdné obloze a dospěl k jeho třem slavným zákonům. Druhý Keplerův zákon říká, že obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní. Je zjevně patrné, že se hned v počátcích vědy objevuje důležitá fyzikální veličina – čas.

Na pracích Galilea a Keplera založil Isaac Newton svoji knihu, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, která se stala základním kamenem klasické mechaniky. Newton zde vyložil gravitační zákon a tři zákony mechaniky (Newtonovy zákony). V jeho knize se však objevují i dva jiné velmi důležité koncepty – absolutní prostor a absolutní čas. Newton dochází k závěru, že musí existovat neměnná aréna, na které se odehrávají všechny fyzikální děje a tyto děje nijak neovlivňují prostor, ve kterém se odehrávají. Mimo to podle Newtona existuje i všudypřítomný, v každém koutu vesmíru stejnou rychlostí plynoucí čas, který stejně jako absolutní prostor není nijak ovlivněn probíhajícími fyzikálními jevy. Tento čas je společný pro všechny ve vesmíru. A měříme ho pomocí hodin.

Nejvýstižnější je citát, který pochází přímo od Newtona: *Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably without relation to anything external, and by another name is called duration: relative, apparent, and common time, is some sensible and external measure of duration by the means of motion, which is commonly used instead of true time; such as an hour, a day, a month, a year. [1]*

Jedna z nejdůležitějších vlastností absolutního času, které zavádí Newton do fyziky, je jeho spojitost. Je tedy možné čas dělit do menších a menších intervalů, přičemž neexistuje žádný nejmenší časový interval. Když se na to podíváme z matematického hlediska, tak můžeme říci, že čas byl udělán spojitým pro diferenciální povahu klasické fyziky.

Newtonovo pojetí prostoru a času převládalo po dvě století. První výraznější změny v náhledu na absolutní čas a prostor vnesl do fyziky Ernst Mach. Machův princip se stal důležitým pro svůj relativní náhled na setrvačnou hmotnost tělesa. Machův koncept narušoval myšlenku absolutního prostoru. Známý je např. problém Newtonova vědra. Machův princip se nikdy experimentálně nepotvrdil (ale ani nevyvrátil). Následující zajímavou myšlenku k problematice času pronesl Ernst Mach:

It is utterly beyond our power to measure the changes of things by time … time is an abstraction at which we arrive by means of the changes of things; made because we are not restricted to any one definite measure, all being interconnected. [2]

Této myšlence se budu věnovat více v sekci o efemeridovém čase. Asi nejdůležitějším dopadem Machových myšlenek bylo, že hluboce ovlivnily Alberta Einsteina při jeho pátrání po nové teorii gravitace.

V roce 1905, pravděpodobně nejrevolučnějším roce v dějinách fyziky (ne-li celé vědy), přišel Albert Einstein s novou verzí mechaniky – relativistickou mechanikou. Průběh času se náhle stal závislým na rychlosti pozorovatele a relativním vzhledem k různým inerciálním vztažným systémům. Čas byl zrovnoprávněn na pozici dimenze a byl zaveden nový koncept – prostoročas. S nadsázkou můžeme říci, že to je samozřejmé, protože abychom byli schopni chodit na schůzky, tak potřebujeme čtyři souřadnice – tři pro prostorové určení a jednu pro čas (na rohu 3. a 5. avenue, ve 4. patře v 9 hodin ráno). V tomto novém náhledu se absolutními staly rychlost světla a prostoročas jako celek. Již tento úspěch by Einsteinovi vynesl věčnou slávu.

Einstein, vědomý si problému gravitace v klasické teorii (gravitace se klasicky šíří okamžitě), začal pracovat na relativistické teorii gravitace. Toto kolosální dílo, obecnou teorii relativity, dokončil o dekádu později. V OTR je gravitace projevem zakřivení prostoročasu hmotnými tělesy. Gravitace a geometrie prostoročasu jsou tedy ekvivalentní pojmy. Z toho lze dostat, že čas je ovlivňován gravitací a plyne jiným tempem v přítomnosti různě hmotných těles.

Ve 20. století se ve fyzice objevuje převratný koncept nazvaný kvantová hypotéza a z ní vyrůstající kvantová mechanika – nejvýstřednější, nejméně pochopitelná a nejlépe experimentálně ověřená fyzikální teorie. Kvantová mechanika přejímá koncept času z klasické mechaniky.

Dodnes neexistuje kvantová teorie gravitace. Je veliký problém spojit kvantovou teorii s OTR kvůli jejich matematické odlišnosti a i kvůli tomu, jakým způsobem nahlížejí na čas. Ke spojení těchto dvou teorií bude možná nutné přepracovat koncept času a zjistit, jestli čas musí být nutně přítomný v základech takovéto teorie.

Za zmínku stojí i tzv. termodynamická šipka času. Člověk si v průběhu dějin všiml, že čas plyne pouze jedním směrem. Přítomnost odděluje minulost a budoucnost. Čas směřuje z minulosti do budoucnosti a nelze obrátit směr jeho toku. Přičemž fyzikální zákony, které zatím známe jsou časově reversibilní. Šipka plynutí času vzniká ze statistických důvodů u mnohočásticových systémů. Ze šipky plynutí času je tedy zřejmé, že čas je od prostorových dimenzí velmi odlišný.

V dalších částech této práce se budu blíže věnovat některým výše vyřčeným problémům a zformuluji klasickou mechaniku, která bude na čase nezávislá. A tudíž vyvstane otázka, jestli je čas opravdu fundamentální vlastností vesmíru anebo pouze lidskou abstrakcí, která nám pomáhá pochopit svět kolem nás, ale fyzikální zákony nic jako čas nepoužívají.

Kapitola 2

Barbourův způsob

2.1 Newton, Kepler a čas

Jak je patrné z citátu Ernsta Macha výše, musí být čas odvozen ze změny pozice těles. Hodiny pomocí kterých měříme čas jsou buď vyrobené člověkem anebo jsou přírodní jako rotace Země kolem své osy. Jelikož hodiny vyrobené člověkem jsou často velmi složité přístroje, tak nám nedávají okamžitý vhled do podstaty času jako „přírodní“ hodiny.

Zjednodušme si trochu sluneční soustavu a předpokládejme, že všechny planety obíhají kolem Slunce v jedné rovině a osa rotace Země je kolmá na tuto rovinu. Tuto soustavu budeme pozorovat z velké vzdálenosti nad Sluncem. Označme r_i vzdálenost planety s indexem i od Slunce, $i = 1,...,8$ (momentálně máme 8 planet ve sluneční soustavě). Úhel ϕ označuje otočení Země vlivem své rotace vůči pevné vzdálené hvězdě. Úhel α_i měříme jako úhel mezi spojnicí Slunce a planety i a mezi spojnicí Slunce a pevné vzdálené hvězdy.

Přijde nám jako přirozené, že všechny tyto veličiny jsou funkcí času t, tedy $r_i(t)$, $\phi(t)$, $\alpha_i(t)$. Ale pokud budeme měřit čas pomocí rotace Země (za předpokladu, že je rotace nezávislá na zbylých veličinách) kolem své osy, pak musíme tyto veličiny přepsat jako funkce ϕ, tedy $r_i(\phi)$, $\alpha_i(\phi)$. Nedefinované t zde nehraje žádnou roli.

Ale protože víme, že Země není nijak význačná planeta, tak místo ϕ můžeme vzít úhel rotace jakékoliv planety kolem své osy. Musí tím hlavním pohybem být vůbec rotace kolem své osy? Proč by jím nemohlo být cokoliv jiného?

Z druhého Keplerova zákona víme, že průvodiče planet opíší stejnou plochu za jednotku času měřeného pomocí ϕ. Dostali jsme zajímavý výsledek – pohyby planet mohou být libovolné, ale přesto máme jasnou závislost pohybu planet na rotaci zemské osy. Je známé, že lze odvodit Newtonův gravitační zákon z druhého Keplerova zákona. Newton přišel i s pohybovým zákonem, ve kterém vystupuje zrychlení jako druhá derivace polohy podle času. Newton šel tedy ještě dále a zavedl absolutní čas. Vyvstává ale otázka jestli to vůbec bylo oprávněné? Dnes víme, že planety si navzájem perturbují pohyby. Druhý Keplerův zákon neplatí tedy úplně přesně, pokud měříme čas pomocí ϕ.

2.2 Efemeridový čas

Předpokládejme, že sluneční soustava je uzavřený systém, tj. žádné vnější objekty nemají rušivé vlivy na tuto soustavu. Potom musí být možné definovat časovou proměnnou takovým způsobem, že Newtonovy zákony zůstanou platné pro celou sluneční soustavu.

Vzájemně se přitahující tělesa mají potenciální energii rovnou (viz [3])

$$V = -G\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{1}$$

kde G je gravitační konstanta, m_i je hmotnost i-tého tělesa a r_{ij} je vzdálenost mezi i-tým a j-tým tělesem. Suma přes $i<j$ znamená, že všechny páry ij bereme pouze jednou.

Systém má také kinetickou energii T, která je součtem kinetických energií jednotlivých těles. Řecké písmeno δ před nějakou veličinou bude znamenat, že daná veličina je velmi malá. Pokud chceme definovat malý čas δt, tak musíme vzít v úvahu, že se i-té těleso pohne o vzdálenost δd_i. S rozumnou přesností můžeme rychlost brát jako

$$v_i = \frac{\delta d_i}{\delta t} \tag{2}$$

a kinetická energie T má tedy tvar

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\frac{\delta d_i}{\delta t}\right)^2. \tag{3}$$

Jak víme z výsledků mechaniky, v takovémto systému se zachovává energie ve tvaru $T + V$. Označme E jako tuto energii, tedy

$$\sum_i \frac{m_i}{2}\left(\frac{\delta d_i}{\delta t}\right)^2 + V = E, \tag{4}$$

kde V je tvaru (1).

Předpokládejme, že si pořídíme záznamy takovéto soustavy v jednotlivých po sobě jdoucích konfiguracích. Snadno najdeme δd_i pro dvě takovéto po sobě jdoucí konfigurace. Kdybychom u sebe měli hodiny, mohli bychom ověřit vztah (4). Ale pokud je nemáme, tak můžeme tento vztah použít pro definici času. Čas tedy definujeme pomocí (4) jako

$$\delta t = \sqrt{\frac{\sum_i m_i (\delta d_i)^2}{2(E - V)}} . \tag{5}$$

Tento čas nazýváme efemeridový čas. Efemerida udává polohy nebeských těles a δt odvodíme z těchto poloh. V roce 1957 navrhl astronom Clemence definici lidmi vyrobených hodin (chronometru). Chronometr je mechanizmus na měření času, který je neustále synchronizován, jak nejlépe to lze, s efemeridovým časem. Vzorec (5) obsahuje kromě konstant G, E *a* m_i pouze posunutí a vzdálenosti.

Protože jsme již zavedli, co je δt, tak nyní můžeme napsat výraz pro rychlost ve tvaru

$$v_i = \frac{\delta d_i}{\delta t} = \sqrt{\frac{2(E - V)}{\sum_i m_i (\delta d_i)^2}} \delta d_i \tag{6}$$

Rychlost tělesa není poměr posunutí a nějakého abstraktního času, ale času definovaného jako (5), který zahrnuje posunutí všech těles v daném systému.

Čas je tedy měřen pomocí všech pohybů v systému. Pokud známe G, E *a* m_i, tak nám stačí k určení δt pouze dvě po sobě jdoucí konfigurace. Pokud konstanty neznáme, potom musíme vzít dostatečný počet po sobě jdoucích konfigurací, které poskytnou data pro jejich určení.

Ještě je třeba vyřešit, aby se jednotlivé hodiny nerozcházely. Lidmi vyrobené hodiny to (dle Clemenceho) definice musí zvládnout díky lidské vynalézavosti, ale co ty přírodní?

Mějme dva systémy každý s různou celkovou energií E a různými hmotnostmi těles. Budeme pořizovat záznamy následných konfigurací u obou systémů a budeme chtít určit časový interval mezi dvěma po sobě jdoucími konfiguracemi u obou systémů. Obecně hodnoty δt_1 a δt_2 nebudou shodné, protože veličiny v (5) mohou být pro tyto dva systémy odlišné. Avšak tyto dva systémy budou dobrými hodinami, pokud pro jakýkoliv interval hodnot E a m_i bude poměr $\delta t_2/\delta t_1$ stejná konstanta. V takovém případě tedy na jedněch hodinách pouze přeškálujeme stupnici. Mohli bychom říct, že se liší pouze o lineární transformaci časové osy, pokud bychom vzali v úvahu i případné posunutí počátku.

Zde významně vstupuje do hry E – V. V izolovaných systémech, včetně gravitačních systémů, se kinetická energie T a potenciální energie V neustále mění, ale zachovává se jejich součet $E = T + V$. Tedy pokud T roste, potom roste i $E – V$. Pokud je kinetická energie u prvního systému větší než u druhého, potom v (5) dojde k tomu, že se zvětší jmenovatel systému 1 oproti systému 2, ale čitatelé vyrovnají tento efekt, takže poměr $\delta t_2/\delta t_1$ bude stejný. Hodiny se tedy nebudou rozcházet. Toto bude platné pro libovolné množství systémů.

Na závěr je důležité říct, že jedinými hodinami může být pouze celý vesmír, protože neexistují izolované soustavy ve vesmíru, kromě vesmíru jako celku. Problém s takovouto definicí času by byl pouze v nekonečném vesmíru. Z výše použitého postup vidíme, že čas není nezávislý prvek reality. Může být odvozen ze změn.

Výše jsem se snažil ukázat, že čas není tak, jak ho popsal Newton absolutním prvkem reality vesmíru, ale že jde popsat pomocí změn poloh těles v izolovaném systému. V následujících částech této kapitoly odvodím bezčasovou dynamiku z Jacobiho variačního principu.

2.3 Jacobiho variační princip

V obecné podobě je Jacobiho variační princip vymizení variace následující akce (viz [4])

$$S = \int d\lambda \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda}} \tag{7}$$

kde g_{ab} je metrika na konfiguračním prostoru se souřadnicemi x a λ je monotónně vzrůstající parametr podél křivky. Tento princip vede k trajektoriím, jimiž jsou geodetiky v konfiguračním prostoru. Zápis (7) je dostatečně obecný, aby zahrnoval i obecnou relativitu. Nám bude pro popis bezčasové mechaniky stačit konformně plochá metrika, tedy metrika, jejíž obecný tvar lze zapsat jako

$$g_{ab} = konst.\delta_{ab} = -\frac{1}{2} mV(x)\delta_{ab} \tag{8}$$

kde δ_{ab} je Kroneckerovo delta a $V(x)$ odpovídá potenciální energii. Z potenciálu můžeme vyjmout konstantu E. Tedy přejdeme k tvaru $V - E$.

Pro určení rychlostí na konfiguračním prostoru budeme vycházet z kinetické metriky, která má tvar

$$T(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \left(\frac{d\vec{x}^i(\lambda)}{d\lambda} \right)^2 \tag{9}$$

kde m_i je hmotnost částice i.

Celkem tedy za znalosti (8) a (9) dostaneme následující tvar akce pro Jacobiho variační princip

$$S = \int d\lambda \sqrt{T(\lambda)(E - V(x))} \tag{10}$$

Akce (7) je invariantní vůči reparametrizaci λ a je tedy nezávislá na umělé volbě λ. Akce (10) je tedy nezávislá na čemkoliv, co bychom mohli nazývat časovou proměnnou.

2.4 Pohyb po geodetikách

Pojem okamžiku bude klíčový pro naše další úvahy. Objekty ve vesmíru jsou vždy v nějaké vzájemné poloze vůči sobě. Okamžik charakterizovaný pomocí vzájemných poloh nazvěme jako relativní konfigurační okamžik. Okamžik charakterizovaný vzájemnou konfigurací a relativními rychlostmi objektů nazvěme relativní fázový okamžik.

V Newtonovské dynamice vzájemné konfigurace a rychlosti nepostačují k tomu, aby plně udaly počáteční stav. Počáteční stav musí být definován vzhledem k absolutnímu prostoru a času. Odpovídající okamžiky můžeme nazvat absolutními okamžiky.

V klasické teorii jsou každé dva okamžiky oddělené nějakým množstvím času. Čas není jenom pouhým sledem okamžiků, ale můžeme mu připsat i metriku (k té později dojdeme). Dále platí, že oddělení dvou okamžiků v čase je nezávislé na obsahu těchto dvou okamžiků.

V teorii relativity mezi výše zmíněnými vlastnostmi okamžiků ztratíme absolutnost. Relativnímu okamžiku odpovídá prostorupodobná nadplocha. Pro to, aby vývoj systému byl jednoznačně určen, potřebujeme znát data na takovéto nadploše a polní rovnice.

Přístup, který budu níže používat bude obhajovat myšlenku, že okamžiky existují, ale čas nikoliv. Přesněji tedy, že celá mechanika může být vybudována pouze pomocí relativních konfiguračních okamžiků a rozdílů v jejich obsahu. Ve fyzice není potřeba zavádět časovou dimenzi a zvláště pojem trvání je nadbytečný. Trvání odvozujeme ze změn objektů a jejich pohybů.

Newton formuloval dynamiku v absolutním prostoru a čase. V dnešní době se v teoretické mechanice používá konfigurační prostor C_0, rozšířený o prostor T, jednorozměrnou časovou dimenzi. Historie systému je spojitá křivka v prostoru C ($C \equiv C_0 \times T$).

Prostor T se ukáže jako nadbytečný, protože můžeme udělat projekci křivky vývoje systému z C do C_0. Křivka v C_0 stále reprezentuje všechny konfigurace, jimiž systém ve svém vývoji projde. Pro celý vesmír rychlost pohybu skrz C_0, která má být měřena v T, nemá smysl, protože čas musí vycházet ze změn pohybů. Křivka vesmíru v C_0 popisuje pohyby všech jeho částí. Je neužitečné předpokládat, že vesmír může procházet C_0 různými rychlostmi. Protože pokud to připustíme, tak dojde pouze k přeškálování. Hodiny půjdou rychleji, ale stejně tak i pohyby, které měří.

Trocha úvahy ukáže, že nějaký vnější čas je třeba jenom pokud popisujeme část vesmíru. Nějaká část vesmíru se může pohybovat pomaleji či rychleji vzhledem k celkovému pohybu. Obíhající země má relativní rychlost vzhledem k Hubbleově expanzi, která by mohla být odlišná od své současné hodnoty. Země by se potom pohybovala po jiné orbitě (tedy bezčasové křivce v konfiguračním prostoru).

Křivka vývoje konzervativního n-částicového systému je geodetika v konfiguračním prostoru C_0, kterou najdeme pomocí Jacobiho variačního principu (viz [5])

$$\delta I_{Jac} = \delta \int d\lambda \sqrt{F_E T} = 0\,, \tag{11}$$

kde $F_E = E - V$ a T je vyjádřeno jako

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda} \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\,. \tag{12}$$

$\vec{x}_i$ je polohový vektor i-té částice, V je potenciální energie systému, E je konstantní celková energie, T je kinetická metrika a F_E je konformní faktor. Varírujeme dle polohy a máme úlohu s pevnými konci.

Pro různé hodnoty konformního faktoru F_E, tedy pro různé hodnoty celkové energie E, dochází ke změně geodetik. Kompletní množina všech geodetik je dána množinou hodnot, které může nabývat celková energie.

Klasický vesmír má pevně danou geodetiku díky jeho konstantní celkové energii. Protože potenciální energie je určena až na konstantu, můžeme celkovou energii zahrnout do potenciální energie, neboli do konformního faktoru. Můžeme tedy říct, že vesmír se řídí bezčasovým geodetickým principem na C_0 s příslušnou hodnotou F_E. Toto bude velmi významné, pokud by se ukázalo, že existuje nějaká výjimečná hodnota konformního faktoru.

Vyřešme problém (11) a podívejme se jaké rovnice z něho plynou. Prohodíme-li variaci s integračním znamením za předpokladu platnosti všech podmínek pro takovouto operaci, dostaneme

$$\int \frac{1}{2} (F_E T)^{-\frac{1}{2}} (T \delta F_E + F_E \delta T) d\lambda = 0\,. \tag{13}$$

Za použití vzorce (12) pro T dále při variaci podle $\vec{x}_i$ dostáváme

$$T\delta F_E + F_E \delta T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{d\vec{x}_j}{d\lambda}\right)^2 \frac{\partial F_E}{\partial \vec{x}_i}\delta\vec{x}_i + F_E m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\frac{d\delta\vec{x}_i}{d\lambda}, \tag{14}$$

kde přes *i* nesčítáme.

Dosadíme-li (14) do (13), dostaneme

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{F_E T}}\left(T\frac{\partial F_E}{\partial \vec{x}_i}\delta\vec{x}_i + F_E m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\frac{d\delta\vec{x}_i}{d\lambda}\right)d\lambda = 0 \tag{15}$$

a dále integrál upravíme do následujícího tvaru

$$\int \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T}{F_E}}\frac{\partial F_E}{\partial \vec{x}_i}\delta\vec{x}_i + \sqrt{\frac{F_E}{T}} m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}\delta\vec{x}_i\right)d\lambda = 0\,. \tag{16}$$

Pokud první člen integrálu přepíšeme a na druhý použijeme metodu per partes, dojdeme k výrazu

$$\int \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{T}{F_E}}\frac{\partial F_E}{\partial \vec{x}_i} - \frac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\frac{F_E}{T}} m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\right)\right]\delta\vec{x}_i d\lambda + \left[\sqrt{\frac{F_E}{T}} m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\delta\vec{x}_i\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} = 0\,. \tag{17}$$

Tuto úlohu budeme počítat s pevnými konci, takže vymizí druhý člen v (17). Jelikož se celý výraz (17) má rovnat nule, musí se tedy vnitřek integrálu také rovnat nule pro všechna $\delta\vec{x}_i$. Převedeme-li ještě druhý člen na pravou stranu, dostaneme rovnice geodetik v konfiguračním prostoru C_0 v následujícím tvaru

$$\sqrt{\frac{T}{F_E}}\frac{\partial F_E}{\partial \vec{x}_i} = \frac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\frac{F_E}{T}} m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\right). \tag{18}$$

Provedeme-li následující volbu parametru F_E

$$F_E = T \quad \text{a platí} \quad T = E - V\,, \tag{19}$$

dostaneme pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{d}{d\lambda}\left(m_i \frac{d\vec{x}_i}{d\lambda}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}\,. \tag{20}$$

Ztotožníme-li parametr λ s časovou proměnnou t, okamžitě dostaneme známý tvar Newtonova druhého zákona

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \,. \tag{21}$$

Musíme si ale uvědomit, že díky platnosti (19) naše řešení platí pouze pro jednu energii. Definování času tedy musíme provést jinak.

Zavedeme-li kinetickou metriku následovně

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} (d\vec{x}_i)^2} \,. \tag{22}$$

Snadno přepíšeme (22) do tvaru

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E - V} \,. \tag{23}$$

Integrací (23) dojdeme k

$$s = \int_0^T \sqrt{E - V}\, dt \,. \tag{24}$$

To je ale vztah platný pouze pokud máme zavedený vnější čas. Pokud chceme mít bezčasovou dynamiku a čas z ní pouze definovat, musíme (23) integrovat dle druhé proměnné a obdržíme čas jako

$$t = \int_0^S \sqrt{\frac{1}{E - V}}\, ds \,. \tag{25}$$

Všimněme si, že pokud dosadíme (22) do (25), dostaneme již výše odvozený tvar efemeridového času (5).

Ve vesmíru můžeme jednotlivé jeho části popsat pomocí Jacobiho principu, kde každá část má svojí speciální hodnotu energie. V každé takové části můžeme zavést čas tímto způsobem. Tyto časy se budou lišit nejvýše o lineární transformaci (viz podkapitola 2.2). Toto závisí na tom, jak zvolíme podmínku (21). Pro jinou volbu by bylo nemožné udržet spolu hodiny v chodu (s přihlédnutím k přeškolování) v celém vesmíru a takovéto hodiny by nám nebyly k ničemu užitečné.

Vidíme tedy, že dynamiku lze přepsat do bezčasového tvaru a potom položením jedné podmínky můžeme čas definovat a určit jeho vlastnosti. Standardně jsou známy pohybové rovnice s časovými derivacemi a pomocí nich dojdeme k zákonu zachování energie. Výše použité odvození používá zákon zachování energie jako podmínku, díky které jsme schopni definovat čas.

Použitelná časová metrika může být zavedena pouze pro izolovaný systém. Reálně je jediným izolovaným systémem celý vesmír, takže existují pouze jedny hodiny. K zajištění jejich chodu bychom ale museli mít přehled o celém vesmíru.

Kapitola 3

Hamiltonovský formalismus

Zpracováno s pomocí [6]

3.1 Opakování mechaniky

Mějme systém s evolucí v čase t v m zobecněných souřadnicích q^i. Proměnné q^i tvoří konfigurační prostor C_0. Vývoj systému je určen lagranžiánem, jednou funkcí $2m$ proměnných $L(q^i, v^i)$. Fyzikální pohyby jsou extremály akce

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^i(t), \frac{dq^i(t)}{dt} \right) dt . \tag{26}$$

Dynamický systém je tedy určen dvojicí (C_0, L). Fyzikální pohyby jsou takové, které splňují Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{d}{dt} p_i \left(q^i(t), \frac{dq^i(t)}{dt} \right) = F_i \left(q^i(t), \frac{dq^i(t)}{dt} \right), \tag{27}$$

kde hybnosti a síly jsou definovány jako

$$p_i(q^i, v^i) = \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i = v^i)}{\partial \dot{q}^i}, \qquad F_i(q^i, v^i) = \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i = v^i)}{\partial q} . \tag{28}$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu lze převést do rovnic prvního řádu, pokud proměnnými budou q^i a p_i. Zinvertujeme funkci $p_i(q^i, v^i)$ do tvaru $v^i(q^i, p_i)$ a potom ji vložíme do $F_i(q^i, v^i)$ a definujeme pomocí ní sílu

$$f_i \equiv F_i(q^i, v^i(q^i, p_i)) . \tag{29}$$

jako funkci poloh a hybností. Pohybové rovnice potom jsou

$$\frac{dq^i(t)}{dt} = v^i(q^i(t), p_i(t)), \qquad \frac{dp_i(t)}{dt} = f_i(q^i(t), p_i(t)) . \tag{30}$$

Tyto rovnice jsou určeny funkcí H_0, hamiltoniánem, definovaným jako

$$H_0(q^i, p_i) = p_i v^i - L(q^i, v^i(q^i, p_i)) . \tag{31}$$

(30) je ekvivalentní s (27) právě tehdy, když

$$v^i(q^i, p_i) = \frac{\partial H_0(q^i, p_i)}{\partial p_i}, \qquad f_i(q^i, p_i) = -\frac{\partial H_0(q^i, p_i)}{\partial q^i}, \tag{32}$$

což jsou Hamiltonovy rovnice.

3.2 Symplektická formulace

Hamiltonovy rovnice mohou být přepsány do užitečného a kompaktního geometrického jazyka. Zavedeme fázový prostor Γ_0 jako 2m-rozměrný prostor popsaný souřadnicemi q^i a hybnostmi p_i. Časová evoluce je tok (q^i, p_i) v tomto prostoru. Vektorové pole tečné k tomuto toku je

$$X_0 = v_i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial q^i} + f_i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial p_i} . \tag{33}$$

Vývoj je určen tím, že přiřadíme vektorové pole X_0 ke Γ_0. Fázový prostor Γ_0 můžeme teď interpretovat jako kotečný prostor T^*C_0. Každému kotečnému prostoru lze přiřadit jedna-forma ve tvaru

$$\theta_0 = p_i dq^i \tag{34}$$

a $d\theta_0$ (pro derivaci forem platí $\omega = \omega_I dx^I$, pak $d\omega = \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I$) je nedegenerovaná (ω je nedegenerovaná, pokud platí: ω(X) = 0 implikuje X = 0). Prostor vybavený takovouto jedna-formou má význačnou vlastnost, že každá funkce f určuje vektorové pole X_f přes vztah $(d\theta)(X_f) = -df$. Tedy pohybové rovnice jsou (za znalosti, že kontrakce mezi formou a vektorem je definována jako $(\alpha \wedge \beta)(X) = \alpha(X)\beta - \beta(X)\alpha$)

$$(d\theta_0)(X_0) = -dH_0 . \tag{35}$$

Dva-forma $\omega_0 = d\theta_0$ vystupující v (35) je symplektická (forma je symplektická, pokud je uzavřená a nedegenerovaná, uzavřená forma je

$d\omega_0 = 0$). Dynamický systém je tedy určen trojicí *(Γ_0, ω_0, H_0)*, kde Γ_0 je varieta, ω_0 je dva-forma a H_0 je funkce na Γ_0.

3.3 Presymplektický formalismus

Další důležitou formulací mechaniky je presymplektický formalismus. Tento formalismus je založen na myšlence, že popisujeme pohyb pomocí grafu funkce *($q^i(t)$, $p_i(t)$)* namísto funkcí samotných. Graf funkce *($q^i(t)$, $p_i(t)$)* je neparametrizovaná křivka γ v (2m + 1)-rozměrném prostoru $\Sigma = R \times \Gamma_0$ se souřadnicemi *(t, q^i, p_i)*. Je tvořena všemi body *(t, $q^i(t)$, $p_i(t)$)* v tomto prostoru. Vektorové pole

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + v_i(q^i . p_i)\frac{\partial}{\partial q^i} + f^i(q^i, p_i)\frac{\partial}{\partial p^i} \tag{36}$$

je tečné ke všem křivkám γ. Nyní si vezměme Poincarého jedna-formu

$$\theta = p_i dq^i - H_0(q^i, p_i)dt \tag{37}$$

na Σ. Dva-forma $\omega = d\theta$ je uzavřená, ale degenerovaná (každá dva-forma je degenerovaná v lichých dimenzích), a existuje tedy vektorové pole X takové, že

$$(d\theta)(X) = 0 \, . \tag{38}$$

Integrální křivky (integrální křivky vektorového pole, jsou všude tečné k tomuto poli) nulového vektorového pole dva-formy ω se nazývají orbity ω. Lze ukázat, že X z (36) splňuje (38). Grafy pohybu jsou orbity $d\theta$. Vztah (38) je tedy přepis pohybových rovnic.

Prostor Σ vybavený uzavřenou dva-formou ω se nazývá presymplektický. Dynamický systém je tedy definován dvojicí *(Σ, ω)*. Všimněme si, že (38) je homogenní a určuje tedy X až na škálování. To je v souladu s tím, že vektorové pole tečné k pohybům je definované až na škálování. A to je v souladu s tím, že pohyby jsou reprezentovány neparametrizovanými křivkami.

Akce (26) je tedy pouze křivkový integrál z Poincarého jedna-formy podél orbit. Pokud je γ orbita *(t, $q^i(t)$, $p_i(t)$)* příslušející ω, pak akce pohybu $q^i(t)$ je

$$S[q] = \int_{\gamma} \theta \,. \tag{39}$$

3.4 Rozšířený popis

Nakonec přejdeme k formulaci mechaniky, která přirozeně přechází v relativistickou mechaniku. Zaveďme prostor C, relativistický konfigurační prostor, definovaný jako

$$C = R \times C_0 \,, \tag{40}$$

popsaný $m+1$ proměnnými $(t,\ q^i)$. Pohyby popíšeme grafy funkcí $q^i(t)$ jako křivky v C. Uvažujme kotečný prostor T^*C se souřadnicemi $(t,\ q^i,\ p_t,\ p_i)$ a funkci

$$H(t, q^i, p_t, p_i) = p_t + H_0(q^i, p_i) \tag{41}$$

na tomto prostoru. Nechť Σ je nadplocha v T^*C definovaná jako

$$H(t, q^i, p_t, p_i) = 0 \,. \tag{42}$$

Σ můžeme popsat souřadnicemi $(t,\ q^i,\ p_i)$. Kotečnému prostoru T^*C lze přiřadit jedna-forma, která je

$$\tilde{\theta} = p_i dq^i + p_t dt \tag{43}$$

Omezení jedna-formy (43) na nadplochu (42) je přesně jedna-forma (37). Nadplocha (42) je proto presymplektický prostor, který definuje dynamiku.

Dynamika je úplně určená dvojicí $(C,\ H)$, relativistickým fázovým prostorem a funkcí H na T^*C. Grafy pohybů jsou orbity $d\tilde{\theta}$ na nadploše (42). H nazýváme relativistickým hamiltoniánem.

Dynamika může být vyjádřena pomocí variačního principu na $(C,\ H)$. Neparametrizovaná křivka γ v C určuje fyzikální pohyby, pokud γ extremalizuje integrál

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} \tilde{\theta} \tag{44}$$

v třídě křivek γ na T^*C, které splňují (42) s omezením γ na C, spojujícím dva dané body $(t_1,\ q_1^i)$ a $(t_2,\ q_2^i)$.

Označme Γ prostor orbit $d\theta$ v Σ. Existuje projekce $\pi : \Sigma \to \Gamma$, která každému bodu ze Σ přiřazuje příslušející křivku . Dále existuje právě jedna nedegenerovaná dva-forma ω_{ph} na Γ, taková, že její pull-back na Σ je $d\theta$, přesněji $\pi^*\omega_{ph} = d\theta$. Γ je symplektický prostor, nazveme ho relativistickým fázovým prostorem.

Γ_0 je prostor všech okamžitých stavů, tj. stavů, které systém může mít v $t = t_0$. Γ je prostor všech řešení pohybových rovnic. Pokud je v $t = t_0$ systém v počátečním stavu v Γ_0 , potom se bude vyvíjet dobře definovaným pohybem. Jinými slovy, každý pohyb určuje okamžitý stav v $t = t_0$. Takže dostáváme jedno-jednoznačné zobrazení mezi Γ a Γ_0 .

3.5 Hamiltonova - Jacobiho rovnice

Hamiltonova – Jacobiho rovnice je

$$\frac{\partial S(q^i,t)}{\partial t} + H_0\left(q^i, \frac{\partial S(q^i,t)}{\partial q^i}\right) = 0 \qquad (45)$$

Pokud nalezneme soubor řešení $S(q^i,\ Q^i,\ t)$ závisející na m parametrech Q^i, potom můžeme vypočítat funkci

$$P_i(q^i,Q^i,t) = -\frac{\partial S(q^i,Q^i,t)}{\partial Q^i}. \qquad (46)$$

Zinvertováním této funkce dostaneme

$$q^i = q^i(Q^i,P_i,t), \qquad (47)$$

což je obecné řešení pohybových rovnic s $2m$ integračními konstantami $(Q^i,\ P_i)$.

Řešení Hamitonovy – Jacobiho rovnice můžeme najít ve tvaru

$$S(q^i,Q^i,t) = Et - W(q^i,Q^i) \qquad (48)$$

kde E je konstanta a W splňuje

$$H_0\left(q^i, \frac{\partial W(q^i, Q^i)}{\partial q^i}\right) = E\,. \tag{49}$$

S se nazývá hlavní Hamiltonova – Jacobiho funkce a W se nazývá charakteristická Hamiltonova – Jacobiho funkce.

Nyní uvažujme dva body $(t_1,\ q_1^i)$ a $(t_2,\ q_2^i)$ v C. Hamiltonovou funkcí na $G = C \times C$ nazveme

$$S(t_1, q_1^i, t_2, q_2^i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t))dt\,, \tag{50}$$

kde $q^i(t)$ je fyzikální pohyb z $q_1^i(t_1)$ do $q_2^i(t_2)$, který minimalizuje akci. Ekvivalentní zápis je

$$S(t_1, q_1^i, t_2, q_2^i) = \int_\gamma \theta \tag{51}$$

kde γ je orbita ze Σ, která se projektuje do $q^i(t)$. Všimněme si rozdílu mezi akcí (26) a Hamiltonovou funkcí (50). První předpis je funkcionál pohybu a druhý je funkce koncových bodů. Hamiltonova funkce řeší Hamiltonovu – Jacobiho rovnici. Pokud známe Hamiltonovu funkci, tak jsme vyřešili pohybové rovnice, protože obecné řešení pohybových rovnic ve formě $q^i = q^i(t, Q^i, P_i, T)$ dostaneme pouhým zinvertováním funkce

$$P_i(t, q^i, T, Q^i) = -\frac{\partial S(t, q^i, T, Q^i)}{\partial Q^i}\,. \tag{52}$$

Výsledná funkce $q^i(t,\ Q^i,\ P_i,\ T)$ je obecné řešení pohybových rovnic, kde integrační konstanty jsou počáteční polohy a hybnosti (Q^i, P_i) v čase T.

3.6 Relativistický stav

Pokusme se popsat kyvadlo pomocí geometrizovaného formalismu. Na změření vlastností potřebujeme hodiny a přístroj určující výchylku. Hodiny naměří čas t a výchylku označíme jako α. Pozorování nám dodá dvojici $(t,\ \alpha)$ – událost. Nechť C je dvourozměrný prostor se souřadnicemi t a α. C je konfiguračním prostorem kyvadla. Zaveďme křivku γ v C, která popisuje pohyb systému. Dvojice $(t,\ \alpha)$ leží na křivce γ. Pohyb v C vyjádříme jako vztah

$$f(t,\alpha)=0\,. \tag{53}$$

Pohyb γ je vztah mezi pozorovatelnými veličinami.

Vychylme kyvadlo a opakujme experiment vícekrát. Pokaždé dostaneme jinou křivku γ. Pokaždé tedy nalezneme jiný vztah (53).

V případě malých oscilací a zanedbání tření můžeme popsat pohyb kyvadla jako

$$f(\alpha,t,A,\phi)=\alpha-A\sin(\omega t+\phi)\,, \tag{54}$$

kde $A\geq 0$ a $0\leq\phi\leq 2\pi$. Předpis (54) dává křivku v C pro každou dvojici (A,ϕ).

Nechť je Γ dvourozměrný prostor fyzikálních pohybů se souřadnicemi A a ϕ (v případě kyvadla, obecně jinak). Γ nazveme relativistickým fázovým prostorem kyvadla. Bod v Γ je relativistický stav. Relativistický stav je určen dvojicí (A,ϕ), která určuje křivku γ v rovině *(t, α)*. Pokud vychýlíme kyvadlo, dostaneme tedy nový stav. Pokud nezasahujeme a jen kyvadlo pozorujeme, tak stav zůstává stejný.

Trojice (C,Γ,f), kde f je definováno $f:\Gamma\times C\to V$ (V je lineární prostor) je dostatečná pro popis mechaniky. Je dostatečně široká i na to, aby popsala OTR. Každý stav v Γ určuje pohyb γ systému, jmenovitě popisuje vztah mezi pozorovatelnými v *C*.

Pohyb nemusí být nutně jednorozměrná křivka v *C*. Může to být i plocha s dimenzí větší než jedna. V takovém případě se jedná o kalibrační invarianci. Pohyb je takováto plocha i jakákoliv křivka na takovéto ploše.

3.7 Relativistická mechanika

Pokud známe konfigurační prostor C tj. polohy q^a (v relativitě i se souřadnicí popisují časovou dimenzi), potom Γ a f je plně určeno povrchem Σ v prostoru Ω, což je prostor určený polohami q^a a hybnostmi p_a. Plocha Σ je určena zadáním $H:\Omega\to R^k$ a odpovídá $H=0$. Označme $\tilde{\gamma}$ křivku v Ω a γ nechť je její omezení na *C*. Platí následující variační princip – křivka γ spojující události q_1^a a q_2^a je fyzikálním pohybem, pokud $\tilde{\gamma}$ extremalizuje akci

$$S[\tilde{\gamma}]=\int_{\tilde{\gamma}} p_a dq^a \tag{55}$$

v třídě křivek $\tilde{\gamma}$ splňujících

$$H(q^a, p_a) = 0\,, \tag{56}$$

jejichž restrikce γ spojuje q_1^a a q_2^a.

Pro $k = 1$ je H skalární funkce. Pro $k > 1$ dostáváme kalibrační invarianci.

Relativistickou hamiltonovskou mechaniku můžeme vyjádřit v geometrickém formalismu. Nechť (q^a, p_a) jsou souřadnice na $\Omega = T^*C$. Rovnice (56) určuje plochu Σ v prostoru Ω. Kotečnému prostoru lze přiřadit jedna-forma

$$\tilde{\theta} = p_a dq^a\,. \tag{57}$$

Označme θ omezení $\tilde{\theta}$ na Σ. Dva-forma $\omega = d\theta$ je v Σ degenerovaná (má nulové směry). Integrální plochy těchto nulových směrů jsou orbity ω na Σ. Každá taková orbita projektuje z Ω do C a dává povrch v C.

Pro $k = 1$ má Σ dimenzi $2n - 1$ a pohyby jsou jednorozměrné. V případě $k > 1$ má Σ dimenzi $2n - k$ a pohyby jsou obecně k-rozměrné a máme kalibrační invarianci.

Mějme projekci $\pi : \Sigma \to \Gamma$. Tato projekce vybaví fázový prostor Γ (prostor orbit ω) symplektickou dva-formou ω_{ph}, pro kterou platí, že její pullback na Σ je ω.

Zaveďme nyní parametr τ a popišme pohyb v Ω funkcemi $q^a(\tau)$ a $p_a(\tau)$. Tyto funkce splňují následují systém rovnic

$$H(q^a, p_a) = 0\,, \tag{58}$$

$$\frac{dq^a(\tau)}{d\tau} = N(\tau) v^a(q^a(\tau), p_a(\tau))\,,$$

$$\frac{dp_a(\tau)}{d\tau} = N(\tau) f_a(q^a(\tau), p_a(\tau))\,, \tag{59}$$

kde

$$v^a(q^a, p_a) = \frac{\partial H(q^a, p_a)}{\partial p_a}\,, \qquad f_a(q^a, p_a) = -\frac{\partial H(q^a, p_a)}{\partial q^a}\,. \tag{60}$$

Funkce $N(\tau)$ se nazývá „lapse“. Různé volby $N(\tau)$ určují různé parametry τ podél pohybu. Abychom získali monotónní parametrizaci, tak potřebujeme $N(\tau) > 0$. Pokud položíme $N(\tau) = 1$, pak nám (59) a (60) dá rovnice

$$\dot{q}(a) = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \tag{61}$$

kde tečka značí derivaci podle τ.

Parametr τ je uměle zavedený a nemá žádný fyzikální význam. Fyzikální obsah teorie je v pohybu v C, ne ve způsobu jakým je parametrizován. Fyzikální informace není v $q^a(\tau)$, ale v obrazech těchto funkcí v C.

Relativistický Hamiltonův – Jacobiho formalismus je určen jako

$$H\left(q^a, \frac{\partial S(q^a)}{\partial q^a}\right) = 0 \tag{62}$$

pro funkce $S(q^a)$ definované na C. Nechť $S(q^a, Q_i)$ je třída řešení parametrizovaných $(n - k)$ integračními konstantami Q_i. Zaveďme

$$f^i(q^a, P_i, Q^i) = \frac{\partial S(q^a, Q^i)}{\partial Q^i} + P_i = 0 \tag{63}$$

pro $(n - k)$ konstant P_i. Rovnice (63) je evoluční rovnice. Konstanty Q^i, P_i popisují $2(n - k)$-rozměrný fázový prostor Γ. Rovnice (62) je jednodušší než (45). Dále zde není žádná rovnice k invertování. $S(q^a, Q_i)$ můžeme ztotožnit s hlavní Hamiltonovou – Jacobiho funkcí $S(q^i, Q^i, t) = Et - W(q^i, Q^i)$ a stejně tak s charakteristickou Hamiltonovo – Jacobiho funkcí $W(q^i, Q^i)$, protože (62) je formálně stejné s (49) s nulovou energií.

3.8 Nerelativistická mechanika redukcí relativistické

Nerelativistický systém je jednoduše takový, kde jedna proměnná q^a je označena za čas t a hamiltonián má tvar

$$H = p_t + H_0, \tag{64}$$

kde nerelativistický hamiltonián H_0 je nezávislý na p_t. Energie je $E = -p_t$. Relativistický konfigurační prostor má strukturu

$$C = R \times C_0 \tag{65}$$

se souřadnicemi $q^a = (t, q^i)$, kde $i = 1, .. , n - 1$. Prostor C_0 je nerelativistický konfigurační prostor. Kotečný prostor $\Omega = T^* C$ má souřadnice $(q^a, p_a) = (t, q^i, p_t, p_i)$. Pro hamiltonián (64) přejde relativistická Hamiltonova – Jacobiho rovnice (62) na nerelativistickou (45).

Pokud máme zadán stav a hodnotu na hodinách, pak můžeme zjistit jaká jsou q^i ze vztahu $f^i(q^i, t, Q^i, P_i) = 0$. Dostaneme

$$q^i = q^i(t, Q^i, P_i), \tag{66}$$

Což interpretujeme jako evoluční rovnice pro q^i.

V parametrizovaném hamiltonovském systému je evoluční rovnice pro t velmi jednoduchá a můžeme jí zapsat jako $t = \tau$. Pro $N(\tau) = 1$ dostaneme klasické Hamiltonovy rovnice a (58) fixuje p_t, tedy energii.

V presymplektickém formalismu je povrch Σ

$$\Sigma = R \times \Gamma_0, \tag{67}$$

kde souřadnice na R je t a $\Gamma_0 = T^* C_0$ je nerelativistický fázový prostor.
Omezení $\widetilde{\theta}$ na povrch Σ je

$$\theta = p_i dq^i - H_0 dt = \theta_0 - H_0 dt\,. \tag{68}$$

Můžeme vzít vektorové pole ve tvaru

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + X_0, \tag{69}$$

kde X_0 je vektorové pole na Γ_0. Pohybová rovnice se redukuje na

$$(d\theta_0)(X_0) = -dH_0, \tag{70}$$

což je geometrická forma Hamiltonových rovnic. H určuje, jak proměnné v Γ_0 souvisí s t nebo-li jak se vyvíjí proměnné v Γ_0 v čase. V tomto smyslu nerelativistický hamiltonián H_0 generuje evoluci v čase t. Tato evoluce je generována hamiltonovským tokem X_0 z H_0. Z bodu $s = (q^i, p_i)$ z Γ_0 dostaneme $s(t) = (q^i(t), p_i(t))$ a

$$\frac{ds(t)}{dt} = X_0(s(t)) \,. \tag{71}$$

Evoluce pozorovatelné (ne explicitně závislé na čase) definované jako $A_t(s) = A(s(t)) = A(s,t)$ můžeme zapsat pomocí Poissonových závorek

$$\{A, B\} = -X_A(B) = X_B(A) = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i} \right), \tag{72}$$

kde X_f je definované pomocí vztahu $(d\theta)(X_f) = -df$. Evoluce je dána jako

$$\frac{dA_t}{dt} = \{A_t, H_0\}. \tag{73}$$

Nerelativistická definice stavů odpovídá vlastnostem systému v určitém okamžiku. Prostor okamžitých stavů je nerelativistický fázový prostor Γ_0.

Relativistický stav je řešením pohybových rovnic. Relativistický fázový prostor je prostorem řešení pohybových rovnic.

Zadáme-li hodnotu t_0 v čase, pak existuje korespondence mezi počátečními daty a řešeními pohybových rovnic. Takže existuje i korespondence mezi okamžitými stavy a relativistickými stavy.

Prostor Γ_0 je nejen prostorem okamžitých stavů, ale je na něm definován i hamiltonián H_0. V relativistickém podání se tato dvojí role ztrácí. Je třeba rozlišit mezi prostorem $\Omega = T^*C$, na kterém je definován hamiltonián H a mezi fázovým prostorem Γ, což je prostor pohybů.

V nerelativistické verzi X_0 generuje transformace v Γ_0 – hamiltonovský tok v Γ_0. Místo toho, aby pozorovatelné v C_0 byly závislé na čase, se na ně můžeme dívat jako na čase nezávislé v C_0 a na stavy v Γ_0 jako na čase závislé objekty.

V relativistické teorii není žádná zvláštní časová proměnná t. Prostor C se neštěpí na $C = R \times C_0$. Hamiltonián nemá tvar $H = p_t + H_0$. V systému, který nepřipouští nerelativistickou formulaci není možný koncept vyvíjejících se stavů v čase. Mají smysl jen pojmy relativistického stavu a pozorovatelných.

3.9 Příklady

Bezčasové dvojité kyvadlo

Mějme dvě pozorovatelné *a* a *b*. Jejich dynamika je určena hamiltoniánem

$$H = -\frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2 + a^2 + b^2 - 2E)\,. \tag{74}$$

Hamiltonova – Jacobiho rovnice tohoto systému je

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}(a,b)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}(a,b)\right)^2 + a^2 + b^2 - 2E = 0\,. \tag{75}$$

Řešení dostaneme ve tvaru (vypočteno v Maplu)

$$\begin{aligned} S(a,b,A) &= \frac{a}{2}\sqrt{A^2 + a^2} + \frac{A^2}{2}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{A^2 - a^2}}\right) + \\ &+ \frac{b}{2}\sqrt{2E - A^2 - b^2} + \frac{2E - A^2}{2}\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{2E - A^2 - b^2}}\right) \end{aligned}\,. \tag{76}$$

Pohybová rovnice ve tvaru (63) vyjde

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\frac{aA}{\sqrt{A^2 - a^2}} - A\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{A^2 - a^2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{A^3 a}{(A^2 - a^2)^{3/2}\left(1 + \dfrac{a^2}{A^2 - a^2}\right)} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{bA}{\sqrt{-A^2 - b^2 + 2E}} + \frac{1}{2}\frac{bA^3 - 2bAE}{(-A^2 - b^2 + 2E)^{3/2}\left(1 + \dfrac{a^2}{-A^2 - b^2 + 2E}\right)} + \\ &+ A\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{-A^2 - b^2 + 2E}}\right) + B = 0 \end{aligned}\quad, \tag{77}$$

kde *B* je integrační konstanta.

Tento systém není umělý, ale odpovídá některým kosmologickým modelům.

Bezčasový Keplerův problém

V tomto případě dostaneme hamiltonián

$$H = -\frac{1}{2}\left(p_a^2 + p_b^2 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - 2E\right). \tag{78}$$

Hamiltonova – Jacobiho rovnice je

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}(a,b)\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial b}(a,b)\right)^2-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-2E=0\,. \tag{79}$$

Řešení nalezneme ve tvaru (pomocí Maplu)

$$\begin{aligned}
S(a,b,A)&=\sqrt{Aa^2+a}-\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\sqrt{A}}+\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{1+2Aa+2\sqrt{Aa(1+Aa)}}{\sqrt{A}}\right)}{\sqrt{A}}-\\
&-\sqrt{-Ab^2+2Eb^2+b}+\frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{\sqrt{-A+2E}}-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{-2Ab+4Eb+1+2\sqrt{b(-Ab+1+2Eb)(-A+2E)}}{\sqrt{A-2E}}\right)}{\sqrt{A-2E}}
\end{aligned} \tag{80}$$

Pohybová rovnice ve tvaru (63) vyjde

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{Aa^2+a}}-\frac{1}{4}\frac{\ln(2)}{A^{3/2}}-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{2a+\dfrac{a^2A(1+Aa)}{\sqrt{Aa(1+Aa)}}}{\sqrt{A}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1+2Aa+2\sqrt{aA(1+Aa)}}{A^{3/2}}}{1+2Aa+2\sqrt{aA(1+Aa)}}+\\
&+\frac{1}{4}\frac{\ln\left(\frac{1+2Aa+2\sqrt{aA(1+Aa)}}{\sqrt{A}}\right)}{A^{3/2}}+\frac{1}{4}\frac{\ln(2)}{(-A+2E)^{3/2}}-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{-2b-\dfrac{b(-Ab+1+2Eb)(-A+2E)}{\sqrt{b(-Ab+1+2Eb)(-A+2E)}}}{\sqrt{-A+2E}}}{-2Ab+1+4Eb+2\sqrt{b(-Ab+1+2Eb)(-A+2E)}}-\frac{1}{4}\frac{1}{(-A+2E)^{3/2}}-\\
&-\frac{1}{4}\frac{\ln\left(\frac{-2Ab+1+4Eb+2\sqrt{b(-Ab+1+2Eb)(-A+2E)}}{\sqrt{-A+2E}}\right)}{(-A+2E)^{3/2}}+B=0
\end{aligned} \quad ,\ (81)$$

kde *B* je integrační konstanta.

Rovnice (77) a (80) popisuji pro dané konstanty křivky v konfiguračním prostoru *C* odpovídající přípustným korelacím a,b.

Kapitola 4

Závěr

4.1 Koncept času

V části 2.2 jsem ukázal, že z po sobě jdoucích konfigurací uzavřeného systému lze dojít k definici času. Tento čas se nazývá efemeridový čas a závisí na všech pohybech v systému. Dále bylo řečeno, že pro dva různé systémy se zachovává poměr mezi $\delta t_2/\delta t_1$. Jediný uzavřený systém je ve skutečnosti celý vesmír, takže takto odvozený čas bude jen jeden. Problém s tímto odvozením času by byl pouze v nekonečném vesmíru, pro ten by takovýto předpis času postrádal smysl. Dostali jsme, že čas není nezávislým prvkem reality, jak ho popsal Newton, ale může být odvozen ze změn poloh.

Dále ve 2.4 jsem odvozoval čas s pomocí Jacobiho variačního principu v konfiguračním prostoru. Výsledkem byl nový předpis pro čas, ze kterého se po určitém dosazení dostala předešlá definice efemeridového času. Hlavním smyslem tohoto odvození bylo bezčasové vyjádření pomocí Jacobiho variačního principu a použití zákona zachování energie jako podmínky, kterou úloha musí splňovat. Klasicky jsou základem pohybové rovnice s časovou proměnnou a odvodíme zákon zachování energie jako integrál pohybu. Zde máme jako základ zachování energie spolu s variačním principem a dojdeme k definici času.

Ve 3. kapitole bezčasovost plyne z relativistického pojetí, kde je hamiltonián vazbou, ve které není žádná speciální časová proměnná. K té se přechází v nerelativistické formulaci. V nerelativistické formulaci je základním konceptem evoluce v čase. Relativistická formulace je tedy v jistém smyslu bezčasová. V této části záleží hlavně na prostoru a na strukturách, které jsou na něm definovány (jeho vlastnosti a souřadnice) a z toho vychází většina věcí, o kterých se ve 3. kapitole pojednává.

Jak tedy bylo vidět v této práci, základní zákony mechaniky lze mít zformulované na bezčasovém základu. I přesto je však čas užitečnou konstrukcí. Protože jsme si jako lidé již na koncept času zvykli, tak nám pomáhá orientovat se ve fyzikální realitě. Relativní změny v konfiguraci jsou pro nás plynutím času. Fyziku jako vědu můžeme definovat tak, že se snaží o co nejpřesnější matematický model chování světa. Tento model neustále zpřesňujeme a vylepšujeme. Někdy lze ale jeden model přeformulovat do ekvivalentní formulace, která nám poskytuje jiný podhled na celý model, i když nedochází ke změnám v předpovědi pro reálné chování světa. A výše uvedené bezčasové formulace jsou takovým ekvivalentním modelem.

Koncept času je samozřejmě velmi užitečný pro chod lidské civilizace. Již ve starověku bylo důležité vědět, kdy budou záplavy kvůli zemědělství. Civilizace, které měly kalendář, měly oproti ostatním výhodu. Předvídat zatmění Slunce je velmi působivé. V dnešní společnosti je čas důležitý pro chod ekonomiky. Jeho přesné určení je důležité pro systém GPS a poskytuje kvalitnější služby obyvatelstvu. Myslím si, že vůbec není nadnesené říct, že bez konceptu času by lidská historie vypadala naprosto jinak. A pro chod společnosti tak, jak jí známe je nezbytný.

Tuto práci bych zakončil nadsázkou. Kdesi jsem četl, že čas udělal Bůh proto, aby se všechno nestalo naráz…

Literatura

[1] Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687)

[2] Ernst Mach, The science of mechanics, Open Court (1960)

[3] Julian Barbour, Nature of time, Essays on "The Nature of Time", contest of the Foundational Questions Institute www.fqxi.org (2008)

[4] Sean Gryb, Jacobi's principle and the disappearance of time, arXiv:0804.2900v3 [gr-qc] (2010)

[5] J. B. Barbour, The timelessness of quantum gravity: I. The evidence from the classical theory, Class. Quantum Grav. 11 (1994) 2853-2873

[6] C. Rovelli, Quantum Gravity, Cambridge University Press (2008)