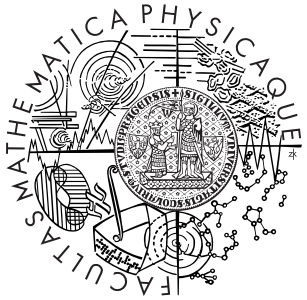
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Milan Šrámek

Kvaterniony ve fyzice

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., ÚTF
Studijní program: Fyzika, FOF

2010

Poděkování: Děkuji doc. RNDr. Jiří Langer, CSc. za cenné rady a trpělivost, Radce Ondrové a Hance Staňové za stylistickou úpravu a v neposlední řadě Andreji Řezníčkové za pomoc s anglickým překladem.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Milan Šrámek

Obsah

Úvod **6**

1 Konstrukce a algebra kvaternionů **8**
1.1 Cayley-Dicksonova konstrukce 8
1.2 Zdvojená algebra 12
1.3 Skalární součin 16

2 Reálné kvaterniony **17**
2.1 Základní vlastnosti 17
2.2 Kvaternionové transformace 25
2.3 Maticová reprezentace kvaternionů 28
2.4 Aplikace reálných kvaternionů ve fyzice 31
2.4.1 Kinematika bodové částice 32
2.4.2 Kinematika a dynamika tuhého tělesa 34

3 Komplexní kvaterniony **36**
3.1 Konstrukce a základní vlastnosti 36
3.2 Aplikace komplexních kvaternionů ve fyzice 43
3.2.1 Klasická elektrodynamika 43
3.2.2 Lorentzova transformace 46

Historický přehled **50**

Název práce: Kvaterniony ve fyzice
Autor: Milan Šrámek
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., ÚTF
e-mail vedoucího: doc.langer@gmail.com

Abstrakt:
Nejdříve je věnována pozornost Cayley-Dicksonově konstrukci, pomocí níž jsou vytvořeny algebry reálných a komplexních kvaternionů a dány jejich základní vlastnosti. Následuje podrobnější rozbor obou algeber a konstrukce skalárních součinů s euklidovskou a omezeně i s Minkowského normou. Získané poznatky jsou v případě reálných kvaternionů užity v popisu kinematiky a dynamiky bodové částice, reformulaci Eulerových dynamických rovnic tuhého tělesa a řešení pohybu tuhého tělesa v prostoru. Komplexní kvaterniony jsou aplikovány v klasické elektrodynamice a STR. Výsledkem jsou Maxwellovy rovnice ve velmi úsporném tvaru a jejich elegantní převedení na řešení vlnových rovnic současně s dalšími podmínkami; v nestandartním tvaru je získána i Lorentzova transformace.

Klíčová slova: Kvaterniony, Cayley-Dicksonova konstrukce, Klasická mechanika, Klasická elektrodynamika, STR

Title: Quaternions in physics
Author: Milan Šrámek
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., ÚTF
Supervisor's e-mail address: doc.langer@gmail.com

Abstract:
Firstly, the attention is given to Cayley-Dickson construction, because it helps us to create algebras of real and complex kvaternions and it gives us their primary characteristics. After it, there is more detailed analyse of both of algebras and construction of scalar product with Euclid and particulary with Minkowski´s norm. These gained pieces of knowledge in case of real kvaternions are used in describing kinematic and dynamic of point element, reformulation of Euler´s dynamical equations of rigid body and in solution of movement of rigid body in space. Complex kvaternions are applied in classical electrodynamics and special theory of relativity. Results of this are Maxwell´s equations in very saving form and their elegant transformation to solution of wave equation simultaneously with another conditions; Lorentz transformation is gained in nonstandard form.

Keywords: Quaternions, Cayley-Dickson construction, Classical mechanics, Classical electrodynamics, STR

Úvod

Kvaterniony jsou obecný matematický pojem zahrnující všechny kvaternionové algebry definované nad různými tělesy. Nejběžněji používanými jsou reálné a komplexní kvaterniony (kvaternionové algebry nad tělesem reálných a komplexních čísel). Jejich obvyklým a přímočarým zavedením je vytvoření vektorového prostoru nad příslušným tělesem pomocí čtveřice generátorů $1(= e_0)$, $\hat{\boldsymbol{i}}(= e_1)$, $\hat{\boldsymbol{j}}(= e_2)$, $\hat{\boldsymbol{k}}(= e_3)$. Na tomto prostoru je pak definována bilineární operace násobení tak, aby byla asociativní a platilo:

$$e_i e_j = -1\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k \quad \text{a} \quad 1 \ldots \text{je jednotkový prvek.}$$

Všechny vlastnosti obou algeber jsou následně vyvozovány z těchto předpokladů.

V následujícím textu se však zpočátku nebudeme zabývat konkrétními kvaternionovými algebrami, ale pomocí Cayley-Dicksonovy konstrukce sestrojíme obecnou kvaternionovou algebru (tzn. nad obecným tělesem). Hlavní myšlenkou C-D konstrukce je opakované zdvojování výchozí algebry. Tento proces pak jednoznačně určuje vlastnosti nově vzniklé algebry z vlastností algebry výchozí. V konkrétním případě reálné a komplexní kvaternionové algebry jsme tak schopni predikovat jejich základní chování.

V dalším postupu se již soustředíme pouze na podrobnější rozbor reálných a komplexních kvaternionů. Podstatným bodem je konstrukce skalárních součinů s euklidovskou normou na obou těchto algebrách a sestrojení zobecněného skalárního součinu na algebře komplexních kvaternionů, jehož zúžením na určitý podprostor získáme skalární součin s Minkowského normou. Drobnou zmíňkou je rovněž upozorněno na možnost reprezentace kvaternionů reálnými a komplexními maticemi. Nejdůležitější částí, které je dále úzce spjata s aplikací kvaternionů, je ale kvaternionová formaluce některých transformací. Ukážeme, že třídimensionální prostorová rotace i Lorentzova transformace ve čtyř-dimenzionálním Minkowském prostoru nabývají v rámci reálných resp. komplexních kvaternionů mimořádně jednoduchou podobu a

lze s nimi pohodlně pracovat. Toto demonstrujeme na popise kinematiky a dynamiky bodové částice a tuhého tělesa, čímž nakonec získáme v Eulerovy dynamické rovnice v pozměněném tvaru. Mimo rámec transformací použijeme dále komplexní kvaterniony k alternativní formulaci klasické elektrodynamiky a Lorentzovy kalibrace. Důsledkem jsou Maxwellovy rovnice v mimořádně jednoduchém tvaru a jejich snadné převedení na soustavu vlnových rovnic pro skalární a vektorový potenciál.

Kapitola 1

Konstrukce a algebra kvaternionů

1.1 Cayley-Dicksonova konstrukce

Na začátek uvedeme několik definic a vět, které nám umožní sestrojit reálné i komplexní kvaterniony a porozumět jejich algebře.

Definice 1 *Nechť A je konečně-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem T s definovanými bilineárními operacemi sčítání prvků a násobením prvků skalárem:*

$$\alpha v + \beta w \in A \quad \forall v, w \in A \quad a \quad \forall \alpha, \beta \in T. \tag{1.1}$$

Pak řekneme, že A je algebra, jestliže je na A definována bilineární operace $(\cdot, \cdot) \colon A \times A \to A$, tj.

$$\begin{aligned}(\alpha_1 v_1 + \beta_1 w_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2) = \alpha_1\alpha_2(v_1, v_2) + \alpha_1\beta_2(v_1, w_2) + \\ + \beta_1\alpha_2(w_1, v_2) + \beta_1\beta_2(w_1, w_2)\end{aligned} \tag{1.2}$$
$$pro \quad \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in A \ \ a \ \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in T,$$

a existuje $1 \in A$ takový, že

$$(1, v) = (v, 1) = v \quad pro \quad \forall v \in A. \tag{1.3}$$

Dále budeme zobrazení (v, w) stručněji zapisovat jako vw.

Algebra A se nazývá asociativní*, jestliže pro $\forall v, w, x \in A$ platí*

$$(vw)x \ = \ v(wx). \tag{1.4}$$

Komutativní *algebrou je algebra A právě tehdy, když pro* $\forall v, w \in A$

$$vw \;=\; vw, \tag{1.5}$$

Pokud pro libovolné dva prvky v, w *algebry A platí, že* $vw = 0$ *jen tehdy, jestliže* $v = 0$ *nebo* $w = 0$*, pak se A nazývá podílová algebra.*
A konečně, jestliže algebra A je vektorový prostor s normou $\|\cdot\|$ *a je splněna podmínka*

$$\|vw\| = \|v\| \cdot \|w\|, \tag{1.6}$$

pak o A mluvíme jako o normované *algebře.*

Definice 2 *Na algebře A (nad tělesem T) definujme zobrazení* $^c : A \times A$*, které prvku* $v \in A$ *přiřadí prvek* $v^c \in A$ *a má následující vlastnosti:*

$$\begin{gathered}(v^c)^c = v,\ (vw)^c = w^c v^c \quad pro \quad \forall v, w \in A \\ (\alpha v)^c = \alpha v^c \quad pro \quad \forall \alpha \in T \ a\ \forall v \in A\end{gathered} \tag{1.7}$$

Toto zobrazení se nazývá konjunkce.

Pozn.: Jestliže 1 je jednotkový prvek A, pak $1^c = 1$.
Protože pro lib. $v \in A$ máme

$$v^c = (1v)^c = v^c 1^c.$$

Ale v každé algebře existuje právě jeden jednotkový prvek, je tedy nutné, aby $1^c = 1$.

Díky tomuto zobrazení můžeme nyní můžeme pokročit k dalším definicím:

Definice 3 *Jestliže je na algebře A definována konjunkce, pak řekneme, že je tato algebra* reálná*, když je pro všechny její prvky splněno:*

$$v = v^c. \tag{1.8}$$

Pokud pro $\forall v \in A$ *platí následující:*

$$(v^c + v) \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad vv^c = v^c v \geq 0, \tag{1.9}$$

pak mluvíme o nicely formed *algebře.*

Z této definice přímo vyplývají jednoduché vlastnosti reálné a nicely formed algebry.

Lemma 1 *Jestliže je A reálnou algebrou, je i komutativní algebrou.*

Důkaz:
Uvažme $v, w \in A$ (takže i $vw \in A$), pak $vw = v^c w^c = (wv)^c = wv$ cbd.

Lemma 2 *Na nicely formed algebře B je možno definovat normu vztahem:*

$$\|v\|^2 = vv^c \quad (v \in B), \tag{1.10}$$

a tedy ke každému prvku $v \neq 0$ z B existuje prvek inverzní $v^{-1} \in B$ daný vztahem:

$$v^{-1} = \frac{v^c}{\|v\|^2}. \tag{1.11}$$

Jestliže je dále B současně asociativní, tvoří B normovanou podílovou algebru.

Důkaz:
První číst tvrzení je triviální důsledek definice. Přesvědčme se proto pouze o druhé části tvrzení. Nechť v, w jsou lib. prvky B:

$$\|vw\|^2 = (vw)(vw)^c = vww^c v = \|w\|^2 \|w\|^2$$

Nyní vyberme dva prvky x, y z B takové, že jejich součin je nulový, a ukažme, že alespoň jeden z nich musí být nulový:

$$xy = 0; \text{ přenásobením zleva } x^c \text{ dostaneme } \|x\|^2 y = 0$$

Jestliže $x \neq 0$, je i $\|x\| \neq 0$, a proto $y = 0$. cbd.

Již máme vše potřebné k samotné *Cayley-Dicksonově konstrukci*. Touto konstrukcí myslíme získání nové algebry z algebry staré pomocí kartézského součinu staré algebry se sebou samou a definováním operací násobení a konjugace prvků na nově vzniklém vektorovém prostoru, který budeme označovat *zdvojenou algebrou*. Vše shrňme do následující definice.

Definice 4 (Cayley-Dicksonova konstrukce) *Jestliže $(A, {}^c)$ je algebra nad tělesem T s konjunkcí ^{c}, pak* zdvojenou algebrou A' k algebře A *nazveme kartézský součin $A \times A$, na kterém definujeme sčítání prvků a násobení prvků skalárem*

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \tag{1.12}$$

$$\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w) \tag{1.13}$$

$$\textit{pro} \quad \forall \alpha \in T \ \textit{a} \ \ (v, w), (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in A \times A$$

spolu s násobením prvků vztahem

$$(v_1, w_1)(v_2, w_2) = (v_1 v_2 - w_2 w_1^c, v_1^c w_2 + v_2 w_1) \quad \text{pro} \quad (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in A \times A. \tag{1.14}$$

Pozn.: Jestliže $(A, ^c)$ je algebra s konjunkcí a 1 je její jednotkový prvek, pak $(1, 0)$ je jednotkový prvek A'. Což ovšem plyne přímo z 1.14.

Pozn.: Je jednoduché ukázat, že násobení prvků zdvojené algebry z definice 4 je distributivní. (Stačí porovnat výraz $(v, w)(v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ s výrazem $(v, w)(v_1, w_1) + (v, w)(v_2, w_2)$).

Lemma 3 *Zobrazení $^c : A' \to A'$ (A' je zdvojená algebra k algebře A) dané vztahem:*

$$(v, w)^c = (v^c, -w), \quad \forall (v, w) \in A' \tag{1.15}$$

je konjunkce na A'.

Důkaz:
Zřejmě platí, že $\Big((v, w)^c\Big)^c = (v, w)$, pro ověření zbývající vlastností konjunkce počítejme:

$$\Big((v_1, w_1)(v_2, w_2)\Big)^c = \Big((v_1 v_2 - w_2 w_1^c, v_1^c w_2 + v_2 w_1)\Big)^c =$$
$$= ((v_2^c v_1^c - w_1 w_2^c, -v_1^c w_2 - v_2 w_1)) = (v_2^c, -w_2)(v_1^c, -w_1) = (v_2, w_2)^c (v_1, w_1)^c$$

a

$$\Big(\alpha(v, w)\Big)^c = (\alpha v, \alpha w)^c = (\alpha v^c, -\alpha w) = \alpha(v^c, -w) = \alpha(v, w)^c$$

cbd.

Rozmysleme si ještě jedno zobrazení:

Definice 5 *Označme $m : A \to A'$ zobrazení definované přiřazením* $v \mapsto (v, 0)$.

Pro m jistě platí, že

$$m(v_1 v_2) = m(v_1) m(v_2) \tag{1.16}$$

a m je proto izometrický izomorfizmus A s podprostorem $Ln\{(1, 0)\}$, díky čemuž ztotožníme v s $(v, 0)$ a dále budeme někdy psát $v \in A'$.

1.2 Zdvojená algebra

O zdvojené algebře je možno dokázat následující tvrzení (Baez [3]), ze kterých pak jasně plynou vlastnosti komplexních čísel, reálných i komplexních kvaternionů, oktonionů a dalších, jak zkonstruujeme vzápětí.

Věta 1 *Nechť A' je zdvojením algebry A. Pak platí:*

1. *A' není nikdy reálná,*
2. *A' je komutativní $\Leftrightarrow$ A je reálná,*
3. *A' je asociativní $\Leftrightarrow$ A je komutativní a asociativní,*
4. *A' je nicely formed $\Leftrightarrow$ A je nicely formed .*

Důkaz:
Budeme dokazovat jenom ty o něco méně triviální případy a implikace.

1. triv.
2. Dokazujme nejprve směr „ $\Rightarrow$ “.
   Protože A' je komutativní, platí $(v_1, w_2)(v_2, w_2) = (v_2, w_2)(v_1, w_1)$, kde $(v_1, w_2), (v_2, w_2), (v_2, w_2), (v_1, w_1) \in A'$. Rozepsání a porovnáním druhých složek výsledného výrazu získáme

   $$v_1^c w_2 + v_2 w_1 = v_2^c w_1 + v_1 w_2 \Rightarrow (v_1^c - v_1)w_2 = (v_2^c - v_2)w_1.$$

   Protože tato rovnice musí platit pro lib. $v_1, v_2, w_1, w_2 \in A$, pak

   $$(v_1^c - v_1)w_2 = konst. \Rightarrow \ v_1^c = v_1$$

   a tedy A je reálná.
   Opačná implikace plyne z pouhého rozepsání vztahů $(v_1, w_2)(v_2, w_2)$ a $(v_2, w_2)(v_1, w_1))$.
3. Opět budeme dokazovat pouze směr „ $\Rightarrow$ “.
   Porovnáním vztahů $\Big((v_1, w_1)(v_2, w_2)\Big)(v_3, w_3)$ a $(v_1, w_1)\Big((v_2, w_2)(v_3, w_3)\Big)$ dostaneme rovnice:

   $$(v_1 v_2 - w_2 w_1^c)v_3 - w_3(w_2^c v_1 + w_1^c v_2^c) = v_1(v_2 v_3 - w_3 w_2^c) - (v_2^c w_3 + v_3 w_2)w_1^c$$
   $$(v_2^c v_1^c - w_1 w_2^c)w_3 + v_3(v_1^c w_2 + v_2 w_1) = v_1^c(v_2^c w_3 + v_3 w_2) + (v_2 v_3 - w_3 w_2^c)w_1.$$

Roznásobením obou rovnic a převedením vztahů závisejících v první i druhé rovnici na v_1 na jednu stranu získáme (opět díky tomu, že vše musí platit pro lib. $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in A$) postupně rovnice

$$(v_1v_2)v_3 - v_1(v_2v_3) = w_3(w_2^c v_1) - v_1(w_3 w_2^c) \Rightarrow (v_1v_2)v_3 - v_1(v_2v_3) = 0,$$

která nám ukazuje asociativitu A, a

$$\begin{gathered} v_2^c v_1^c w_3 - v_1^c v_2^c w_3 = v_1^c v_3 w_2 - v_3 v_1^c w_2 \Rightarrow (v_2^c v_1^c - v_1^c v_2^c)w_3 = konst. \\ \Rightarrow v_2^c v_1^c - v_1^c v_2^c = 0, \end{gathered}$$

na jejíž úpravu byla použita ukázaná asociativita A. Poslední rovnice ukazuje komutativitu A.

4. Nechť $(v, w) \in A'$, pak

$$\begin{gathered} (v, w) + (v^c, -w) = (v + v^c, 0) \in \mathbb{R} \\ (v, w)(v^c, -w) = (vv^c + ww^c, -v^c w + v^c w) = (vv^c + ww^c, 0) \in \mathbb{R}, \end{gathered}$$

z čehož je postupem od jednoho konci ke druhému a naopak ukázána celá ekvivalence. Využili jsme zde zobrazení m.

cbd.

Před vlastní konstrukcí kvaternionů si ještě uvědomme, že zobrazení m z definice 5 nám dává možnost k přepsání prvků (v, w) zdvojené algebry A' do tvaru

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w) = v + (0, 1)w = v + \hat{\boldsymbol{i}}w, \quad \text{kde} \quad \hat{\boldsymbol{i}}^2 = -1. \tag{1.17}$$

Ovšem násobení výrazem $\hat{\boldsymbol{i}}w$ není obecně asociativní ani komutativní, takže např.:

$$\hat{\boldsymbol{i}}v = (0, 1)(v, 0) = (0, v) = (v^c, 0)(0, 1) = v^c\hat{\boldsymbol{i}} \tag{1.18}$$

$$v(\hat{\boldsymbol{i}}w) = (v, 0)(0, w) = (0, v^c w) \begin{cases} (w^c v)\hat{\boldsymbol{i}} \\ \hat{\boldsymbol{i}}(v^c w) \end{cases} \tag{1.19}$$

vs.

$$(v\hat{\boldsymbol{i}})w = (0, v^c)(w, 0) = (0, wv^c) = \begin{cases} (vw^c)\hat{\boldsymbol{i}} \\ \hat{\boldsymbol{i}}(wv^c) \end{cases} \tag{1.20}$$

$$(\hat{\boldsymbol{i}}v)(\hat{\boldsymbol{i}}w) = -wv^c. \tag{1.21}$$

Při násobení prvků zdvojené algebry můžeme nyní postupovat způsobem:

$$(v_1 + \hat{\boldsymbol{i}}w_1)(v_2 + \hat{\boldsymbol{i}}w_2) = v_1v_2 + v_1(\hat{\boldsymbol{i}}w_2) + (\hat{\boldsymbol{i}}w_1)v_2 + (\hat{\boldsymbol{i}}w_1)(\hat{\boldsymbol{i}}w_2) = \\ = v_1v_2 - w_2w_1^c + \hat{\boldsymbol{i}}(v_1^cw_2 + v_2w_1).$$

Výsledek odpovídá vztahu 1.14.
Uvažujme dále již jenom komutativní výchozí algebru A, čímž ovšem porovnáním 1.20 a 1.21 hned získáváme i asociativitu a komutativitu při násobení výrazem $\hat{\boldsymbol{i}}w$ a všechny 1.19, 1.20, 1.21, 1.21 vztahy lze shrnout pomocí jediného:

$$\hat{\boldsymbol{i}}v = v^c\hat{\boldsymbol{i}} \tag{1.22}$$

(ovšem stále bereme v úvahu, že $\hat{\boldsymbol{i}}^2 = -1$).
Nechť je nyní touto algebrou množina reálných čísel $\mathbb{R}$, na které definujeme konjunkci $^c : x \mapsto x$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ (Jedná se tedy o reálnou algebru). Pakliže identifikujeme prvek $\hat{\boldsymbol{i}} = (0, 1)$ příslušné zdvojené algebry $\mathbb{R}'$ s komplexní jednotkou i a konjunkci na zdvojené algebře s komplexním sdružením, je zřejmě onou zdvojenou algebrou množina komplexních čísel $\mathbb{C}$. Tato, jak je známo, není reálná, ovšem je komutativní přesně tak, jak očekáváme vzhledem k větě 1. (Její jednotkový prvek je $(1, 0), 1 \in \mathbb{R}$). Nyní aplikujme stejný postup znovu a vytvořme zdvojenou algebru $\mathbb{R}''$ k algebře $\mathbb{R}'$. Především, jednotkovým prvkem $\mathbb{R}''$ je $\Big((1, 0), (0, 0)\Big)$. Díky zobrazení m můžeme ztotožnit

$$\hat{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{R}' \mapsto \Big((0, 1), (0, 0)\Big) \tag{1.23}$$

a v souladu s již dřívějším postupem, tj. přepisem prvků zdvojené algebry do tvaru $v + \hat{\boldsymbol{i}}w$, označíme

$$\hat{\boldsymbol{j}} = (0, 1) \in \mathbb{R}'' = \Big((0, 0), (1, 0)\Big). \tag{1.24}$$

Uvažujme ještě jeden vektor ve tvaru $\Big((0, 0), (0, 1)\Big)$ a označme jej jako $\hat{\boldsymbol{k}}$. O těchto vektorech lze ukázat následující tvrzení:

Lemma 4 *Mějme vektory* $1 = \Big((1, 0), (0, 0)\Big)$, $e_1 = \Big((0, 1), (0, 0)\Big)$, $e_2 = \Big((0, 0), (1, 0)\Big)$ *a* $e_3 = \Big((0, 0), (0, 1)\Big)$ *všechny z* $\mathbb{R}''$. *Pak platí, že*

$$e_me_n = -\delta_{mn}1 + \epsilon_{mnp}e_p \quad pro \quad m, n, p = 1 \ldots 3 \tag{1.25}$$

Důkaz:
Pouze pro $m = 1$ a $n = 3$:

$$e_1 e_3 = \Big((0,1),(0,0)\Big)\Big((0,0),(0,1)\Big) = \Big((0,0),(0,1)(0,1)\Big) =$$
$$= -\Big((0,0),(1,0)\Big) = -e_2$$
$$e_3 e_3 = \Big(-(0,1)^c(0,1),(0,0)\Big) = \Big((0,1)(0,1),(0,0)\Big) = -\Big((1,0),(0,0)\Big) = -1.$$

Pro ostatní možnosti ekvivalentně. cbd.

Pozn.: Lemma 4 lze ekvivalentně formulovat způsobem: $\hat{\boldsymbol{i}}^2 = \hat{\boldsymbol{j}}^2 = \hat{\boldsymbol{k}}^2 = -1$ a $\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{k}} = -1$.

Dále vektory $1, \hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ z $\mathbb{R}''$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi tohoto vektorového prostoru. Každý prvek q z $\mathbb{R}''$ je proto možno jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

který nám vzhledem k lemmatu 4 a vztahu 1.22 významně zjednoduší všechny algebraické operace v množině $\mathbb{R}''$.

Pozn.: Konjugace v tomto značení má tvar

$$q^c = (a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d)^c = a - \hat{\boldsymbol{i}}b - \hat{\boldsymbol{j}}c - \hat{\boldsymbol{k}}d, \tag{1.27}$$

jak můžeme lehce ověřit:

$$(a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d)^c = \Big((a,b),(c,d)\Big)^c = \Big((a,b)^c, -(c,d)\Big) =$$
$$= \Big((a^c,-b),(-c,-d)\Big) = \Big((a,-b),(-c,-d)\Big) = a - \hat{\boldsymbol{i}}b - \hat{\boldsymbol{j}}c - \hat{\boldsymbol{k}}d.$$

Konečně, zavěďme obvyklé značení:

Označení: Algebru $\mathbb{R}''$ je zvykem označovat jako $\mathbb{H}$ a nazývá se algebra *reálných kvaternionů*. Její prvky jsou obvykle zapisovány ve tvaru 1.26.

1.3 Skalární součin

Uveďme pouze definici a základní větu.

Definice 6 (skalární součin) *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Řekneme, že zobrazení $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ je skalární součin, jestliže splňuje následující axiomy:*

1. $$(v, w) = (w, v)^*, \quad v, w \in V, \tag{1.28}$$

2. $$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2), \quad v, w_1, w_2 \in V, \tag{1.29}$$

3. $$(v, \alpha w) = \alpha(v, w), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ v, w \in V, \tag{1.30}$$

4. $$(v, v) \geq 0 \quad (v, v) = 0 \ \Leftrightarrow v = 0. \tag{1.31}$$

Normou odpovídající skalárnímu součinu je potom zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ dané vztahem

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}. \tag{1.32}$$

Věta 2 (Schwartzova nerovnost) *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pro každé dva $v, w \in V$ platí*

$$|(v, w)|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 . \tag{1.33}$$

Kapitola 2

Reálné kvaterniony

V této kapitole budeme vždy pod slovem kvaterniony myslet vždy reálné kvaterniony.

2.1 Základní vlastnosti

Nejprve shrneme všechny vlastnosti reálných kvaternionů, které vyplývají z jejich konstrukce.

Věta 3 *Algebra* $(\mathbb{H}, \cdot)$ *má tyto vlastnosti:*

1. *je asociativní,*
2. *není komutativní,*
3. *vytváří nicely formed algebru,*
4. *tvoří podílovou algebru,*
5. *lze na ní definovat normu* $\|\cdot\|$ *vztahem*

$$\|v\|^2 = vv^c (= v^c v) \quad pro \quad \forall v \in \mathbb{H}, \tag{2.1}$$

   vůči které je $\mathbb{H}$ *normovanou algebrou,*

6. *ke každému prvku* g *z* $\mathbb{H}$ *existuje právě jeden inverzní prvek* g^{-1}*:*

$$g^{-1} = \frac{g^c}{\|g\|^2}. \tag{2.2}$$

Důkaz:
Vlastnosti *1.*, *2.* a *3.* vyplývají přímo z věty 1. Vlastnosti *4.*, *5.* a *6.* jsou důsledkem vlastností *1.* a *3.* uvážíme-li lemma 2. cbd.

Pozn.:

- Norma kvaternionu definovaná ve větě 3 má obvyklý tvar:

$$\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{pro} \quad q = a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d \in \mathbb{H}. \tag{2.3}$$

- Inverzní kvaternion ke kvatenionu pq je

$$(pq)^{-1} = \frac{(pq)^c}{\|pq\|^2} = \frac{q^c}{\|q\|^2}\frac{p^c}{\|p\|^2} = q^{-1}p^{-1}. \tag{2.4}$$

Definice 7 *Definujme lineární zobrazení* skalární část $S : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *a* vektorová část $V : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *působením na* $q \in \mathbb{H}$*:*

$$Sq := \frac{1}{2}(q + q^c), \tag{2.5}$$

$$Vq := \frac{1}{2}(q - q^c). \tag{2.6}$$

Pozn.: Linearita je zřejmá z definičních vztahů a vzhledem k tomu, že $\mathbb{H}$ je nicely formed algebrou, je skalární část kvaternionu vždy reálná. Definice 7 je tedy v pořádku.

Definice 7 je zřejmě analogií mezi skalární resp. vektorovou částí kvaternionu a reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla. Uvědomme si, co obě části představují. Nechť $q = a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d \in \mathbb{H}$, pak

$$Sq = \frac{1}{2}(a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d + a - \hat{\boldsymbol{i}}b - \hat{\boldsymbol{j}}c - \hat{\boldsymbol{k}}d) = a \tag{2.7}$$

$$Vq = \frac{1}{2}(a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d - a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d) = \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d. \tag{2.8}$$

Označení: Vec$\mathbb{H}$ je maximální podprostor $\mathbb{H}$ invariantní vůči zobrazení V ($\Leftrightarrow$ pro $\forall \boldsymbol{q} \in$ Vec$\mathbb{H} : S\boldsymbol{q} = 0$). O jeho prvcích ($\boldsymbol{p} \in$Vec$\mathbb{H}$) mluvíme jako o *ryzích* kvaternionech.

Lemma 5 *Mějme $q \in \mathbb{H}$, pak:*

1. $$Sq = Sq^c \quad a \quad Vq = -Vq^c, \tag{2.9}$$

2. $$q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow q = q^c, \tag{2.10}$$

3. $$q \in Vec\mathbb{H} \Leftrightarrow q = -q^c. \tag{2.11}$$

Na $\mathbb{H}$ je z technických důvodů potřeba definovat dvě bilineární operace, které v dalším textu výrazně zjednodušší symbolické operace s kvaterniony.

Definice 8 *Nechť $\boldsymbol{q_i} \in Vec\mathbb{H}$, $\boldsymbol{q_i} = \hat{\boldsymbol{i}}b_i + \hat{\boldsymbol{j}}c_i + \hat{\boldsymbol{k}}d_i$, $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, pak definujeme bilineární operace $\cdot : (Vec\mathbb{H})^2 \to \mathbb{R}$ a $\times : (Vec\mathbb{H})^2 \to Vec\mathbb{H}$ vztahy:*

$$\boldsymbol{q_1} \cdot \boldsymbol{q_2} = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_2} = det\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Pozn.: Tvary operací $\cdot$ a $\times$ odpovídají skalárnímu a vektorovému součinu na $\mathbb{R}^3$. Odtud tedy jejich značení.

Přímým využitím právě definovaných operací dostaneme následující lemma.

Lemma 6 (Nový tvar kvaternionového násobení) *Jestliže $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $q_i = a_i + \hat{\boldsymbol{i}}b_i + \hat{\boldsymbol{j}}c_i + \hat{\boldsymbol{k}}d_i$ pro $i = 1, 2$, pak*

$$pq = SpSq - Vp \cdot Vq + Vp \times Vq + SpVq + SqVp. \tag{2.14}$$

Důkaz:
Tento vztah je zřejmý, rozepíšeme-li součin pq na tvar

$$pq = (Sp + Vp)(Sq + Vq) = SpSq + SpVq + SqVp + VpVq,$$

ovšem díky lemmatu 4 hned píšeme

$$VpVq = -Vp \cdot Vq + Vp \times Vq.$$

cbd.

Vztah 2.14 dává tušit, že platí

$$S(pq) = S(qp) \quad \text{pro} \quad \forall p, q \in \mathbb{H}, \tag{2.15}$$

a omezíme-li se pouze na ryzí kvaterniony, zjistíme, že:

$$S(\boldsymbol{pq}) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, \qquad V(\boldsymbol{pq}) = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}, \tag{2.16}$$

$$S((\boldsymbol{pq})\boldsymbol{h}) = -(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{h}, \qquad V((\boldsymbol{pq})\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{h} + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{h} \tag{2.17}$$

$$\vdots$$

Pomocí 2.16, 2.17 je tak možno dokazovat různé identity známé z vektorové algebry. Ty jednodušší získáme zadarmo z asociativity kvaternionového násobení, díky 2.16 např.:

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{p}, \tag{2.18}$$

protože

$$S(\boldsymbol{pqh}) = S((\boldsymbol{pqh})^c) = S((-\boldsymbol{h})(-\boldsymbol{q})(-\boldsymbol{p})) = -S(\boldsymbol{hqp}).$$

Použijeme-li spolu se vztahem 2.17 i definici vektorové části:

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{pqh}) &= 1/2(\boldsymbol{pqh} - (\boldsymbol{pqh})^c) = 1/2(\boldsymbol{pqh} + \boldsymbol{hqp}) = \\ &= 1/2(\boldsymbol{pqh} + \boldsymbol{qph} - \boldsymbol{qph} - \boldsymbol{qhp} + \boldsymbol{qhp} + \boldsymbol{hqp}) = \\ &= S(\boldsymbol{pq})\boldsymbol{h} - S(\boldsymbol{ph})\boldsymbol{q} + S(\boldsymbol{qh})\boldsymbol{p}, \end{aligned}$$

potom jejich porovnáním získáme další identitu:

$$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{h})\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}. \tag{2.19}$$

Jak vyplynulo ze samotné konstrukce kvaternionů, kvaternionové násobení není obecně komutativní. Zajímejme se ale o existenci speciálního kvaternionu, který komutuje se všemi ostatními.

Lemma 7 *Jestliže q z $\mathbb{H}$ komutuje se $\forall p \in \mathbb{H}$, potom už $q \in \mathbb{R}$.*

Důkaz:
Využitím 2.14 upravíme komutátor na tvar:

$$[q,p] = qp - pq = Vq\times Vp - Vp\times Vq = 2Vq\times Vp,$$

který je vzhledem k předpokladům nulový a to pro všechny p. Je proto nutné, aby i Vq byla nulová. cbd.

Uvažujme nyní rovnici:

$$q^2 = -1, \quad \text{kde} \quad q \in \mathbb{H}, \tag{2.20}$$

a rozeberme její řešení. Z 2.14 plyne:

$$q^2 = (Sq)^2 - Vq \cdot Vq + 2SqVq.$$

Potřebujeme tedy, aby $(Sq)^2 - Vq \cdot Vq = -1$ a současně $2SqVq = 0$. Pro splnění druhé podmínky existují jistě dvě možnosti: $Sq = 0$ nebo $Vq = 0$. Pokud by ovšem bylo $Vq = 0$, bylo by nemožné zajistit první podmínku, jelikož by nevyhnutelně muselo platit $(Sq)^2 = -1$, ale $Sq \in \mathbb{R}$. Proto je nutné, aby $Sq = 0$. Rovnici 2.20 řeší tudíž libovolný kvaternion

$$\hat{\boldsymbol{q}} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H} \quad \text{takový, že} \quad \|\hat{\boldsymbol{q}}\| = 1, \tag{2.21}$$

tj. *jednotkový ryzí kvaternion*. Množina všech jednotkových ryzích kvaternionů je zřejmě jednotková dvoudimenzionální sféra v $\mathbb{H}$.

Toto cvicení v řešení soustavy rovnic bylo užitečné pro více věcí. S jeho pomocí nyní ukážeme následující dvě lemmata. První z nich je v podstatě důsledkem zobecnění zobrazení m z definice 5.

Lemma 8 *Jestliže* $\boldsymbol{q} \in Vec\mathbb{H}$, $\boldsymbol{q} \neq 0$, *je* $Ln\{1, \boldsymbol{q}\}$ *izomorfní s* $\mathbb{C}$.

Důkaz:
Lineární zobrazení $\iota : Ln\{1, \boldsymbol{q}\} \to \mathbb{C}$, definované přiřazeními $\iota(1) = 1$ a $\iota(\hat{\boldsymbol{q}}) = i$, kde $\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}/\|\boldsymbol{q}\|$ a i je komplexní jednotka, je bijektivní. Navíc pro libovolné dva kvaterniony $q_1, q_2 \in Ln\{1, \boldsymbol{q}\}$ platí:

$$\iota(q_1 q_2) = \iota\left((a_1 + \hat{\boldsymbol{q}}b_1)(a_2 + \hat{\boldsymbol{q}}b_1)\right) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) = \iota(q_1)\iota(q_2)$$

cbd.

Jinak řečeno, lemma 8 tvrdí, že násobení v rovině $Ln\{1, \boldsymbol{q}\}$ se redukuje na komplexní násobení.
Následující konstrukce čerpající z předchozího lemma plně odpovídá obdobné konstrukci, která se provádí na komplexní rovině, a nelze proto od ní očekávat rozdílnější výsledky. Gürlebeck [7].

Definice 9 (Exponenciální zobrazení) *Nechť* $\hat{\boldsymbol{q}} \in Vec\mathbb{H}$, $\|\hat{\boldsymbol{q}}\| = 1$. *Exponenciální zobrazení* $e^{\hat{\boldsymbol{q}}\theta}$ *definujeme rozvojem*

$$e^{\hat{\boldsymbol{q}}\theta} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{\boldsymbol{q}}\theta)^n}{n!} = 1 + \hat{\boldsymbol{q}}\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}\hat{\boldsymbol{q}}\theta^3 + \cdots \tag{2.22}$$

spolu s odhadem

$$\left|e^{\hat{\boldsymbol{q}}\theta}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\theta|^n}{n!} = e^{|\theta|} \tag{2.23}$$

Lemma 9 *Mějme $\hat{\boldsymbol{q}}$ stejné jako v definici 9, pak platí následující:*

1. $$e^{\hat{\boldsymbol{q}}\theta} = \cos\theta + \hat{\boldsymbol{q}}\sin\theta, \tag{2.24}$$

2. $$\left\|e^{\hat{\boldsymbol{q}}\theta}\right\| = 1. \tag{2.25}$$

Důkaz:
Následující postup je známý z komplexní analýzy.

1. Separováním skalární a vektorové části v definici 9 získáme požadované.

2. Použitím definice normy a předchozího výsledku je důkaz u konce.

cbd.

Lemma 10 *Nechť $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in Vec\mathbb{H}$ a nechť $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = 0$, potom*

$$e^{\boldsymbol{p}} e^{\boldsymbol{q}} = e^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}.$$

Opačná implikace neplatí.

Důkaz:
Rozepišme pravou stranu podle definice:

$$e^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \boldsymbol{p}^k \boldsymbol{q}^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} \boldsymbol{p}^k \boldsymbol{q}^{n-k},$$

přičemž k tomu, abychom n-tou mocninu $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ přepsali na sumu, jsme využili, že $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ komutují.
Sdružením členů $\boldsymbol{p}$ se stejnou mocninou získáme přeuspořádání řady:

$$e^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\boldsymbol{p}^k \boldsymbol{q}^{n-k}}{(n-k)!k!},$$

pak přečíslovaním $(n-k=l)$ získáme požadované

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\boldsymbol{p}^k \boldsymbol{q}^{n-k}}{(n-k)!k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{p}^k \boldsymbol{q}^l}{l!k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{p}^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{q}^l}{l!} = e^{\boldsymbol{p}} e^{\boldsymbol{q}}.$$

Protipříklad opačné implikace: (GÜRLEBECK [7])
vezměme $\boldsymbol{p} = 3\pi\hat{\boldsymbol{i}}$ a $\boldsymbol{q} = 4\pi\hat{\boldsymbol{j}}$ a počítejme:

$$e^{\boldsymbol{p}} = -1,\ e^{\boldsymbol{q}} = 1 \text{ a } e^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}} = e^{5\pi(\frac{3}{5}\pi\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{4}{5}\pi\hat{\boldsymbol{j}})} = -1,$$

ale $3\pi\hat{\boldsymbol{i}}4\pi\hat{\boldsymbol{j}} = -4\pi\hat{\boldsymbol{j}}3\pi\hat{\boldsymbol{i}} \neq 4\pi\hat{\boldsymbol{j}}3\pi\hat{\boldsymbol{i}}$. cbd.

Důsledek 1 *$e^{\theta\hat{\boldsymbol{q}}}$ a $e^{-\theta\hat{\boldsymbol{q}}}$ jsou navzájem inverzní kvaterniony.*

Lemma 11 *Každý kvaternion $q \in \mathbb{H}$ můžeme napsat v* exponenciálním tvaru*, tj.:*

$$q = \|q\|\, e^{\theta\hat{\boldsymbol{q}}}, \tag{2.26}$$

kde

$$\cos\theta = \frac{Sq}{\|q\|},\ \sin\theta = \frac{\|Vq\|}{\|q\|},\ \hat{\boldsymbol{q}} = \frac{Vq}{\|Vq\|}.$$

Důkaz:
Jestliže $Sq \neq 0 \wedge Vq \neq 0$, můžeme psát:

$$q = \|q\|\,(\frac{Sq}{\|q\|} + \frac{Vq}{\|Vq\|}\frac{\|Vq\|}{\|q\|}).$$

Přiřadímeli formálně q úhel θ vztahy:

$$\cos\theta = \frac{Sq}{\|q\|},\ \sin\theta = \frac{\|Vq\|}{\|q\|},$$

můžeme lehce ověřit, že $\cos\theta \in [-1,1]\,,\ \sin\theta \in [-1,1]\,,\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
Toto přiřazení je tedy korektní a platí:

$$q = \|q\|\,(\cos\theta + \hat{\boldsymbol{q}}\sin\theta) = \|q\|\, e^{\theta\hat{\boldsymbol{q}}}.$$

Pokud by skalární nebo vektorová část byla nulová, bude $\cos\theta = 0$ nebo $\sin\theta = 0$. cbd.

Důsledkem lemmatu 10 je:

Věta 4 (Moivreova věta) *Nechť $q = \|q\|\,(\cos\theta + \hat{\boldsymbol{q}}\sin\theta) \in \mathbb{H}$, pak*

$$q^n = \|q\|^n\,(\cos\theta + \hat{\boldsymbol{q}}\sin\theta)^n = \|q\|^n\,(\cos n\theta + \hat{\boldsymbol{q}}\sin n\theta) \quad pro \quad \forall n \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Moivrova věta je zřejmě dobrý nástroj pro počítání celistvých mocnin resp. odmocnin kvaternionů. Mějme kvaternion $q = \|q\| (\cos\theta + \hat{\boldsymbol{q}} \sin\theta)$ a hledejme jeho n-tou ($n \in \mathbb{N}$) odmocninu $p = \|q\|^{\frac{1}{n}} (\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{q}} \sin\varphi)$. Obecným řešením je jistě

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Nechť je dále kvaternion q reálné číslo, tzn. $\sin\theta = 0$ a $\hat{\boldsymbol{q}}$ můžeme volit libovolně. Je-li $n = 2$, máme klasicky pouze dvě řešení ($\varphi = 0, \pi$). Pokud je ale $n > 2$, φ již není celistvým násobkem π, $\sin\varphi \neq 0$ a díky libovolnosti $\hat{\boldsymbol{q}}$ získáme nekonečné množství n-tých ($n > 2$) odmocnin reálného čísla.

Velmi užitečnou strukturou na vektorových prostorech je skalární součin. Pokusíme se jej najít na $\mathbb{H}$, ovšem pracujeme s vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel, budeme proto požadovat, aby tento skalární součin byl rovněž reálný.

Věta 5 (skalární součin na $\mathbb{H}$) *Zobrazení $(p, q) = S(pq^c)$, $p, q \in \mathbb{H}$, je skalární součin na $\mathbb{H}$.*

Důkaz:
Stačí pouze ukázat axiomy 1 až 4. Mějme $p, q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ a počítejme:

1. $(p, q) = S(pq^c) = S((pq^c)^c) = S(qp^c) = (q, p)$,
2. $(p, q_1 + q_2) = S(pq_1{}^c + pq_2{}^c) = (p, q_1) + (p, q_2)$,
3. $(p, \alpha q) = S(p(\alpha q)^c) = S(\alpha p q^c) = (\alpha p, q) = \alpha(p, q)$,
4. $(p, p) = S(pp^c) = \|p\|^2 \geq 0$ a z vlastnosti normy rovno nule právě tehdy, když $p = 0$.

cbd.

Pozn.: Norma definovaná vztahem 2.1 je kompatibilní se skalárním součinem z věty 5.

Skalarní součin nyní použijeme k definování úhlu, který svírají dva kvaterniony.

Definice 10 *Pro libovolné $p, q \in \mathbb{H}$, definujeme úhel ω, který svírají, vztahem*

$$\cos\omega = \frac{(p,q)}{\|p\|\,\|q\|} = \frac{S(pq^c)}{\|p\|\,\|q\|}. \tag{2.28}$$

Speciálně řekneme, že p, q jsou kolmé*, jestliže $S(pq^c) = 0$.*
Pakliže $V(pq^c) = 0$, jsou p, q paralelní*.*

Pozn.: Definice je korektní, uvážíme-li Schwartzovu nerovnost:

$$\|p\|^2\,\|q\|^2 \geq |S(pq^c)|^2 \quad \Rightarrow \quad \cos\omega \in [-1,1]\,.$$

Na konec této podkapitoly uveďme bez důkazu ještě jedno důležité tvrzení:

Věta 6 (Frobeniova věta) *Nechť A je asociativní podílová algebra nad tělesem reálných čísel. Pak A je izomorfní s $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, nebo s $\mathbb{H}$.*

Důkaz zle najít např. v Ward [10].

2.2 Kvaternionové transformace

Algebra reálných kvaternionů představuje užitečný nástroj k popisu některých geometrických transformací. Představíme zde tři-dimensionální rotaci a zrcadlení, spolu s jejich vzájemnými vztahy.

Lemma 12 (Kvaternionová rotace) *Nechť $p \in \mathbb{H}$, $\|p\| = 1$ a $p = e^{\theta\hat{\boldsymbol{p}}}$. Zobrazení $R_p : Vec\mathbb{H} \to Vec\mathbb{H}$ definované vztahem*

$$R_p(\boldsymbol{q}) := p\boldsymbol{q}p^{-1}, \tag{2.29}$$

je rotace prostoru $Vec\mathbb{H}$ o úhel 2θ kolem $\hat{\boldsymbol{p}}$.

Důkaz:
Nejprve ověřme, že pro $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$, také $p\boldsymbol{q}p^{-1} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$:

$$S(p\boldsymbol{q}p^{-1}) = \frac{1}{2}\left(p\boldsymbol{q}p^{-1} + (p\boldsymbol{q}p^{-1})^c\right) = \frac{1}{2}(p\boldsymbol{q}p^{-1} + p\boldsymbol{q}^c p^{-1}) = \frac{1}{2}p(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^c)p^{-1} = 0.$$

Použili jsme fakt, že $(p^{-1})^c = (p^c)^c = p$.
Dále ukažme, že transformace R_p zachovává normu: ($\boldsymbol{q} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$)

$$\|R_p(\boldsymbol{q})\| = p\boldsymbol{q}p^{-1}(p^{-1})^c\boldsymbol{q}^c p^c = p\boldsymbol{q}p^{-1}p\boldsymbol{q}^c p^c = \|\boldsymbol{q}\|\,\|p\| = \|\boldsymbol{q}\|\,,$$

a úhly: ($\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$)

$$\frac{S\big(R_p(\boldsymbol{q_1})(R_p(\boldsymbol{q_2}))^c\big)}{\|R_p(\boldsymbol{q_1})\|\,\|R_p(\boldsymbol{q_2})\|} = \frac{S(p\boldsymbol{q_1}\boldsymbol{q_2}^c p^c)}{\|\boldsymbol{q_1}\|\,\|\boldsymbol{q_2}\|} = \frac{S(\boldsymbol{q_1}\boldsymbol{q_2}^c)}{\|\boldsymbol{q_1}\|\,\|\boldsymbol{q_2}\|}.$$

Nyní hledejme všechny prvky z $\mathrm{Vec}\mathbb{H}$, které jsou vůči transformaci R_p invariantní, tzn.

$$p\boldsymbol{q}p^{-1} = \boldsymbol{q}.$$

Přenásobením poslední rovnice p zleva získáme

$$p\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}p \Rightarrow [p, \boldsymbol{q}] = 0 \Rightarrow [\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}] = 0.$$

Tuto podmínku splňují právě ty kvaterniony $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$, (neuvažujeme-li identické zobrazení R_P, tj. $p = 1$), pro které platí $\hat{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \times \hat{\boldsymbol{p}}$, viz. 2.14, a tedy $\hat{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{q} = 0$. Jedná se zřejmě o množinu $\{\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{q} = k\hat{\boldsymbol{p}}, k \in \mathbb{R}\}$.
Na závěr rozložme $\boldsymbol{q}$ na tvar

$$\boldsymbol{q} = \|\boldsymbol{q}\|\,(\hat{\boldsymbol{p}}\cos\eta + \hat{\boldsymbol{m}}\sin\eta),$$

kde $\hat{\boldsymbol{m}}$ leží v rovině kolmé k $\hat{\boldsymbol{p}}$ a $\|\hat{\boldsymbol{m}}\| = 1$ (což mimo jiné znamená, že $\hat{\boldsymbol{m}}^2 = -1$), η je úhel mezi $\hat{\boldsymbol{p}}$ a $\boldsymbol{q}$. Viz. obr. 2.1.
Můžeme proto dále psát:

$$p\boldsymbol{q}p^{-1} = \|\boldsymbol{q}\|\,(p\hat{\boldsymbol{p}}p^{-1}\cos\eta + p\hat{\boldsymbol{m}}p^{-1}\sin\eta),$$

ovšem $[p, \hat{\boldsymbol{p}}] = 0$. Zabývejme se proto pouze členem $p\hat{\boldsymbol{m}}p^{-1}$.

$$p\hat{\boldsymbol{m}}p^{-1} = (\cos\theta + \hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta)\hat{\boldsymbol{m}}(\cos\theta - \hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta) =$$
$$= \hat{\boldsymbol{m}}\cos^2\theta - \hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta\cos\theta + \hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{m}}\sin\theta\cos\theta - \hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}}\sin^2\theta.$$

Označíme-li $\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{n}}$, pak jistě $\hat{\boldsymbol{n}} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$, $\|\hat{\boldsymbol{n}}\| = 1$ a $\hat{\boldsymbol{n}}^2 = -1$. Navíc ale:

$$\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{p}} = \begin{cases} -\hat{\boldsymbol{m}} \\ \hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}} \end{cases} \Longrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{p}} = -\hat{\boldsymbol{m}},$$

takže

$$\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}} = -\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{m}}.$$

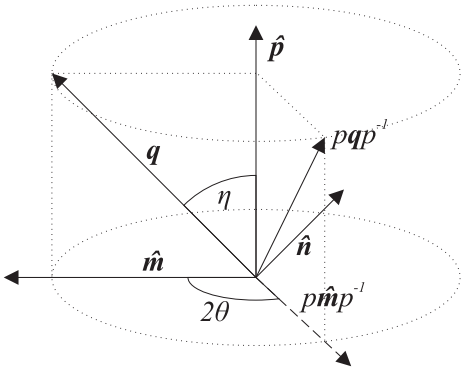
Dosazením nového značení a posledního výsledku do vyjádření $p\hat{\boldsymbol{m}}p^{-1}$ získáme

$$p\hat{\boldsymbol{m}}p^{-1} = \hat{\boldsymbol{m}}\cos^2\theta - \hat{\boldsymbol{m}}\sin^2\theta + 2\hat{\boldsymbol{n}}\cos\theta\sin\theta = \hat{\boldsymbol{m}}\cos 2\theta + \hat{\boldsymbol{n}}\sin 2\theta,$$

což zřejmě vyjadřuje rotaci $\hat{\boldsymbol{m}}$ kolem $\hat{\boldsymbol{p}}$ o úhel 2θ, jelikož

$$S\left(p\hat{\boldsymbol{m}}p^{-1}\hat{\boldsymbol{m}}^c\right) = -S\left(\hat{\boldsymbol{m}}^2\cos 2\theta + \hat{\boldsymbol{p}}\sin 2\theta\right) = \cos 2\theta.$$

cbd.



Obrázek 2.1: K rotaci $\boldsymbol{q}$ kolem $\hat{\boldsymbol{p}}$

Lemma 13 (Kvaternionová reflexe) *Mějme $\hat{\boldsymbol{p}} \in Vec\mathbb{H}$ takové, že $\|\hat{\boldsymbol{p}}\| = 1$. Potom zobrazení $F_{\hat{\boldsymbol{p}}} : Vec\mathbb{H} \to Vec\mathbb{H}$ dané vztahem*

$$F_{\hat{\boldsymbol{p}}}(\boldsymbol{q}) := \hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}\hat{\boldsymbol{p}}, \tag{2.30}$$

je zrcadlení prostoru $Vec\mathbb{H}$ na rovině s normálou $\hat{\boldsymbol{p}}$.

Důkaz:
S uvážením, že pro $\hat{\boldsymbol{p}} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$, $\|\hat{\boldsymbol{p}}\| = 1$ platí

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{-1} = \hat{\boldsymbol{p}}^{c} = -\hat{\boldsymbol{p}},$$

je postup první části důkazu, tj. že $F_{\hat{\boldsymbol{p}}}$ je zobrazení z $\mathrm{Vec}\mathbb{H}$ do $\mathrm{Vec}\mathbb{H}$ a že $F_{\hat{\boldsymbol{p}}}$ zachovává normu spolu s úhly, shodný s postupem důkazu stejných vlastností zobrazení R_p z lemmatu 12.
Zopakujme rovněž rozložení vektoru $\boldsymbol{q}$ na tvar

$$\boldsymbol{q} = \|\boldsymbol{q}\|\,(\hat{\boldsymbol{p}}\cos\eta + \hat{\boldsymbol{m}}\sin\eta), \quad (\hat{\boldsymbol{m}} \perp \hat{\boldsymbol{p}}).$$

Nyní počítejme:

$$\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}\hat{\boldsymbol{p}} = \|\boldsymbol{q}\|\,(\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{p}}\cos\eta + \hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}}\sin\eta).$$

Protože v důkazu lemmatu 12 bylo rovněž ukázáno, že $\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{m}}$, můžeme poslední vyjádření $\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}\hat{\boldsymbol{p}}$ přepsat do finálního tvaru

$$\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}\hat{\boldsymbol{p}} = \|\boldsymbol{q}\|\,(-\hat{\boldsymbol{p}}\cos\eta + \hat{\boldsymbol{m}}\sin\eta),$$

který exlicitně vyjadřuje, že zobrazení $F_{\hat{\boldsymbol{p}}}$ je reflexe vektoru $\boldsymbol{q}$ na rovině s normálou $\hat{\boldsymbol{p}}$. cbd.

Důsledek 2 *Libovolnou tří-dimenzionální rotaci zle rozložit na posloupnost dvou reflexí na rovinách, jejichž průnik je totožný s osou rotace a vzájemný úhel těchto rovin je polovina úhlu rotace.*

Důkaz:
Postupujme stejně jako Ward [10]. Nechť je dána rotace R_p odpovídající kvaternionu $p = e^{\frac{\theta}{2}\hat{\boldsymbol{p}}}$. Zvolme dvě roviny s jednotkovými normálami $\hat{\boldsymbol{m}}, \hat{\boldsymbol{n}} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$ tak, že jejich průnikem je množina $\{\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{q} = k\hat{\boldsymbol{p}}, k \in \mathbb{R}\}$, díky čemuž $\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}} = \cos\zeta + \hat{\boldsymbol{p}}\sin\zeta = e^{\zeta\hat{\boldsymbol{p}}}$. Zrcadlením libovolného vektoru $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}$ na rovině s normálou $\hat{\boldsymbol{m}}$ a posléze na rovině s normálou $\hat{\boldsymbol{n}}$ získáme:

$$\begin{aligned}(F_{\hat{\boldsymbol{n}}} \circ F_{\hat{\boldsymbol{m}}})(\boldsymbol{q}) &= \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{q}\hat{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{n}} = (\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}})\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}})^c = (\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}})\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}})^{-1} \\ &= e^{\zeta\hat{\boldsymbol{p}}}\boldsymbol{q}e^{-\zeta\hat{\boldsymbol{p}}}.\end{aligned}$$

Při porovnání $(F_{\hat{\boldsymbol{n}}} \circ F_{\hat{\boldsymbol{m}}})(\boldsymbol{q})$ s $R_p(\boldsymbol{q})$ je zřejmé, že při volbě $\zeta = \theta/2$, máme požadovaný výsledek. cbd.

2.3 Maticová reprezentace kvaternionů

Na začátek buďme opět na chvíli zcela obecní a dokažme si následující dvě tvrzení, jež vzápětí využijeme.

Lemma 14 *Nechť A je asociativní algebra nad tělesem reálných nebo komplexních čísel a 1 je její jednotkový prvek. Jestliže $E_1, E_2, E_3 \in A$ splňují*

$$E_m E_n = -\delta_{mn}1 + \epsilon_{mnp}E_p, \tag{2.31}$$

pak pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a1 + bE_1 + cE_2 + dE_3 = 0 \tag{2.32}$$

právě tehdy, když $a = b = c = d = 0$.

Důkaz:
Proveďme sporem, tj. nechť existují $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ne všechny nulové tak, že platí 2.32. Nejprve předpokládejme, že alespoň jedno z b, c, d je nenulové. BÚNO nechť $d \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$E_3 = -\frac{a}{d}1 - \frac{b}{d}E_1 - \frac{c}{d}E_2 = \alpha 1 + \beta E_1 + \gamma E_2.$$

Přenásobením této rovnic zleva, podruhé zprava E_3 a následným porovnáním výsledků obdržíme

$$\beta E_2 - \gamma E_1 = -(\beta E_2 - \gamma E_1) \Rightarrow \beta E_2 = \gamma E_1.$$

Pokračujme stejně a přenásobme $\beta E_2 = \gamma E_1$ zprava i zleva tentokráte však s E_1 a opět porovnejme výsledky. Zjistíme, že

$$\beta E_3 = -\beta E_3 \Rightarrow \beta = 0.$$

Uvážením všech předchozích kroků je již jednoduché ukázat, že z $\beta = 0$ plyne i $\gamma = 0, \alpha = 0$. Konečně pro splnění i 2.32 spolu s 2.31 je nutné rovněž aby $d = 0$, tedy spor s předpokladem.
Nyní ať $a \neq 0$. Pak (z 2.32)

$$1 = -\frac{b}{a}E_1 - \frac{c}{a}E_2 - \frac{d}{a}E_3 = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3.$$

Obě strany nyní umocníme na druhou

$$1 = 1^2 = -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Longrightarrow a = 0,$$

tj. opět spor s předpokladem. cbd.

Lemma 15 *Nechť $(A, +, \cdot)$ je asociativní algebra nad tělesem reálných nebo komplexních čísel s jednotkovým prvkem 1 a $E_1, E_2, E_3 \in A$ splňují*

$$E_m E_n = -\delta_{mn} 1 + \epsilon_{mnp} E_p, \tag{2.33}$$

potom podalgebra $(Ln(1, E_1, E_2, E_3)$ [1]$, +, \cdot)$ je izomorfní s $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.

Důkaz:
Díky předchozímu lemmatu dále ukazujeme pouze existenci příslušného izomorfismu.
Na základě ztotožnění:

$$1(= e_0 \in \mathbb{H}) \to 1(= E_0 \in A,\ \hat{\boldsymbol{i}}(= e_1) \to E_1,$$
$$\hat{\boldsymbol{j}}(= e_2) \to E_2,\ \hat{\boldsymbol{k}}(= e_3) \to E_3,$$

[1] Máme zde namysli reálný lineární obal, tzn. jestliže $v \in Ln(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, pak $v = \alpha_1 E_1 + \ldots + \alpha_n E_n$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

zkonstruujeme zobrazení $\Omega : \mathbb{H} \to A$:

$$\Omega(q) = \Omega(a + b\hat{\boldsymbol{i}} + c\hat{\boldsymbol{j}} + d\hat{\boldsymbol{k}}) := a1 + bE_1 + cE_2 + dE_3,$$

které je jistě lineární, neboť pro $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $q_i = \sum_{\nu=0}^{3} a_i^\nu e_\nu$, $i = 1, 2$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$\Omega(\alpha q_1 + \beta q_2) = \Omega\left(\sum_{\nu=0}^{3}(\alpha a_1^\nu + \beta a_2^\nu)e_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{3}(\alpha a_1^\nu + \beta a_2^\nu)E_\nu =$$
$$= \alpha\Omega(q_1) + \beta\Omega(q_2).$$

Také ale platí:

$$\Omega(q_1 q_2) =$$
$$= \Omega\left(a_1^0 a_2^0 - \sum_{i=1}^{3} a_1^i a_2^i + \begin{Vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{Vmatrix} + \sum_{i=1}^{3}(a_1^0 a_2^i + a_2^0 a_1^i)e_i\right) =$$
$$= \left(a_1^0 a_2^0 - \sum_{i=1}^{3} a_1^i a_2^i\right) 1 + \begin{Vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{Vmatrix} + \sum_{i=1}^{3}(a_1^0 a_2^i + a_2^0 a_1^i)E_i =$$
$$= \left(\sum_{\nu=0}^{3} a_1^\nu E_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{3} a_2^\mu E_\mu\right) = \Omega(q_1)\Omega(q_2),$$

vzhledem k linearitě Ω, což spolu s faktem, že zobrazení Ω je prosté a na ukazuje, že Ω je izomorfismus $(\mathbb{H}, +, \times)$ s $(Ln(1, E_1, E_2, E_3), +, \cdot)$ tak, jak jsme chtěli ukázat. cbd.

Pozn.: Algebra $(Ln(1, E_1, E_2, E_3), +, \cdot)$ není tedy komutativní, je ale antikomutativní (tj. pro $X, Y \in Ln(1, E_1, E_2, E_3)$ platí, že $XY = -YX$).

Dobře známými asociativními, avšak nekomutativními, algebrami jsou $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ a $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ (algebry matic typu $n \times n$ nad reálnými a komplex ními čísly). Dále hledejme jejich podalgebry izomorfní s $\mathbb{H}$. Vzhledem k předchozímu lemmatu mezi generátory příslušného podprostoru zahrneme jednotkovou matici, zbylé tři generátory lze již volit libovolně pouze s ohledem na vztah 2.33.

Jako příklad pro reálné matice uveďme (Ward [10]):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pro který je velmi jednoduché ověřit platnost 2.33. Odpovídající izomorfismus Ω je:

$$\Omega(a + b\hat{\boldsymbol{i}} + c\hat{\boldsymbol{j}} + d\hat{\boldsymbol{k}}) := \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Zajímavější však můžeme shledat reprezentace kvaternionů pomocí matic 2×2 nad komplexními čisly. Volme proto (GÜRLEBECK [7]):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

které jsou jednou z forem Pauliho matic.
Opět příslušný izomorfismus:

$$\Omega(a + b\hat{\boldsymbol{i}} + c\hat{\boldsymbol{j}} + d\hat{\boldsymbol{k}}) := \begin{pmatrix} a - id & -c - ib \\ c - ib & a + id \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Nakonec si všimněme, že operaci konjunkce na $\mathbb{H}$ odpovídá operace transpozice resp. hermitovské sdružení na $\mathbb{M}(n, \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C})$.

2.4 Aplikace reálných kvaternionů ve fyzice

Výsledky získané v předcházejících částech druhé kapitoly použijeme k popisu některých fyzikálních problémů. Budou to nejprve úlohy klasické fyziky, ve kterých s výhodou využijeme jednoduchého popisu rotace pomocí algebry kvaternionů a budeme se věnovat pohybu bodové částice, což dále zužitkujeme při rozebírání kinematiky a dynamiky tuhého tělesa.

2.4.1 Kinematika bodové částice

Uvažujme dva ortogonální systémy souřadnic $S_1 = Ox_1x_2x_3$
a $S_2 = OX_1X_2X_3$ v tří-dimensionálním Euklidovském prostoru $\mathbb{E}$ takové, že vzdálenost dvou bodů M, N tohoto prostoru je

$$\mathrm{d}(M,N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(m_i - n_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(M_i - N_i)^2}, \tag{2.36}$$

kde m_i resp. M_i a n_i resp. N_i, $i = 1, 2$, jsou souřadnice bodů M a N vůči soustavě S_1 resp. S_2.
Dále mějme bod $B \in \mathbb{E}$ se souřadnicemi (b_1, b_2, b_3) v soustavě S_1 a (B_1, B_2, B_3) v soustavě S_2, které obecně považujme za funkce času. Bodu B přiřaďme dva kvaterniony $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{B}$ vztahy:

$$\boldsymbol{b} := b_1\hat{\boldsymbol{i}} + b_2\hat{\boldsymbol{j}} + b_3\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{B} := B_1\hat{\boldsymbol{i}} + B_2\hat{\boldsymbol{j}} + B_3\hat{\boldsymbol{k}}. \tag{2.37}$$

Tyto jsou díky 2.36 svázány rovnicí:

$$\boldsymbol{b} = q\boldsymbol{B}q^c, \quad q \in \mathbb{H},\ \|q\| = 1. \tag{2.38}$$

Předpokládáme-li navíc, že i soustava souřadnic S_2 je závislá na čase, ovšem její počátek se nemění, pak $q = fce(t)$ a časovou derivací vztahu 2.38 získáme

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \frac{dq}{dt}\boldsymbol{B}q^c + q\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}q^c + q\boldsymbol{B}\frac{dq^c}{dt}. \tag{2.39}$$

Ale $\|q\| = qq^c = 1$, takže

$$\frac{dq}{dt}q^c + q\frac{dq^c}{dt} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{dq}{dt}q^c = -\left(\frac{dq}{dt}q^c\right)^c \Longrightarrow \frac{dq}{dt}q^c \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}, \tag{2.40}$$

a proto zavedeme označení:

$$2\frac{dq}{dt}q^c =: \boldsymbol{\omega} \quad \text{a} \quad 2q^c\frac{dq}{dt} =: \boldsymbol{\Omega}. \tag{2.41}$$

Evidentně

$$\boldsymbol{\omega} = q\boldsymbol{\Omega}q^c. \tag{2.42}$$

Pokročme dále a upravme pravou stranu 2.39. Udělejme to dvěma způsoby. Poprvé:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = q\left(q^c\frac{dq}{dt}\right)\boldsymbol{B}q^c + q\boldsymbol{B}\left(q^c\frac{dq}{dt}\right)^c q^c + q\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}q^c =$$
$$= q\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}q^c + \frac{1}{2}q\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{B}q^c - \frac{1}{2}q\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Omega}q^c = q\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{B}\right]\right)q^c =$$
$$= q\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}\right)q^c, \tag{2.43}$$

podruhé dosaďme $\boldsymbol{B} = q^c\boldsymbol{b}q$:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \left(\frac{dq}{dt}q^c\boldsymbol{b}q\right)q^c + q\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}q^c + qq^cb\left(q\frac{dq^c}{dt}\right) = q\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}q^c + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\omega} =$$
$$= q\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}q^c + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}. \tag{2.44}$$

přičemž jsme využili vztah 2.14.
Protože $q(d\boldsymbol{B}/dt)q^c$ představuje transformaci složek rychlosti bodu B vůči souřadnicové bázi soustavy S_2 do složek vůči souřadnicové báze S_1, je 2.44 obdoba klasického vztahu dávajícího do souvislosti rychlost částice vůči soustavě klidné v prostoru a soustavě rotující v prostoru. V tomto světle je jasné, že $\boldsymbol{\omega}$ definovaná v 2.41 má význam složek úhlové rychlosti soustavy S_2 v soustavě S_1 a vzhledem k 2.42 je $\boldsymbol{\Omega}$ složkami úhlové rychlosti soustavy S_2 v ní samotné. Poznamenejme rovněž, že porovnáním vztahů 2.43 a 2.44 zjistíme, že

$$q\left(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}\right)q^c = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}. \tag{2.45}$$

Nakonec se zajímejme o to, jak vypadá závislost druhých derivací složek bodu B v obou soustavách. Vzhledem k označení:

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Gamma}, \tag{2.46}$$

a vztahu 2.43 je

$$\frac{d^2\boldsymbol{b}}{dt^2} = \frac{dq}{dt}\boldsymbol{\Gamma}q^c + q\boldsymbol{\Gamma}\frac{dq^c}{dt} + q\left(\frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)q^c =$$
$$= q\left(\frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Gamma}\right)q^c =$$
$$= q\left(\frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\boldsymbol{B} + 2\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}\right)\right)q^c. \tag{2.47}$$

Na druhou stranu derivací 2.44 do níž dosadíme:

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = q^c \left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b} \right) q \quad (\Leftarrow 2.44) \tag{2.48}$$

ukážeme, že

$$\frac{d^2\boldsymbol{b}}{dt^2} = \frac{dq}{dt} q^c \left(\frac{db}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b} \right) + \left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b} \right) q \frac{dq^c}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} =$$

$$= q \frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} q^c + \frac{\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{b} + 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b}) \,. \tag{2.49}$$

V poslední rovnici lze dobře identifikovat složky zrychlení bodu B v soustavě S_1 dáné postupně pohybem B vzhledem k souřadnicím soustavy S_2 a zrychlením samotné soustavy S_2, dále Coriolisovo zrychlení a odstředivé zrychlení.

2.4.2 Kinematika a dynamika tuhého tělesa

V euklidovském prostoru $\mathbb{E}$ mějme množinu bodů T odpovídající tělesu $\mathcal{T}$, které vůči sobě navzájem nemění vzdálenost:

$$\mathrm{d}(M, N) \neq fce(t) \quad \text{pro} \quad \forall\ M, N \in T. \tag{2.50}$$

Po vzoru z předchozí části kapitoly volme dvě ortonormální soustavy souřadnic se společným počátkem O, bodem nezávisejícím na čase. $S_1 = Ox_1x_2x_3$ nechť je nezávislá na čase (pevná v prostoru) a $S_2 = OX_1X_2X_3$ ať je pevně spojená s tělesem, tj.: pro $\forall B \in T:\ B_i \neq fce(t),\ i = 1, \ldots 3$, přičemž B_i jsou složky bodu B v S_2. Souřadnicové osy X_1, X_2 a X_3 volíme ve směru hlavních os tenzoru setrvačnosti tělesa $\mathcal{T}$ v bodě O.

Vzhledem k dříve rozebrané kinematice bodové částice (vztah 2.43) nyní pro složky rychlosti dB/dt bodu $B \in T$ vůči S_1 díky $d\boldsymbol{B}/dt = 0$ platí

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = q\,(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B})\, q^c, \tag{2.51}$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ jsou složky úhlové rychlosti rotace tělesa $\mathcal{T}$ v S_2.

Složky momentu hybnosti tělesa $\mathcal{T}$ v soustavě S_2 označíme $\boldsymbol{L} \in \mathbb{H}$. Evoluci momentu hybnosti udává druhá momentová věta. Tato, uvážením 2.43, má v S_2 tvar:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}, \tag{2.52}$$

přičemž $\boldsymbol{M}$ jsou složky momentu sil působící na $\mathcal{T}$.
Pro jednoduchý zápis následujme ARRIBAS [1] a definujme novou operaci na $\mathbb{H}$.

Definice 11 *Jestliže* $p_1, p_2 \in \mathbb{H}, p_i = \sum_{\alpha=0}^{3} p_i^\alpha \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}}, i = 1, 2$, *potom definujeme binární operaci* $\otimes : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *vztahem*

$$p_1 \otimes p_2 = \sum_{\alpha=0}^{3} (p_1^\alpha p_2^\alpha) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{2.53}$$

Pozn.: Operace $\otimes$ je lineární v obou svým operandech.

Díky vhodné volbě soustavy S_2 má tenzor setrvačnosti tělesa $\mathcal{T}$ v S_2 pouze tři nenulové složky I_1, I_2 a I_3. Přiřadíme mu proto kvaternion $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{I} := I_1 \hat{\boldsymbol{i}} + I_2 \hat{\boldsymbol{j}} + I_3 \hat{\boldsymbol{k}}. \tag{2.54}$$

Složky momentu hybnosti tělesa v této soustavě získají potom jednoduchý tvar

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Omega}. \tag{2.55}$$

Konečně tak upravíme 2.52 do tvaru

$$\boldsymbol{I} \otimes \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{M}. \tag{2.56}$$

Řešením se zabývat nebudeme, ale dále budeme předpokládat, že závislost složek $\boldsymbol{\Omega}$ je již známá a jsou tedy také jednoznačně určeny složky $\boldsymbol{L}$ momentu hybnosti. Nyní se zaměříme na problém získání transformačního kvaternionu q, viz. 2.38, pomocí něhož bude možné jednoduše spočítat složky úhlové rychlosti a momentu hybnosti i vůči soustavě pevné v prostoru. Vyjdeme ze vztahu 2.42, ze kterého bezprostředně plyne

$$\frac{dq}{dt} = 2q\boldsymbol{\Omega}. \tag{2.57}$$

Určení q je otázkou vyřešení soustavy čtyř lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Je to však stále o pět rovnic o pět neznámých méně, než kdybychom pracovali se standartní teorií, která pro transformaci mezi soustavami používá ortogonální matice 3×3 a váže je se složkami úhlové rychlosti v soustavě spojené s tělesem vztahem

$$\left(\frac{dA}{dt} A^T \right)_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega^k. \tag{2.58}$$

Navíc numerické řešení 2.58 může vést k neortogonálním maticím A ([4]).

Kapitola 3

Komplexní kvaterniony

3.1 Konstrukce a základní vlastnosti

Algebru komplexních kvaternionů konstruujeme stejným způsobem jako algebru reálných kvaternionů dvojím užitím Cayley-Dicksonova procesu. Výchozí algebrou jsou komplexní čísla, na nichž definujeme konjunkci $^c : z \mapsto z, z \in \mathbb{C}$. Je proto reálnou algebrou, není ovšem nicely formed. Zdvojená algebra $\mathbb{C}'$ je podle věty 1 pouze asociativní a komutativní. Nakonec $\mathbb{C}''$ zdědila po $\mathbb{C}$ pouze asociativitu a stejně jako $\mathbb{C}$ *není* nicely formed.

Označení: Algebra $\mathbb{C}''$ se značí $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ a nazývá se algebra komplexních kvaterninů. Její prvky lze zapsat ve tvaru

$$q = \begin{cases} a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \\ \text{resp.} \\ q_r + iq_i, \quad q_r, q_i \in \mathbb{H}, \ i \in \mathbb{C} \text{ je komplexní jednotka.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Věta 7 *Algebra $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ má následující vlastnosti:*

1. *je asociativní,*
2. *není komutativní,*
3. *netvoří podílovou algebru,*
4. *není nicely formed algebra.*

Důkaz:
Body $1, 2, 4$ jsou důsledkem věty 1. Bod 3 je pravdivý vzhledem k existenci

dělitelů nuly, např. (GIRARD [6]):

$$(1 + i\hat{\boldsymbol{i}})(1 - i\hat{\boldsymbol{i}}) = 1 - i^2\hat{\boldsymbol{i}}^2 = 0. \qquad \text{cbd.}$$

Důsledek 3 *Protože $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ není nicely formed algebra, nelze na ní definovat normu vztahem $\|q\| = qq^c$.*

Na $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ lze přirozeně rozšířit některé pojmy definované na $\mathbb{H}$.

Definice 12 *Definujeme zobrazení* skalární část $S : \mathbb{H}_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *a* vektorová část $V : \mathbb{H}_\mathbb{C} \to \mathbb{H}_\mathbb{C}$ *působením na $q \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ vztahy 2.5 a 2.6.*

Označení: Vec$\mathbb{H}_\mathbb{C}$ je maximální podprostor $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ invariantní vůči zobrazení V.

Zobrazení S a V na $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ mají obdobné vlastnosti jako jejich zúžení na $\mathbb{H}$. Tzn. vždy po rozšíření předpokladů lemmatu 5, vztahu 2.15 a pod. z $\mathbb{H}$ na $\mathbb{H}_\mathbb{C}$, z Vec$\mathbb{H}$ na Vec$\mathbb{H}_\mathbb{C}$ a z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, zůstávají tyto v platnosti.

Definice 13 *Nechť $\boldsymbol{q_i} \in$ Vec$\mathbb{H}_\mathbb{C}$, $\boldsymbol{q_i} = \hat{\boldsymbol{i}}b_i + \hat{\boldsymbol{j}}c_i + \hat{\boldsymbol{k}}d_i$, $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, pak definujeme bilineární operace $\cdot : (Vec\mathbb{H}_\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C}$ a $\times : (Vec\mathbb{H}_\mathbb{C})^2 \to Vec\mathbb{H}_\mathbb{C}$ vztahy 2.12 a 2.13.*

V právě defnované symbolice má součin dvou kvaternionů opět tvar 2.14. Navíc ale díky 3.1 pro $p, q \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$, $p = p_r + ip_i$, $q = q_r + iq_i$ můžeme psát

$$pq = p_r q_r - p_i q_i + i\left(p_r q_i + p_i q_r\right). \tag{3.2}$$

Přidejme ještě definici dalšího potřebného zobrazení:

Definice 14 *Zobrazení $^*\colon \mathbb{H}_\mathbb{C} \to \mathbb{H}_\mathbb{C}$ definované působením na $q \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$, $q = a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$:*

$$q^* := a^* + \hat{\boldsymbol{i}}b^* + \hat{\boldsymbol{j}}c^* + \hat{\boldsymbol{k}}d^*, \tag{3.3}$$

nazýváme komplexní sdružení.

Pozn.: Při značení $q \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$, $q = q_r + iq_i$, viz. 3.1, má komplexní sdružení q^* tvar:

$$q^* = q_r - iq_i. \tag{3.4}$$

Základní vlastnosti komplexního sdružení shrnuje následující lemma.

Lemma 16 *Jestliže $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, platí následující:*

1. $$(pq)^* = p^* q^*, \tag{3.5}$$

2. $$(q^*)^c = (q^c)^*, \tag{3.6}$$

3. $$q^* = q \;\Leftrightarrow\; q \in \mathbb{H}, \tag{3.7}$$

4. $$q^* = q^c \;\Leftrightarrow\; q = \alpha + i\boldsymbol{q_i},\ \boldsymbol{q_i} \in Vec\mathbb{H}, \tag{3.8}$$

5. $$[q, q^*] \neq 0. \tag{3.9}$$

Důkaz:
Vzhledem k jednoduchosti tvrzení ukažme pouze poslední bod.
Pro $q = q_r + iq_i,\ q_r, q_i \in \mathbb{H}$ počítejme: t

$$[q, q^*] = (q_r + iq_i)(q_r - iq_i) - (q_r - iq_i)(q_r + iq_i) = \ldots$$
$$\ldots = 2i(q_i q_r - q_r q_i) = 2i\,[q_i, q_r]\,,$$

což je obecně různé od nuly. cbd.

Tak jak na $\mathbb{H}$ i na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ nyní ukážeme existenci skalárního součinu a to hned ve dvou alternativách, které se svými vlastnostmi zásadně odlišují. Tímto navíc budeme dále schopni na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ zkonstruovat normu.

Věta 8 (skalární součin na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$) *Zobrazení $S(pq^{*c}) = \langle p, q\rangle_E$ je skalární součin na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.*

Důkaz:
Nejprve ověříme axiomy 1 až 4. Nechť $p, q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak:

1. $S(pq^{*c}) = S\left((q^* p^c)^c\right) = S\left((qp^{*c})^*\right) = S^*(qp^{*c})$,
2. $S(p(q_1 + q_2)^{*c}) = S(pq_1^{*c}) + S(pq_2^{*c})$,
3. $S(p(\alpha q)^{*c}) = S(\alpha^* pq^{*c}) = \alpha^* S(pq^{*c})$,
4. skalární část ze součinu dvou (komplexních) kvaternionů má vzhledem k 2.14 klasický tvar. Proto pro $q = a + \hat{\boldsymbol{i}}b + \hat{\boldsymbol{j}}c + \hat{\boldsymbol{k}}d$:

$$S(qq^{*c}) = aa^* + bb^* + cc^* + dd^* \geq 0$$
$$aa^* + bb^* + cc^* + dd^* = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

cbd.

Označení: Normu odpovídající skalárnímu součinu $S(pq^{*c})$ značíme $\|\cdot\|_E$.

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ spolu s normou $\|\cdot\|_E$ ovšem netvoří normovanou algebru, o čemž se snadno přesvědčíme přímým výpočtem (WARD [10]): $(p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}})$

$$\begin{aligned}
\|pq\|_E &= S(pq(pq)^{*c}) = 1/2(pqq^{*c}p^{*c} + p^*q^*q^cp^c) = \\
&= 1/2p(qq^{*c} + q^*q^c - q^*q^c)p^{*c} + 1/2p^*(q^*q^c + qq^{*c} - qq^{*c})p^c = \\
&= \|q\|_E pp^{*c} - 1/2pq^*q^cp^{*c} + \|q^*\|_E p^*p^c - 1/2p^*qq^{*c}p^c = \\
&= \|q\|_E (pp^* + p^*p^c) - 1/2(pq^*q^cp^{*c} + p^*qq^{*c}p^c) = \\
&= 2\|q\|_E \|p\|_E - \|pq^*\|_E .
\end{aligned}$$

Tato rovnost se na $\|pq\|_E = \|p\|_E \|q\|_E$ redukuje, jestliže $\|pq\|_E = \|pq^*\|_E$. Nepočítáme-li degenerované případy $(\mathbb{C}, \mathbb{H})$, existuje pouze jeden podprostor $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, na němž je daná podmínka identicky splněna: $Ln^1(1, i\hat{\boldsymbol{i}}, i\hat{\boldsymbol{j}}, i\hat{\boldsymbol{k}})$. Navíc pouze pro $\boldsymbol{q} \in Ln^1(i\hat{\boldsymbol{i}}, i\hat{\boldsymbol{j}}, i\hat{\boldsymbol{k}})$ platí:

$$qq^{*c} \in \mathbb{R}.$$

Díky tomu je možno na $Ln^1(i\hat{\boldsymbol{i}}, i\hat{\boldsymbol{j}}, i\hat{\boldsymbol{k}})$ definovat pojem inverzní prvek $(\cdot)^{-1}$. Nechť $q \in Ln^1(i\hat{\boldsymbol{i}}, i\hat{\boldsymbol{j}}, i\hat{\boldsymbol{k}})$, pak

$$q^{-1} := \frac{q^{*c}}{\|q\|_E}. \tag{3.10}$$

Označení: $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = Ln^1(1, i\hat{\boldsymbol{i}}, i\hat{\boldsymbol{j}}, i\hat{\boldsymbol{k}})$,
$\mathrm{Vec}\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = Ln^1(i\hat{\boldsymbol{i}}, i\hat{\boldsymbol{j}}, i\hat{\boldsymbol{k}})$.

Pozn.: Protože prvky $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ je možno zapsat ve tvaru

$$q = a + i\boldsymbol{q_i}, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R} \text{ a } \boldsymbol{q_i} \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}, \tag{3.11}$$

jsou operace komplexní sdružení a konjunkce na $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ekvivalentní:

$$q^* = q^c = a - i\boldsymbol{q_i}. \tag{3.12}$$

[1] Máme zde opět namysli reálný lineární obal, tzn. jestliže $v \in Ln(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, pak $v = \alpha_1 E_1 + \ldots + \alpha_n E_n$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Dále představme druhé zobrazení na $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^2$ splňující axiomy skalárního součinu, které svým tvarem formálně odpovídá skalárnímu součinu na $\mathbb{H}$.

Věta 9 (skalární součin na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$) *Zobrazení $S(pq^c) = \langle p, q\rangle_M$ je skalární součin*[2] *na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.*

Důkaz:
Postup je opět stejný jako dříve: ukázat splnění příslušných axiomů skalárního součinu.

1. $S(pq^c) = S\left((qp^c)^c\right) = S\left(qp^c\right)$,
2. $S(p(q_1 + q_2)^c) = S(pq_1^c) + S(pq_2^c)$,
3. $S(p(\alpha q)^c) = \alpha S(pq^c)$,
4. pro $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ platí:

$$(qq^c)^c = (q^c)^c\, q^c = qq^c \Rightarrow qq^c \in \mathbb{C} \Rightarrow S(qq^c) = qq^c.$$

cbd.

Označení: $\|\cdot\|_M$ je norma odpovídající skalárnímu součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$.

Pozn.: Platí

$$S(qq^c) \in \mathbb{R}, \quad q \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Tohoto lze lehce nahlédnout. Víme totiž, že

$$[q, q^c] = 0 \quad \text{a} \quad qq^c \in \mathbb{C} \quad \text{pro} \quad q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$

(poslední rovnost viz. čtvrtý bod důkazu vety 9).
A tak s pomocí 3.12 můžeme psát

$$(qq^c)^* = q^* q^{*c} = q^c q = qq^c \Rightarrow qq^c = S(qq^c) \in \mathbb{R}.$$

Na rozdíl od algebry $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_E)$ můžeme pro $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_M)$ dokázat následující lemma.

[2]Zobrazení $S(pq^c)$ přesně vzato není skalární součin na $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, jelikož nesplňuje axiom 4: pro obecné $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$: $S(pp^c) \in \mathbb{C}$, kde není možno definovat úplné uspořádání. Nicméně v dalším textu nám toto nebude činit žádné potíže, zejména protože daný skalární součin až na případné výjimky zúžíme na podprostor $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$, kde popsaný problém nevyvstane.

Lemma 17 $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_M)$ *je normovaná algebra.*

Důkaz:
Nechť $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$:

$$\|pq\|_M = S(pq(pq)^c) = S(pqq^c p^c) = qq^c S(pp^c) = \ldots$$
$$\ldots = S(qq^c)S(pp^c) = \|p\|_M \|q\|_M .$$

cbd.

Důsledkem lemmatu 17 a faktu, že pro libovolné $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} : \ qq^c \in \mathbb{C}$, definujeme pro každý komplexní kvaternion p, jehož M-norma je různá od nuly ($\|p\|_M \neq 0$), inverzní prvek p^{-1}:

$$p^{-1} := \frac{p^c}{\|p\|_M}. \tag{3.13}$$

Pro zdůraznění explicitně napišmě, že:

Lemma 18 (Minkowského metrika na $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$) *Zobrazení* $S(pq^c) = \langle p, q\rangle_M$ *je pseudo-skalární součin na* $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ *se signaturou* $(1, 3, 0)$. $(\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_M)$ *je tedy* Minkowského prostor.

Důkaz:
Spočtěme složky $S_{\mu\nu},\ (\mu, \nu = 0, \ldots, 3)$ tohoto zobrazení vůči bázi $\left\{1 = e_0, i\hat{\boldsymbol{i}} = e_1, i\hat{\boldsymbol{j}} = e_2, i\hat{\boldsymbol{k}} = e_3\right\}$:

$$S_{00} = S(1(1)^c) = 1,\ S_{0i} = S_{i0} = S(1e_i^c) = 0$$

a

$$S_{ij} = S(e_i e_j^c) = -S(e_i e_j) = -S(\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}e_k) = -\delta_{ij}.$$

cbd.
Na závěr tvrzení, které nabyde podstatného významu ve fyzikální aplikaci komplexních kvaternionů.

Lemma 19 *Nechť* $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}},\ \|q\|_M = 1$, *pak vždy existují* $l \in Vec\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ *a* $r \in \mathbb{H}$ *tak, že*

$$q = lr. \tag{3.14}$$

Speciálně, existuje právě jedno $l \in Vec\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ *a* $r \in \mathbb{H}$ *splňující 3.14 a* $\|l\|_M = \|r\| = 1$.

Důkaz:
Nejdříve se omezíme na speciální případ, tj. řešení soustavy rovnic:

$$q = lr, \quad (\|l\|_M =)\, ll^c = 1, \quad (\|r\| =)\, rr^c = 1,$$

pro $r \in \mathbb{H}$ a $l \in \mathrm{Vec}\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$, přičemž $\|q\| = 1$.
Označme $\Gamma = qq^{*c}$. Snadno se přesvědčíme, že $\Gamma\Gamma^c = 1$, protože

$$\Gamma\Gamma^c = qq^{*c}q^*q^c = \|q\|^* \|q\| = 1.$$

Také ale platí

$$\Gamma = qq^{*c} = lrr^c l^{*c} = l^2.$$

Přenásobením této rovnice zprava pomocí Γ a Γ^c získáme:

$$\Gamma^2 = l^2\Gamma \quad \text{a} \quad 1 = l^2\Gamma^c.$$

Linerní kombinací posledních tří rovnic nakonec zjistíme, že

$$\Gamma^2 + 2\Gamma + 1 = l^2(\Gamma + 2 + \Gamma^c) \Rightarrow$$
$$(\Gamma + 1)^2 = l^2 \|\Gamma + 1\|_M^2,$$

jelikož $\|\Gamma + 1\|^2 = (\Gamma + 1)(\Gamma^c + 1) = 1 + \Gamma + \Gamma^c + \Gamma\Gamma^c$.
Pak řešení:

$$l^2 = \frac{(\Gamma + 1)^2}{\|\Gamma + 1\|_M^2} \Rightarrow l = \pm\frac{(qq^{*c} + 1)}{\|qq^{*c} + 1\|_M}$$

a

$$r = l^c q = \pm\frac{(q^*q^c + 1)\, q}{\|qq^{*c} + 1\|_M} = \pm\frac{(q^* + q)\, q}{\|qq^{*c} + 1\|_M}.$$

Obecně pak můžeme psát $q = kr\frac{1}{k}l$. cbd.

Pozn.: Jde dokázat rovněž rozklad libovolného $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}},\ \|q\|_M = 1$ do tvaru

$$q = RL, \tag{3.15}$$

kde $R \in \mathbb{H}$ a $L \in \mathrm{Vec}\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$.

3.2 Aplikace komplexních kvaternionů ve fyzice

3.2.1 Klasická elektrodynamika

I nadále budeme pracovat s tří-rozměrným euklidovským prostorem $\mathbb{E}$, na němž máme k dispozici kartézskou soustavu souřadnic. Tato definuje tři souřadnicová vektorová pole, vůči kterým budou vztahovány všechny složky vektorových polí, se kterými budeme pracovat.

Použijeme standartní značení a jako φ označíme skalární pole el. potenciálu, $\vec{A}$ je déle vektorové pole magnetického potenciálu, se složkami $\{A^i\}_{i=1}^3$. Oba potenciály zkombinujeme a přiřadíme jim komplexní kvaternion A vztahem:

$$A := \frac{\varphi}{c} + iA^1\hat{\boldsymbol{i}} + iA^2\hat{\boldsymbol{j}} + iA^3\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\varphi}{c} + i\boldsymbol{A} \in \widetilde{\mathbb{HC}}, \tag{3.16}$$

kde c značí rychlost světla.
Zavedeme dále operátor:

$$\partial_\mu := \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\partial}{\partial x^1} + i\hat{\boldsymbol{j}}\frac{\partial}{\partial x^2} + i\hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial x^3} \tag{3.17}$$

a pro úplnost dodejme, že jeho komplexní sdružení a konjunkce jsou následující:

$$\partial_\mu^c = \partial_\mu^* = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\nabla}. \tag{3.18}$$

Aplikací ∂_μ (zleva) na A zjistíme, že

$$\begin{aligned}\partial_\mu A = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\nabla}\right)\left(\frac{\varphi}{c} + i\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \frac{i}{c}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} = \\ = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \frac{i}{c}\boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Zatímco skalární část $\partial_\mu\boldsymbol{A}$:

$$S(\partial_\mu A) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{3.20}$$

vektorová část $\partial_\mu\boldsymbol{A}$ má tvar

$$V(\partial_\mu A) = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \frac{i}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\right). \tag{3.21}$$

Jak je známo $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ a $-\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}$, a proto zavedeme kvaternion elektromagnetického pole $F \in \mathrm{Vec}\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$:

$$F := \boldsymbol{B} + \frac{i}{c}\boldsymbol{E}, \tag{3.22}$$

přičemž

$$\boldsymbol{B} = B^1\hat{\boldsymbol{i}} + B^2\hat{\boldsymbol{j}} + B^3\hat{\boldsymbol{k}} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{E} = E^1\hat{\boldsymbol{i}} + E^2\hat{\boldsymbol{j}} + E^3\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{3.23}$$

$\{B^i\}_{i=1}\,3$ resp. $\{E^i\}_{i=1}\,3$ jsou složky magnetické indukce resp. elektrické intenzity.
Nyní jistě platí rovnost

$$V(\partial_\mu \boldsymbol{A}) = -F, \tag{3.24}$$

ekvivalentně

$$\partial_\mu \boldsymbol{A} - (\partial_\mu \boldsymbol{A})^c = -2F. \tag{3.25}$$

Pokročme dále a spočtěme $\partial_\mu^c F$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu^c F &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\nabla}\right)(\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{E}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} - i\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = \\ &= -\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\right) + i\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right).\end{aligned} \tag{3.26}$$

V takto rozseparovaném tvaru je snadné rozpoznat části Maxwellových rovnic. Jejich úplný tvar dostaneme porovnáním 3.26 s kvaternionem $-\mu_0 J$, kde μ_0 je permeabilita vakua a $J \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ je určené vztahem:

$$J := c\rho + i\boldsymbol{j} = c\rho + ij^1\hat{\boldsymbol{i}} + ij^2\hat{\boldsymbol{k}} + ij^3. \tag{3.27}$$

Zde ρ značí hustotu elektrického náboje a $\{j^i\}_{i=1}^3$ složky hustoty elektrického proudu. A tak

$$\partial_\mu^c F = -\mu_0 J \tag{3.28}$$

je zřejmě nejúspornější možný zápis celé sady Maxwellových rovnic, kterého lze docílit. Samozřejmě pomocí rovnosti 3.25 můžeme tyto rovnice ještě přepsat v obecném tvaru pomocí potenciálů:

$$\partial_\mu^c\left(\partial_\mu \boldsymbol{A} - (\partial_\mu \boldsymbol{A})^c\right) = -\mu_0 J. \tag{3.29}$$

Jednoduchou úvahou nyní ukážeme, že řešení Maxwellových rovnic 3.28 bez okrajových podmínek lze převést na řešení vlnových rovnic rovněž bez okrajových podmínek pro oba potenciály spolu s dodatečnou podmínkou. Všimneme si zatím opomenutého vztahu 3.20. Položíme-li jej rovno nule, obdržíme známou Lorentzovu kalibrační podmínku. K tomu nám postačí, budeme-li jednoduše psát přímo

$$\partial_\mu A = -F, \tag{3.30}$$

protože F je volen tak, že $S(F) = 0$.
Dosaďme dále 3.30 do Maxwellových rovnic 3.28. Levá strana získá tvar (využitím asociativity):

$$\partial^c_\mu \partial_\mu A = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\right) A = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right) A = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) A. \tag{3.31}$$

Názorně zde vidíme, že složením operátorů $\partial^c_\mu \partial_\mu$ získáme vlnový (d'Alembertův) operátor $\Box$:

$$\partial^c_\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^c_\mu = \Box. \tag{3.32}$$

Výsledkem je tedy soustava rovnic:

$$\Box A = -\mu_0 J, \tag{3.33}$$

složená z:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{3.34}$$

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{3.35}$$

(ϵ_0 je permitivita vakua).

Obdobné rovnice, ovšem přímo pro měřitelné veličiny $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$, ale s odlišnou další podmínkou lze získat přímou aplikací operátoru ∂_μ na 3.28. Získáme totiž, jak jsem videli před chvílí (3.32)

$$\partial_\mu \partial^c_\mu F = \Box F = -\mu_0 \partial_\mu J. \tag{3.36}$$

Spočtením redukované pravé strany rovnice obdržíme

$$\begin{aligned}\partial_\mu J &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\nabla}\right)(c\rho + i\boldsymbol{j}) = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j} + ic\boldsymbol{\nabla}\rho - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j} + ic\boldsymbol{\nabla}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Z posledního je vidět, že pravá strana rovnice 3.36 má oproti levé nenulovou skalární část. Ta je díky tomu nulová:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \tag{3.38}$$

čímž jsme získali podmínku na zachování celkového náboje.
Konečně porovnáním zbylých částí 3.37 s odpovídajícími částmi 3.36 dostaneme:

$$\Box\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}, \tag{3.39}$$

$$\Box\boldsymbol{E} = -\mu_0\boldsymbol{j} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\epsilon_0}. \tag{3.40}$$

Jako poslední poznámku uveďme, že

$$\frac{1}{2\mu_0}\left\|F\right\|_E^2 = \mathcal{E}_{EM}, \tag{3.41}$$

což je hustota energii elektromagnetického pole.

3.2.2 Lorentzova transformace

Jak jsme ukázali, $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ je Minkowského prostor. Tohoto využijeme k alternativnímu popisu STR.

Jestliže $\mathbb{M}$ je čtyř-rozměrná diferencovatelná varieta, na které máme dané dvě soustavy souřadnic $S_1 = O_1ct^0x^1x^2x^3$ a $S_2 = O_2cT^0X^1X^2X^3$ (c je rychlost světla), pak vzhledem k invariantní rychlosti světla c jsou tyto souřadnice vázány podmínkou

$$c^2dt^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(dx^i\right)^2 = c^2dT^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(dX^i\right)^2 = c^2d\tau^2. \tag{3.42}$$

Ztotožněním $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$:

$$x := x^0\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{0}} + i\sum_{i=1}^{3}x^i\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}, \tag{3.43}$$

můžeme libovolnému $\vec{v} \in T_B\mathbb{M}$, $\vec{v} = \sum_{i=0}^{3}v^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=0}^{3}V^i\frac{\partial}{\partial X^i}$, kterému odpovídají dvě čtveřice souřadnic, přiřadit dvojici kvaternionů:

$$\vec{v} \to \left\{\begin{array}{l}(v^0, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto v \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \\ (V^0, V^1, V^2, V^3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto V \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}\end{array}\right. ,$$

stejně postupujme pro lib. bod $X \in \mathbb{M}$, jenž má v S_1 souřadnice $\{x^i\}_{i=0}^3$ a v S_2 souřadnice $\{X^i\}_{i=0}^3$:

$$X \to \begin{cases} (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \\ (X^0, X^1, X^2, X^3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto X \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \end{cases},$$

Zachování normy vektorů, respektive „délky“ časoprostorové události 3.42 (díky plochosti $\mathbb{M}$) tak vyjádříme jako

$$\|\vec{v}\| = \|v\|_M = \|V\|_M \quad \text{a} \quad |X| = \|x\|_M = \|X\|_M . \tag{3.44}$$

Na chvíli se proto zabývejme transformacemi na $\widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ zachovávajícími normu $\|\cdot\|_M$. Podle LAMBEK [8] jsou jedinými takovými transformacemi: $(x \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}})$

$$x \longmapsto \quad x^* \quad \ldots \text{inverze euklidovského podprostoru,} \tag{3.45}$$
$$x \longmapsto \quad -x \quad \ldots \text{inverze prostoru,} \tag{3.46}$$
$$x \longmapsto qxq^{*c} \ldots L_q\text{-transformace,} \tag{3.47}$$

kde $q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \|q\|_M = 1$.
Invariantnost M-normy můžeme lechce ověřit:

$$\|x^*\|_M^2 = x^* (x^*)^c = xx^c = \|x\|_M^2$$
$$\|-x\|_M^2 = xx^c = \|x\|_M^2$$
$$\|qxq^{*c}\|_M^2 = qxq^{*c}q^*x^cq^c = \|q\|_M^{*2} \|x\|_M^2 \|q\|_M^2 = \|x\|_M^2$$

a platí taky

$$L_q^{*c} = (qxq^{*c})^{*c} = qx^{*c}q^{*c} = qxq^{*c} = L_q(x) \Rightarrow \text{ (z lemmatu 16)}$$
$$\Rightarrow L_q(x) \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}.$$

První dvě transformace nepřináší nic objemného. Zaměřme se dále pouze na poslední transformaci L_q nazývanou *Lorentzova transformace*.
Použijeme lemma 19 a kvaternion q rozložíme na součin dvou kvaternionů $l \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}},\ \|l\|_M = 1$, a $r \in \mathbb{H},\ \|r\| = 1$:

$$L_q(x) = qxq^{*c} = l(rxr^c)l^{*c} = l(rxr^c)l. \tag{3.48}$$

L_q se tedy skládá ze dvojice po sobě následujících transformací:

$$R_r(x) := rxr^c \quad \text{a} \quad B_l(x) := lxl. \tag{3.49}$$

Protože jsme l a r volili jednotkové, ani jedna z transformací R, L opět nemění M-normu x:

$$\|R_r(x)\|_M^2 = rxr^c rx^c r^c = \|x\|^2,$$
$$\|B_r(x)\|_M^2 = lxll^c x^c l^c = \|x\|^2.$$

Jak jsme viděli v kapitole věnované reálným kvaternionům, rxr^c je rotací vektorové části x:

$$r(S(x) + iV(x))r^c = S(x) + irV(x)r^c \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$$

(a proto jsme volili r takové, že $\|r\| = 1$, v opačném případě by r a r^c nebyly inverzní kvaterniony a transformace $R'(q) = rqr^c$ by představovala rotaci spolu s „natažením“ q).
Oproti tomu $B_l(x)$ je nový typ transformace označované jako *čistá Lorentzova transformace*. Ověřme si, že pro $x \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ i $B_l(x) \in \widetilde{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$:

$$B_l^{*c} = (lxl)^{*c} = l^{*c}x^{*c}l^{*c} = lxl = B_l(x). \tag{3.50}$$

Nechť dále

$$x = x_0 + i\boldsymbol{x},\ x_0 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{H}, \tag{3.51}$$
$$l = l_0 + i\boldsymbol{l},\ l_0 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{l} \in \mathbb{H}, \tag{3.52}$$

ale protože má být $\|l\|_M = 1$, jsou l_0 a $\boldsymbol{l}$ na sobě navzájem závislé:

$$l_0^2 - \|\boldsymbol{l}\|^2 = 1. \tag{3.53}$$

Postupně spočtěme lxl:

$$xl = (x_0 + i\boldsymbol{x})(l_0 + i\boldsymbol{l}) = l_0x_0 + il_0\boldsymbol{x} + ix_0\boldsymbol{l} - \boldsymbol{lx},$$
$$lxl = x_0l_0^2 + il_0^2\boldsymbol{x} + il_0x_0\boldsymbol{l} - l_0\boldsymbol{xl} + ix_0l_0\boldsymbol{l} - x_0\boldsymbol{l}^2 - l_0\boldsymbol{lx} - i\boldsymbol{lxl}. \tag{3.54}$$

Nakonec rozseparováním na skalární a vektorovou část rovnou píšeme

$$S(B_l(x)) = x_0\left(l_0^2 + \|\boldsymbol{l}\|^2\right) + 2l_0(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{l}), \tag{3.55}$$
$$V(B_l(x)) = i\left(l_0^2\boldsymbol{x} + 2l_0x_0\boldsymbol{l} - \boldsymbol{lxl}\right), \tag{3.56}$$

respektive po dosazení 3.53 a drobných úpravách

$$S(B_l(x)) = \left(2l_0^2 - 1\right)\left(x_0 + \frac{2l_0\sqrt{l_0^2-1}}{2l_0^2-1}(\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{l}})\right) \tag{3.57}$$

$$V(B_l(x)) = i\left(l_0^2\boldsymbol{x} + 2x_0l_0\sqrt{l_0^2-1}\hat{\boldsymbol{l}} - (l_0^2-1)\hat{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{l}}\right). \tag{3.58}$$

Význam 3.55 a 3.56 vynikne nejlépe na konkrétním případě. Předpokládejme proto, že soustavy souřadnic S_1 a S_2 na $\mathbb{M}$ na počátku splývaly a poté se S_2 začala pohybovat tak, aby souřadnicová pole $\frac{\partial}{\partial X^i},\ i = 1, \ldots, 3$, zůstala neměnná ($S_2$ nerotuje). Složky čtyř-rychlosti počátku O_2 v S_1 je $(\gamma c, w^1, w^2, w^3)$. Dále nechť $X \in \mathbb{M}$ je časoprostorová událost se souřadnicemi $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto x := ct + i\boldsymbol{x}$ v soustavě S_1 a $(X^0, X^1, X^2, X^3) \mapsto X := cT + i\boldsymbol{X}$ v soustavě S_2. Cílem je aplikovat B_l na x. Použijeme volbu:

$$l := -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}, \quad \text{kde} \quad \gamma = \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{w}\|^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \tag{3.59}$$

tj.:

$$\left(2l_0^2 - 1\right) := \gamma,\ l_0 := -\sqrt{\frac{\gamma+c}{2c}} \text{ a } \hat{\boldsymbol{l}} := \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}. \tag{3.60}$$

Z 3.57 a 3.58 tak jednoduše dostaneme

$$S(B_l(x)) = \gamma\left(ct - \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}}{c}\right) \equiv cT, \tag{3.61}$$

$$V(B_l(x)) = i\left(\boldsymbol{x} + (\gamma-1)\frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{w} - \gamma\boldsymbol{w}t\right) \equiv i\boldsymbol{X}, \tag{3.62}$$

což jsou klasické tvary Lorentzovy transformace souřadnic časoprostoru. B_l tak můžeme použít pro transformování složek vektorů z jedné soustavy do druhé.

Poslední čeho si všimneme je, že, vzhledem k lemmatu 19, libovolný sled po sobě následujících (*čistých*) Lorentzových transformací můžeme vždy nahradit jedinou doprovázenou rotací v euklidovském podprostoru.

Historický přehled

První kdo se zabýval kvaterniony byl již před rokem 1819 Gauss, jeho práce byla ale publikována až o 80 let později. Za tvůrce kvaternionové algebry je proto všeobecně považován Hamilton, který mezi lety 1844 a 1850 vydal sérii článků pod názvem *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra* v Philosophical Magazine. Hamilton, inspirován geometrickými vlastnostmi komplexních čísel v rovině, především snadnou reprezentací rotace v komplexní rovině, se snažil najít jejich zobecnění, které by mělo stejné vlastnosti v tří-rozměrném prostoru.
Jeho první myšlenkou bylo nejspíše vytvořit novou „komplexní jednotku“ j, tj.:

$$j^2 = -1,$$

tak, aby každému bodu tří-rozměrného prostoru se souřadnicemi $\{x, y, z\}$ mohl přiřadit prvek

$$x + iy + iz.$$

Jestliže po vzoru $\mathbb{C}$ má platit

$$(x + iy + iz)(x - iy - iz) \in \mathbb{R},$$

musel Hamilton brzy opustit vlastnosti typické pro všechny doposud známá čísla a připustit, že

$$ij = -ji.$$

Na další problém musel narazit vzápětí, pokusil-li se definovat součin ij tak, aby ležel v $Ln\,(1, i, j)$. Pro ukázku volme BÚNO $ij = 1$ a $ji = -1$. Protože jsme se stále nevzdali asociativity a požadujeme, aby $1i = i$ a $1j = j$, můžeme psát

$$i = 1i = -j^2 i = -j(ji) = j$$

a tedy i a j jsou lineárně závislé.
Tento problém Hamilton překonal zavedením dalšího rozměru generovaným

nezávislým prvkem $ij = k$, pro který platí

$$k^2 = ijij = -iijj = -1,$$

čímž vznikne známá rovnost

$$ijk = -1.$$

Nově vzniklý prostor $Ln\,(1, i, j, k)$ je značen $\mathbb{H}$ na Hamiltonovu počest.
Po svém vzniku se kvaternionová algebra rozšířila mezi odbornou veřejnost a na její rozvoj se soustředily celé matematické školy. Kvaterniony našly široké uplatnění ve fyzice a v jejich formulaci byly poprvé publikovány Maxwellovy rovnice.
Nakonec se kvaternioná algebra stala předlohou pro práci Gibbse a Heavisida, v níž mimo jiné zavedly nové operace skalární a vektorový součin, čímž položili základy vektorové algebry. Ta díky své jednoduchosti a přehlednosti rychle kvaterniony zastínila, a proto byly využívány po dlouhou dobu pouze okrajově. Do popředí zájmu se nakrátko opět dostaly při vzniku STR a QM vzhledem ke své struktuře, která přirozeně vytváří Minkowského prostor a taky jednoduše popisuje algebru vytvářenou Pauliho maticemi. Stojí též za zmínku, že profesor Viktor Trkal použil v roce 1949 komplexních kvaternionů k rozboru transformačních vlastností Diracových bispinorů [9]. Článek nevzbudil větší pozornost na mezinárodním poli, asi i proto, že nevyšel ve vhodném časopise, ale - slovy prof. Miroslava Brdičky -

> *„V této práci podal prof. Trkal první systematické řešeni uvedeného problému, aniž by užil speciálního zobrazeni Diracových matic.“* [2]

V dnešní době našly kvaterniony využití především v orbitální mechanice, molekulární dynamice, počítačové grafice atd.

Literatura

[1] ARRIBAS, M.; ELIPE, A.; PALACIOS, M.: *Quaternions and the rotation of a rigid body*,
Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. October 27, 2006, Volume 96, Numbers 3-4 / November, 2006, s. 239-251.
Dostupný také z WWW: <http://www.springerlink.com/content/jg645829040566v5/fulltext.pdf >,
ISSN 0923-2958(Print)1572-9478(Online).

[2] Brdička ,Miroslav: *Za profesorem Viktorem Trkalem*,
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 3, 371-376.

[3] BAEZ, John: *The Octonions*,
Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society [online], December 21, 2001, Number 2, [cit. 2010-07-12].
Dostupný z WWW: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.129.6738&rep=rep1&type=pdf>,
S 0273-0979(01)00934-X.

[4] COUTSIAS, Evangelos; ROMERO, Louis: *The Quaternions with an application to Rigid Body Dynamics*,
Sandia Technical Report. 2004.
Dostupný také z WWW: <http://www.math.unm.edu/∼vageli/papers/rrr.pdf>,
SAND2004-0153.

[5] DE HAAS, Paul.: *Bi-quaternion calculus applied to classical, relativistic and covariant electrodynamics*,
DeHaasPapers [online], [cit. 2010-07-29].
Dostupné z WWW: <http://home.tiscali.nl/physis/deHaasPapers/>.

[6] GIRARD, Patrick: *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*, Basel : Birkhäuser Verlag AG, 2007. 179 s.
Dostupné z WWW: <http://www.springerlink.com/content/w2q402/>,
ISBN 978-3-7643-7790-8.

[7] GÜRLEBECK, Klaus; SPRÖSSIG, Wolfgang: *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*,
Chichester (UK): John Wiley & Sons, 1997. Chapter 1. Quaternions and Multivectors, s. 384.

[8] LAMBEK, J.: *If Hamilton Had Privailed: Quaternions in Physics*,
The Mathematical Intelligencer. December 1995, Numer 4, s. 7-15.
Dostupný také z WWW: <http://www.springerlink.com/content/7u4480m314h4483g/>,
ISSN 0343-6993(Print),1866-7414(Online).

[9] Trkal, V: *Lorentzova obecná transformace Diracovy vlnové funkce*,
Rozpravy II. Třídy České akademie, 59 (1949), číslo 32.

[10] WARD, J.: *Quaternions and Caylay Numbers: Algebra and Applications*,
Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers, 1997, 237 s. ISBN 0-7923-4513-4.