Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vendula Exnerová

Bifurkace obyčejných diferenciálních rovnic z bodů Fučíkova spektra

Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jana Stará, CSc.**

Studijní program: **Matematika**
Matematická analýza

Praha 2011

Poděkování

Na prvním místě velice děkuji paní docentce Janě Staré za dobré vedení a za veškerou její pomoc, ale také za její laskavé chování a trpělivost, neboť to velmi zpříjemnilo moji práci.

Dále děkuji svým nejbližším za pomoc a podporu během psaní této diplomové práce a to zejména Ondřeji Honzlovi a svým rodičům. Bez zázemí, které mi poskytují, by práce nemohla vzniknout.

Děkuji také svým přátelům za technickou pomoc s LaTeXem i obrázky a za provedení závěrečných korektur textu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 14. dubna 2011

Vendula Exnerová

Název práce: **Bifurkace obyčejných diferenciálních rovnic z bodů Fučíkova spektra**

Autor: **Vendula Exnerová**

Katedra: **Katedra matematické analýzy**

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jana Stará, CSc.**, Katedra matematické analýzy MFF UK, Praha

Abstrakt: Hlavním tématem práce je Fučíkovo spektrum soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu se smíšenými okrajovými podmínkami. V první části je rozebráno Fučíkovo spektrum úlohy s jednou diferenciální rovnicí pro různé okrajové podmínky. Druhá část se zabývá systémy dvou rovnic. Pojednává o základních vlastnostech soustav a jejich netriviálních řešení, o možnosti snížení počtu vyšetřovaných parametrů a o závislosti úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami na Dirichletově úloze. Práce navazuje na výsledky E. Massy a B. Ruffa týkající se Dirichletovy úlohy a zpřesňuje některé jejich důkazy. V závěru práce je Fučíkovo spektrum úlohy se smíšenými podmínkami popsáno jako sjednocení spočetně mnoha spojitě diferencovatelných ploch a je dokázána uzavřenost tohoto spektra.

Klíčové pojmy: **Fučíkovo spektrum; systém obyčejných diferenciální rovnic druhého řádu; Dirichletovy, Neumannovy a smíšené okrajové podmínky.**

Title: **Bifurcation of Ordinary Differential Equations from Points of Fučík Spectrum**

Author: **Vendula Exnerová**

Department: **Department of Mathematical Analysis**

Supervisor: **doc. RNDr. Jana Stará, CSc.**, Department of Mathematical Analysis MFF UK, Prague

Abstract: The main subject of the thesis is the Fučík spectrum of a system of two differential equations of the second order with mixed boundary conditions. In the first part of the thesis there are described Fučík spectra of problems of a differential equation with Dirichlet, mixed and Neumann boundary conditions. The other part deals with systems of two differential equations. It attends to basic properties of systems and their nontrivial solutions, to a possibility of a reduction of number of parameters and to a dependance of a problem with mixed boundary condition on one with Dirichlet boundary conditions. The thesis takes up the results of E. Massa and B. Ruff about the Dirichlet problem and improves some of their proofs. In the end the Fučík spectrum of a problem with mixed boundary conditions is described as the union of countably many continuously differentiable surfaces and there is proven that this spectrum is closed.

Keywords: **Fučík spectrum; system of ordinary differential equations of the second order; Dirichlet, Neumann and mixed boundary conditions.**

Obsah

Úvod

Práce, kterou máte právě před sebou, se zabývá Fučíkovými spektry obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav s Dirichletovými, Neumannovými a smíšenými okrajovými podmínkami.

Pojem *bifurkace*, který je uveden v názvu práce, se v samotném textu nevyskytuje, přesto název odpovídá jejímu obsahu. Bifurkace, neboli větvení řešení, velmi úzce souvisí s Fučíkovým spektrem. Rovnice typu

$$-u'' = \mu u^+ - \nu u^-$$

mají pro Dirichletovy, Neumannovy i smíšené okrajové podmínky vždy řešení $u \equiv 0$ pro jakoukoli dvojici parametrů $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. Existence netriviálního řešení v bodech Fučíkova spektra tedy odpovídá vzniku nějakého nového řešení. Z tohoto pohledu jsou body Fučíkova spetra právě body bifurkace řešení daných rovnic.

Hlavním cílem práce bylo v návaznosti na texty E. Massy a B. Ruffa zjistit, jaké výsledky platí pro systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami a zároveň zpřesnit a zlepšit některé jejich důkazy. K tomuto tématu se ještě váže charakterizace bodů Fučíkova spektra úloh s jednou rovnicí, úlohy týkající se vlastních čísel a studium existence řešení lineárních i nelineárních úloh a počet těchto řešení.

Práce je rozdělena do tří částí. V první jsou uvedeny potřebné definice, základní vlastnosti Sobolevových prostorů a slabých řešení diferenciálních rovnic se speciální pravou stranou.

Druhá část se věnuje Fučíkovým spektrům úloh s jednou rovnicí pro Dirichletovy, Neumannovy a smíšené podmínky a explicitně tato spektra popisuje. Pomocí symetrického rozšíření ukazuje na závislost úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami na úloze s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Třetí část se zabývá Fučíkovým spektrem systému dvou rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami. Nejdříve je zde pojednáno o redukci počtu parametrů úlohy. Ze základních vlastností Fučíkova spektra a vlastností odpovídajících netriviálních řešení následně vyplývá možnost omezit se pouze na studium kladných parametrů. Díky symetrickému rozšíření řešení navazuje práce na výsledky E. Massy a B. Ruffa týkající se systému dvou rovnic s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Jsou přesněji vymezeny oblasti, kde se mohou vyskytovat body Fučíkova spektra. Nakonec je popsáno Fučíkovo spektrum úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami jako sjednocení spočetně mnoha spojitě diferencovatelných ploch a je dokázána uzavřenost tohoto spektra.

Tvar Fučíkova spektra konkrétní úlohy je úzce spjat nejen s okrajovými podmínkami, ale i s množinou, na které je úloha zadána. Studium Fučíkova spektra úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami nad prostory funkcí, které mají jako definiční obor interval, může být chápáno jako příprava pro zkoumání obdobného problému na vícerozměrných oblastech, na jejichž části hranice máme Dirichletovy podmínky a na části Neumannovy. Vícerozměrné oblasti jsou z pohledu fyziky obvykle zajímavější, ovšem studium takových oblastí je matematicky mnohokrát komplikovanější.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Sobolevův prostor $W^{1,2}(a,b)$ a jeho vlastnosti

Jelikož budeme v následujícím textu používat pojem slabého řešení, nevystačíme s prostorem spojitě diferencovatelných funkcí. Proto zde zavedeme obecnější pojem derivace a obecnější prostor funkcí.

Definice 1. *Nechť u je funkce z $L^1(a,b)$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Řekneme, že funkce u má slabou derivaci $v \in L^1(a,b)$, jestliže pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(a,b) := \{\psi \in C^\infty([a,b]); \operatorname{supp}\psi \subset (a,b)\}$, kde $\operatorname{supp}\psi := \overline{\{t \in [a,b]; \psi(t) \neq 0\}}$, platí*

$$\int_a^b v\varphi = -\int_a^b u\varphi'.$$

Značíme $v = u'$.

Definice 2. *Sobolevovým prostorem $W^{1,2}(a,b)$ rozumíme normovaný lineární prostor*

$$W^{1,2}(a,b) := \{u \in L^2(a,b); u \text{ má slabou derivaci v } L^2(a,b)\}$$

s normou $||u||_{W^{1,2}(a,b),1} := \sqrt{||u||^2_{L^2(a,b)} + ||u'||^2_{L^2(a,b)}}$.

Poznámka 1. [1] *Správně bychom každou funkci ve $W^{1,2}(a,b)$ měli chápat jako třídu funkcí. Jelikož pracujeme na jednorozměrném intervalu (a,b), víme z teorie o Sobolevových prostorech, že existuje spojitý reprezentant každé této třídy. Dokonce je tento spojitý reprezentant třídy z $W^{1,2}(a,b)$ funkce absolutně spojitá.*[2] *Proto budeme bez újmy na obecnosti pracovat s tímto absolutně spojitým reprezentantem.*

[1] [10], str. 85.
[2] [6], str. 10.

Věta 1. [3] *Prostor $W^{1,2}(a,b)$ je separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem*

$$(u,v)_{W^{1,2}(a,b)} := \int_a^b u(t)v(t)dt + \int_a^b u'(t)v'(t)dt.$$

Věta 2. [4] *Prostor $W^{1,2}(a,b)$ je kompaktně vnořen do prostoru $L^2(a,b)$.*

Věta 3. [5] *Prostor $W^{1,2}(a,b)$ je kompaktně vnořen do prostoru $C([a,b])$.*

Poznámka 2. *Zde volíme pro prostor $W^{1,2}(0,\pi)$ skalární součin*

$$(u,v)_{W^{1,2}(0,\pi),1} := u(0)v(0) + \int_0^\pi u'v'.$$

Tento součin indukuje normu

$$||u||_{W^{1,2}(0,\pi),1} := \sqrt{u(0)^2 + ||u'||^2_{L^2(0,\pi)}}.$$

Díky tomu, že funkce z $W^{1,2}(0,\pi)$ jsou absolutně spojité, dává tento skalární součin smysl a je dobře definovaný. Navíc je tato norma ekvivaletní normě původní, neboť pro absolutně spojitou funkci u platí skoro všude[6]

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u', \tag{1.1}$$

a tedy

$$|u(x)|^2 \leq \left(|u(0)| + \int_0^\pi |u'|\right)^2 \leq 2|u(0)|^2 + 2\left(\int_0^\pi |u'|\right)^2 \leq C\left(|u(0)|^2 + \int_0^\pi |u'|^2\right),$$

kde jsme v druhé nerovnosti použili Cauchyho nerovnost a ve třetí Hölderovu nerovnost[7].

Normu u v $L^2(0,\pi)$ lze tedy odhadnout

$$||u||^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi |u(x)|^2 \leq C\pi\left(|u(0)|^2 + \int_0^\pi |u'|^2\right).$$

Odtud

$$||u||_{W^{1,2}(0,\pi)} \leq C||u||_{W^{1,2}(0,\pi),1}.$$

[3] [10], str. 79.
[4] [10], str. 110.
[5] [10], str. 113.
[6] [6], str. 8.
[7] [7], str. 25.

Z rovnice (1.1) *obdobně získáme, že* $u(0)^2 \leq C(|u(x)|^2 + \int_0^\pi |u'|^2)$ *pro každé* $x \in (0,\pi)$. *Pokud tuto nerovnost zintegrujeme podle* x *na* $(0,\pi)$, *dostaneme již snadno*

$$||u||_{W^{1,2}(0,\pi),1} \leq C||u||_{W^{1,2}(0,\pi)}.$$

Tudíž dohromady existuje $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *takové, že*

$$C_1||u||_{W^{1,2}(0,\pi),1} \leq ||u||_{W^{1,2}(0,\pi)} \leq C_2||u||_{W^{1,2}(0,\pi),1}$$

a normy jsou ekvivalentní.

V následujícím textu budeme používat skalární součin $(\cdot,\cdot)_{W^{1,2}(0,\pi),1}$ *a normu* $||\cdot||_{W^{1,2}(0,\pi),1}$. *Díky dokázané ekvivalenci však budeme tento nový skalární součin a tuto novou normu značit stejně jako skalární součin a normu původní, to jest* $(\cdot,\cdot)_{W^{1,2}(0,\pi)}$ *a* $||\cdot||_{W^{1,2}(0,\pi)}$.

Prostor $W^{1,2}(a,b)$ je nejen lineární prostor, ale je to také svaz – je uzavřen na bodové maximum a minimum z konečně mnoha prvků.

Věta 4. [8] *Nechť* $u, v \in W^{1,2}(a,b)$. *Potom* $w := \max\{u,v\} \in W^{1,2}(a,b)$ *a*

$$w' = \begin{cases} u' & \text{skoro všude na množině, kde } w = u, \\ v' & \text{skoro všude na množině, kde } w = v. \end{cases}$$

Důsledek 1. *Nechť* $w \in W^{1,2}(a,b)$. *Z předchozí věty vyplývá, že pokud* $w^+(t) := \max\{0, w(t)\}$ *a* $w^-(t) := \max\{0, -w(t)\}$, *pak* $w^\pm \in W^{1,2}(a,b)$. *Snadno odhadneme, že*

$$||w^\pm||_{W^{1,2}(a,b)} \leq ||w||_{W^{1,2}(a,b)}.$$

[8] [6], str. 10.

1.2 Slabé řešení

Než zavedeme pojem slabého řešení, musíme ještě určit prostor testovacích funkcí.

Definice 3. *Prostorem testovacích funkcí pro úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami budeme v následujícím textu rozumět*

$$\mathcal{K} := \{u \in W^{1,2}(0,\pi);\ u(0) = 0\},$$

respektive pro úlohu s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$W_0^{1,2}(0,\pi) := \{u \in W^{1,2}(0,\pi);\ u(0) = 0 = u(\pi)\}.$$

Prostor testovacích funkcí úlohy s Neumannovými okrajovými podmínkami je prostor $W^{1,2}(0,\pi)$.

Nyní již postupme k definici slabého řešení. Budeme se zabývat třemi typy okrajových podmínek, pro každý z nich uvádíme vlastní definici.

Definice 4. *Mějme diferenciální rovnici*

$$-u''(t) = f(u(t)) \quad \text{pro } t \in [0,\pi]. \tag{1.2}$$

Nechť f je spojitá reálná funkce a nechť $f(\xi) \leq c(1 + |\xi|)$ pro nějaké $c > 0$.

Slabým řešením rovnice (1.2) s okrajovými podmínkami $u(0) = 0$, $u'(\pi) = 0$ rozumíme funkci $u \in W^{1,2}(0,\pi)$ splňující $u(0) = 0$, která navíc pro každou testovací funkci $v \in \mathcal{K}$ splňuje

$$\int_0^\pi u'v' = \int_0^\pi f(u)v.$$

Slabým řešením rovnice (1.2) s Dirichletovými okrajovými podmínkami rozumíme funkci $u \in W^{1,2}(0,\pi)$ splňující $u(0) = 0$ a $u(\pi) = 0$, která navíc pro každou testovací funkci $v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ splňuje

$$\int_0^\pi u'v' = \int_0^\pi f(u)v.$$

Slabým řešením rovnice (1.2) s Neumannovými okrajovými podmínkami rozumíme funkci $u \in W^{1,2}(0,\pi)$, která pro každou testovací funkci $v \in W^{1,2}(0,\pi)$ splňuje

$$\int_0^\pi u'v' = \int_0^\pi f(u)v.$$

Pozorování 1. *Snadno si všimneme, že každé slabé řešení u úlohy* (1.2) *s okrajovými podmínkami* $u(0) = 0$, $u'(\pi) = 0$ *náleží do prostoru testovacích funkcí* $\mathcal{K}$.

Z důsledku 1 plyne, že také $u^+ := \max\{0, u\}$ *a* $u^- := \max\{0, -u\}$, *kde u je slabé řešení u úlohy* (1.2) *s okrajovými podmíkami* $u(0) = 0$, $u'(\pi) = 0$, *patří do prostoru testovacích funkcí* $\mathcal{K}$.

Za určitých předpokladů můžeme požadavky na slabé řešení zvýšit, jak ukazuje následující věta.

Věta 5. [9] *Mějme úlohu*

$$\begin{aligned} -(a(t)u')' &= g \quad \text{pro } t \in (0, A), \\ u(0) = u(A) &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nechť $a \in C^1([0, A])$, $g \in L^2(0, A)$. *Nechť* $u \in W_0^{1,2}(0, A)$ *je slabé řešení rovnice* (1.3).

Potom $u \in W^{2,2}(0, A) = \{u \in W^{1,2}(0, A);$ *existuje* $u'' \in L^2(0, A)\}$ *a splňuje*

$$||u||_{W^{2,2}(0,A)} \leq C \left(||g||_{L^2(0,A)} + ||u||_{L^2(0,A)} \right),$$

kde konstanta $C > 0$ *závisí pouze na délce intervalu* $(0, A)$ *a na funkci a.*

Poznámka 3. *Větu 5 lze použít i pro okrajové podmínky* $u(0) = 0 = u'(A)$, *respektive* $u'(0) = 0 = u'(A)$.

Je-li pravá strana rovnice lipschitzovská, můžeme dokonce hledat slabé řešení úlohy (1.2), které splňuje i požadavky klasického řešení.

Lemma 1. *Mějme systém*

$$\begin{aligned} -u'' &= f(u, v) \quad \text{pro } t \in [0, A], \\ -v'' &= g(u, v) \quad \text{pro } t \in [0, A], \\ u(0) &= u(A) = 0, \\ v(0) &= v(A) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nechť f a g jsou lipschitzovské funkce.

Potom slabé řešení $(u, v) \in W_0^{1,2}(0, A) \times W_0^{1,2}(0, A)$ *úlohy* (1.4) *jsou funkce třídy* C^2 *na* $[0, \pi]$.

[9] [2], str. 317.

Důkaz. Tvrzení dokážeme jen pro u pomocí první rovnice, pro v se tvrzení dokáže analogicky pomocí druhé rovnice.

Z lipschitzovskosti f a z $u, v \in W_0^{1,2}(0, A)$ snadno získáme $f(u, v) \in L^2(0, A)$, neboť $f(u(t), v(t)) \leq |f(0, 0)| + K(|u(t)| + |v(t)|)$, kde K je konstanta lipschitzovskosti.

Funkce $a \equiv 1$ je C^1-funkce.

Nyní můžeme na úlohu (1.4) aplikovat větu 5 o regularitě řešení. Tedy $u \in W^{2,2}(0, A)$ a $u'' \in L^2(0, A)$ existuje skoro všude, neboť $u' \in W^{1,2}(0, A)$ je funkce absolutně spojitá.[10]

Díky existenci $u'' \in L^2(0, A)$ můžeme psát

$$-\int_0^A u''\varphi = \int_0^A u'\varphi' = \int_0^A f(u, v)\varphi.$$

Víme, že dvě funkce h_1, h_2 z prostoru $L^1(I)$ se rovnají skoro všude právě tehdy, když

$$\int_I h_1\varphi = \int_I h_2\varphi$$

pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.[11]

Jelikož $L^2(0, A) \subset L^1(0, A)$[12] a $\mathcal{D}(0, A) \subset W_0^{1,2}(0, A)$, dostáváme

$$-u'' = f(u, v) \quad \text{skoro všude na } [0, A].$$

Protože pravá strana rovnice $-u'' = f(u, v)$ je v prostoru $W^{1,2}(0, A)$ a tato rovnost platí bodově skoro všude, je i $-u''$ v tomto prostoru.

Podle poznámky 1 je funkce z $W^{1,2}(0, \pi)$ spojitá a tudíž i u'' je spojitá funkce. Tedy $u \in C^2([0, \pi])$ a řeší rovnici (1.4) bodově. □

Speciálním případem je pravá strana rovnic určujících Fučíkovo spektrum, jak ukážeme dále.

Důsledek 2. *Funkce*

$$f(x) := \begin{cases} \mu x & \text{pro } x \geq 0, \\ \nu x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

je funkce lipschitzovská. Z lemmatu 1 plyne, že slabé řešení úlohy (1.2) *s pravou stranou* $f(u)$ *a s Dirichletovými okrajovými podmínkami* $u(0) = u(\pi) = 0$ *je funkce třídy* C^2 *na* $[0, \pi]$.

[10] [6], str. 8

[11] [11], str. 75.

[12] [10], str. 65.

Věta o regularitě platí i pro okrajové podmínky $u(0) = 0 = u'(\pi)$ a proto i řešení úlohy (1.2) *s pravou stranou $f(u)$ a s okrajovými podmínkami $u(0) = u'(\pi) = 0$ je funkce třídy $C^2([0,\pi])$.*

Obdobně i řešení úlohy (1.2) *s pravou stranou $f(u)$ a s Neumannovými okrajovými podmínkami $u'(0) = u'(\pi) = 0$ je funkce třídy $C^2([0,\pi])$.*

Důsledek 3. *Pokud je u slabé řešení úlohy* (1.2) *s pravou stranou $\mu u^+ - \nu u^-$ tvaru*

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \textit{pro } t \in [0,a], \\ u_2(t) & \textit{pro } t \in [a,A], \end{cases}$$

kde $u_1(a) = u_2(a)$, pak z předchozího lemmatu musí platit

$$u_1'(a-) = u_2'(a+).$$

Kapitola 2

Úloha s jednou diferenciální rovnicí

2.1 Klasické Fučíkovo spektrum Dirichletovy úlohy

Pojem Fučíkova spektra vznikl v 70. letech 20. století, kdy se Svatopluk Fučík[1] zabýval nelineárním problémem se skákajícími nelinearitami.

Uvažoval nejdříve následující úlohu[2]:

$$\begin{aligned} u''(t) + \psi(u(t)) &= p(t) \qquad \text{pro } t \in [0, A], \\ u(0) = u(A) &= 0, \end{aligned}$$

kde ψ je spojitá reálná funkce definovaná na $(-\infty, \infty)$. Navíc požadoval, aby funkce ψ byla funkcí se skákajícími nelinearitami, to jest

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \neq \lim_{x \to -\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Mimo jiné se zajímal o homogenní úlohu, kde pro $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ definoval

$$\psi(x) := \begin{cases} \mu x & \text{pro } x \geq 0, \\ \nu x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Přesněji

$$\begin{aligned} u''(t) + \mu u^+(t) - \nu u^-(t) &= 0 \qquad \text{pro } t \in [0, A], \\ u(0) = u(A) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde kladnou částí rozumíme $u^+ := \max\{u, 0\}$ a zápornou částí $u^- := \max\{-u, 0\}$.

[1] [3].
[2] [3], str. 69.

Definice 5. *Fučíkovým spektrem rovnice* (2.1) *s okrajovými podmínkami rozumíme množinu*

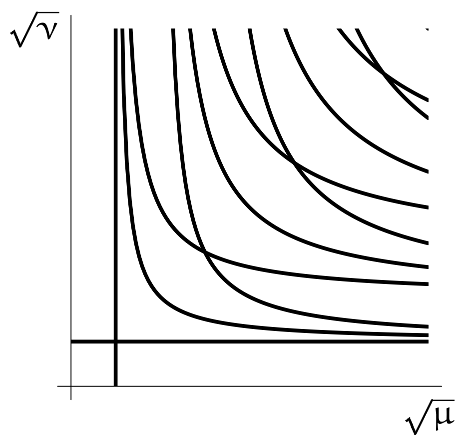
$$\Sigma_A = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2;\ \textit{úloha (2.1) s parametry } \mu, \nu \textit{ má netriviální řešení}\}.$$

S. Fučík ve svém článku popsal toto spektrum pro jednu rovnici:

Lemma 2. [3] *Problém* (2.1) *na intervalu* $[0, \pi]$ *má netriviální řešení právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:*

1. $\mu = 1$, ν *je libovolné,*
2. μ *je libovolné,* $\nu = 1$,
3. $\mu > 1, \nu > 1$ *a* $\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$,
4. $\mu > 1, \nu > 1$ *a* $\frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\nu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$,
5. $\mu > 1, \nu > 1$ *a* $\frac{\sqrt{\nu}(\sqrt{\mu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$.

Na obrázku 2.1 je vykresleno Fučíkovo spektrum pro jednu rovnici na intervalu $[0, \pi]$.



Obrázek 2.1: Fučíkovo spektrum Dirichletovy úlohy.

Zvolíme-li $\mu = \nu$ v posledních třech podmínkách lemmatu 2, pro $k \in \mathbb{N}$ pevné získáme, že v třetí podmínce je

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\nu} = 2k$$

[3] [3], str. 75.

a ve čtvrté a páté je

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{\nu} = 2k + 1.$$

Díky tomu a spojitosti funkcí, které popisují podmínky pro parametry μ a ν, můžeme definovat pro $k \in \mathbb{N}$ křivky

$$\begin{aligned}
\gamma^{1+} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \mu = 1,\ \nu \in \mathbb{R}_+\right\},\\
\gamma^{1-} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \nu = 1,\ \mu \in \mathbb{R}_+\right\},\\
\gamma^{2k} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} = k\right\},\\
\gamma^{(2k+1)+} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \frac{\sqrt{\nu}(\sqrt{\mu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} = k\right\},\\
\gamma^{(2k+1)-} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\nu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} = k\right\}.
\end{aligned}$$

Zřejmě je Fučíkovo spektrum úlohy (2.1) na intervalu $[0,\pi]$ sjednocením těchto křivek, to jest

$$\Sigma_\pi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\gamma^{n+} \cup \gamma^{n-}).$$

Podívejme se na asymptotické chování těchto křivek.

Nechť $n = 2k$. Potom

$$\lim_{\substack{\mu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma^{2k}}} \nu = k^2 = \lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma^{2k}}} \mu.$$

Nechť $n = 2k+1$. Potom

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\mu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma^{(2k+1)+}}} \nu = k^2, &\qquad &\lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma^{(2k+1)+}}} \mu = (k+1)^2,\\
&\lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma^{(2k+1)-}}} \mu = k^2, &\qquad &\lim_{\substack{\mu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma^{(2k+1)-}}} \nu = (k+1)^2.
\end{aligned}$$

Křivky se tedy asymptoticky přibližují k hodnotám k^2, respektive $(k+1)^2$, což odpovídá vlastním číslům úlohy

$$\begin{aligned}
-u'' &= \lambda u \quad \text{pro } t \in [0,\pi],\\
u(0) &= u(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Následující příklad explicitně popisuje tvar řešení Fučíkovy homogenní úlohy s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Příklad 1. *Mějme úlohu (2.1) na $[0,\pi]$ s parametry $(\mu,\nu) \in \Sigma_\pi$, $\mu\nu \neq 0$. Označme*

$$c_k := k\pi \frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu\nu}}, \quad d_k := c_k + \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \quad e_k := c_k + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$$

pro $k \in \mathbb{N}_0$.

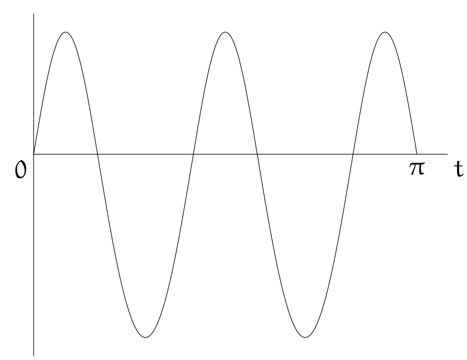
Potom slabým řešením je funkce

$$u(t) := \begin{cases} a \sin\left(\sqrt{\mu}(t-c_k)\right) & \text{pro } t \in [c_k, d_k] \cap [0,\pi], \\ -\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} a \sin\left(\sqrt{\nu}(t-d_k)\right) & \text{pro } t \in [d_k, c_{k+1}] \cap [0,\pi], \end{cases}$$

pro $a > 0$, respektive

$$\widetilde{u}(t) := \begin{cases} -b \sin\left(\sqrt{\nu}(t-c_k)\right) & \text{pro } t \in [c_k, e_k] \cap [0,\pi], \\ \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}} b \sin\left(\sqrt{\mu}(t-e_k)\right) & \text{pro } t \in [e_k, c_{k+1}] \cap [0,\pi], \end{cases}$$

pro $b > 0$.



Obrázek 2.2: Funkce u s parametry $\mu = 36$ a $\nu = 16$.

Takto definovaná funkce je třídy $C^2([0,\pi])$, neboť

$$\lim_{t\to d_k+} u'(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}+} a\sqrt{\mu}\cos\left(t\sqrt{\mu}\right) = \lim_{t\to 0-} -a\sqrt{\mu}\cos\left(t\sqrt{\nu}\right) = \lim_{t\to d_k-} u'(t),$$

$$\lim_{t\to c_k+} u'(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{\sqrt{\nu}}+} -a\sqrt{\mu}\cos\left(t\sqrt{\nu}\right) = \lim_{t\to 0} a\sqrt{\mu}\cos\left(t\sqrt{\mu}\right) = \lim_{t\to c_k-} u'(t),$$

$$\lim_{t\to d_k+} u''(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}+} -a\mu\sin\left(t\sqrt{\mu}\right) = 0 = \lim_{t\to 0-} a\sqrt{\mu\nu}\sin\left(t\sqrt{\nu}\right) = \lim_{t\to d_k-} u''(t),$$

$$\lim_{t\to c_k+} u''(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{\sqrt{\nu}}+} a\sqrt{\mu\nu}\sin\left(t\sqrt{\nu}\right) = 0 = \lim_{t\to 0-} -a\mu\sin\left(t\sqrt{\mu}\right) = \lim_{t\to c_k-} u''(t).$$

Limity pro funkci $\widetilde{u}$ jsou analogické.

Příklad grafu takovéto funkce u najdete na obrázku 2.2.

2.2 Fučíkovo spektrum úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami

Nejprve mějme úlohu se smíšenou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} u''(t) + \mu u^+(t) - \nu u^-(t) = 0 \quad &\text{pro } t \in [0, \pi], \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) = 0, \quad & \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $u^{\pm}$ rozumíme jako výše.

Zajímá nás, pro jaká $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ má úloha (2.2) netriviální řešení. Označme tedy

$$\sigma_F := \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2;\ \text{úloha (2.2) s parametry } (\mu, \nu) \text{ má netriviální řešení}\}.$$

Množinu σ_F budeme nazývat Fučíkovým spektrem úlohy (2.2).

Zkusme rovnici (2.2) vyřešit. Nejprve trochu zjednodušíme situaci.

Rovnici (2.2) můžeme rozšířit symetricky podle π na interval $[0, 2\pi]$. Okrajová podmínka se změní na $u(0) = 0 = u(2\pi)$. Zabýváme se tedy úlohou

$$\begin{aligned} \bar{u}''(t) + \mu \bar{u}^+(t) - \nu \bar{u}^-(t) = 0 \quad &\text{pro } t \in [0, 2\pi], \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(2\pi) = 0. \quad & \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pokud vyřešíme rozšířenou úlohu (2.3), pak řešení, která splňují podmínku $\bar{u}'(\pi) = 0$, řeší i úlohu (2.2). Musíme se ujistit, že tímto postupem nevynecháme žádné řešení úlohy (2.2). To však snadno dokážeme:

Pokud je $u_0 \in W^{1,2}(0, \pi)$ řešením úlohy (2.2), pak

$$\bar{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [0, \pi], \\ u_0(2\pi - t) & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

je řešením rozšířené úlohy (2.3).

Z definice slabého řešení úlohy (2.2) víme, že pro každé $\varphi \in \mathcal{K}$ platí

$$\int_0^\pi u_0' \varphi' = \mu \int_0^\pi u_0^+ \varphi - \nu \int_0^\pi u_0^- \varphi.$$

Ověříme, že pro každé $\psi \in W_0^{1,2}(0, 2\pi)$ platí

$$\int_0^{2\pi} \bar{u}_0' \psi' = \mu \int_0^{2\pi} \bar{u}_0^+ \psi - \nu \int_0^{2\pi} \bar{u}_0^- \psi. \tag{2.4}$$

Definujme $\varphi_1(t) := \psi(t)$ pro každé $t \in [0, \pi]$ a $\varphi_2(t) := \psi(2\pi - t)$ pro každé $t \in [0, \pi]$. Je zřejmé, že $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}$.

Tedy

$$\begin{aligned}\int_0^\pi u_0'(t)\varphi_1'(t)\,dt + \int_0^\pi u_0'(t)\varphi_2'(t)\,dt &= \int_0^\pi u_0'(t)\psi'(t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} u_0'(2\pi - t)\psi'(t)\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \bar{u}_0'(t)\psi'(t)\,dt.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Zároveň

$$\begin{aligned}\int_0^\pi u_0'\varphi_1' + \int_0^\pi u_0'\varphi_2' &= \mu \int_0^\pi u_0^+\varphi_1 - \nu \int_0^\pi u_0^-\varphi_1 + \mu \int_0^\pi u_0^+\varphi_2 - \nu \int_0^\pi u_0^-\varphi_2 = \\ &= \mu \int_0^{2\pi} \bar{u}_0^+\psi - \nu \int_0^{2\pi} \bar{u}_0^-\psi.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dáme-li dohromady (2.5) a (2.6), dostaneme, že $\bar{u}_0$ splňuje rovnici (2.4).

Musíme ještě ověřit, že $\bar{u}_0 \in W^{1,2}(0, 2\pi)$. Snadno zjistíme, že $\bar{u}_0 \in L^2(0, 2\pi)$, neboť

$$\int_0^{2\pi} \bar{u}_0^2(t)\,dt = \int_0^\pi u_0^2(t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} u_0^2(2\pi - t)\,dt = 2\int_0^\pi u_0^2(t)\,dt < \infty,$$

neboť $u_0 \in L^2(0, \pi)$.

Funkce $u_0 \in W^{1,2}(0, \pi)$ je funkce absolutně spojitá[4]. I symetricky rozšířená funkce $\bar{u}_0$ je funkce absolutně spojitá (a tedy i spojitá), a proto existuje $\bar{u}_0' \in L^1(0, 2\pi)$ skoro všude[5]. Jelikož navíc $\bar{u}_0' \in L^2(0, \pi)$ a $\bar{u}_0' \in L^2(\pi, 2\pi)$, přesněji

$$\int_0^{2\pi} (\bar{u}_0')^2(t)\,dt = \int_0^\pi (u_0')^2(t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} (u_0')^2(2\pi - t)\,dt = 2\int_0^\pi (u_0')^2(t)\,dt < \infty,$$

platí $\bar{u}_0' \in L^2(0, 2\pi)$.

A tudíž $\bar{u}_0 \in W^{1,2}(0, 2\pi)$.

Odtud každé řešení úlohy (2.2) je po rozšíření jako výše řešením úlohy (2.3). Z toho jednoduše plyne, že $\sigma_F \subset \Sigma_{2\pi}$, kde $\Sigma_{2\pi}$ rozumíme Fučíkovo spektrum úlohy (2.1) na intervalu $[0, 2\pi]$.

[4] [6], str. 9.

[5] [6], str. 9.

Příklad 2. *Podívejme se nejdříve na speciální případ úlohy* (2.2)*. Pro* $\lambda := \mu = \nu$ *dostáváme úlohu*

$$\begin{aligned} \bar{u}''(t) + \lambda\bar{u}(t) &= 0 \qquad \textit{pro } t \in [0, 2\pi], \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tato úloha je velmi dobře známá, jedná se o „klasické" spektrum, tedy $\lambda \in \sigma := \{(\frac{k}{2})^2; k \in \mathbb{N}\}$.

Z okrajových podmínek úlohy (2.2) zjistíme, že podmínku $u'(\pi) = 0$ splňují ta řešení $\bar{u}$, která odpovídají parametru $\lambda \in \sigma' := \{(\frac{2k-1}{2})^2; k \in \mathbb{N}\}$.

Množinu σ' můžeme uspořádat podle velikosti. Označíme proto $\lambda_k := \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \in \sigma'$ pro $k \in \mathbb{N}$ a budeme toto značení používat v celém textu.

Poznámka 4. *Pokud je* $\lambda = (\frac{2k-1}{2})^2$ *pro* $k \in \mathbb{N}$*, pak* $(\lambda, \lambda) \in \sigma_F$.

Poznámka 5. *Pro* $\lambda \leq 0$ *jsou řešení úlohy* (2.7) *lineární kombinací funkcí* $\cosh(\sqrt{|\lambda|}t)$, $\sinh(\sqrt{|\lambda|}t)$*, respektive* t *a* 1 *pro* $\lambda = 0$*. Z daných okrajových podmínek však vyplývá, že řešením úlohy* (2.7) *pro* $\lambda \leq 0$ *je jedině nulová funkce. Proto budeme hledat pouze body* $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2_+$.

Nyní použijeme výsledků S. Fučíka[6] a aplikujeme je na úlohu (2.3). Poté opět hledáme ta řešení, pro která platí $u'(\pi) = 0$.

Nejdříve uvažme taková řešení, pro která platí $u(t) \neq 0$ pro $t \in (0, 2\pi)$. Pak je buď $u > 0$ na $(0, 2\pi)$ a $\mu = \frac{1}{4}$ a ν je libovolné, nebo $u < 0$ na $(0, 2\pi)$ a $\nu = \frac{1}{4}$ a μ je libovolné.

Nechť má naopak řešení $u \not\equiv 0$ nějaký nulový bod na $(0, 2\pi)$. Rozložíme interval $[0, 2\pi]$ na

$$[0, 2\pi] = I^+ \cup I^- \cup \{t \in [0, 2\pi]; u(t) = 0\},$$

kde $I^+ := \{t \in [0, 2\pi]; u(t) > 0\}$ a $I^- := \{t \in [0, 2\pi]; u(t) < 0\}$.

Jelikož řešení u je funkce spojitá, lze napsat I^+, respektive I^-, jako (konečné nebo spočetné) sjednocení maximálních otevřených disjunktních intervalů, kde u je kladné, respektive záporné. Označme $I_j^+ := (a_j^+, b_j^+)$ maximální otevřené intervaly, kde u je kladné, respektive $I_j^- := (a_j^-, b_j^-)$ maximální otevřené intervaly, kde u je záporné, pro $j \in \mathbb{N}$. Tedy

$$I^+ = \bigcup_j I_j^+ \quad \text{a} \quad I^- = \bigcup_j I_j^-.$$

Úloha (2.3) se rozpadne na okrajové úlohy na jednotlivých maximálních intervalech, kde u nemění znaménko.

[6] [3], str. 75, Lemma 2.8.

Na každém I_j^+ řešíme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} u''(t) + \mu u(t) &= 0, \\ u(a_j^+) = u(b_j^+) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na každém I_j^- dostáváme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} u''(t) - \nu u(t) &= 0, \\ u(a_j^-) = u(b_j^-) &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Řešení úlohy (2.8) na intervalu I_j^+ je ostře kladné a řešení úlohy (2.9) na intervalu I_j^- je ostře záporné.

Úloha (2.8) má klasické řešení $u_{j+}(t) = c_j^+ \sin(t\sqrt{\mu} - a_j^+)$ pro $t \in I_j^+$, kde $c_j^+ > 0$, a odtud $b_j^+ = a_j^+ + \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ (pro jiné b_j^+ neexistuje netriviální řešení, které je ostře kladné). Tedy $|I_j^+| = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ a intervalů I_j^+ je konečně mnoho.

Úloha (2.9) má klasické řešení $u_{j-}(t) = -c_j^- \sin(t\sqrt{\nu} - a_j^-)$ pro $t \in I_j^-$, kde $c_j^- > 0$, a odtud $b_j^- = a_j^- + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$. Tedy $|I_j^-| = \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$ a intervalů I_j^- je konečně mnoho.

Z klasického řešení na I_j^+, respektive I_j^-, a z vhodné volby konstant c_j^+ a c_j^- získáme slabé řešení stejně jako výše.

Celkem je u kladné na intervalech délky $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ a záporné na intervalech délky $\frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$. Řešení u má tedy periodu $\pi(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}})$.

Takováto řešení u patří do prostoru $W^{1,2}(0, 2\pi)$, neboť funkce sinus je omezená funkce z $C^\infty(\mathbb{R})$, tedy také z $W^{1,2}(0, 2\pi)$, a funkce u je lineární kombinací dvou funkcí $au_1 + bu_2$ takových, že u_1 je nezáporná a u_2 je nekladná. Přesněji první je až na kladný násobek a posouvání v proměnné tvaru kladná část sinu s periodou $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ (tj. $u_1 = \max\{0, \sin\big(\sqrt{\mu}(t - c_i)\big)\}$ pro nějaká $c_i \in \mathbb{R}$, $|c_{i+1} - c_i| = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$) a druhá tvaru záporná část sinu s periodou $\frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$ (tj. $u_2 = \min\{0, -\sin\big(\sqrt{\nu}(t - d_i)\big)\}$ pro nějaká $d_i \in \mathbb{R}$, $|d_{i+1} - d_i| = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$). Funkce u_1 a u_2 jsou ve $W^{1,2}(0, 2\pi)$ díky svazové vlastnosti Sobolevových prostorů (důsledek 1) a u je ve $W^{1,2}(0, 2\pi)$, neboť $W^{1,2}(0, 2\pi)$ je lineární prostor. Po přenásobení těchto funkcí vhodnými kladnými čísly a, b získáme $u \in C^1([0, 2\pi])$ (viz kapitola o klasickém Fučíkově spektru).

Pokud řešení u úlohy (2.3) na intervalu $[0, 2\pi]$ nabývá lichý počet nul, tj. rozloží interval $[0, 2\pi]$ na sudý počet maximálních intervalů, kde u nemění znaménko, pak nikdy neplatí podmínka $u'(\pi) = 0$.

Řešení u úlohy (2.3) se sudým počtem nul (a lichým počtem maximálních intervalů, kde u nemění znaménko) naopak vždy splňuje podmínku $u'(\pi) = 0$. Toto řešení (zúžené na interval $[0, \pi]$) je tedy řešením i úlohy (2.2)

Řešení s lichým počtem maximálních intervalů, na nichž nemění znaménko, odpovídají takovým parametrům $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2_+$, která splňují rovnici

$$k\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} = 2$$

pro u kladná na pravém okolí 0, respektive

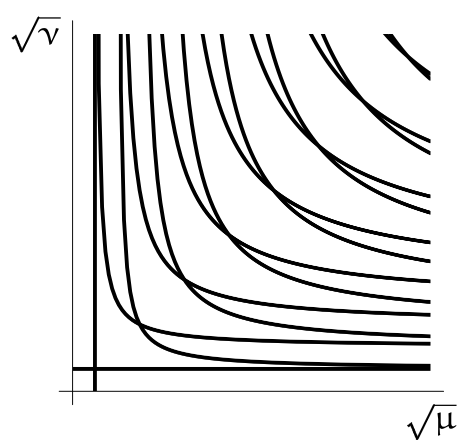
$$k\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\nu}} = 2$$

pro u záporná na pravém okolí 0.

Důsledek 4. *Nechť* $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2_+$. *Bod* $(\mu, \nu) \in \sigma_F$ *právě tehdy, když splňuje jednu z následujících podmínek:*

1. $\mu = \frac{1}{4}$,
2. $\nu = \frac{1}{4}$,
3. $\frac{\sqrt{\nu}(2\sqrt{\mu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$,
4. $\frac{\sqrt{\mu}(2\sqrt{\nu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$.

Toto Fučíkovo spektrum popisuje obrázek 2.3.



Obrázek 2.3: Fučíkovo spektrum úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami.

Opět můžeme pro $k \in \mathbb{N}$ definovat křivky

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1+} &:= \{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \mu = \frac{1}{4}, \nu \in \mathbb{R}_+\},\\
\gamma_{1-} &:= \{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \nu = \frac{1}{4}, \mu \in \mathbb{R}_+\},\\
\gamma_{k+} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \frac{\sqrt{\nu}(2\sqrt{\mu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} = k-1\right\} \text{ pro } k \geq 2,\\
\gamma_{k-} &:= \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}_+^2;\ \frac{\sqrt{\mu}(2\sqrt{\nu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} = k-1\right\} \text{ pro } k \geq 2.
\end{aligned}
$$

Zřejmě i zde platí $\sigma_F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\gamma_{k+} \cup \gamma_{k-})$.
Také platí, že $(\lambda_k, \lambda_k) \in \gamma_{k+} \cap \gamma_{k-}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.
Asymptotické chování těchto křivek pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, popisují následující limity:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\mu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma_{k+}}} \nu = \frac{(k-1)^2}{4}, &\qquad &\lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma_{k+}}} \mu = \frac{k^2}{4},\\
&\lim_{\substack{\mu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma_{k-}}} \nu = \frac{k^2}{4}, &\qquad &\lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\gamma_{k-}}} \mu = \frac{(k-1)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

2.3 Fučíkovo spektrum Neumannovy úlohy

Úlohou s Neumannovými okrajovými podmínkami na $[-\pi, \pi]$ zde rozumíme úlohu

$$\begin{aligned} -u'' &= \mu u^+ - \nu u^- \quad \text{pro } t \in [-\pi, \pi], \\ u'(-\pi) &= u'(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nabízí se otázka, zda nelze rozšířit úlohu (2.2) nějakou vhodnou symetrií podle nuly a hledat řešení Neumannovy úlohy (2.10) na $[-\pi, \pi]$ taková, že $u(0) = 0$.

Rozšířme úlohu sudě kolem bodu nula, tedy definujme pro řešení u_0 úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami na $[0, \pi]$ funkci $\bar{u}_0$ následovně:

$$\bar{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [0, \pi], \\ u_0(-t) & t \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Pak buď $u_0'(0+) = 0$, tedy $\bar{u}_0$ je identicky rovna nule na nějakém okolí nuly, což ovšem znamená, že $\bar{u}_0$ není netriviální slabé řešení úlohy (2.10). V případě, že $u_0'(0+) \neq 0$, nesplňuje funkce $\bar{u}_0$ požadavek na spojitost derivace řešení z důsledku 3.

Pokud bychom rozšířili úlohu liše kolem bodu nula, to jest pro řešení u_0 úlohy se smíšenými okrajovými podmínkami na $[0, \pi]$ bychom definovali

$$\tilde{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [0, \pi], \\ -u_0(-t) & t \in [-\pi, 0], \end{cases}$$

prohodili bychom na intervalu $[-\pi, 0]$ postavení μ a ν, tedy $\tilde{u}_0$ by řešilo soustavu rovnic s Neumannovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -u'' &= \nu u^+ - \mu u^- \quad \text{pro } t \in [-\pi, 0], \\ -u'' &= \mu u^+ - \nu u^- \quad \text{pro } t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Takto definované $\tilde{u}_0$ by tudíž nebylo řešením rozšíření úlohy na Neumannovu úlohu (2.10) pro $\mu \neq \nu$.

Podíváme-li se na problém z druhé strany, můžeme zkoumat, kdy řešení Neumannovy úlohy na $[-\pi, \pi]$ splňuje $u(0) = 0$.

Příklad 3. *Neumannova úloha na vlastní čísla*

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda u \quad \textit{pro } t \in [-\pi, \pi], \\ u'(-\pi) &= u'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

má netriviální řešení pro $\lambda_0 = 0$ *s vlastní funkcí* $u_1(t) \equiv 1$, *pro* $\lambda_{2k-1} = \frac{(2k-1)^2}{4}$ *s vlastní funkcí* $u_{2k-1}(t) = \sin \frac{2k-1}{2} t$ *a pro* $\lambda_{2k} = k^2$ *s vlastní funkcí* $u_{2k}(t) = \cos kt$, *kde* $k \in \mathbb{N}$.

Spočtěme nejdříve Fučíkovo spektrum úlohy s Neumannovými okrajovými podmínkami. Opět můžeme rozlišit dva případy podle toho, zda řešení úlohy (2.10) mění znaménko či nikoli.

Ta netriviální řešení úlohy (2.10), která nemění znaménko na $(-\pi, \pi)$, jsou tvaru $u \equiv a$, kde pro $a > 0$ je to řešení úlohy (2.10) s parametry $\mu = 0$ a ν libovolné a pro $a < 0$ je to řešení úlohy (2.10) s parametry $\nu = 0$ a μ libovolné.

Použijeme-li stejný postup jako v předchozí kapitole, který udává délku maximálního intervalu, na němž řešení u úlohy (2.10) nemění znaménko, získáme nutné a postačující požadavky na μ a ν.

Pro řešení u, které má stejné znaménko na nějakém pravém okolí bodu $-\pi$ jako na nějakém levém okolí bodu π, splňují odpovídající parametry μ, ν pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ rovnici

$$2k\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) = 4. \tag{2.11}$$

Pro řešení u kladné na nějakém pravém okolí bodu $-\pi$ a záporné na nějakém levém okolí bodu π, respektive obráceně, splňují odpovídající parametry μ, ν pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ rovnici

$$(2k-1)\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) = 4. \tag{2.12}$$

Z těchto úvah vyplývá následující lemma:

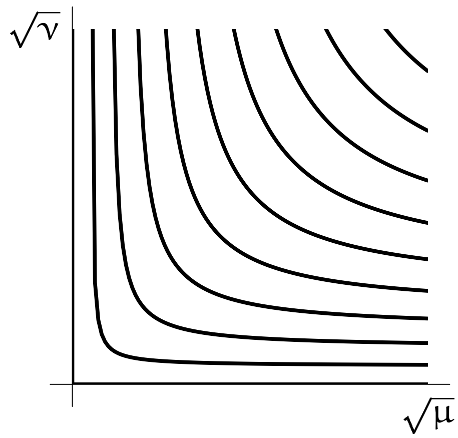
Lemma 3. *Bod (μ, ν), $\mu, \nu \geq 0$ náleží do Fučíkova spektra Neumannovy úlohy* (2.10) *právě tehdy, když splňuje jednu z následujících podmínek*

1. $\mu\nu = 0$,
2. $\frac{4\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$.

Fučíkovo spektrum úlohy s Neumannovými okrajovými podmínkami je na obrázku 2.4.

Nyní můžeme definovat pro $k \in \mathbb{N}$ následující křivky

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}^{1+} &:= \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2_+; \mu = 0, \nu \in \mathbb{R}_+\}, \\
\widetilde{\gamma}^{1-} &:= \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2_+; \nu = 0, \mu \in \mathbb{R}_+\}, \\
\widetilde{\gamma}^{k} &:= \left\{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2_+;\ \frac{4\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} = k-1\right\} \qquad \text{pro } k \geq 2.
\end{aligned}$$



Obrázek 2.4: Fučíkovo spektrum Neumannovy úlohy.

Potom je Fučíkovo spektrum Neumannovy úlohy (2.10) na $[-\pi, \pi]$ sjednocením těchto křivek, tedy je rovno

$$\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N},\\ k\geq 2}} \widetilde{\gamma}^k \cup \left(\widetilde{\gamma}^{1+} \cup \widetilde{\gamma}^{1-}\right).$$

Asymptotické chování těchto křivek pro $k \geq 2$ je stejné pro μ a ν:

$$\lim_{\substack{\mu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\widetilde{\gamma}^k}} \nu = \lim_{\substack{\nu\to\infty,\\ (\mu,\nu)\in\widetilde{\gamma}^k}} \mu = \frac{(k-1)^2}{16}.$$

Vraťme se zpět k původní otázce, kdy $u(0) = 0$.

Netriviální řešení úlohy (2.10) s parametry splňujícími podmínku (2.11) jsou sudá a v nule nabývají lokálního extrému (mají na nějakém okolí nuly tvar $a\cos(\sqrt{\mu}t)$, respektive $-a\cos(\sqrt{\nu}t)$, pro $a > 0$). Nemohou tedy nikdy splnit podmínku $u(0) = 0$.

Stačí se proto podívat na parametry splňující podmínku (2.12).

Označme

$$a := \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \quad b := \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}.$$

Zřejmě $a > 0$, $b > 0$.

Předpokládejme, že netriviální řešení u úlohy (2.10) s parametry μ a ν splňuje $u(0) = 0$. Tedy u je kladné na pravém okolí nuly a záporné na levém okolí nuly, nebo obráceně.

Na okolí bodů $-\pi$ a π je řešení buď kladné na intervalu délky $\frac{a}{2}$, nebo záporné na intervalu délky $\frac{b}{2}$, neboť u zde splňuje Neumannovy okrajové podmínky. Uvnitř intervalu

$[-\pi+\frac{a}{2}, \pi-\frac{b}{2}]$, respektive $[-\pi+\frac{b}{2}, \pi-\frac{a}{2}]$, je řešení u kladné na intervalech délky a a záporné na intervalech délky b.

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je největší číslo takové, že $k(a+b) < \pi$.

Jestliže řešení u probíhá k-krát svoji periodu na intervalu $[0, k(a+b)] \subset [0, \pi]$, probíhá také k-krát svoji periodu na intervalu $[-k(a+b), 0] \subset [-\pi, 0]$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že u je kladné na nějakém pravém okolí nuly a záporné na nějakém jejím levém okolí.

Nyní rozebereme možnosti, které mohou nastat.

Není možné, aby řešení u na intervalu $[k(a+b), \pi]$ nabývalo kladných i záporných hodnot a na intervalu $[-\pi, -k(a+b)]$ bylo nekladné, respektive nezáporné. Jinak by

$$a + \frac{b}{2} = \frac{a}{2},$$

což je spor s tím, že a a b jsou kladná čísla. Ze stejného důvodu není možné, aby u nabývalo kladných i záporných hodnot na $[-\pi, -k(a+b)]$ a neměnilo znaménko na $[k(a+b), \pi]$, neboť by muselo platit

$$\frac{a}{2} + b = \frac{b}{2}.$$

Nechť je $\pi - k(a+b) < a$. Potom na pravém okolí bodu $-\pi$ je řešení kladné, na levém okolí π je záporné a

$$\frac{a}{2} = \pi - k(a+b) = \frac{b}{2},$$

tedy $a = b$ a odtud $\mu = \nu$.

Nechť je $\pi - k(a+b) > a$. Tedy na $[-\pi, -k(a+b)]$ a $[k(a+b), \pi]$ nabývá řešení u kladných i záporných hodnot. Potom

$$a + \frac{b}{2} = \pi - k(a+b) = b + \frac{a}{2}$$

a opět $a = b$ a $\mu = \nu$.

Celkem dostáváme, že řešení Neumannovy úlohy na $[-\pi, \pi]$ splňuje $u(0) = 0$ jedině tehdy, když $\mu = \nu = \lambda_{2k-1}$ a $u = u_{2k-1}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

Kapitola 3

Úloha se dvěma diferenciálními rovnicemi

3.1 Obecný systém dvou diferenciálních rovnic

Dále se budeme věnovat Fučíkovu spektru úlohy dané systémem dvou rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami.

Uvažujme nejdříve úlohu danou obecným systémem rovnic:

$$\begin{aligned}
-u''(t) &= \alpha v^+(t) - \beta v^-(t) + \bar{\alpha} u^+(t) - \bar{\beta} u^-(t) \qquad \text{pro } t \in [0,\pi], \\
-v''(t) &= \gamma u^+(t) - \delta u^-(t) + \bar{\gamma} v^+(t) - \bar{\delta} v^-(t), \\
u(0) &= v(0) = 0, \\
u'(\pi) &= v'(\pi) = 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $u^\pm, v^\pm$ jsou jako dříve a $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta} \in \mathbb{R}$.

Pozorování 2. *Pokud* $(u, v, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, \delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ *splňují úlohu* (3.1)*, potom tuto úlohu splňují také*

1. $(v, u, \gamma, \delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$,
2. $(au, bv, \frac{a}{b}\alpha, \frac{a}{b}\beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \frac{b}{a}\gamma, \frac{b}{a}\delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta})$, *kde* $a, b \in (0, \infty)$,
3. $(-u, v, -\alpha, -\beta, -\bar{\beta}, -\bar{\alpha}, -\delta, -\gamma, \bar{\gamma}, \bar{\delta})$,
4. $(u, -v, -\beta, -\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, -\gamma, -\delta, -\bar{\delta}, -\bar{\gamma})$,

5. $(-u, -v, \beta, \alpha, -\bar{\beta}, -\bar{\alpha}, \delta, \gamma, -\bar{\delta}, -\bar{\gamma})$.

Parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se tedy dle bodu 2 mohou spojitě měnit pomocí násobení, respektive dělení, kladným reálným číslem, zatímco parametry $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ takto měnit nemůžeme.

Podívejme se na okrajovou úlohu (3.1) v několika speciálních případech.

Uvažme nejprve $\alpha = \beta = \bar{\gamma} = \bar{\delta} = 0$. Poté stačí vyřešit okrajovou úlohu pro rovnici

$$-u''(t) = \bar{\alpha}u^+(t) - \bar{\beta}u^-(t),$$

čímž získáme $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \sigma_F$, kde σ_F značí Fučíkovo spektrum pro jednu obyčejnou diferenciální rovnici (viz výše), a následně dopočítáme řešení jednoduché okrajové úlohy s obyčejnou diferenciální rovnici

$$-v''(t) = \gamma u^+(t) - \delta u^-(t),$$

kde pravá strana nezávisí na v.

Analogicky pro $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \gamma = \delta = 0$.

Pro $\alpha = \beta = 0$ máme opět řešení u, které je řešením okrajové úlohy pro jednu rovnici (a tedy $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \sigma_F$). Řešení v budeme chápat jako $v = v_1 + v_2$, kde v_1 bude řešením okrajové úlohy s rovnicí

$$-v''(t) = \gamma u^+(t) - \delta u^-(t)$$

a v_2 bude opět řešením okrajové úlohy s jednou rovnicí

$$-v''(t) = \bar{\gamma}v^+(t) - \bar{\delta}v^-(t).$$

Analogicky pro $\gamma = \delta = 0$.

Pro všechny parametry nenulové se dostáváme ke složitému případu v dimenzi 8. Do takového „spektra“ by patřily i všechny předchozí případy. Domníváme se, že nadměrná složitost tohoto obecného případu by v tento moment nebyla příliš matematicky přínosná, proto se omezíme na okrajovou úlohu danou systémem rovnic

$$\begin{aligned} -u''(t) &= \alpha v^+(t) - \beta v^-(t) \quad \text{ pro } t \in [0, \pi], \\ -v''(t) &= \gamma u^+(t) - \delta u^-(t), \\ u(0) &= v(0) = 0, \\ u'(\pi) &= v'(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definice 6. *Označíme $\widetilde{\sigma}$ množinu všech takových parametrů $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, pro která má problém* (3.2) *netriviální řešení a budeme ji nazývat Fučíkovým spektrem systému rovnic* (3.2)*.*

Pozorování 3. *Pokud by v jedné z rovnic systému (3.2) byly oba parametry nulové, tj.* $\alpha = \beta = 0$ *nebo* $\gamma = \delta = 0$*, nebo jedna funkce řešení by byla identicky nula, zbývalo by (bez újmy na obecnosti) vyřešit rovnici*

$$-u''(t) = 0 \qquad \text{pro } t \in [0, \pi].$$

Řešením této rovnice je funkce $u(t) = at + b$ *pro nějaká* $a, b \in \mathbb{R}$*. Z podmínky* $u(0) = 0$ *dostáváme, že* $b = 0$*. Z podmínky* $u'(\pi) = 0$ *dostáváme* $a = 0$*. Řešením je tedy* $u \equiv 0$ *a tedy odpovídající parametry nemohou patřit do* $\widetilde{\sigma}$*.*

Přesněji $(0, 0, \gamma, \delta) \notin \widetilde{\sigma}$ *a* $(\alpha, \beta, 0, 0) \notin \widetilde{\sigma}$*.*

Dvojice $(0, v)$*, kde* $v \not\equiv 0$*, ani dvojice* $(u, 0)$*, kde* $u \not\equiv 0$*, nemohou být řešením systému* (3.2).

3.2 Symetrie soustavy

Problém (3.2) můžeme ještě zjednodušit. To vychází z následujících symetrií:

Pozorování 4. [1] *Pokud* $(u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *splňují úlohu* (3.2)*, potom splňují tutéž úlohu také*

1. $(v, u, \gamma, \delta, \alpha, \beta)$,
2. $(u, av, \frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, a\gamma, a\delta)$ *pro každé* $a > 0$,
3. $(u, -v, -\beta, -\alpha, -\gamma, -\delta)$,
4. $(-u, v, -\alpha, -\beta, -\delta, -\gamma)$,
5. $(-u, -v, \beta, \alpha, \delta, \gamma)$.

V symetriích 3 a 4 si můžeme všimnout, že pokud jedna funkce řešení úlohy (3.2) změní znaménko, poté všechny parametry změní znaménko.

Zcela zřejmě můžeme v symetrii 2 zvolit $a > 0$ takové, že

$$\frac{\alpha}{a} = a\gamma.$$

Díky tomu dokonce stačí uvažovat úlohu

$$\begin{aligned} -u''(t) &= \alpha v^+(t) - \beta v^-(t) \qquad \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -v''(t) &= \alpha u^+(t) - \delta u^-(t), \\ u(0) &= v(0) = 0, \\ u'(\pi) &= v'(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Potom každé trojici parametrů (α, β, δ), pro niž existuje netriviální řešení (3.3) se smíšenými okrajovými podmínkami, přiřadíme křivku $\{(\frac{\alpha}{\tau}, \frac{\beta}{\tau}, \tau\alpha, \tau\delta) \in \mathbb{R}^4; \tau > 0\}$. Pro každý bod této křivky existuje netriviální řešení problému (3.2) s parametry danými tímto bodem.

Pokud naopak budeme mít křivku tvaru $\{(\frac{\alpha}{\tau}, \frac{\beta}{\tau}, \tau\alpha, \tau\delta) \in \mathbb{R}^4; \tau > 0\}$ a systém (3.2) s parametry $(\frac{\alpha}{\tau_0}, \frac{\beta}{\tau_0}, \tau_0\alpha, \tau_0\delta)$ bude mít netriviální řešení pro nějaké $\tau_0 > 0$ (speciálně $\tau_0 = 1$), pak už všechny systémy se čtveřicemi parametrů odpovídajících bodům této křivky mají díky symetrii 2 netriviální řešení.

Díky tomu můžeme zúžit studium $\widetilde{\sigma}$ na studium

$$\widehat{\sigma} := \{(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3;\ \text{systém (3.3) s parametry } (\alpha, \beta, \delta) \text{ má netriviální řešení}\}.$$

I v systému (3.3) najdeme symetrie:

Pozorování 5. [2] *Nechť* $(u, v, \alpha, \beta, \delta)$ *řeší* (3.3)*. Potom problém* (3.3) *řeší také*

[1] [8], str. 4 a 7.
[2] [8], str. 7.

1. $(v, u, \alpha, \delta, \beta)$,

2. $\left(-u, -\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}v, \sqrt{\beta\delta}, \alpha\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}, \alpha\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\right)$ *pro* $\beta\delta > 0$.

3.3 Základní vlastnosti

V následujících odstavcích budeme používat pro větší přehlednost ještě čtyři parametry, ačkoli z předchozího textu víme, že stačí uvažovat pouze tři.

Nejdříve se zaměříme na některé vlastnosti řešení. Pokud na rovnice systému (3.2) použijeme postupně jako testovací funkce u, v, u^+, u^-, v^+, v^-, dostaneme následující nutné podmínky[3]:

$$\int_0^\pi u'v' = \alpha \int_0^\pi (v^+)^2 + \beta \int_0^\pi (v^-)^2 = \gamma \int_0^\pi (u^+)^2 + \delta \int_0^\pi (u^-)^2, \tag{3.4}$$

$$\int_0^\pi ((u^+)')^2 = \alpha \int_0^\pi v^+u^+ - \beta \int_0^\pi v^-u^+, \tag{3.5}$$

$$\int_0^\pi ((u^-)')^2 = -\alpha \int_0^\pi v^+u^- + \beta \int_0^\pi v^-u^-, \tag{3.6}$$

$$\int_0^\pi ((v^+)')^2 = \gamma \int_0^\pi u^+v^+ - \delta \int_0^\pi u^-v^+, \tag{3.7}$$

$$\int_0^\pi ((v^-)')^2 = -\gamma \int_0^\pi u^+v^- + \delta \int_0^\pi u^-v^-. \tag{3.8}$$

Z okrajových podmínek získáme

$$u'(0) = [-u']_0^\pi = \alpha \int_0^\pi v^+ - \beta \int_0^\pi v^-,$$
$$v'(0) = [-v']_0^\pi = \gamma \int_0^\pi u^+ - \delta \int_0^\pi u^-.$$

Funkce řešení u a v jsou provázané vzhledem ke svým nulovým bodům. To naznačuje už následující věta.

Věta 6. [4] *Nechť (u, v) řeší problém (3.2) se smíšenými podmínkami. Pak buď obě funkce u a v mění znaménko na intervalu $[0, \pi]$, nebo ani jedna z nich.*

Důkaz. Nechť je bez újmy na obecnosti $u \geq 0$ na intervalu $[0, \pi]$. Nechť pro spor v nabývá kladných i záporných hodnot na podmnožinách intervalu $[0, \pi]$ kladné míry. Potom $v^+ \not\equiv 0$ a $v^- \not\equiv 0$.

[3] [8], str. 4

[4] [8], str. 5-6.

Rovnice (3.7) a (3.8) se zjednoduší na

$$\int_0^\pi ((v^+)')^2 = \gamma \int_0^\pi u^+ v^+, \tag{3.9}$$

$$\int_0^\pi ((v^-)')^2 = -\gamma \int_0^\pi u^+ v^-. \tag{3.10}$$

Nechť je nejprve $\gamma = 0$. Pak

$$\int_0^\pi ((v^+)')^2 = 0 = \int_0^\pi ((v^-)')^2,$$

což je spor s $v \not\equiv 0$.

Nechť je $\gamma < 0$. Potom z rovnice (3.9) plyne

$$0 < \int_0^\pi ((v^+)')^2 = \gamma \int_0^\pi u^+ v^+ \le 0,$$

což je spor.

Pro $\gamma > 0$ plyne z rovnice (3.10)

$$0 < \int_0^\pi ((v^-)')^2 = -\gamma \int_0^\pi u^+ v^- \le 0,$$

což je opět spor. Tedy v také nemění znaménko. $\square$

Pokud řešení u, v nemění znaménko, není příliš těžké je spočítat. Problém převedeme na

$$\begin{aligned} -u'' &= \mu v \qquad \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -v'' &= \nu u, \\ u(0) &= v(0) = 0, \\ u'(\pi) &= v'(\pi) = 0, \end{aligned}$$

pro nějaká μ (respektive ν) nahrazující buď α, nebo β (respektive buď γ, nebo δ).

Z výpočtů snadno získáme, že

$$\mu\nu = \frac{1}{2^4} = \lambda_1^2,$$

kde $\lambda_1 \in \sigma'$ je klasické první (tj. nejmenší) vlastní číslo obvyklého spektra (viz úloha (2.7)).

Řešení tohoto problému na $[0, \pi]$ jsou

$$\begin{aligned}
u(t) = \quad v(t) = &\quad \sin\left(\frac{t}{2}\right) && \text{pro } \mu = \alpha > 0, \nu = \gamma > 0,\\
u(t) = -v(t) = &\quad \sin\left(\frac{t}{2}\right) && \text{pro } \mu = \beta < 0, \nu = \gamma < 0,\\
-u(t) = \quad v(t) = &\quad \sin\left(\frac{t}{2}\right) && \text{pro } \mu = \alpha < 0, \nu = \delta < 0,\\
u(t) = \quad v(t) = &-\sin\left(\frac{t}{2}\right) && \text{pro } \mu = \beta > 0, \nu = \delta > 0.
\end{aligned}$$

Aplikujme výsledky na trojrozměrné spektrum. Pomocí věty 6 můžeme $\widehat{\sigma}$ rozdělit na

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_1 \cup \widehat{\sigma}_2,$$

kde $\widehat{\sigma}_1$ značí množinu parametrů, pro které odpovídající řešení úlohy (3.3) nemění znaménko, a $\widehat{\sigma}_2$ množinu těch parametrů, jejichž odpovídající řešení úlohy (3.3) mění znaménko.

Z předchozích výpočtů a ze symetrií v pozorování 5 plyne, že

$$\widehat{\sigma}_1 = \{\alpha = \lambda_1\} \cup \{\beta, \delta > 0; \beta\delta = \lambda_1^2\}.$$

Parametry, jejichž odpovídající netriviální řešení nabývá kladných i záporných hodnot, musí všechny náležet do stejné komponenty množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Věta 7. [5] *Nechť (u, v) řeší problém (3.2) s okrajovými podmínkami $u(0) = v(0) = 0$, $u'(\pi) = v'(\pi) = 0$ a nechť obě tyto funkce mění znaménko (tj. nabývají kladných i záporných hodnot). Pak jsou všechny parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nenulové a mají stejné znaménko.*

Důkaz. Nenulovost parametrů dokážeme sporem. Nejdříve nechť je $\alpha = 0$ a $\beta \geq 0$. Z (3.5) plyne

$$0 < \int_0^\pi ((u^+)')^2 = -\beta \int_0^\pi v^- u^+ \leq 0,$$

což je spor s tím, že u mění znaménko (a tudíž $(u^+)' \not\equiv 0$).

Pro $\alpha = 0$ a $\beta < 0$ ze symetrie 4 v pozorování 4 dostaneme, že existuje také netriviální řešení měnící znaménko systému s parametry $\alpha = 0$ a $-\beta$. Tím jsme ovšem převedli problém na předchozí případ a tudíž dostali spor.

[5] [8], str. 5-6.

Nechť je tedy $\alpha \geq 0$ a $\beta = 0$. Z (3.6) dostáváme

$$0 < \int_0^\pi ((u^-)')^2 = -\alpha \int_0^\pi u^- v^+ \leq 0,$$

což je z důvodu, že u nabývá záporných hodnot, spor.

Opět případ $\beta = 0$ a $\alpha < 0$ převedeme pomocí symetrie 4 z pozorování 4 na případ $\beta = 0$ a $-\alpha$ a tedy dostaneme z předchozího spor.

Analogicky můžeme dokázat pomocí (3.7) a (3.8) nenulovost γ a δ.

Nyní dokážeme, že všechny parametry mají stejné znaménko. Nechť je tedy $\alpha > 0$. Pro $\beta < 0$ bychom z (3.6) dostali

$$0 < \int_0^\pi ((u^-)')^2 = -\alpha \int_0^\pi u^- v^+ + \beta \int_0^\pi u^- v^- \leq 0,$$

což je opět spor s tím, že funkce u mění znaménko.

Stejně tak musí mít stejné znaménko γ a δ.

Nechť je $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a $\gamma < 0$, $\delta < 0$. Potom však z rovnice (3.4) máme

$$0 < \alpha \int_0^\pi (v^+)^2 + \beta \int_0^\pi (v^-)^2 = \gamma \int_0^\pi (u^+)^2 + \delta \int_0^\pi (u^-)^2 < 0,$$

což vede znovu ke sporu. $\square$

Poznámka 6. *Aplikujeme-li tuto větu na trojrozměrné spektrum $\widehat{\sigma}$ a použijeme-li symetrii 3 v pozorování 4, můžeme se omezit na zkoumání pouze kladných parametrů.*

Funkce $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3_- : (\alpha, \beta, \delta) \mapsto (-\beta, -\alpha, -\delta)$ je zřejmě bijekce $\mathbb{R}^3_+$ a $\mathbb{R}^3_-$. Navíc $f \circ f$ je identita. Ze symetrie 3 tedy platí:

$$a \in \widehat{\sigma} \cap \mathbb{R}^3_+ \text{ právě tehdy, když } f(a) \in \widehat{\sigma} \cap \mathbb{R}^3_-.$$

3.4 Rozšíření systému

Pro (u, v) řešící problém (3.2) můžeme opět vytvořit rozšířené funkce $(\bar{u}, \bar{v})$ následujícím způsobem:

$$\bar{u}_0(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0,\pi], \\ u(2\pi - t) & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \quad \bar{v}_0(t) = \begin{cases} v(t) & t \in [0,\pi], \\ v(2\pi - t) & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Takto definované funkce $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ řeší rozšířenou úlohu s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\bar{u}''(t) &= \alpha \bar{v}^+(t) - \beta \bar{v}^-(t) \qquad \text{pro } t \in [0, 2\pi], \\ -\bar{v}''(t) &= \alpha \bar{u}^+(t) - \delta \bar{u}^-(t), \\ \bar{u}(0) &= \bar{v}(0) = 0, \\ \bar{u}(2\pi) &= \bar{v}(2\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Odůvodnění, proč jsou funkce $\bar{u}_0$ a $\bar{v}_0$ dobře definované a proč jsou řešením úlohy se dvěma rovnicemi s Dirichletovými okrajovými podmínkami, je analogické odůvodnění rozšíření úlohy s jednou rovnicí uvedenému výše, a proto jej zde již nebudeme uvádět.

Poznámka 7. *Z tohoto rozšíření plyne, že body $\widehat{\sigma}$ a jim odpovídající parametry* (3.2) *musí splňovat všechny vlastnosti bodů Fučíkova spektra pro rozšířenou úlohu se dvěma rovnicemi* (3.12) *s Dirichletovými okrajovými podmínkami.*

Provázanost funkcí netriviálního řešení vzhledem k nulovým bodům je silnější, než jsme prozatím uvedli, jak popisuje následující věta.

Věta 8. *Nechť $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \widehat{\sigma}_2$ a (u, v) jsou odpovídající netriviální řešení úlohy* (3.3)*. Potom počet bodů $t \in (0, \pi)$, ve kterých platí $u(t) = 0$, je konečný a je stejný jako počet bodů $s \in (0, \pi)$, kde platí $v(s) = 0$.*

Důkaz. E. Massa a B. Ruf dokázali toto tvrzení pro systém dvou rovnic s Dirichletovými okrajovými podmínkami.[6] Tohoto jejich výsledku využijeme.

Pokud (u, v) řeší úlohu (3.3) s parametry $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ na $[0, \pi]$, pak po symetrickém rozšíření (3.11) jako výše (budeme nyní rozšířené funkce značit stejně) řeší (u, v) úlohu s dvěma rovnicemi s Dirichletovými podmínkami na $[0, 2\pi]$. V bodě $t = \pi$ nemůže ani jedna z těchto funkcí nabývat hodnoty 0, neboť z podmínky $u'(\pi) = v'(\pi) = 0$ a z jednoznačnosti řešení by tato funkce byla na nějakém okolí bodu π identicky nulová.

Ze symetrie rozšíření dostáváme, že u, respektive v, nabývá stejný počet nul na intervalu $(0, \pi)$ jako na intervalu $(\pi, 2\pi)$. Celkem tedy dostáváme požadované tvrzení. $\square$

[6] [9], str. 319.

3.5 Dolní omezení Fučíkova spektra

Studium Fučíkova spektra systému dvou rovnic se smíšenými okrajovými podmínkami jsme již omezili na kladné parametry. Oblast, kde můžeme hledat body Fučíkova spetra, lze vymezit ještě více.

Věta 9. [7] *Nechť* $\alpha > 0$ *a* $(\alpha, \beta, \delta) \in \widehat{\sigma}_2$*. Potom* $\alpha > \lambda_1$ *a* $\sqrt{\beta\delta} > \lambda_1$*.*

Důkaz. Z Hölderovy nerovnosti a z (3.5) – (3.8) dostáváme

$$\begin{aligned} ||(u^+)'||_{L^2}^2 &\leq \alpha ||u^+||_{L^2} ||v^+||_{L^2}, \\ ||(v^+)'||_{L^2}^2 &\leq \alpha ||u^+||_{L^2} ||v^+||_{L^2}, \\ ||(u^-)'||_{L^2}^2 &\leq \beta ||u^-||_{L^2} ||v^-||_{L^2}, \\ ||(v^-)'||_{L^2}^2 &\leq \delta ||u^-||_{L^2} ||v^-||_{L^2}. \end{aligned}$$

Každá funkce $w \in W_0^{1,2}(0, 2\pi)$ splňuje nerovnici[8]

$$\lambda_1 ||w||_{L^2}^2 \leq ||w'||_{L^2}^2. \tag{3.13}$$

Jelikož řešení u úlohy (3.3) je po rozšíření na $[0, 2\pi]$ jako výše ve $W_0^{1,2}(0, 2\pi)$ a λ_1 je prvním vlastním číslem jak úlohy na $[0, 2\pi]$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami, tak i úlohy na $[0, \pi]$ s podmínkami $u(0) = 0 = u'(\pi)$, splňuje u také nerovnici (3.13).

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} \lambda_1 ||u^+||_{L^2}^2 &\leq \alpha ||u^+||_{L^2} ||v^+||_{L^2}, &\quad (3.14) \\ \lambda_1 ||v^+||_{L^2}^2 &\leq \alpha ||u^+||_{L^2} ||v^+||_{L^2}, &\quad (3.15) \\ \lambda_1 ||u^-||_{L^2}^2 &\leq \beta ||u^-||_{L^2} ||v^-||_{L^2}, &\quad (3.16) \\ \lambda_1 ||v^-||_{L^2}^2 &\leq \delta ||u^-||_{L^2} ||v^-||_{L^2}. &\quad (3.17) \end{aligned}$$

Vynásobením (3.14) a (3.15), respektive (3.16) a (3.17), zkrácením $||u^\pm||_{L^2}^2 ||v^\pm||_{L^2}^2$ a následným odmocněním dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \alpha, \\ \lambda_1 &\leq \sqrt{\beta\delta}. \end{aligned}$$

Pokud alespoň v jedné z nerovnic nastane rovnost pro nějaké řešení u úlohy (3.3), pak $u \in \widehat{\sigma}_1$. Dokázali jsme tedy požadované tvrzení. □

[7] [8], str. 8.
[8] [1], str. 142.

Díky tomu, že Fučíkovo spektrum úlohy s jednou rovnicí máme přesně popsáno, dokážeme ve Fučíkově spektru systému dvou rovnic popsat neomezené křivky, které do něj náleží.

Lemma 4. [9] *Pokud* $(\mu, \nu) \in \sigma_F$*, pak* $(\mu, \nu, \nu) \in \widehat{\sigma}$.

Pokud je navíc $\mu > \lambda_1$ *a* $\nu > \lambda_1$*, pak* $(\mu, \nu, \nu) \in \widehat{\sigma}_2$.

Důkaz. Pokud je u netriviální řešení úlohy s jednou rovnicí (2.2), pak dvojice (u, u) řeší (3.3) s koeficienty (μ, ν, ν).

Pokud je $\mu > \lambda_1$ a $\nu > \lambda_1$, pak z úvah o úloze s jednou rovnicí víme, že u mění znaménko. $\square$

[9] [8], str. 8.

3.6 Vlastnosti řešení měnících znaménko

Následující text se zabývá existencí podmnožin intervalu $[0,\pi]$, kde složky řešení mají stejné, respektive opačné znaménko, v závislosti na parametrech úlohy.

Lemma 5. [10] *Nechť $(\alpha,\beta,\delta) \in \widehat{\sigma}_2$, $\alpha > 0$ a (u,v) jsou netriviální řešení odpovídajícího systému s těmito parametry. Potom $u^+v^+ \not\equiv 0$ a $u^-v^- \not\equiv 0$.*

Důkaz. V rovnicích (3.5) – (3.8) musí být levé strany kladné, neboť u a v mění znaménko. Tedy $\int_0^\pi v^+u^+ > 0$ a $\int_0^\pi u^-v^- > 0$.

□

Pro parametry, které nelze převést na úlohu s jednou rovnicí (tj. $\beta \neq \delta$), existují jak množiny, kde netriviální řešení mají stejné znaménko, tak i množiny, kde mají netriviální řešení zmanénka opačná.

Věta 10. [11] *Nechť (u,v) jsou netriviální řešení rovnice* (3.3) *odpovídající parametrům $(\alpha,\beta,\delta) \in \widehat{\sigma}_2$ takovým, že $\beta \neq \delta$. Potom alespoň jeden ze součinů u^+v^- a u^-v^+ není identicky rovný nule na $[0,\pi]$.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Použijeme rozšíření jako výše a budeme značit rozšířené funkce definované na $[0,2\pi]$ stejně, tj. u a v.

Z předchozí věty víme, že $u^+v^+ \not\equiv 0$ a $u^-v^- \not\equiv 0$. Nechť tedy pro spor $\{t \in [0,2\pi]; u(t) > 0\} = \{t \in [0,2\pi]; v(t) > 0\}$ a $\{t \in [0,2\pi]; u(t) < 0\} = \{t \in [0,2\pi]; v(t) < 0\}$, to znamená $u^+v^- \equiv 0$ a $u^-v^+ \equiv 0$.

Označme I_+ nějaký maximální interval, kde jsou u a v kladné, a I_- nějaký maximální interval, kde jsou funkce u a v záporné. Tyto intervaly existují, neboť z definice $\widehat{\sigma}_2$ funkce u a v mění znaménko.

Na každém I_+ tedy funkce u a v splňují:

$$\begin{aligned} -u'' &= \alpha v && \text{pro } t \in I_+, \\ -v'' &= \alpha u && \text{pro } t \in I_+, \\ u = v &= 0 && \text{pro } t \in \partial I_+. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Zderivujeme-li dvakrát první rovnici a použijeme-li druhou rovnost, dostáváme

$$u'''' = \alpha^2 u \quad \text{pro } t \in I_+.$$

Stejná rovnost platí i pro v.

---

[10] [8], str. 8.
[11] [8], str. 29.

Víme, že u i v jsou ostře kladné na I_+ a že splňují Dirichletovy okrajové podmínky, tedy na I_+ platí $u = v = a\phi_{1,I_+}$, kde ϕ_{1,I_+} je první vlastní funkce úlohy (2.7) na I_+ s Dirichletovými okrajovými podmínkami a $a > 0$.

Stejně tak na každém I_- funkce u a v splňují:

$$\begin{aligned} -u'' &= \beta v && \text{pro } t \in I_-, \\ -v'' &= \delta u && \text{pro } t \in I_-, \\ u = v &= 0 && \text{pro } t \in \partial I_-. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nahradíme funkci u funkcí $U = u\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}$. Systém (3.19) touto substitucí převedeme na

$$\begin{aligned} -U'' &= \sqrt{\beta\delta}v && \text{pro } t \in I_-, \\ -v'' &= \sqrt{\beta\delta}U && \text{pro } t \in I_-, \\ U = v &= 0 && \text{pro } t \in \partial I_-. \end{aligned}$$

Odtud stejnými úvahami jako o úloze (3.18) výše je $U = u\sqrt{\frac{\delta}{\beta}} = v = -b\phi_{1,I_-}$, kde ϕ_{1,I_-} je první vlastní funkce úlohy (2.7) na I_- s Dirichletovými okrajovými podmínkami a $b > 0$.

Nyní odečteme od sebe rovnice v (3.3) a díky předpokladům $u^+v^- \equiv 0$ a $u^-v^+ \equiv 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} &-(u-v)'' = \alpha(v^+ - u^+) + \delta u^- - \beta v^- \quad \text{pro } t \in (0, 2\pi), \\ &(u-v)(0) = (u-v)(2\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Funkce $u - v$ náleží do prostoru $C^2([0, 2\pi])$ díky lemmatu 1.

Pro $\beta < \delta$ je $u - v \geq 0$ na $[0, 2\pi]$, neboť na množině, kde je u kladné, platí $u = v$ a na množině, kde je u záporné, je

$$u - v = u\left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{\beta}}\right) > 0,$$

neboť $\frac{\delta}{\beta} > 1$.

Obdobně pro $\beta > \delta$ je $u - v \leq 0$ na $[0, 2\pi]$.

Z výpočtů výše však máme $v^+ - u^+ \equiv 0$ a $\delta u^- - \beta v^- = \delta u^- - \beta\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}u^- = (\delta - \sqrt{\beta\delta})u^- \neq 0$.

Tedy pravá strana rovnice (3.20) nemění znaménko (pro $\beta < \delta$ je nezáporná, pro $\beta > \delta$ je nekladná).

Použijeme silný princip maxima[12]. Jelikož u a v mění znaménko na $(0, 2\pi)$, tak

$$I_- \subsetneq (0, 2\pi).$$

Pro $\beta < \delta$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ funkce $u - v$ nezáporná a na okrajích intervalu I_- nabývá hodnoty nula. Tedy $u - v$ nabývá nekladného minima na $[0, 2\pi]$ uvnitř intervalu $(0, 2\pi)$. Jelikož $-(u - v)'' \geq 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$, ze silného principu maxima plyne, že $u - v \equiv 0$.

Pro $\beta > \delta$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ funkce $u - v$ nekladná a na okrajích intervalu I_- nabývá hodnoty nula. Tedy $u - v$ nabývá nezáporného maxima na $[0, 2\pi]$ uvnitř intervalu $(0, 2\pi)$. Jelikož $-(u - v)'' \leq 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$, ze silného principu maxima plyne, že $u - v \equiv 0$.

Odtud je $u - v \equiv 0$ na $[0, 2\pi]$, což je spor.

$\square$

[12] [2], str. 333.

3.7 Oblasti mimo Fučíkovo spektrum

Díky symetriím popsaným výše můžeme vyloučit některé body, které nepatří do Fučíkova spektra.

Věta 11. [13] *Nechť $\alpha_0, \beta_0, \delta_0$ jsou kladná čísla a nechť existuje $a > 0$ takové, že*

$$\left\{\frac{\alpha_0}{a}, \frac{\beta_0}{a}, a\alpha_0, a\delta_0\right\} \subset (\lambda_k, \lambda_{k+1}),$$

kde $\lambda_k, \lambda_{k+1} \in \sigma'$ jsou libovolná po sobě jdoucí vlastní čísla úlohy (2.7). Pak $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0) \notin \widehat{\sigma}$.

Důkaz. Vlastní čísla úlohy (2.7) s okrajovými podmínkami $u(0) = 0 = u'(\pi)$ označíme $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, $\lambda_k \in \sigma'$. Tato vlastní čísla jsou jednoduchá. Dále označme ϕ_k odpovídající vlastní funkce, které jsou navzájem ortogonální, $||\phi_k||_{W^{1,2}(0,\pi)} = 1$ a $\phi_1 > 0$. Pak posloupnost $\{\phi_k\}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathcal{K}$.[14]

Mějme úlohu

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda v \quad \text{pro } t \in [0,\pi], \\ -v'' &= \lambda u \quad \text{pro } t \in [0,\pi], \\ u(0) &= v(0) = 0, \\ u'(\pi) &= v'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Potom vlastní čísla této úlohy jsou právě čísla λ_k s vlastní funkcí $(\phi_k, \phi_k) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a $-\lambda_k$ s vlastní funkcí $(\phi_k, -\phi_k) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Díky symetriím v pozorování 4 se omezíme pouze na studium kladných vlastních čísel.

Mějme $\lambda > 0$. Nyní uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda v + f \quad \text{pro } t \in [0,\pi], \\ -v'' &= \lambda u + g \quad \text{pro } t \in [0,\pi], \\ u(0) &= v(0) = 0, \\ u'(\pi) &= v'(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

pro $f, g \in L^2(0,\pi)$.

Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} -(u+v)'' - \lambda(u+v) &= f + g \quad \text{pro } t \in [0,\pi], \\ -(u-v)'' + \lambda(u-v) &= f - g \quad \text{pro } t \in [0,\pi], \\ u(0) &= v(0) = 0, \\ u'(\pi) &= v'(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

[13] [8], str. 10.
[14] [4], str. 231.

Funkce $u, v \in \mathcal{K}$ a $f, g \in L^2(0,\pi)$ lze zapsat následovně:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \phi_i, \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \phi_i, \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \phi_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \phi_i,$$

kde $u_i := (u, \phi_i)_{W^{1,2}(0,\pi)}$, $v_i := (v, \phi_i)_{W^{1,2}(0,\pi)}$, $g_i := \frac{(g,\phi_i)_{L^2(0,\pi)}}{||\phi_i||_{L^2(0,\pi)}}$ a $f_i := \frac{(f,\phi_i)_{L^2(0,\pi)}}{||\phi_i||_{L^2(0,\pi)}}$. Symbolem $(\cdot,\cdot)_H$ značíme skalární součin na odpovídajícím Hilbertově prostoru.

Pro úlohu (2.7) definujeme na $\mathcal{K}$ operátor $A : \mathcal{K} \to L^2(0,\pi)$ tak, že pro každé $\varphi \in \mathcal{K}$ platí

$$(Au, \varphi) := \int_0^{\pi} u' \varphi'.$$

Tento operátor je kompaktní, proto ho můžeme zapsat jako[15]

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \phi_i,$$

kde $u_i := (u, \phi_i)_{W^{1,2}(0,\pi)}$, neboť λ_i jsou vlastní čísla tohoto operátoru a ϕ_i jsou jeho vlastní funkce.

Pokud $\lambda \notin \sigma'$, pak existuje inverzní operátor $(\lambda I - A)^{-1}$, který je spojitý.[16] Potom můžeme ze systému (3.22) vyjádřit

$$u_i = \frac{f_i + g_i}{2(\lambda_i - \lambda)} + \frac{f_i - g_i}{2(\lambda_i + \lambda)} = \frac{\lambda_i f_i + \lambda g_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2},$$

$$v_i = \frac{f_i + g_i}{2(\lambda_i - \lambda)} - \frac{f_i - g_i}{2(\lambda_i + \lambda)} = \frac{\lambda f_i + \lambda_i g_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

Nyní můžeme pro $\lambda \notin \sigma'$ definovat operátor T_λ následovně

$$T_\lambda : L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \to \mathcal{K} \times \mathcal{K} : (f, g) \mapsto (u, v),$$

kde (u, v) je jednoznačné řešení problému (3.21). Navíc $||T_\lambda||_{W^{1,2}(0,\pi)\times W^{1,2}(0,\pi)} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma')}$.

Nechť $p = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}_+^4$. Definujme

$$\begin{aligned} M_\lambda^p &: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \\ &(u, v) \mapsto \left((\alpha - \lambda)v^+ - (\beta - \lambda)v^-, (\gamma - \lambda)u^+ - (\delta - \lambda)u^-\right). \end{aligned}$$

[15] [12], str. 317.
[16] [12], str. 318.

Operátor M_λ^p je lipschitzovský s konstantou $m_\lambda^p = \max\{|\alpha-\lambda|, |\beta-\lambda|, |\gamma-\lambda|, |\delta-\lambda|\}$. Úlohu (3.2) můžeme nyní přepsat jako

$$(u,v) = T_\lambda M_\lambda^p(u,v). \tag{3.23}$$

Pro $\mathbf{x} = (u_1, v_1)$ a $\mathbf{y} = (u_2, v_2)$ máme odhad

$$||T_\lambda M_\lambda^p \mathbf{x} - T_\lambda M_\lambda^p \mathbf{y}||_{W^{1,2}(0,\pi)\times W^{1,2}(0,\pi)} \leq \frac{m_\lambda^p}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma')} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_{W^{1,2}(0,\pi)\times W^{1,2}(0,\pi)}.$$

Uvažujme dvě za sebou jdoucí vlastní čísla $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ a předpokládejme, že $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Zvolme $\lambda = \frac{\max\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}+\min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}}{2}$.

Potom

$$\frac{m_\lambda^p}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma')} = \frac{\max\{|\alpha-\lambda|, |\beta-\lambda|, |\gamma-\lambda|, |\delta-\lambda|\}}{\min\{\lambda-\lambda_k, \lambda_{k+1}-\lambda\}} < 1.$$

Pak $T_\lambda M_\lambda^p$ je kontrakce a z Banachovy věty o kontrakci[17] má úloha (3.23) právě jedno řešení a to řešení triviální.

Pro $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\frac{\alpha_0}{a}, \frac{\beta_0}{a}, a\alpha_0, a\delta_0)$ má tedy úloha (3.23) jen triviální řešení. Nyní stačí uvážit pozorování 4 o symetriích a dostaneme požadované tvrzení. $\square$

Zobrazení $I - T_\lambda M_\lambda^{p_1}$ a $I - T_\lambda M_\lambda^{p_2}$ dané body p_1 a p_2 odpovídající bodům z jedné komponenty $\mathbb{R}_+^3 \setminus \widehat{\sigma}$ mají stejný stupeň, jak ukazuje následující věta.

Věta 12. [18] *Označme $p_1 = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \delta_1)$ a $p_2 = (\alpha_2, \beta_2, \alpha_2, \delta_2)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^4$. Nechť $\lambda \notin \sigma'$. Označme dále $S := \{t(\alpha_1, \beta_1, \delta_1) + (1-t)(\alpha_2, \beta_2, \delta_2);\ t \in [0,1]\}$ úsečku danou body p_1 a p_2. Nechť $S \cap \widehat{\sigma} = \emptyset$.*

Potom

$$\deg(I - T_\lambda M_\lambda^{p_1}, B(0,1), 0) = \deg(I - T_\lambda M_\lambda^{p_2}, B(0,1), 0),$$

kde deg *značí Leray - Schauderův stupeň, I značí identické zobrazení na $L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ a $B(0,1)$ značí jednotkovou kouli v $L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$.*

Nechť je navíc $p = (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$, potom $\deg(I - T_\lambda M_\lambda^p, B(0,1), 0) \neq 0$.

Důkaz. Uvažme zobrazení

$$t \mapsto \deg(I - T_\lambda(tM_\lambda^{p_1} + (1-t)M_\lambda^{p_2}), B(0,1), 0).$$

Tento stupeň je dobře definován, neboť T_λ je kompaktní zobrazení, $M_\lambda^{p_1}$ a $M_\lambda^{p_2}$ jsou spojité a díky tomu, že S neprotíná Fučíkovo spektrum, neexistuje řešení na sféře $S(0,1)$. Tedy toto zobrazení je konstatní pro $t \in [0,1]$.

[17][5], str. 179.
[18][8], str. 11.

Pokud $p = (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$, potom $M_\lambda^p \equiv 0$ a tedy

$$\deg(I - T_\lambda M_\lambda^p, B(0,1), 0) = \deg(I, B(0,1), 0) \neq 0.$$

$\square$

Důsledek 5. [19] *Stupeň zobrazení* $\deg(I - T_\lambda M_\lambda^p, B(0,1), 0)$ *je konstatní pro* $p = (\alpha, \beta, \alpha, \delta)$ *splňující* (α, β, δ) *je v souvislé komponentě* $\mathbb{R}_+^3 \setminus \widehat{\sigma}$.

Odtud dostáváme vlastnost dvou pásů mimo Fučíkovo spektrum.
Označme

$$Q_1 := \{(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}_+^3;\ \alpha < \lambda_1, \sqrt{\beta\delta} < \lambda_1\},$$
$$Q_2 := \{(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}_+^3;\ \alpha < \lambda_1, \sqrt{\beta\delta} > \lambda_1\},$$
$$Q_3 := \{(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}_+^3;\ \alpha > \lambda_1, \sqrt{\beta\delta} < \lambda_1\}.$$

Věta 13. [20] *Nechť* $p = (\alpha, \beta, \alpha, \delta)$ *a* $(\alpha, \beta, \delta) \in Q_2 \cup Q_3$. *Potom*

$$\deg(I - T_\lambda M_\lambda^p, B(0,1), 0) = 0.$$

[19] [8], str. 11.
[20] [8], str. 12.

3.8 Fučíkovy plochy

Fučíkovo spektrum systému dvou rovnic lze napsat jako sjednocení spočetně mnoha ploch, tyto plochy pojmenujeme Fučíkovy plochy. Zde je přesná definice:

Definice 7. *Nechť* $2 \leq k \in \mathbb{N}$*. Fučíkovou plochou rozumíme souvislou* C^1 *množinu*

$$\Gamma_{k+} := \{(\alpha,\beta,\delta) \in \widehat{\sigma}; \alpha := \alpha_{k+}(\beta,\delta),\ \textit{odpovídající netriviální řešení } (u,v) \\ \textit{úlohy } (3.3) \textit{ je kladné na pravém okolí nuly}\},$$

pro kterou platí $(\lambda_k,\lambda_k,\lambda_k) \in \Gamma_{k+}$*, kde* $\lambda_k \in \sigma'$ *je* k*-té vlastní číslo úlohy* (2.7) *na* $[0,\pi]$ *se smíšenými okrajovými podmínkami. Funkce* $\alpha_{k+}(\beta,\delta)$ *je třídy* C^1*.*

$$\Gamma_{k-} := \{(\alpha,\beta,\delta) \in \widehat{\sigma}; \alpha := \alpha_{k-}(\beta,\delta),\ \textit{odpovídající netriviální řešení } (u,v) \\ \textit{úlohy } (3.3) \textit{ je záporné na pravém okolí nuly}\},$$

pro kterou platí $(\lambda_k,\lambda_k,\lambda_k) \in \Gamma_{k-}$*, kde* $\lambda_k \in \sigma'$ *je* k*-té vlastní číslo úlohy* (2.7) *na* $[0,\pi]$ *se smíšenými okrajovými podmínkami. Funkce* $\alpha_{k-}(\beta,\delta)$ *je třídy* C^1*.*

Definujme dále

$$\Gamma_{1+} := \{(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3_+;\ \alpha = \lambda_1, (\beta,\delta) \in \mathbb{R}^2_+\}$$

a

$$\Gamma_{1-} := \{(\alpha,\beta,\delta) \in \mathbb{R}^3_+; \beta\delta = \lambda_1^2, \alpha \in \mathbb{R}_+\},$$

kde $\lambda_1 \in \sigma'$ *je první vlastní číslo úlohy* (2.7) *na* $[0,\pi]$ *se smíšenými okrajovými podmínkami.*

Poznámka 8. *Existence*[21] *spojitě diferencovatelných funkcí* $\alpha_{k\pm}$ *plyne z výsledků E. Massy a B. Rufa. Korektnost definice se dále opírá o tvrzení týchž autorů, které říká, že pokud* (u,v) *jsou netriviální řešení úlohy* (3.3) *s parametry* $(\alpha,\beta,\delta) \in \widehat{\sigma}$*, potom* u *a* v *mají stejné znaménko na pravém okolí nuly,*[22] *tj.* $uv > 0$ *na pravém okolí bodu* 0*.*

Rozložení Fučíkova spektra na tyto plochy popisuje následující věta.

Věta 14. [23] *Každým bodem* $(\lambda_k,\lambda_k,\lambda_k) \in \widehat{\sigma}$ *prochází právě dvě Fučíkovy plochy (mohou splývat)* Γ_{k+} *a* Γ_{k-}*.*

Netriviální řešení odpovídající bodu $(\alpha,\beta,\delta) \in \Gamma_{k+}$*, respektive* $(\alpha,\beta,\delta) \in \Gamma_{k-}$*, nabývá na* $(0,\pi)$ *hodnoty* 0 *právě* $(k-1)$*-krát.*

Navíc každý bod $\widehat{\sigma}$ *náleží do jedné z těchto ploch.*

[21] [9], str. 324.
[22] [9], str. 313.
[23] [9], str. 326.

Jelikož umíme popsat konkrétní křivku v každé Fučíkově ploše pomocí křivek Fučíkova spektra úlohy s jednou rovnicí, dostáváme následující tvrzení:

Pozorování 6. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Pak Fučíkovy plochy Γ_{k+} a Γ_{k-} úlohy (3.3) nesplývají.*

Důkaz. Z lemmatu 4 víme, že pokud $(\alpha, \beta) \in \sigma_F$, potom $(\alpha, \beta, \beta) \in \widehat{\sigma}$. Z bodů 3 a 4 důsledku 4 existuje

$$\gamma_{k+} := \left\{ (\alpha, \beta, \beta) \in \mathbb{R}^3_+;\ \frac{\sqrt{\beta}(2\sqrt{\alpha} - 1)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = k \right\} \subset \Gamma_{k+},$$

respektive

$$\gamma_{k-} := \left\{ (\alpha, \beta, \beta) \in \mathbb{R}^3_+;\ \frac{\sqrt{\alpha}(2\sqrt{\beta} - 1)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = k \right\} \subset \Gamma_{k-}.$$

Množiny γ_{k+} a γ_{k-} nesplývají, neboť výrazy, jimiž jsou množiny dány, nejsou symetrické v proměnných α a β. Snadno spočítáme, že jediný bod, který náleží do obou množin, je tvaru $\alpha = \beta = \lambda_k$. □

Fučíkovy plochy jsou nejen plochy spojitě diferencovatelné, ale mají i další pěkné vlastnosti. Například spojitou závislost hodnoty první derivace odpovídajícího řešení.

Definujme

$$\widetilde{\Sigma}_\pm := \{(\alpha, \beta, \delta, s) \in \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R};\ \text{netriviální řešení } (u, v) \text{ úlohy (3.3) splňuje } u(0) = 0 = v(0),$$
$$u'(0) = \pm 1, v'(0) = s, u'(\pi) = 0 = v'(\pi)\}.$$

Je zřejmé, že $(\alpha, \beta, \delta) \in \widehat{\sigma}$ právě tehdy, když existuje $s \in \mathbb{R}$ takové, že

$$(\alpha, \beta, \delta, s) \in \widetilde{\Sigma}_- \cup \widetilde{\Sigma}_+.$$

Lemma 6. [24] *Nechť $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}) \in \widetilde{\Sigma}_+$ je takové, že odpovídající netriviální řešení $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ nabývá kladných i záporných hodnot. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\widetilde{\Sigma}_+$ je lokálně tvaru $(\alpha(\beta, \delta), \beta, \delta, s(\beta, \delta))$, kde*

$$(\alpha, s) : (\widetilde{\beta} - \varepsilon, \widetilde{\beta} + \varepsilon) \times (\widetilde{\delta} - \varepsilon, \widetilde{\delta} + \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$$

je C^1 funkce proměnných β, δ.

Navíc

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}(\widetilde{\beta}, \widetilde{\delta}) = \frac{-\int_0^\pi (\widetilde{v}^-)^2}{\int_0^\pi (\widetilde{u}^+)^2 + (\widetilde{v}^+)^2} < 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \delta}(\widetilde{\beta}, \widetilde{\delta}) = \frac{-\int_0^\pi (\widetilde{u}^-)^2}{\int_0^\pi (\widetilde{u}^+)^2 + (\widetilde{v}^+)^2} < 0.$$

[24] [9], str. 320.

Fučíkovy plochy jsou pro různá k disjunktní.

Věta 15. [25] *Nechť $k > l \geq 1$. Potom*

$$(\Gamma_{k+} \cup \Gamma_{k-}) \cap (\Gamma_{l+} \cup \Gamma_{l-}) = \emptyset.$$

Následující věta popisuje průnik dvou odpovídajících si Fučíkových ploch.

Věta 16. [26] *Nechť $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Množina $(\Gamma_{k+} \cap \Gamma_{k-})$ obsahuje neomezenou křivku, která prochází bodem $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$.*

Navíc je bod $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$ jediným bodem v $(\Gamma_{k+} \cap \Gamma_{k-})$, pro který platí $\beta = \delta$.

Každá Fučíkova plocha dělí $\mathbb{R}^3_+$ na dvě komponenty a dvě odpovídající si Fučíkovy plochy dělí $\mathbb{R}^3_+$ na alespoň čtyři komponenty.

Věta 17. [27] *Nechť $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Potom $(\Gamma_{k+})^c$, respektive $(\Gamma_{k-})^c$, má právě dvě souvislé komponenty a $(\Gamma_{k+} \cup \Gamma_{k-})^c$ má alespoň čtyři souvislé komponenty.*

[25] [9], str. 326.
[26] [9], str. 330.
[27] [9], str. 331-332.

3.9 Uzavřenost Fučíkova spektra

Uvědomme si nejdříve jednu pěknou vlastnost Sobolevova prostoru $W^{1,2}(0,\pi)$.

Poznámka 9. *Z kompaktního vnoření*[28] *prostoru $W^{1,2}(0,\pi)$ do prostoru $C([0,\pi])$ plyne, že pokud u_n konvergují k u slabě ve $W^{1,2}(0,\pi)$, potom u_n konvergují k u stejnoměrně na $[0,\pi]$.*

Nyní můžeme dokázat, že Fučíkovo spektrum je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^3_+$. Následující věta ukazuje i spojitou závislost řešení na parametrech úlohy.

Věta 18. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \widehat{\sigma}$, $a_n = (\alpha_n, \beta_n, \delta_n)$. Nechť $a_n \to a = (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$. Potom $a \in \widehat{\sigma}$.*

Důkaz. Označme $\mathbf{u_n} := (u_n, v_n) \in W^{1,2}(0,\pi) \times W^{1,2}(0,\pi)$ netriviální řešení úlohy (3.3) odpovídající parametrům $(\alpha_n, \beta_n, \delta_n)$ takové, že $||u_n||_{L^2(0,\pi)} = ||v_n||_{L^2(0,\pi)} = 1$.

Otestujeme první rovnici systému (3.3) s parametry $(\alpha_n, \beta_n, \delta_n)$ funkcí u_n. Potom pomocí Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}||u_n'||^2_{L^2(0,\pi)} = \left|\alpha_n \int_0^\pi v_n^+ u_n - \beta_n \int_0^\pi v_n^- u_n\right| &\le (|\alpha_n| + |\beta_n|) \int_0^\pi |u_n v_n| \\ &\le ||u_n||_{L^2(0,\pi)} ||v_n||_{L^2(0,\pi)} (|\alpha_n| + |\beta_n|) = (|\alpha_n| + |\beta_n|)\end{aligned}$$

a obdobně

$$||v_n'||^2_{L^2(0,\pi)} \le (|\alpha_n| + |\delta_n|).$$

Z konvergence $\{a_n\}$ existuje $C > 0$ takové, že platí

$$||\mathbf{u_n}||_{W^{1,2}(0,\pi)\times W^{1,2}(0,\pi)} \le 2 + C.$$

Eberlein-Šmuljanova charakteristika reflexivity[29] říká, že v reflexivních prostorech lze z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Jelikož prostor $W^{1,2}(0,\pi)$ je reflexivní (každý Hilbertův prostor je reflexivní[30]), tak z $\{\mathbf{u_n}\}$ lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Bez újmy na obecnosti ji označme stejně, tedy

$$\mathbf{u_n} \rightharpoonup \mathbf{u} = (u, v) \in W^{1,2}(0,\pi) \times W^{1,2}(0,\pi).$$

Protože prostor $W^{1,2}(0,\pi)$ je kompaktně vnořen do prostoru $L^2(0,\pi)$[31], platí dokonce

$$\mathbf{u_n} \to \mathbf{u} \text{ v } L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi).$$

---

[28] [10], str. 113.
[29] [5], str. 144.
[30] [5], str. 27.
[31] [10], str. 102.

To jest $u_n \to u$ a $v_n \to v$ v $L^2(0,\pi)$.

Protože $||\mathbf{u_n}||_{L^2(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = 2$, nemůže nastat $\mathbf{u_n} \to 0$ v $L^2(0,\pi)$. Tedy

$$||\mathbf{u}||_{W^{1,2}(0,\pi)\times W^{1,2}(0,\pi)} \geq ||\mathbf{u}||_{L^2(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = 2.$$

Jelikož $u, v \in W^{1,2}(0,\pi)$, tak i $u^\pm, v^\pm \in W^{1,2}(0,\pi)$. Funkce v_n konvergují silně v $L^2(0,\pi)$ k v a funkce v_n' slabě k v' v $L^2(0,\pi)$.

Díky poznámce 9 konvergují v_n k v stejnoměrně na $[0,\pi]$.

Snadno zjistíme, že na $[0,\pi]$ platí odhad

$$|v_n^\pm - v^\pm| \leq |v_n - v|.$$

Tudíž

$$\int_0^\pi |v_n^\pm - v^\pm|^2 \leq \int_0^\pi |v_n - v|^2 \to 0 \quad \text{ pro } n \to \infty.$$

Odtud již plyne, že $v_n^\pm \to v^\pm$ v $L^2(0,\pi)$.

Zvolme $\varphi \in \mathcal{K}$. Díky předpokladu, že (u_n, v_n) řeší úlohu (3.3) s parametry $(\alpha_n, \beta_n, \delta_n)$, můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\alpha_n \int_0^\pi v_n^+\varphi - \alpha \int_0^\pi v^+\varphi\right| &= \left|\alpha_n \int_0^\pi v_n^+\varphi - \alpha_n \int_0^\pi v^+\varphi + \alpha_n \int_0^\pi v^+\varphi - \alpha \int_0^\pi v^+\varphi\right| \\ &\leq |\alpha_n| \left|\int_0^\pi v_n^+\varphi - \int_0^\pi v^+\varphi\right| + |\alpha_n - \alpha| \left|\int_0^\pi v^+\varphi\right| \to 0,\end{aligned}$$

neboť $\{\alpha_n\}$ a $\int_0^\pi v^+\varphi$ jsou omezené pro dost velká n a pro pevné φ.

Tedy platí

$$\alpha_n \int_0^\pi v_n^+\varphi - \alpha \int_0^\pi v^+\varphi \to 0. \tag{3.24}$$

Pro ostatní parametry dokážeme analogicky.

Jelikož $\mathbf{u_n} \rightharpoonup \mathbf{u}$ ve $W^{1,2}(0,\pi) \times W^{1,2}(0,\pi)$, platí pro každé $\varphi \in \mathcal{K}$

$$\int_0^\pi u_n'\varphi' \to \int_0^\pi u'\varphi', \tag{3.25}$$

$$\int_0^\pi v_n'\varphi' \to \int_0^\pi v'\varphi'. \tag{3.26}$$

Z rovnice (3.24) a jejích analogií pro ostatní parametry a z rovnic (3.25) a (3.26) vyplývá, že (u, v) je slabé řešení úlohy (3.3) s parametry (α, β, δ). $\square$

Pozorování 7. *Pokud navíc mají odpovídající netriviální řešení u_n, respektive v_n, stejný počet nulových bodů na $(0,\pi)$, potom i u, respektive v, má tentýž počet nulových bodů na $(0,\pi)$.*

Důkaz. Víme, že $(u_n^{\pm}, v_n^{\pm}) \to (u^{\pm}, v^{\pm})$ ve $L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$.

Důkaz provedeme sporem.

Nechť má nejprve u méně nulových bodů než u_n, to jest existují dvě posloupnosti po sobě jdoucích nulových bodů u_n, které obě konvergují do téhož bodu. Přesněji existuje posloupnost dvojic bodů $(x_n, y_n) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$, $x_n < y_n$, takových, že $u_n(x_n) = 0 = u_n(y_n)$, $u_n(t) \neq 0$ pro $t \in (x_n, y_n)$ (což ze spojitosti u_n znamená, že u_n na intervalu (x_n, y_n) nemění znaménko), $|y_n - x_n| \to 0$ a že existuje $x \in [0,\pi]$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Zřejmě $u(x) = 0$.

Z Rolleovy věty existuje $\xi_n \in (x_n, y_n)$ takové, že $u_n'(\xi_n) = 0$. Zřejmě i $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$.

Jelikož pravé strany rovnice (3.3) s parametry $(\alpha_n, \beta_n, \delta_n)$, respektive (α, β, δ), jsou z konvergence $(\alpha_n, \beta_n, \delta_n) \to (\alpha, \beta, \delta)$ stejně omezené, můžeme použít větu 5. Díky tomu víme, že $u_n, u \in W^{2,2}(0,\pi)$ a tudíž $u_n', u' \in W^{1,2}(0,\pi)$. Jelikož existuje vybraná podposloupnost (značme ji opět stejně) z $\{u_n\}$ taková, že $u_n' \rightharpoonup u'$ ve $W^{1,2}(0,\pi)$, z poznámky 9 vyplývá, že u_n' konverguje k u' stejnoměrně na $[0,\pi]$.

Ze spojitosti řešení u_n' a u' a ze stejnoměrné konvergence u_n' k u' plyne, že

$$|u'(x) - u_n'(\xi_n)| \leq |u'(x) - u'(\xi_n)| + |u'(\xi_n) - u_n'(\xi_n)| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Jelikož $u(x) = 0$ a zároveň $u'(x) = 0$, je $u \equiv 0$ na nějakém okolí bodu x. To je ovšem spor s tím, že u je netriviální řešení úlohy (3.3).

Nechť má tedy řešení u více nulových bodů než u_n, to jest existují dvě posloupnosti po sobě jdoucích nulových bodů u_n, mezi nimiž se limitně vytvoří nový nulový bod. Zvolme opět posloupnost dvojic bodů $(x_n, y_n) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$, $x_n < y_n$, takových, že $u_n(x_n) = 0 = u_n(y_n)$, $u_n \neq 0$ na intervalu (x_n, y_n). Nechť

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$x \neq y$. Zřejmě platí $u(x) = 0 = u(y)$.

Nechť existuje $z \in (x, y)$ takové, že $u(z) = 0$. Nechť $u'(z) \neq 0$ (jinak bychom dostali spor jako výše). Potom u nabývá kladných hodnot na (z, y) a záporných hodnot na (x, z) nebo obráceně. Ovšem u je limitou u_n, přičemž pro dost velká n funkce u_n na nějakém okolí bodu z nemění znaménko. Tedy limita u_n musí být na nějakém okolí bodu z buď kladná, nebo záporná, nebo identicky nulová. Došli jsme opět ke sporu. $\square$

Poznámka 10. *Jelikož Fučíkovo spektrum* $\widehat{\sigma}$ *lze zapsat jako spočetné sjednocení Fučíkových ploch* $\Gamma_{k\pm}$*, které jsou pro různá* k *disjunktní, nutně musí posloupnost* $\{a_n\} \subset \widehat{\sigma}$ *pro konvergenci splňovat právě jednu z následujících podmínek:*

1. *existuje* k *a existuje* n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \in \Gamma_{k+}$*,*
2. *existuje* k *a existuje* n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \in \Gamma_{k-}$*,*
3. *existuje* k *a existuje* n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \in \Gamma_{k+} \cup \Gamma_{k-}$ *a* $a = (\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$*.*

Literatura

[1] Drábek P., Milota J.: *Basic Nonlinear Methods*,
Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2005.

[2] Evans L. C.: *Partial Differencial Equations*,
American Mathematical Society, Providence, 1998.

[3] Fučík S.: *Boundary Value Problems with Jumping Nonlinearities*,
Časopis pro pěstování matematiky 101 (1976), str. 69-87.

[4] Kufner A.: *Geometrie Hilbertova prostoru*,
SNTL, Praha, 1973.

[5] Lukeš J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*,
Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2002.

[6] Malý J.: *Derivace pro pokročilé I*,
skripta, http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼maly/dpp07.pdf, 2009.

[7] Malý J.: *Teorie míry a integrálu*,
skripta, http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼maly/tmi09.pdf, 2009.

[8] Massa E., Ruf B.: *On the Fučík Spectrum for Elliptic Systems*,
Topological Methods Nonlinear Analysis 27 (2006), str. 195-228; číslování stran dle elektronické verze.

[9] Massa E., Ruf B.: *A Global Characterization of the Fučík Spectrum for a System of Ordinary Differential Equations*,
Journal of Differential Equations 234 (2007), str. 311-336.

[10] Rokyta M., John O., Málek J., Pokorný M., Stará J.: *Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic*,

skripta, http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼malek/new/images/Skripta.pdf, 2009.

[11] Schwartz L.: *Matematické metody ve fyzice*,

SNTL, Praha, 1972.

[12] Taylor A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy*,

Academia, Praha, 1973.