Univerzita Karlova v Prahe

Matematicko-fyzikálna fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Ľuboš Podobník

Limita v stredoškolskej matematike

Katedra didaktiky matematiky

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.

Študijný program: Fyzika

Študijný odbor: Učiteľstvo fyziky-matematiky pre SŠ

Praha 2011

Poďakovanie

Ďakujem svojej rodine za podporu a blízkosť a svojmu školiteľovi za pomoc, trpezlivosť a množstvo rád a nápadov, ktorými sa snažil prispieť k čo najlepšej podobe tohto diela.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Zb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dňa .... podpis

Názov práce: Limita v stredoškolskej matematike

Autor: Bc. Ľuboš Podobník

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Táto práca má dve časti — analýzu a syntézu. V prvej časti sa analyzujú viaceré české, slovenské a jedna nemecká učebnica matematiky pre stredné školy z hľadiska prístupov k pojmom limita postupnosti, limita funkcie a derivácia funkcie. Na základe tejto analýzy je (v druhej časti práce) vypracovaný text pre stredoškolskú úroveň venovaný propedeutike týchto pojmov, spôsobom ich zavedenia a ozrejmovaniu na konkrétnych príkladoch.

Venujeme sa najmä propedeutike limitných procesov a ich využitiu pri zavádzaní limity postupnosti a limity funkcie. Dôležitá je tiež koncepcia výkladu vrátane poradia pojmov a vytváranie väzieb medzi limitou postupnosti a limitou funkcie.

Kľúčové slová: Limita, postupnosť, funkcia, derivácia.

Title: Limit in the high school mathematics

Author: Bc. Ľuboš Podobník

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This work consists of 2 parts: analysis and synthesis. In the first part there are analysed various czech and slovak textbooks and one german textbook of mathematics for high schools from the point of view of approach to terms like limit of a sequence, limit of a function and derivative of a function. On the basic of this analysis there is developed a text for the high school level (in the second part of this work), which deals with propaedeutics of these terms, the methods of their launch and the clarification with specific examples.

We deal in particular with the propaedeutics of limit processes and their application in the introduction of the limit of a sequence and the limit of a function. The conception of interpretation is also important, including the sequence of the terms and creating links between the limit of a sequence and the limit of a function.

Keywords: Limit, sequence, function, derivative.

Obsah

Úvod

Témou tejto diplomovej práce je limita a limitné procesy. Keby sme chceli v stredoškolskej matematike hľadať niečo, čo má tak široké využitie v geometrii, fyzike, chémii a ďalších oblastiach ľudského života, a čo tak významne formuje matematické, logické i strategické myslenie, ťažko by sme našli niečo reprezentatívnejšieho. Ja som si vybral túto tému, pretože ma fascinovalo, ako môže byť už obyčajná vízia limitných procesov inšpiráciou takých matematikov, ako bol Archimedes alebo neskôr Kepler, Leibniz, Newton, Cauchy, Euler a ďalší. Väčšina autorov literatúry, ktorú som si preštudoval, sa zhoduje v tom, že zrod infinitezimálneho počtu bol jedným z najväčších výtvorov ľudskej mysle, ktorý ovplyvnil život ľudí viac, než si to mohol niekto predstaviť.

Je pravda, že pokiaľ ide o limity, človek nemusí byť príliš múdry, aby vedel zistiť, čo je limitou danej postupnosti alebo funkcie. Dôležité je teda pochopiť podstatu. Teda prečo vôbec limity zavádzame, aké problémy nás k tomu vedú, a ako tieto poznatky môžeme aplikovať. Dané otázky sa pokusíme zodpovedať.

Táto práca nie je iba matematickou prácou, ale tiež (a najmä) prácou didaktickou. Má dve hlavné časti — analýzu a syntézu. V prvej časti sa analyzuje niekoľko českých učebníc matematiky pre stredné školy, a tiež niekoľko zahraničných (zo Slovenska a z Nemecka). Čitateľ sa tak môže oboznámiť s množstvom pohľadov na danú problematiku, a to aj z hľadiska súčasnosti, aj z hľadiska histórie. Táto analýza nás nielen oboznamuje s rôznymi spôsobmi, akými sa pristupuje k úvodu do diferenciálneho počtu, ale na základe záverov z nej mohla byť vytvorená druhá časť práce — syntéza, ktorá vytvára jeden ucelený „ideálny“ pohľad na túto problematiku, zdôvodnený metodickými pripomienkami a komentármi. V syntéze sa tak vysvetľuje aj to, prečo je vhodné iné usporiadanie jednotlivých typov limít funcie či vytváranie väzieb medzi limitou funkcie a limitou postupnosti. Cieľom práce je teda takýmto spôsobom vytvoriť text, ktorý by azda mohol slúžiť ako pomôcka pre stredoškolských učiteľov matematiky učiacich tému limity.

Na konci každej kapitoly sú aj aplikácie. V prípade poslednej kapitoly o derivácii funkcie sú aplikácie uvedené v dodatku, keďže sú náročnejšie a pri ich riešení sú potrebné aj poznatky nad rámec uvedeného učiva. Sú z oblasti geometrie a fyziky. Pomocou aplikácií v tejto práci sa dá učivo nielen dobre precvičit a lepšie pochopiť, ale aj nájsť zmysel celého matematického aparátu, ktorý nemusí byť pre všetkých študentov práve najjednoduchší. Dôležité však je, že tieto aplikácie sú doplnené aj komentárom, ktorý by mal vhodne vysvetľovať, o čom vlastne hovoríme.

Na konci práce je ešte uvedený zoznam literatúry, ktorá bola pri písaní použitá. Ak sa teda v texte vyskytne číslo v hranatej zátvorke, ide o odkaz na tento zoznam. Takto označené príklady, úlohy, definície a vety v analýze boli prevzaté. V syntéze som sa príslušnou literatúrou len nechal inšpirovať, teda priamo som z nej nečerpal. Zadania aplikačných príkladov v celej práci (s označením odkazu na literatúru) boli prevzaté. Riešenia však boli modifikované a v syntéze aj doplnené mojím komentárom. V práci sú aj ilustračné obrázky. Všetky som si kreslil sám.

Dlhé veky vznikala časť matematiky, ktorá posunula vedomosti ľudstva zase o kúsok ďalej. Dnes by sme tieto vedomosti chceli posúvať ďalej aj bežným ľuďom, ktorým matematický pohľad na svet značne chýba. Matematika nie je iba abstraktná veda, ktorá by mala za svoju ambíciu byť strašiakom číslo jedna vo všetkých školách, ale primárne byť hlavným nástrojom rozvíjania ľudského myslenia aj každej ľudskej osobnosti. Dnes, keď vieme, že väčšina ľudí je finančne aj ekologicky negramotná, je práve úlohou matematiky pestovať v ľuďoch spôsob uvažovania tak, aby si každý jednotlivec uvedomoval svoju esenciálnu slobodu, jej obrovskú silu, ale aj jej krehkosť. Prajem si, aby moja práca bola aspoň pokusom nielen o zavedenie pojmu limita.

Prehľad použitej symboliky

$\square$	Formálne ukončenie znenia definície alebo riešenia príkladu.
Q.E.D.	Formálne ukončenie znenia dôkazu vety.
$\forall x \in M:\ V(x)$	Pre každé x z množiny M platí, že x má vlastnosť V.
$\exists x \in M:\ V(x)$	Existuje aspoň jedno x z množiny M, ktoré má vlastnosť V.
$\mathbb{N}$	Množina všetkých prirodzených čísel.
$\mathbb{R}$	Množina všetkých reálnych čísel.
$(a,\ b)$	Otvorený interval, množina $\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
$\langle a,\ b\rangle$	Uzavretý interval, množina $\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	Postupnosť reálnych čísel. (Niekedy sa označuje (a_n).)
a_n	n-tý člen postupnosti reálnych čísel.
$f(x)$	Hodnota funkcie f v bode x.
D_f	Definičný obor funkcie f. (Niekedy sa označuje $\mathsf{D}(f)$.)
$A\,[x,\ y]$	Súradnice bodu A.
$\mathcal{U}\,(L,\ \varepsilon)$	Okolie bodu L s polomerom ε.
Δx	Prírastok argumentu v bode x_0, $\Delta x = x - x_0$.
$x \to x_0$	x konverguje k bodu x_0.
$\lim_{x\to\pm\infty} a_n$	Limita postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	Limita funkcie f vo vlastnom bode x_0.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$	Limita funkcie f v nevlastnom bode $\pm\infty$.
$y',\ f'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	Prvá derivácia funkcie $y = f(x)$.
$y'',\ f''(x),\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	Druhá derivácia funkcie $y = f(x)$.

Časť 1

Analýza

KAPITOLA 1

Porovnanie spôsobov zavedenia pojmov postupnosť a limita postupnosti v stredoškolských učebniciach

Českú učebnicu od O. Odvárka [16] budeme porovnávať so slovenskou učebnicou od T. Hechta [7] a s nemeckou od G. Koeniga a ďalších autorov [13]. Ukážeme si, aké sú zhody a aké rozdiely medzi nimi, ktorý prístup sa javí ako najlepší a prečo, a tiež sa pozrieme, ako tieto pojmy na seba nadväzujú, akými spôsobmi ich autori definujú a nakoniec porovnáme aplikácie na limitu postupnosti.

1.1. Ako sa zavádza pojem postupnosť

Pri zavádzaní pojmu postupnosť sa predpokladá, že žiaci už majú osvojené základné poznatky o pojme funkcia (na úrovni gymnázia). Po preštudovaní týchto učebníc je vidieť, že každý autor sa na pojem postupnosť pozerá trochu inak. O. Odvárko na rozdiel od T. Hechta zdôrazňuje veľkú príbuznosť medzi postupnosťami a funkciami, čo môže byť veľmi motivujúce neskôr, keď chceme hľadať súvislosti medzi pojmami limita postupnosti a limita funkcie. Autor tu ponúka rôzne postupnosti a ukazuje ich grafický priebeh. Ďalej vysloví definíciu pre konečnú aj nekonečnú postupnosť, čím vytvára väčší teoretický rámec, než skôr minimalistická učebnica T. Hechta.

Po úvodných poznámkach nasleduje rekurentné určenie postupnosti. Všetko sa ukáže na konkrétnych príkladoch.

Príklad 1.1. ([16]) Vypočítajte druhý, tretí a štvrtý člen postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ktorá je daná takto:

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1} = -2a_n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Riešenie:

$$a_2 = -2a_1 = -8, \qquad a_3 = -2a_2 = 16, \qquad a_4 = -2a_3 = -32 \;\square$$

O. Odvárko ďalej spomenie talianského kupca a matematika Leonarda Pisanského (asi 1170 – asi 1250), zvaného Fibonacci. Tým vytvorí priestor pre veľmi jednoduché pochopenie nového pojmu, snáď pre všetkých žiakov. Fibonacci vo svojej knihe *Liber abaci* uvádza tento príklad:

PRÍKLAD 1.2. ([16]) Niekto umiestnil pár králikov na určitom mieste zo všetkých strán ohradenom stenou, aby vedel, koľko párov králikov sa narodí v priebehu jedného roka. Vieme, že jeden pár králikov privedie na svet mesačne jeden pár, a že králici začínajú rodiť vo veku dvoch mesiacov. S prípadmi uhynutia sa nepočíta. Spočítajte počty párov králikov na konci dvanásteho mesiaca. Predpokladajte, že obaja králici prvého páru sú pri umiestnení do ohrady starí práve jeden mesiac.

RIEŠENIE: Zrejme je hneď vidieť, že na konci 1. mesiaca to budú 2 páry, na konci 2. mesiaca 3 páry, na konci 3. mesiaca 5 párov a na konci 4. mesiaca 8 párov. Ale čo koniec roku? Musíme vypočítať a_{12}.

Keby sme chceli počítať pomocou matematickej intuície, naše úvahy by boli zbytočne komplikované. Preto je lepšie použiť matematický aparát, ktorý nám ponúkajú postupnosti.

Označme teda počet párov králíkov na konci $(n+1)$-ho mesiaca a_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$. Na konci $(n+2)$-ho mesiaca bude v ohrade a_{n+1} starých párov. Okrem toho sa narodí toľko párov králikov, koľko ich bolo na konci n-tého mesiaca, tj. a_n. Takže pre počet a_{n+2} párov králikov na konci $(n+2)$-ho mesiaca platí

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Počítajme postupne.

$$a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 8 = 13,$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 21, \quad a_7 = 34, \quad a_8 = 55, \quad a_9 = 89, \quad a_{10} = 144, \quad a_{11} = 233, \quad a_{12} = 377. \square$$

Tu vidieť, že Fibonacciho príklad veľmi názorne objasňuje, čo pojem postupnosť znamená, resp. prečo je dobré mať takýto pojem.

O. Odvárko ďalej uvádza rôzne úlohy, napr. na precvičenie toho, aby žiaci vedeli danú postupnosť vyjadriť rekurentne apod.

Keď sa pozrieme do učebnice T. Hechta, zistíme, že pri zavedení pojmu postupnosť od nás autor chce, aby sme mu spočítali súčet $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2$. Pomocou takéhoto príkladu by sme mali pochopiť, čo to postupnosť je. Tento príklad je v učebnici vyriešený, takže vidieť, že sa autor drží princípu, aby žiaci na konkrétnych problémoch pochopili pojem, ktorý sa majú naučiť. Otázkou by mohlo byť, či je tento príklad skutočne dobrý pre pochopenie nového pojmu. Dá sa povedať, že áno, pretože z riešenia sa dá naučiť, čo to znamená n-tý, resp. $(n+1)$-vý člen postupnosti. Keďže je tu takýchto príkladov dostatok, čitateľ sa nemusí báť, že keď jeden z nich nepochopí, tak je to koniec. Občas aj pochopenie iného príkladu žiakov privedie k pochopeniu pôvodného príkladu. Fibonacciho príklad u O. Odvárka je však asi vhodnejší.

Zaujímavým spôsobom sa pojem postupnoť zavádza v nemeckej učebnici [13]. Ako motivácia sa použije príklad, v ktorom máme vyriešiť rovnicu piateho stupňa. Autor rieši problém tak, že sa napokon dostane až k určitej *postupnosti* hodnôt (ktorá naviac konverguje k hodnote riešenia rovnice). Na rozdiel od O. Odvárka a T. Hechta je tak v tejto nemeckej učebnici vidieť aj nadväznosť na pojem limita postupnosti (ktorý sa zavedie neskôr), čo je chvályhodné, keďže sa tak vytvárajú väzby medzi jednotlivými matematickými pojmami. Týmto prístupom som sa nechal inšpirovať v druhej časti tejto práce — v syntéze a v tomto duchu som zostavil motivačný príklad 4.1. (aj s príslušným riešením).

1.2. Ako sa zavádza pojem limita postupnosti

Keď chce O. Odvárko [16] zaviesť pojem limita postupnosti, začne tým, že vyzve čitateľa, aby vypísal niekoľko členov postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$a_n = \frac{(-1)^n + n}{2n}.$$

Ak si tieto hodnoty vyznačíme do grafu, zistíme, že sa približujú k číslu $\frac{1}{2}$. Autor takto ukáže, že sa táto postupnosť niekde ustáli (čiže nájdeme limitu) a naviac žiakov naučí také tvrdenie aj dokázať. Nato autor zavedie aj nevlastnú limitu postupnosti.

Je chvályhodné, že O. Odvárko zavádza na rozdiel od T. Hechta [7] vlastnú aj nevlastnú limitu. Otázkou by mohlo byť, či je zvolené poradie práve to najvhodnejšie. Teda je pre žiakov viac predstaviteľnejšie ustálenie nejakej postupnosti v konkrétnej hodnote, alebo skôr to, že hodnota postupnosti sa blíži až do nekonečna? O tom by sa dalo diskutovať. Ja sa však domnievam, že pre intuíciu žiaka je názornejšie, keď sa najprv zaoberáme nekonečnom (nevlastná limita) a až potom ideme ku konkrétnym hodnotám (vlastná limita).

U T. Hechta sa pojem limita postupnosti zavádza podobne ako u O. Odvárka. Autor najprv vymenuje niekoľko rôznych postupností a vyzve čitateľa, aby ku každej vypočítal niekoľko prvých členov. Potom sa pýta, čo majú spoločné. Malo by byť vidieť, že vo všetkých menovaných postupnostiach dochádza k akémusi ustáleniu hodnôt. Napr., ak máme postupnosť, pre ktorej $(n+1)$-vý a prvý člen platí

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3 - a_n}{2}, \qquad a_1 = 1,$$

tak prvých sedem členov bude

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_3 = 2,5; \quad a_4 = 2,75; \quad a_5 = 2,875; \quad a_6 = 2,937\,5; \quad a_7 = 2,968\,75$$

a vidieť tak, že dané hodnoty sa zhlukujú okolo čísla 3.

Autor zdôrazňuje, že ustálenie sa nejakej hodnoty po určitom čase je dobre známe z prírody. Myslím si, že tu vidieť, že tento spôsob zavedenia je názorný. Bohužiaľ, nevlastným limitám sa už autor nevenuje, čo ma ani neprekvapilo, keďže celá učebnica je písaná v minimalistickom štýle.

Nemecká učebnica [13] zavádza pojem limita postupnosti takmer rovnako ako autor O. Odvárko. Trochu mi však chýbalo, že aj keď teória o postupnostiach bola pripravená dobre, aby bolo jasne vidieť, že sa následne na túto teóriu nadviaže a zavedie sa nový pojem — limita postupnosti, tak v kapitole o limite postupnosti už túto nadväznosť vidieť nebolo, čo je škoda.

Napokon by som dodal ešte jednu vec. Vo všetkých týchto učebniciach bolo podľa môjho názoru aj niečo nadbytočné — vety o limitách (ako napr., že súčet dvoch limít postupností je limita ich súčtu). Nehovorím, že by to žiaci nemali vedieť, ale myslím si, že najmä v minimalistickej verzii T. Hechta sa autor mohol zamerať na dôležitejšie veci, ako napr. na nevlastnú limitu alebo na užitočné aplikácie.

1.3. Definície limity postupnosti

V učebnici O. Odvárka [16] sa nachádzajú tieto definície týkajúce sa limity postupnosti.

Definícia 1.1. ([16]) Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentná*, práve keď existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ také, že platí: Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslo a sa nazýva *limita postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Nasledujúca definícia je len alternatívou k predchádzajúcej.

Definícia 1.2. ([16]) Číslo a sa nazýva *limita postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, práve keď ku každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. □

Ďalej máme nevlastnú limitu postupnosti.

Definícia 1.3. ([16]) Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastnú limitu* $+\infty$, práve keď pre každé reálne číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$. □

Definícia 1.4. ([16]) Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastnú limitu* $-\infty$, práve keď pre každé reálne číslo L existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ je $a_n < L$. □

U T. Hechta [7] je definícia limity postupnosti rovnaká ako u O. Odvárka (je tu však len vlastná limita postupnosti). V nemeckej učebnici [13] je tiež veľmi podobná.

Definícia 1.5. ([13]) Nech (a_n) je postupnosť a g je reálne číslo. Číslo g je *limitou postupnosti* (a_n), keď nám každá ľubovolná voľba kladného čísla ε dá prirodzené číslo n_0 tak, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ máme, že a_n je v ε-okolí bodu g. □

Pojem ε-okolie bodu sa myslí tradične v zmysle predchádzajúcich definícií.

Hodnotiť, ktorá definícia vlastnej limity postupnosti je najvhodnejšia, tu nemá zmysel. Rozdiely sú skôr len v slovoslede. Zdá sa, že tento spôsob je dobrý, keďže zatiaľ nikto neprišiel s definíciou názornejšou.

1.4. Porovnanie použitých aplikácií na limitu postupnosti

V učebnici O. Odvárka [16] je niekoľko aplikácií. Napríklad, ako aproximovať číslo $\sqrt{2}$, číslo π alebo Eulerovo číslo e.

Naviac je v tejto učebnici rozpracovaná aj nevlastná limita postupnosti. Takže tu nájdeme napr. takéto úlohy:

ÚLOHA 1.1. ([16]) Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sú členy postupnosti $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ väčšie než 10^9.

ÚLOHA 1.2. ([16]) Existuje ohraničená postupnosť, ktorá má nevlastnú limitu?

ÚLOHA 1.3. ([16]) Rozhodnite, či platí veta: Každá monotónna postupnosť, ktorá nie je ohraničená, má nevlastnú limitu $+\infty$ alebo $-\infty$.

Vidíme, že nejde o úlohy, ktoré by sa nejako týkali bežného života, ide len o aplikácie k hlbšiemu pochopeniu tejto časti matematiky.

Naopak u T. Hechta [7] a v nemeckej učebnici [13] aplikácie takmer nie sú. Nájdeme tu len úlohy typu, že je treba vypočítať danú limitu postupnosti alebo zistiť, ktoré z daných postupností sú konvergentné atď. To isté platí aj o zbierke S. Bednářovej [1] k učebnici T. Hechta.

Myslím si, že je evidentné, že s aplikáciami je na tom najlepšie učebnica O. Odvárka, ktorá nechce len, aby žiaci mechanicky počítali limity postupností, ale aby sa aj niečo nového naučili a hlavne, aby pri tom museli premýšľať.

KAPITOLA 2

Porovnanie spôsobov zavedenia pojmov limita funkcie a derivácia funkcie v stredoškolských učebniciach

Českú učebnicu od D. Hrubého a J. Kubáta [11] budeme porovnávať s ďalšou českou (staršou) učebnicou od E. Kraemera [14], so slovenskými od B. Riečana [18] a od T. Hechta [8] a s nemeckou učebnicou od G. Koeniga a ďalších autorov [13]. Jednu vec majú tieto učebnice (okrem nemeckej) spoločnú. Žiaci sa naučia, čo je to limita funkcie, naučia sa vety o limitách (ako napr., že súčet dvoch limít funkcií je limitou súčtu týchto funkcií atď.), ale neuvedomia si dostatočne súvislosti medzi limitou funkcie a limitou postupnosti a domnievam sa, že mnoho žiakov ani úplne nepochopí, čo je to nejaký limitný proces.

Tiež je vidieť, že najväčší dôraz je kladený na to, aby žiaci vedeli vypočítať takmer akúkoľvek limitu (niekedy už vlastne ide len o to, ako zdatne žiak vie rozširovať, krátiť alebo umocňovať), ale zabúda sa na to, k čomu je to všetko dobré. Napokon sa akurát príde k tomu, že pomocou limity zavedieme deriváciu, čo má už prirodzene široké využitie. Horšie však je, keď sa od aplikácií spadne skôr ku pseudoaplikáciám a žiaci potom nemajú tendenciu pochopiť, čo to limita naozaj je.

Zvláštnym prípadom týchto učební je učebnica od D. Hrubého a J. Kubáta. Je skôr formálna a výrazne maximalistická. Často ju používajú aj študenti bakalárskeho štúdia.

2.1. Porovnanie statického a dynamického spôsobu zavedenia

Keď si otvoríme tieto vybrané učebnice, hneď uvidíme jeden zásadný rozdiel. Zavedenie pojmov limita funkcie a derivácia je v učebniciach od E. Kraemera a Hrubého/Kubáta skôr statické. V učebniciach B. Riečana a T. Hechta je zase skôr dynamické.

Čo to znamená? U E. Kraemera a u Hrubého/Kubáta je potrebné najprv zaviesť pojem spojitosť funkcie v bode a pojem okolie bodu. Potom sa autori pozerajú na rôzne jednoduché spojité funkcie, kde „vytrhnú“ jeden bod a pýtajú sa, čo je limitou danej funkcie v bode, kde funkcia nie je definovaná. Funkčná hodnota v takom bode samozrejme neexistuje, avšak máme k dispozícii pojem okolie. Takto autori dospejú k pojmu vlastná limita funkcie vo vlastnom bode.[1]

Keď nad takýmto spôsobom zavedenia pouvažujeme, môžeme sa spýtať — je vôbec nutné zaviesť pojem spojitosť? Nechcem tým povedať, že by žiaci nemali vedieť, čo to spojitosť je. Ale je nevyhnutné, aby bola použitá hneď na začiatku? Nie je možné celý postup nejako zjednodušiť?

A tak sa dostávame k dynamickému zavedeniu, ktoré sa nachádza u B. Riečana a T. Hechta. B. Riečan priamo povie: „Na prvý pohľad by sa zdalo, že s limitami sa nemusíme príliš trápiť. Veď je jasné, že napríklad $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. (...) Ale vieme, že názorná predstava niekedy klame. Môže nás klamať aj tentokrát.“ Preto sa začne s takouto úlohou.

Úloha 2.1. ([18]) Napíšte rovnicu dotyčnice ku krivke $y = \sin x$ v bode $A[0;0]$.

Vidíme, že najprv by bolo dobré poznať smernicu dotyčnice. Máme $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Na krivke $y = \sin x$ si zvolíme ľubovolný bod $B[x_2, y_2]$, čiže $y_2 = \sin x_2$. Teraz ľahko vypočítame smernicu priamky AB.

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin x_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{\sin x_2}{x_2}.$$

Keďže chceme nájsť rovnicu dotyčnice k pôvodnej krivke v bode A, hľadáme najprv vlastne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Koľko to bude? (Dokončenie autor uvádza neskôr.)

Po tom, ako si autor takto pripravil pôdu pre pojem derivácia a motivoval nás k pojmu limita funkcie, uvedie jej definíciu a ďalšie známe vety, ktoré s limitou funkcie

[1]Napr. u E. Kraemara [14] je to asi takto: Majme funkciu $y = f(x)$. Konkrétne napr. $f:\ y = x^2$ bez bodu $[2;4]$, ale s bodom $[2;9]$. Čiže v bode $a = 2$ má funkcia hodnotu $f(a) = 9$. Táto funkcia teda v bode a nie je spojitá.

Avšak pre hodnoty x „veľmi blízke“ k číslu a sú hodnoty $f(x)$ „veľmi blízko“ k istému číslu $L \neq f(a)$. Číslo L (limita) je pritom akoby funkčná hodnota v tom vylúčenom bode „pôvodnej“ (spojitej) funkcie. Rozdiel je v tom, že my tu musíme z okolia bodu a vylúčiť práve číslo a. Číslo L teda závisí na hodnotách funkcie f v istom okolí bodu a, avšak *nezávisí* na tom, či a ako je definované číslo $f(a)$. Takže číslo $L = 4$ môžeme nazývať limitou funkcie f v bode $a = 2$.

súvisia. Potom dokončí zavedienie pojmu derivácia. Hovorí, že je to smernica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $A[x_0, f(x_0)]$. To sa potom ďalej formuluje pomocou limity.

V učebnici T. Hechta, ktorá je síce veľmi prehľadná a „priateľská“ k žiakom, avšak výrazne minimalistická (napr. sa uvádza len vlastná limita funkcie vo vlastnom bode), sa postupuje veľmi podobným, avšak o niečo názornejším spôsobom. Základom je nasledujúci motivačný príklad.

Príklad 2.1. ([8]) Zistite smernicu lineárnej funkcie, ktorá dobre aproximuje funkciu $y = x^2$ v bode 2.

Riešenie: Najprv si zvolíme sečnicu, ktorá prechádza bodom $A[2;4]$ a tiež bodom B, ktorý leží na grafe funkcie $y = x^2$ „blízko“ bodu A. Môžeme si zvoliť napr. $B[2,1;\, 4,41]$. Smernica priamky AB bude

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4,1.$$

Keďže sú body A a B umiestnené tak „blízko“, tak sečnica AB „dobre kopíruje“ graf funkcie $y = x^2$ v okolí[2] bodu A.

Teraz sa zaoberajme tým, čo sa deje v bezprostrednom okolí. Bod B sme zvolili tak, že rozdiel $x_B - x_A = \Delta x$ bol $0,1$. Znamená to však, že $\Delta x = 0,1$ je také okolie? Toto nás privádza k dôležitej myšlienke, že Δx by malo byť zvolené tak, aby bolo čo najbližšie k hodnote 0.

Čiže miesto prírastku $\Delta x = 0,1$ zvolíme Δx všeobecne a vypočítame pomer prírastku funkčnej hodnoty a prírastku nezávislej premennej:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \frac{4\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x.$$

Pre $\Delta x = 0$ tento pomer nemá zmysel. Výraz $4 + \Delta x$ však pre $\Delta x = 0$ zmysel má a má hodnotu 4. Môžeme teda povedať, že pomer (smernica) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ má „blízko“ bodu 2 (keď Δx je veľmi malé) hodnotu „blízku“ 4. V bode 2 má hodnotu práve 4. □

Na základe tohto príkladu vidíme, že by bolo vhodné zaviesť pojmy, ktoré by nám túto cestu skrátili. Vidíme tiež, že v dynamickom prístupe pojem spojitosť na rozdiel od učebníc Hrubého/Kubáta a E. Kraemera na začiatku vôbec nepotrebujeme. K pojmu limita funkcie (a k derivácii) sa vieme dostať veľmi intuitívne. Samozrejme stále zostáva otázka, či sa to nedá urobiť ešte prirodzenejšie.

[2]Pojem okolie tu chápeme skôr intuitívne.

2.2. Analýza poradia zavedených typov limity funkcie

Keď som si prečítal všetky uvedené učebnice, zistil som, že sa vždy začína s pojmom vlastná limita funkcie vo vlastnom bode a až potom (ak vôbec) sa objasnia aj ďalšie možnosti, napr. nevlastná limita funkcie v nevlastnom bode. Premýšľal som, prečo je tomu tak, a či vôbec niekedy niekto uvažoval nad tým, že toto usporiadanie pojmov nemusí byť práve najlepšie, resp. že existuje usporiadanie účelnejšie.

Otázkou teda je, či je zaužívané usporiadanie úplne vhodné. Naozaj by sme mali začínať práve s vlastnou limitou vo vlastnom bode? Prečo nie napr. s nevlastnou limitou v nevlastnom bode? Vážne si myslíme, že žiakov zaujme, keď vezmeme spojitú funkciu a „vytrhneme" z nej jeden bod? Nie je možné to urobiť tak, aby bol daný príklad bližšie k realite študujúcich?

Myslím si, že je tiež vhodné, aby sme pri zavedení pojmu limita funkcie využili poznatky o limite postupnosti, ktorú už žiaci poznajú. Istú blízkosť takémuto zmýšľaniu možno pozorovať v nemeckej učebnici [13] (pozri definíciu 2.11.). Autori sa tu snažia pojem limita funkcie vysvetliť pomocou už známej limity postupnosti. Toto zavedenie pojmu limita funkcie sa tak od ostatných učebníc (českých aj slovenských) líši celkom výrazne a je snáď aj vhodnejšie.

2.3. Ako limita funkcie nadväzuje na zavedený pojem funkcia

Autor O. Odvárko [15] začína s učivom o funkciách takto: Máme kocku s hranou dĺžky a. Napíšme vzorec vyjadrujúci jej povrch. Čiže máme $S = 6a^2$. Čo keby sme chceli číselne ukázať závislosť povrchu kocky na dĺžke jej hrany? Za dĺžku a by sme postupne dosadzovali napr. $0,1$ cm; $0,5$ cm; 1 cm; 2 cm; 5 cm. Ako povrch by nám postupne vychádzali čísla $0,06$ cm^2; $1,5$ cm^2; 6 cm^2; 24 cm^2; 150 cm^2. Takže každému číslu z čísel udávajúcich číselnú hodnotu dĺžky hrany kocky je priradené vždy práve jedno číslo, ktoré udáva číselnú hodnotu povrchu danej kocky. Teda pomocou vzorca $S = 6a^2$ sú kladným číslam jednoznačne priraďované kladné čísla.[3]

[3] Veľmi podobným spôsobom sú funkcie zavedené aj v učebniciach od T. Hechta [6] a [9]. V nemeckej učebnici [13] sa funkcie zavádzajú pomocou známeho Fibonacciho príkladu s králikmi. V týchto učebniciach mi však chýbala akási prípravná pôda pre neskoršie zavedenie pojmu limita funkcie.

Po prečítaní tohto učiva som sa zamyslel: Žiaci pochopia, čo je to funkcia. Možno však z tohto učíva pochopiť, prečo je dobré neskôr zaviesť nový pojem — limita funkcie? Vezmime si napr. vzorec $S = 6a^2$, ku ktorému sme sa pred chvíľou dostali. Aký bude povrch kocky, keď bude vzdialenosť a „takmer“ nulová? Potom si uvedomíme, do akej miery slová ako „takmer“ alebo „blíži“ úzko súvisia so slovom „limita“.

Neskôr, keď sa v tejto učebnici hovorí o grafoch funkcií, sa vytvorí akási prípravná pôda pre neskoršie zavedenie pojmu postupnosť v učebnici *O. Odvárko: Posloupnosti a řady* [16]. (Podobnosť pojmov funkcia a postupnosť je evidentná napr. v súvislosti s ich grafmi.) Myslím si, že táto prípravná pôda je veľmi motivujúca pri neskoršom zavedení pojmu limita funcie pre ľahšie hľadanie súvislostí medzi pojmami limita postupnosti a limita funkcie. V jednotlivých stredoškolských učebniciach, ktoré som analyzoval z hľadiska prístupu k pojmu limita funcie ([11], [8], [13], [14], [18]), som však hľadanie takýchto súvislostí nevidel, čo je škoda.

V učebnici od Hrubého/Kubáta [11] sa v súvislosti s pojmom funkcia zavádza aj pojem spojitosť funkcie a pojem okolie bodu.[4] Tieto pojmy sú dôležité najmä v statickom zavedení limity funkcie. Autori tu zdôrazňujú, že medzi všetkými funkciami majú práve tie spojité veľký význam. Slovo spojitý pripomína niečo, čo je plynulé a neprerušované. Intuitívne by sa dalo povedať, že funkcia je spojitá vtedy, keď jej graf nakreslíme jedným ťahom.

[4]Ako autori Hrubý/Kubát [11] popisujú pojem spojitosť funkcie v bode? Uvedú príklad exponenciálnej funkcie $f : y = 2^x$, ktorá je definovaná v istom okolí bodu 2. V bode $a = 2$ nadobúda hodnoty $2^2 = 4$. Ak budeme za x dosadzovať rôzne hodnoty, napr. od $1,9$ do $2,1$ a vypočítame hodnoty 2^x, zistíme, že táto funkcia má v blízkosti bodu 2 zaujímavú vlastnosť: Malým hodnotám Δx odpovedajú aj malé hodnoty Δy. Dalo by sa teda povedať, že keď sa x blíži k bodu 2, blížia sa aj hodnoty $f(x) = 2^x$ k hodnote $f(2) = 4$. Slovo „blíži“ možno nie je úplne presné, tak sa radšej používa zavedenie okolia. Teda nech zvolíme akokoľvek malé okolie bodu 4 na osi y, vždy nájdeme také okolie bodu 2 na osi x, že pre všetky x zo svojho okolia náležia hodnoty $f(x)$ do okolia na osi y. Na základe tejto úvahy autori vyslovia definíciu.

Prakticky rovnakým spôsobom sú pojmy spojitosť a okolie bodu uvedené aj v učebnici od E. Kraemera [14] a v nemeckej učebnici [13]. Naopak pri dynamickom zavedení (T. Hecht [8] a B. Riečan [18]) sa tieto pojmy na začiatku vôbec nezavádzajú, prípadne sa chápu len intuitívne.

V tejto učebnici sa tiež pripomína, že funkcie sú vlastne základným objektom infinitezimálneho počtu, a teda skúmanie vlastností funkcie f v bode a neznamená len vypočítať hodnotu $f(a)$, ale najmä zisťovať, ako sa menia hodnoty funkcie $f(x)$, ak sa premenná x blíži k bodu a, resp. ak sa bod x príliš nelíši od bodu a. To už nás však vedie k pojmu limita funkcie.

2.4. Definície limity funkcie

D. Hrubý a J. Kubát [11] uvádzajú definície vlastnej aj nevlastnej limity funkcie, vo vlastnom i v nevlastnom bode.

Definícia 2.1. ([11]) *Funkcia f má v bode a limitu L,* ak k ľubovolne zvolenému okoliu bodu L existuje okolie bodu a tak, že pre všetky reálne $x \neq a$ z tohto okolia náležia hodnoty $f(x)$ zvolenému okoliu bodu L. □

Definícia 2.2. ([11]) *Funkcia f má v bode a nevlastnú limitu $+\infty$,* ak ku každému číslu K existuje také $\delta > 0$, že pre všetky reálne $x \neq a$ z okolia $(a - \delta, a + \delta)$ bodu a je $f(x) > K$. □

Definícia 2.3. ([11]) *Funkcia f má v bode a nevlastnú limitu $-\infty$,* ak ku každému číslu K existuje také $\delta > 0$, že pre všetky reálne $x \neq a$ z okolia $(a - \delta, a + \delta)$ bodu a je $f(x) < K$. □

Definícia 2.4. ([11]) *Funkcia f má v nevlastnom bode $+\infty$ limitu L,* ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo x_0 tak, že pre všetky reálne $x > x_0$ patria funkčné hodnoty $f(x)$ do okolia $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. □

Definícia 2.5. ([11]) *Funkcia f má v nevlastnom bode $-\infty$ limitu L,* ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo x_0 tak, že pre všetky reálne $x < x_0$ patria funkčné hodnoty $f(x)$ do okolia $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. □

Definícia 2.6. ([11]) *Funkcia f má v nevlastnom bode $+\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$,* ak ku každému číslu K existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x > x_0$ platí $f(x) > K$. □

DEFINÍCIA 2.7. ([11]) *Funkcia f* má *v nevlastnom bode $+\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$,* ak ku každému číslu K existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x > x_0$ platí $f(x) < K$. □

DEFINÍCIA 2.8. ([11]) *Funkcia f* má *v nevlastnom bode $-\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$,* ak ku každému číslu K existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x < x_0$ platí $f(x) > K$. □

DEFINÍCIA 2.9. ([11]) *Funkcia f* má *v nevlastnom bode $-\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$,* ak ku každému číslu K existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x < x_0$ platí $f(x) < K$. □

E. Kraemer [14] uvádza takmer totožné definície. V učebnici T. Hechta [8] je to takto:

DEFINÍCIA 2.10. ([8]) Nech pre funkciu f a nejaký otvorený interval M, ktorý obsahuje bod a, je g taká spojitá funkcia[5] na množine M, že $g(x) = f(x)$ pre všetky $x \in M \setminus \{a\}$. Potom *limitou funkcie f v bode a* nazývame číslo $b = g(a)$. □

B. Riečan [18] má obdobmú definíciu. Výrazne inak je to v nemeckej učebnici [13]:

DEFINÍCIA 2.11. ([13]) Nech f je funkcia a x_0 a g sú reálne čísla. Funkcia f nech je definovaná v okolí bodu x_0, nanajvýš s výnimkou tohto bodu. Hovoríme, že *funkcia f* má *v bode x_0 limitu g* vtedy, keď pre každú postupnosť (x_n), $x_n \in \mathsf{D}(f)$ a $x_n \neq x_0$, ktorá konverguje k x_0, konverguje postupnosť $(f(x_n))$ k príslušnej hodnote g. □

Mohli by sme teraz uvažovať, ktoré definície sú vhodnejšie a ktoré menej. Už som sa vyjadril o (prirodzenejšom) dynamickom zavedení limity funkcie, v ktorom sa napokon dospeje k definícii 2.10. Asi najnázornejšia je posledná definícia z nemeckej učebnice [13], ktorá využíva znalosti o postupnostiach, ktoré by žiaci už mali mať.

2.5. Definície derivácie funkcie v bode

D. Hrubý a J. Kubát [11] uvádzajú takúto definíciu.

[5]Pojem spojitosť pred znením definície zavedený nebol. Tento pojem sa tu teda chápe skôr intuitívne.

DEFINÍCIA 2.12. ([11]) Majme funkciu f definovanú v istom okolí bodu x_0. Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

nazývame ju *deriváciou funkcie f v bode x_0*. □

Takmer rovnaká definícia je aj u E. Kraemara [14] a v nemeckej učebnici [13]. Pre porovnanie si uvedieme definíciu tohto pojmu aj v učebnici T. Hechta [8] (dynamický prístup).

DEFINÍCIA 2.13. ([8]) *Deriváciou funkcie f(x) v bode x_0* nazývame

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ak táto limita existuje. Značíme ju $f'(x_0)$. □

Vidíme, že v tejto definícii sme nepoužili pojem okolie bodu. Takmer rovnaká definícia je aj u B. Riečana [18].

2.6. Porovnanie použitých aplikácií

Keď porovnáme všetky použité učebnice ([11], [8], [13], [14], [18]), uvidíme v ponúknutých aplikáciách určité rozdiely. U Hrubého/Kubáta [11] sú najmä geometrické aplikácie, ako napr.:

ÚLOHA 2.2. ([11]) Nájdite pravouholník, ktorý má pri danom obvode maximálny obsah.

ÚLOHA 2.3. ([11]) Do kruhu s polomerom r vpíšte pravouholník maximálneho obsahu.

ÚLOHA 2.4. ([11]) Na parabole o rovnici $2x^2 + 2y - 9 = 0$ nájdite bod, ktorého vzdialenosť od počiatku sústavy súradníc je minimálna.

ÚLOHA 2.5. ([11]) Od svetelného bodu A je vo vzdialenosti a stred S gule s polomerom x, $x < a$. Určite polomer x gule tak, aby z bodu A osvetlený guľový vrchlík mal najväčší obsah.

ÚLOHA 2.6. ([11]) Priemyselný závod Z je vzdialený 5 km od hlavnej cesty vedúcej do mesta M. Vzdialenosť závodu Z od mesta M je 13 km. Určite, pod akým uhlom α je treba vybudovať vedľajšiu cestu k hlavnej, aby doprava materiálu zo Z do M bola najlacnejšia. Predpokladané náklady na prepravu 1 t materiálu na 1 km sú po hlavnej ceste 5 Kč a po vybudovanej vedľajšej ceste 15 Kč.

U E. Kraemera [14] ide taktiež o aplikácie skôr geometrické, použitie učiva diferenciálneho počtu je už o niečo väčšie.

V učebnici T. Hechta [8], ktorá je na rozdiel od učebnice Hrubého/Kubáta (maximalistickej) skôr minimalistická, sa v podstate aplikácie ani nenachádzajú. Nejaké aplikácie (takmer rovnaké ako u Hrubého/Kubáta) sú potom v zbierke k tejto učebnici od S. Bednářovej [1]. U B. Riečana [18] ide skôr o fyziku, kde je vidieť použitie tohto učiva aj v bežnom živote.

V nemeckej učebnici [13] sú aj aplikácie známe z českých učebníc (ako napr. určiť rozmery nejakého predmetu, aby mal čo najmenší povrch), ale tiež aj zaujímavejšie úlohy, ako napr. vypočítať približne riešenie rovnice vyššieho stupňa (napr. štvrtého) len s využitím stredoškolskej matematiky (derivácie funkcie v bode).

Za najvhodnejší prístup k aplikáciám považujem práve učebnicu [13], pretože je tam asi najlepšie vidieť aplikovateľnosť pojmov limita funkcie a derivácia.

KAPITOLA 3

Limita funkcie a derivácia funkcie v stredoškolských učebniciach na začiatku 20. storočia

Práve sme dokončili analýzu stredoškolských učebníc z hľadiska prístupu k pojmom limita funkcie a derivácia. Otázkou ale je, či je takáto analýza dosť široká, a či nám teda podáva dostatok informácií k tomu, aby sme mali čo najkomplexnejší pohľad na túto problematiku. Keď som uvažoval nad touto otázkou, dostal som sa k výroku J. Potůčka, ktorý povedal:[1] *„Niekedy vynakladáme značné úsilie na overenie či objavenie vecí, ktoré pred nami už našli a overili generácie našich predchodcov. Túto prácu a energiu by sme mohli ušetriť a využiť ju účelnejšie.“* Myslím si, že tento výrok jednoznačne ukazuje, že je dobré analýzu učebníc o limite funkcie a deriváciách rozšíriť aj o (aspoň české) historické učebnice, ktoré nám (snáď) dajú ešte viac informácií a nadhľadu, ktoré sú potrebné pre vznik druhej časti tejto práce — syntézy.

Pozrime sa teda, ako to bolo v českých krajinách (neskôr v Československu) na začiatku 20. storočia. Budeme porovnávať stredoškolskú učebnicu matematiky od B. Bydžovského [2] z roku 1911 s učebnicou od J. Vojtěcha [21] z roku 1912. Táto kapitola by mala byť ukážkou toho, ako sa k úvodu do diferenciálneho počtu pristupovalo v minulosti, čo môže byť pekná inšpirácia aj pre dnešných stredoškolských učiteľov.

3.1. Porovnanie prístupov k zavedeniu pojmu limita funkcie a derivácia funkcie

Keď si otvoríme učebnice B. Bydžovského [2] a J. Vojtěcha [21] a bude nás zaujímať úvod do diferenciálneho počtu, tak medzi prístupmi k zavedeniu jednotlivých pojmov uvidíme niekoľko hlavných rozdielov. Hneď je vidieť, že prístup u B. Bydžovského je zameraný na konkrétne matematické objekty, ktoré už žiaci poznajú. Autor sa zaoberá kvadratickou funkciou, hľadá jej extrémy a uvedie tak čitateľa k zavedeniu pojmu limita

[1] Pozri úvod diela [17].

funkcie a derivácia. Takýto prístup je k žiakom iste priateľský, keďže žiaci nadväzujú na niečo, čo už dobre poznajú.

Naopak u J. Vojtěcha je prístup viac abstraktný, pretože pri zavádzaní nového pojmu sa vychádza zo všeobecnej funkcie $y = f(x)$. To sa môže zdať výhodné z hľadiska toho, že žiak hneď vie spočítať akúkoľvek deriváciu. Avšak najmä pre slabších žiakov je lepšie postupovať pomocou známeho Komenského hesla *Od konkrétneho ku všeobecnému.* Na druhej strane tu autor pripomína, že v minulosti (v učive o kužeľosečkách) sa takým konkrétnym problémom už zaoberali, čiže žiaci by už mali byť na takúto abstrakciu pripravení.

Dôležité je tiež poznamenať, že učebnica B. Bydžovského je učebnicou aritmetiky písaná pre reálky (zamerané viac prakticky a viac k matematike než k humanitným vedám) a učebnica J. Vojtěcha je učebnicou geometrie pre gymnáziá a reálne gymnáziá (viac humanitných a teoretických predmetov). To je tiež dôvod pre rozdiely, ktoré v týchto učebniciach sú. Bohumil Bydžovský a Jan Vojtěch boli poprednými českými (československými) matematikmi svojej doby. Úroveň matematiky v týchto učebniciach je teda skutočne úctyhodná.

V učebnici B. Bydžovského sa začína s nasledujúcou motiváciou. Ideme hľadať maximá a minimá kvadratickej funkcie, aby sme dospeli k pojmu derivácia.

Funkciu

$$y = ax^2 + bx + c$$

možno napísať:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

pričom $x = -\frac{b}{2a}$ je x-ová súradnica vrcholu paraboly.

a) Pre $a > 0$ pri rastúcom x funkcia najprv klesá; pre $x = -\frac{b}{2a}$ (tj. vo vrchole paraboly) prestane klesanie a nastane stúpanie; funkcia už potom stále rastie. Funkcia teda klesá pre $x < -\frac{b}{2a}$, čiže $2ax + b < 0$, rastie pre $x > -\frac{b}{2a}$, čiže $2ax + b > 0$. Pre $x = -\frac{b}{2a}$ nadobúda funkcia najmenšie hodnoty rovné $\frac{4ac-b^2}{4a}$; tejto hodnote hovoríme *minimum.*

b) Pre $a < 0$ pri rastúcom x funkcia najprv rastie; pre $x = -\frac{b}{2a}$ nadobúda najväčšej hodnoty rovnej $\frac{4ac-b^2}{4a}$, ktorej hovoríme *maximum*; potom funkcia klesá. Funkcia teda rastie pre $x < -\frac{b}{2a}$. Ak potom násobíme obe strany tejto nerovnosti záporným číslom $2a$, dostaneme $2ax > -b$, tj. $2ax + b > 0$. Podobne zistíme, že funkcia klesá pre $2ax + b < 0$.

VETA 3.1. [2] *Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$ rastie pre tie hodnoty x, ktoré činia výraz $2ax + b$ kladným; klesá pre tie hodnoty x, ktoré činia tento výraz záporným. Pre tú hodnotu x, ktorá vyhovuje rovnici $2ax + b = 0$, nadobúda funkcia hodnoty krajnej, a to pri $a > 0$ minima, pri $a < 0$ maxima.*

Táto krajná hodnota je v oboch prípadoch rovná $\frac{4ax-b^2}{4a}$. Poznamenajme, že výraz $2ax + b$, ktorý rozhoduje o akosti zmeny funkcie, nazývame *deriváciou funkcie.* Je jasné, že derivácia funkcie $y = ax^2$ je $2ax$, derivácia funkcie $y = x^2$ je $2x$, derivácia funkcie $y = bx + c$ je b, atď.

Na túto motiváciu B. Bydžovský následne nadviaže, a tak limitu funkcie ako aj pojem derivácia riadne zavedie. Myslím si, že takto začať je veľmi elegantné (a dynamické).

Naopak J. Vojtěch namiesto motivácie niekoľkými vetami pripomenie, že už v predchádzajúcom učive bola určovaná dotyčnica u jednotlivých kužeľosečiek ako hraničná poloha sečnice, ktorá sa otáča okolo jedného svojho priesečníka s krivkou. A to tak, že druhý jej priesečník sa blížil viac a viac k prvému. Smernica dotyčnice tak bola nájdená ako hraničná hodnota smernice sečnice pre prípad, že súradnice oboch jej bodov (spoločných s kužeľosečkou) sa blížia k sebe bez obmedzenia. Autor potom hovorí, že rovnakým postupom môžeme definovať aj dotyčnicu a hľadať jej smernicu u všetkých kriviek.

J. Vojtěch sa teda snaží ísť cestou, ktorá znamená porozumieť akejkoľvek kužeľosečke. To môže byť užitočné, avšak aj trochu náročné. Samotný spôsob zavedenia pojmu derivácia funkcie sa však od učebnice B. Bydžovského veľmi nelíši.

3.2. O zavedení pojmu limita funkcie a derivácia funkcie

V učebnici B. Bydžovského [2] sa najprv zaoberá pojmami sečnica a dotyčnica paraboly. Autor hovorí, že postup z predchádzajúcej motivácie možno zovšeobecniť, ak ho uvážime z iného hľadiska.

Majme body M, M_1 dané na parabole o rovnici

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Nech

$$x_1 = x + \Delta x, \qquad y_1 = y + \Delta y,$$

tj.

$$\Delta x = x_1 - x, \qquad \Delta y = y_1 - y.$$

Považujme bod $M[x, y]$ za pevný bod. Potom Δx je *prírastok* premennej, Δy je príslušný *prírastok* jej funkcie. Smernica priamky, ktorá je určená bodmi M, M_1 je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

tj. rovná podielu oboch prírastkov. Keďže body M, M_1 ležia na parabole, vyhovujú jej súradnice rovnici paraboly, tj.

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c.$$

Odčítaním dostaneme

$$y_1 - y = \Delta y = a(x_1^2 - x^2) + b(x_1 - x) = a\Delta x(x + x_1) + b\Delta x.$$

Po dosadení do výrazu pre smernicu máme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x + x_1) + b = 2ax + b + a\Delta x.$$

Teraz si predstavme, že bod M_1 sa pohybuje po parabole a blíži sa *neobmedzene* k bodu M, tj. tak, že dĺžka oblúčika $\widehat{MM_1}$ sa stáva menšia, než dĺžka ľubovolne malá. Potom môžeme povedať, že priamka $\overline{MM_1}$ sa neobmedzene blíži k určitej *hraničnej* polohe, v ktorej ju nazývame *dotyčnicou.* Zároveň Δx sa neobmedzene blíži k 0 a to isté sa deje s Δy. Avšak pomer $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ značí stále smernicu sečnice.

Keď sa sečnica blíži k dotyčnici, blíži sa tento pomer určitej *hraničnej* hodnote, totiž k smernici dotyčnice. Z toho potom môžeme usúdiť, že keď sa Δx blíži k 0, blíži sa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ k hodnote $2ax + b$. Teda $\operatorname{tg} \alpha = 2ax + b$ je *smernica dotyčnice.* Hovoríme potom, že výraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sa blíži *limite* rovnej $2ax + b$, keď Δx sa blíži k nule. Píšeme [2]

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b$$

a čítame *limes* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, keď Δx sa blíži k nule.[2] Teraz môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

[2]Dnes sa samozrejme píše $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ a číta „limita.“

VETA 3.2. [2] *Derivácia kvadratickej funkcie pre určitú hodnotu premennej je rovná smernici dotyčnice v príslušnom bode paraboly, ktorá funkciu graficky znázorňuje.*

B. Bydžovský sa potom venuje aj funkciám vyšších stupňov, čiže toto učivo zovšebecní. V učebnici J. Vojtěcha [21] sa pojmy limita funkcie a derivácia zavádzajú veľmi podobne. Všetko sa však tvorí všeobecne pomocou funkcie $y = f(x)$.

3.3. Porovnanie použitých aplikácií

Aplikácie k úvodu do diferenciálneho počtu sú v učebniciach B. Bydžovského [2] a J. Vojtěcha [21] najmä geometrického charakteru. U B. Bydžovského ide predovšetkým o hľadanie miním a maxím. U J. Vojtěcha ide o trochu viac geometricky zamerané úlohy. V oboch učebniciach mi chýbali aplikácie, ktoré by boli bližšie k bežnému životu žiakov. Aj keď v tej dobe to mohlo byť vnímané inak, než v dnešnej dobe, dnešnými žiakmi. Pozrime sa na niekoľko takýchto úloh.

ÚLOHA 3.1. ([2]) Do gule s polomerom r vpíšte priamy valec maximálneho objemu. Za premennú vezmite výšku valca.

ÚLOHA 3.2. ([2]) Z kmeňa s kruhovým prierezom (polomer r) je možné vytesať čo najpevnejší trám (pevnosť proti lomu je daná vzorcom $y = kxv^2$, kde k je konštanta, x šírka, v výška trámu). Urobte konštrukciu.

ÚLOHA 3.3. ([2]) Pri danom povrchu má kocka zo všetkých pravouhlých rovnobežnostenov so štvorcovou základňou najväčší objem. Dokážte! Ako znie veta obrátená?

ÚLOHA 3.4. ([2]) Určte najkratšiu vzdialenosť počiatku od paraboly, ktorej rovnica je $y = x^2 - 2$.

ÚLOHA 3.5. ([21]) Určte dotyčnicu kužeľosečky $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ rovnobežnú s priamkou $2x + 3y = 0$. Koľko dotyčníc možno viesť ku kužeľosečke v danom smere?

ÚLOHA 3.6. ([21]) Na krivke $y = \frac{a}{x^2}$ nájdite bod, ktorého normála ide počiatkom.

ÚLOHA 3.7. ([21]) Aké rozmery má najväčší obdĺžnik vpísaný do elipsy s poloosami a, b?

ÚLOHA 3.8. ([21]) Intenzity dvoch svetelných zdrojov sú v pomere 1:8. Ich vzdialenosť je 6 m. Ktorý bod na ich spojnici je najmenej osvetlený?

Časť 2

Syntéza

KAPITOLA 4

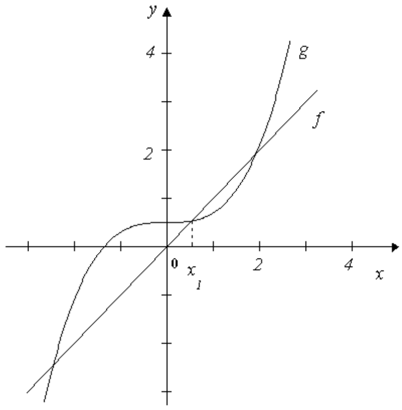
Limita postupnosti

V tejto kapitole sa budeme zaoberať postupnosťami a limitou postupnosti. Najprv si zavedieme pojem postupnosť tak, aby sme tento spôsob zavedenia mohli nato využiť pri zavedení pojmu limita postupnosti. Ukážeme si, prečo je dobré poznať tieto pojmy, vysvetlíme si ich a pokúsime sa pochopiť ich význam. Výklad bude sprevádzaný aj ilustračnými príkladmi pre lepšie porozumenie tejto matematiky. Pri tvorbe tohto textu som vychádzal z analýzy českých aj zahraničných stredoškolských učebníc (prvá časť tejto práce) a nechal som sa inšpirovať predovšetkým učebnicami [13], [7], [12], [16].

Veľmi dôležitý je pohľad didaktický. Nezabúdajme preto, že učiteľ na strednej škole (narozdiel od žiaka) už má množstvo matematických skúseností a svoje znalosti má pevne zafixované a hierarchizované. Má tak vytvorenú určitú štruktúru, ktorá je súborom abstraktných pojmov a vzťahov podložených veľkým počtom konkretizácií. Niektorí učitelia si žiaľ neuvedomujú, že túto štruktúru nemožno len tak transplantovať do vedomia študenta [4].

S tým úzko súvisí aj usporiadanie učiva. Čiže pri zavedení nového pojmu je treba začať motivačným príkladom, v ktorom sa spája motivácia a získanie skúsenosti. Potom nasleduje definícia, ilustačné príklady a napokon aplikácie. Z hľadiska usporiadania učiva bude pre nás zaujímavé uvažovať aj nad usporiadaním jednotlivých typov limít a sledovanie väzieb medzi nimi.

Prečo je vždy dobré začať motiváciou? Ide o súbor okolností, ktoré zvyšujú citlivosť psychiky na určité podnety. Motivácia tiež vedie k intenzívnemu zameraniu a k citovému upnutiu na sledovaný jav [10]. Teda je to akési ohnisko, kde sa začína prvá skúsenosť, nasleduje abstrakčný zdvih a napokon vzor a ďalšie skúsenosti. V tomto duchu budeme postupovať v celej syntéze tejto práce.



OBR. 4.1. Grafy funkcií f a g z príkladu 4.1.

4.1. Postupnosti

Budeme predpokladať, že žiaci už majú základné poznatky o funkciách (na úrovni gymnázia) osvojené. Začneme s motiváciou, ktorá nám zároveň pripraví pôdu pre neskoršie zavedenie pojmu vlastná limita postupnosti.

PRÍKLAD 4.1. Riešme rovnicu $\frac{x^3}{5} - x + \frac{1}{2} = 0$ približne, s presnosťou na 3 desatinné miesta, pre $x \in (0; 1)$.

RIEŠENIE: Túto rovnicu si môžeme prepísať ako

$$x = \frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}.$$

Môžeme povedať, že k riešeniu sme blízko, keď hodnota $\frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}$ je vždy o málo odlišná od x. Takto si môžeme zapísať dve funkcie:

$$f : y = x,$$
$$g : y = \frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}.$$

Grafy týchto funkcií sa pretnú (pre $x \in (0; 1)$) v jednom bode — dostaneme jeden koreň x_1. Jeho približná hodnota je asi $a_1 = 0,5$ (vidíme z grafu, obr. 4.1.). Aby sme dostali čo najpresnejší výsledok pre koreň x_1, budeme postupovat takto: Keďže potrebujeme také x, aby funkčná hodnota funkcie f bola čo najbližšie k funkčnej hodnote funkcie g, dostaneme z hodnoty a_1 ďalšie hodnoty a_2, a_3, ..., a_n, ... nasledujúcim spôsobom.

$$a_2 = \frac{a_1^3}{5} + \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2^3}{5} + \frac{1}{2}, \quad ..., \quad a_n = \frac{a_{n-1}^3}{5} + \frac{1}{2}, \ ...$$

Takto postupne dostávame *postupnosť* hodnôt a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... Ak začneme s $a_1 = 0,5$, tak máme postupnosť:

$$a_2 = \frac{0,5^3}{5} + \frac{1}{2} = 0,525, \quad a_3 = \frac{0,525^3}{5} + \frac{1}{2} \doteq 0,529,$$

$$a_4 = \frac{0,529^3}{5} + \frac{1}{2} \doteq 0,530, \quad a_5 = \frac{0,530^3}{5} + \frac{1}{2} \doteq 0,530.$$

Keďže hľadáme hodnotu koreňa x_1 s presnosťou na 3 desatinné miesta, tak hodnota $x_1 \approx 0,530$. □

V tomto príklade sme dospeli k akejsi *postupnosti* hodnôt a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... Hodnotu a_2 vieme zapísať pomocou a_1, a_3 pomocou a_2 a podobne by sme vedeli zapísať aj a_n pomocou a_1. Tiež vidíme, že čím viac sa v tejto postupnosti blížime do nekonečna, tým presnejší výsledok dostávame. Ak chceme presne vedieť, čo to postupnosť je, musíme sa pozrieť na nasledujúcu definíciu.

Definícia 4.1. *Postupnosťou* reálnych čísel nazývame zobrazenie f množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Prvok $n \in \mathbb{N}$ nazývame indexom a prvok $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$ nazývame n-tým členom postupnosti f, ktorú potom označujeme

$$\boxed{(a_n)_{n=1}^{\infty}.}$$

Pri vypísaní členov postupnosti píšeme $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ □

4.2. Nevlastná limita postupnosti

Pozrime sa teraz na nový pojem — limita postupnosti. Začneme s nevlastnou limitou postupnosti. Vlastná limita postupnosti pôjde po nej. Prečo najprv nevlastná limita? Pre myseľ žiaka strednej školy je totiž jednoduchšie si vybudovať chápanie limitných procesov na postupnostiach, ktoré sú im bližšie. Žiaci skôr poznajú postupnosti 1, 2, 3, 4, atď., kde každé ďalšie číslo je o jedno väčšie alebo 5, 10, 15, 20, atď., kde každé ďalšie číslo je o 5 väčšie, než také postupnosti, ktorých hodnoty sa len zhlukujú okolo konkrétnej hodnoty.

Príklad 4.2. Riešme nerovnicu

$$2^n > 1\,000, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}.$$

Riešenie: Keď si vyjadríme n, dostaneme

$$n > \frac{3}{\log 2},$$

$$n > 9,$$

$$n \geq 10.$$

Vidíme, že riešením našej nerovnice v $\mathbb{N}$ je každé $n \geq 10$. Môžeme tak povedať, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 10$ je $2^n > 1\,000$. $\square$

Po tejto motivácii môžeme prejsť k zneniu definície.

Definícia 4.2. a) Ak ku každému reálnemu číslu A existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > A$, potom hovoríme, že *postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastnú limitu* $+\infty$ a píšeme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.}$$

b) Ak ku každému reálnemu číslu A existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < A$, potom hovoríme, že *postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastnú limitu* $-\infty$ a píšeme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.} \;\square$$

Napr. ak máme postupnosť $(n^2)_{n=1}^{\infty}$, tak $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Ak máme postupnosť $(-n^2)_{n=1}^{\infty}$, tak $\lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

Z príkladu 4.2. vidíme (skúmajúc postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2^n$, pozri obr. 4.2.), že nech si zvolíme akékoľvek reálne číslo A, tak vždy existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ je $2^n > A$.

A naozaj, ak je $A \leq 0$, tak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $2^n > A$. Za n_0 môžeme vziať ľubovolné prirodzené číslo. A ak je $A > 0$, tak n_0 dostaneme riešením rovnice

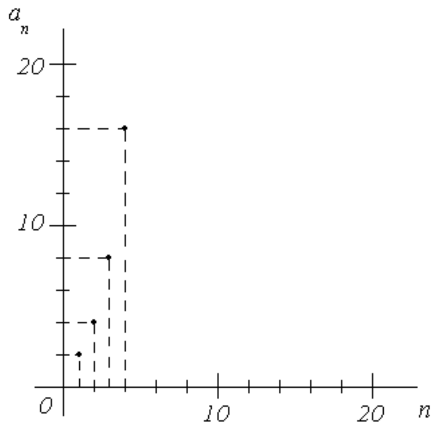
$$2^n > A,$$

teda

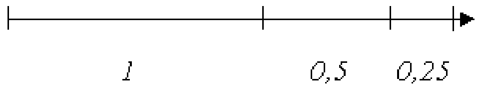
$$n > \frac{\log A}{\log 2}.$$

Za n_0 môžeme vziať akékoľvek prirodzené číslo väčšie než $\frac{\log A}{\log 2}$. A teda máme

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$



OBR. 4.2. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2^n$.



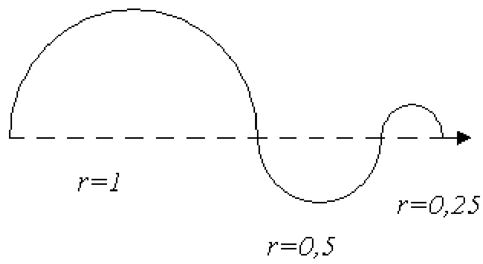
OBR. 4.3. Úsečka, ktorej veľkosť sa „blíži" k hodnote 2.

4.3. Vlastná limita postupnosti

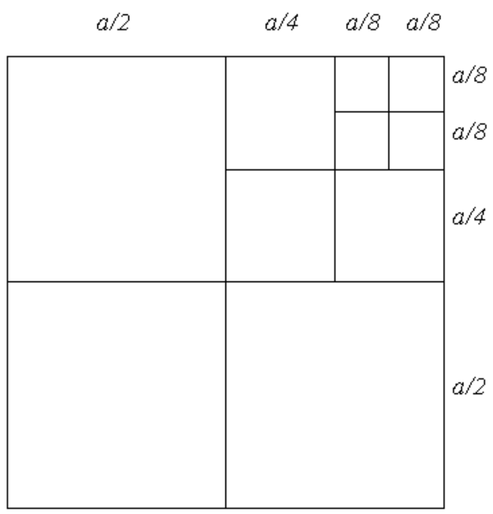
Teraz, keď žiaci majú predstavu o tom, čo je to nevlastná limita postupnosti, bude pre nich ľahšie pochopiť ďalší typ limity — vlastnú limitu postupnosti.

Ako motiváciu si môžeme zobrať situáciu na obr. 4.3. K akej hodnote sa blíži veľkosť úsečky, ktorá vzniká takým spôsobom, že si najprv vezmeme úsečku veľkosti 1 a pridávame k nej ďalšie, vždy o polovicu menšie, blížiac sa do nekonečna? Čiže dostávame postupnosť hodnôt 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... Zaujímavé je, že čím viac sa budeme blížiť do nekonečna (v pridávaní ďalších a ďalších úsečiek), tým viac sa bude veľkosť takto vzniknutej úsečky blížiť k hodnote 2.

Podobná situácia je aj na obr. 4.4. Máme vedľa seba polkružnice. Polomer prvej z nich je 1. Polomer každej ďalšej je vždy polovicou predchádzajúceho polomeru. Keďže obvod kružnice je $2\pi r$, tak obvod polkružnice budeme počítať ako πr. Obvod prvej polkružnice je teda $\pi \cdot 1 = \pi$. Obvod druhej je $\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$. Obvod tretej by bol $\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$. Takto



OBR. 4.4. Krivka, ktorej dĺžka sa „blíži“ k hodnote 2π.



OBR. 4.5. Štvorec s rozmerom a, delený na stále menšie štvorce.

by sme dostali postupnosť π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, ... Dalo by sa spočítať, že čím viac sa blížime do nekonečna, tým viac sa súčet všetkých týchto obvodov (teda dĺžka celej vzniknutej krivky) blíži k hodnote 2π.

Alebo máme takéto zadanie. Máme štvorec so stranou dĺžky a. Môžeme ho rozdeliť na 4 zhodné štvorce. Potom vezmeme jeden z nich a rozdelíme ho tiež na štyri zhodné štvorce. Nato opäť zoberieme jeden z týchto nových štvorcov a rozdelíme ho na 4 zhodné štvorce (pozri obr. 4.5). Takto by sme mohli pokračovať blížiac sa až k nekonečnu. Plocha stále sa zmenšujúceho štvorca by sa blížila k nule. Tu vidieť využitie limitného procesu, keďže k nule by sme sa iba blížili, no nikdy by sme ju nedosiahli. Spätne môžeme povedať, že keď plochy všetkých týchto použitých štvorcov spočítame (tj. najprv prvé 3, potom ďalšie 3 menšie, potom ďalšie 3 ešte menšie atď), dostaneme plochu celého pôvodného štvorca. Čiže dostaneme plochu a^2.[1]

Ak sa vrátime k príkladu 4.1. z podkapitoly 4.1., vidíme, že čím viac sa v danej postupnosti blížime do nekonečna, tým presnejší výsledok dostaneme. Tiež je tu teda prítomný limitný proces.

Definícia 4.3. Hovoríme, že *postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *vlastnú limitu* a, resp. že *konverguje* k číslu $a \in \mathbb{R}$ (je *konvergentná*), a píšeme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a,}$$

ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ platí nerovnosť

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

tj.

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \ \square$$

Teraz si ukážeme ilustračný príklad.

Príklad 4.3. Ukážte, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{1}{n}$, je konvergentná.

Riešenie: Intuitívne ľahko zistíme, že

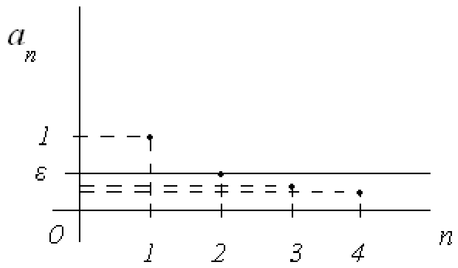
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ide o postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{1\,000\,000}, ...$ (Je vidieť, že čím viac sa blížime do nekonečna, tým viac sa blížime k hodnote 0.)

Ak si vezmeme napr. $\varepsilon = 0,5$, tak potom pre $n \geq 3$ bude iste platiť nerovnosť $|a_n - a| < \varepsilon$ (pozri obr. 4.6.). A skutočne, ak $n = 3$, tak $\left|\frac{1}{3} - 0\right| < 0,5$.

[1]Stredoškolák by to po prebratí učiva o nekonečných geometrických radoch mohol vedieť zapísať ako

$$\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2 + \frac{3}{64}a^2 + \frac{3}{256}a^2 + ... + \frac{3}{4^n}a^2 + ... = 3a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = a^2.$$



OBR. 4.6. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{1}{n}$, z príkladu 4.3.

Teraz počítajme všeobecne

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Z toho

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Vyjadríme si n a máme

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

resp.

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Čiže pre všetky prirodzené čísla $n \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1$ platí, že $|a_n - 0| < \varepsilon$. Ukázali sme tak, že číslo 0 je naozaj limitou danej postupnosti. □

Ak by sa nejaký žiak domnieval, že by mohol nájsť aj niekoľko limít (napr. dve) pre danú postupnosť, vyvedieme ho z omylu:

VETA 4.4. *Každá postupnosť má najviac jednu limitu.*

DÔKAZ. (Sporom.) Predpokladajme, že existuje postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ktorá má dve rôzne limity a a b. Teda $\lim_{n\to\infty} a_n$ je a a zároveň $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, kde $a < b$. Nech $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$. Môžeme povedať, že

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Takže $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Tiež môžeme povedať, že

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon.$$

Takže $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$. Vezmime teraz $n_0 = \max\,(n_1, n_2)$. Z toho

$$b - \varepsilon < a + \varepsilon$$

$$b - a < 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{2}(b - a) < \varepsilon,$$

čo je spor s predpokladom. Q.E.D.

4.4. Aplikácie

Rád by som pripomenul, že keď žiaci počítajú limity, zvykne u nich dochádzať k automatizácii tejto činnosti. Často musia počítať veľké množstvo limít bez akéhokoľvek využitia. Žiaci tak vedia vypočítať akúkoľvek limitu, ale často nevedia, čo to limita (postupnosti) je. Čo by teda mala automatizácia znamenať? Pri riešení zložitejšej úlohy (aplikácie) je žiakova pozornosť zameraná najmä na stratégiu riešenia. Počtové kroky sa robia s minimálnym výdajom intelektuálnej energie, pretože takéto kroky má žiak zautomatizované [10]. Teda automatizácia áno, ale len ako jeden fragment riešenia zložitejších úloh.

Pozrime sa teraz, ako veľmi jednoducho možno zistiť hodnotu čísla $\sqrt{3}$. Využijeme k tomu nástroj, ktorý sa na českých stredných školách už azda storočie nevyužíva — *reťazové zlomky*. Majú tvar

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}},$$

kde a_1 je celé číslo a a_2, a_3, a_4, ... sú prirodzené čísla.

Príklad 4.4. Vypočítajte približnú hodnotu čísla $\sqrt{3}$.

Riešenie: Číslo $\sqrt{3}$ si rozpíšeme ako reťazový zlomok. $\sqrt{3} = 1 + y = 1 + \frac{1}{1/y}$. Čomu sa však rovná $\frac{1}{y}$? Keďže

$$y = \sqrt{3} - 1,$$

tak

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1+y+1}{2} = 1 + \frac{y}{2}.$$

Teda máme

$$\sqrt{3} = 1 + y = 1 + \frac{1}{1/y} = 1 + \frac{1}{1+\frac{y}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2/y}}.$$

Čomu sa rovná $\frac{2}{y}$? Hneď máme $\frac{2}{y} = 2 \cdot \frac{1}{y} = y + 2$. Teraz máme

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2/y}} = 1 + \frac{1}{1\ +\frac{1}{2\,+\,y}} = 1 + \frac{1}{1\ +\frac{1}{2\,+\,\frac{1}{1/y}}}.$$

Čomu sa rovná $\frac{1}{y}$ však už vieme, čiže ďalej sa to bude už len periodicky opakovať. Výsledok je

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1\ +\frac{1}{2\,+\,\dots}},$$

kde $a_1 = 1,\ a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 1$ a $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 2$.

Vieme, že $\sqrt{3} \doteq 1,7$. A skutočne, keď si do nášho reťazového zlomku dosadíme aspoň a_1, a_2 a a_3, tak dostaneme

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1\ +\frac{1}{2}} \doteq 1,7. \ \Box$$

Tento príklad je zaujímavý tým, že čím dlhší reťazový zlomok napíšeme, tým presnejší výsledok máme (tým viac sa blížime k hodnote $\sqrt{3}$). Ale ešte jedna vec je tu zaujímavá. Keď som sa s tým stretol ja prvýkrát, bol to pre mňa matematický šok. Žiak by si mohol myslieť, že iracionálne čísla sú prosto „nerozumné“ čísla, pretože majú nekonečne dlhý desatinný rozvoj a ešte k tomu úplne neusporiadaný. Avšak teraz vidíme, že iracionálne čísla vôbec nie sú „nerozumné,“ ale práve naopak — majú určitú „periodicitu“ (v tom zmysle, že sa čísla v reťazovom zlomku periodicky opakujú).

KAPITOLA 5

Limita funkcie

V tejto kapitole nadviažeme na to, čo už o limitách vieme a svoje znalosti si rozšírime pomocou teórie funkcií. Na rozdiel od postupností, na ktoré sa môžeme pozerať ako na funkcie definované na množine prirodzených čísel, sa teda budeme zaoberať funkciami definovanými na množine reálnych čísel. Pri tvorbe tohoto textu som opäť vychádzal z analýzy množstva stredoškolských učebníc a nechal som sa inšpirovať najmä knihami [13], [8], [11] zohľadňujúc najmä dynamický prístup.

Okrem toho, že aj v tejto kapitole nás bude zaujímať usporiadanie jednotlivých typov limít a správne usporiadanie učiva, zdôrazníme ešte jednu vec, veľmi dôležitú práve v úvode do diferenciálneho počtu. Ide o to, že ak má mať vyučovanie nejaký význam, treba si dávať pozor na to, že *ak je dôležité všetko, nie je dôležité nič.* Čo to znamená? Napr. keď ruský matematik A. J. Chinčin na kurze matematickej analýzy (na vysokej škole) prišiel k vete o existencii primitívnej funkcie k spojitej funkcii a k Newtonovmu-Leibnizovmu vzorcu, začínal takýto výklad vždy na začiatku dvojhodinovej prednášky a skončil ho už pred skončením prvej hodiny. Potom študentom povedal, že *v tento deň majú veľký sviatok: zoznámili sa s jednou z perál matematického myslenia, so základnou vetou diferenciálneho a integrálneho počtu. Chce, aby im tento deň utkvel na celý život v pamäti a nemôže po dôkaze tejto skvelej vety hovoriť o veciach menej dôležitých. Preto nebude v prednáške pokračovať a všetci môžu ísť domov.*[1]

Dnes vieme, že infinitezimálny počet nevymysleli starí Gréci, aj keď by sa to mohlo tak niekomu zdať. Eudoxove a Archimedove výsledky totiž ukazujú, že sa o túto problematiku zaujímali. Ich problém bol možno v tom, že starí Gréci akosi nemali v obľube nekonečno. Uznávali síce potenciálne nekonečno, no s tým aktuálnym mali prosto problém.

Neskôr sa seriózne začal nekonečnom zaoberať až J. Kepler. Infinitezimálny počet vytvorili jeho nasledovníci (po asi 100 rokoch), a to v dvoch verziách — Leibnizovej a New-

[1]Pozri [4], str. 106.

tonovej. Vznik matematickej analýzy bol už na svojej ceste. D'Alambert a Cauchy spolu s bratmi Bernoulliovými a Eulerom postupne riešili nové problémy, ktoré nás fascinujú dodnes.

Faktom je, že pojem nekonečna je veľmi náročným a dôležitým matematickým pojmom. Je tak veľmi abstraktný, že je často aj pre starších žiakov ťažko pochopiteľný. Historické formovanie názorov o nekonečne veľmi dobre korešponduje aj s formovaním samotnej matematiky. A tak, ako rozvíjanie predstáv výrazne napomáha rozvoji osobnosti každého žiaka, aj porozumenie nekonečna odpovedá jeho určitej kognitívnej úrovni [3].

5.1. Nevlastná limita funkcie v nevlastnom bode

Prečo je prirodzenejšie zaviesť najprv limitu funkcie v nevlastnom bode a až potom vo vlastnom? Odpoveď je jednoduchá. Pri zavedení limity funkcie v nevlastnom bode môžeme využiť akúsi analógiu s limitou postupnosti. Pripomeňme si teraz definíciu nevlastnej limity postupnosti. (Pozri definíciu 4.2.)

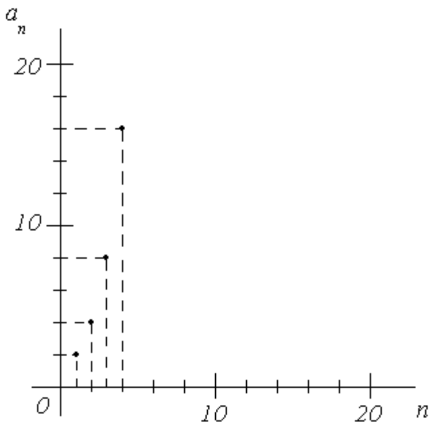
Keď si teraz porovnáme obr. 5.1., kde máme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2^n$ a obr. 5.2., kde máme funkciu $f : y = 2^x$, mali by sme vidieť určitú podobnosť. Stačí, ak si v myšlienkách preložíme vyznačené body (postupnosti) na obr. 5.1. spojitou krivkou a budeme na osi x-ovej uvažovať všetky reálne čísla. Takto dostaneme funkciu $f : y = 2^x$ (obr. 5.2.) a ľahko si uvedomíme, že hľadanie nevlastnej limity postupnosti a nevlastnej limity funkcie v nevlastnom bode (plus nekonečno) je veľmi podobné. (Toto je samozrejme len veľmi intuitívne uvedenie do problematiky).

Skúsme uvažovať grafy niekoľkých jednoduchých funkcií. Napr. $y = x^2$, $y = 5x + 6$ alebo $y = 3^x$. Keď si predstavíme (alebo načrtneme) ich grafy, vidíme, že ak na osi x-ovej blížime do plus nekonečna, tak na osi y-ovej sa príslušné funkčné hodnoty blížia vo všetkých troch prípadoch tiež do plus nekonečna.

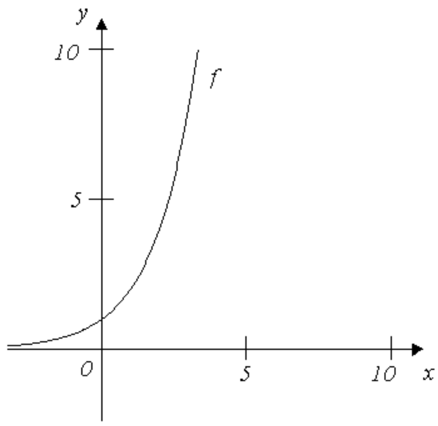
Pozrime sa na motivačný príklad.

Príklad 5.1. Riešme nerovnicu

$$2^x > 1\,000, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$



OBR. 5.1. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2^n$.



OBR. 5.2. Funkcia $f : y = 2^x$.

RIEŠENIE: Keď si vyjadríme x, dostaneme

$$x > \frac{3}{\log 2}, \quad \text{kde} \quad \frac{3}{\log 2} \doteq 9,966.$$

Môžeme tak povedať, že riešením našej nerovnice v $\mathbb{R}$ je každé $x > \frac{3}{\log 2}$. Čiže pre každé reálne číslo $x > \frac{3}{\log 2}$ je $2^x > 1\,000$. $\square$

Vidíme teda, že pre funkcie môžeme definovať obdobný pojem, ako pre postupnosti.

DEFINÍCIA 5.1. *Funkcia f má v nevlastnom bode $+\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$*, ak ku každému číslu A existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x > x_0$ platí $f(x) > A$. $\square$

Zapisujeme to ako

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

Napr. máme, že $\lim_{x\to\infty} 2x = +\infty$. Analogicky máme definíciu:

DEFINÍCIA 5.2. *Funkcia f má v nevlastnom bode $+\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$*, ak ku každému číslu A existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x > x_0$ platí $f(x) < A$. $\square$

Zapisujeme to ako

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.}$$

Napr. $\lim_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$.

DEFINÍCIA 5.3. *Funkcia f má v nevlastnom bode $-\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$*, ak ku každému číslu A existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x < x_0$ platí $f(x) > A$. $\square$

Zapisujeme to ako

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

Napr. $\lim_{x\to-\infty} 2^{-x} = +\infty$.

DEFINÍCIA 5.4. *Funkcia f má v nevlastnom bode $-\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$*, ak ku každému číslu A existuje také reálne číslo x_0, že pre všetky reálne $x < x_0$ platí $f(x) < A$. $\square$

Zapisujeme to ako

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Napr. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Z príkladu 5.1. teda vidíme (skúmajúc funkciu $f:\ y = 2^x$), že

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

podobne, ako limitou postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2^n$ bolo $+\infty$ (pozri podkapitou 4.2.). Prechod od limity postupnosti k limite funkcie by mal byť teda zjavný.

5.2. Vlastná limita funkcie v nevlastnom bode

Aby sme našli súvislosti medzi pojmom vlastná limita funkcie v nevlastnom bode a pojmom vlastná limita postupnosti, pripomeňme si najprv definíciu vlastnej limity postupnosti. (Pozri definíciu 4.3.)

Keď si teraz porovnáme obr. 5.3., kde máme postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a obr. 5.4., kde máme funkciu $f : y = \frac{1}{x}$, mali by sme znovu vidieť určitú podobnosť. Opäť stačí, ak si v myšlienkách preložíme vyznačené body (postupnosti) na obr. 5.3. spojitou krivkou a budeme na osi x-ovej uvažovať všetky reálne čísla (čiže si dotvoríme graf aj na zápornej časti x-ovej osi). Takto dostaneme funkciu $f : y = \frac{1}{x}$ (obr. 5.4.) a hneď si uvedomíme, že hľadanie vlastnej limity postupnosti a vlastnej limity funkcie v nevlastnom bode (plus nekonečno) je veľmi podobné. (Aj teraz ide len o veľmi intuitívne uvedenie do problematiky.)

Využijúc tieto poznatky môžeme uvažovať grafy napr. takýchto funkcií: $y = 2^{-x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$. Je evidentné, že ak sa na osi x-ovej blížime do plus nekonečna, tak na osi y-ovej sa príslušné funkčné hodnoty vo všetkých troch prípadoch blížia ku konkrétnej hodnote — k nule.

Definícia vlastnej limity funkcie v nevlastnom bode bude teda analogicky podobná definícii vlastnej limity postupnosti. Použijeme v nej pojem okolie bodu. *Okolím bodu L* s polomerom ε budeme rozumieť otvorený interval

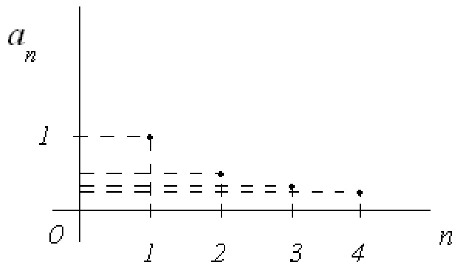
$$\mathcal{U}(L, \varepsilon) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

DEFINÍCIA 5.5. *Funkcia f* má *v nevlastnom bode $+\infty$ vlastnú limitu L*, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo x_0 tak, že pre všetky reálne $x > x_0$ patria funkčné hodnoty $f(x)$ do okolia $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. □

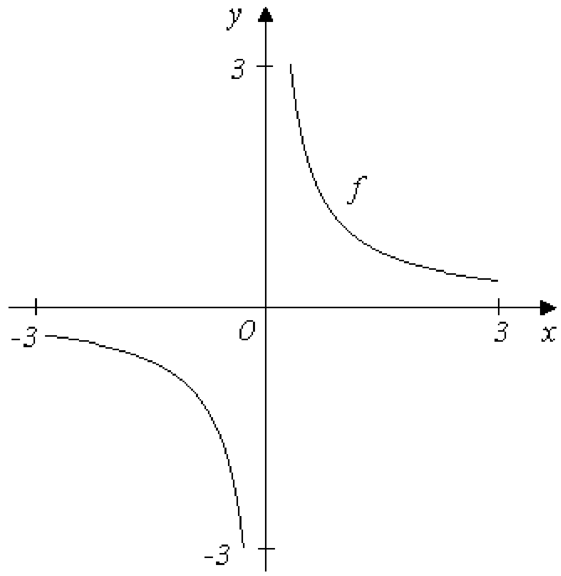
Táto skutočnosť sa zapisuje ako

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.}$$

Napr. máme $\lim_{x \to +\infty} 3^{-x} = 0$.



Obr. 5.3. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{n}$.



Obr. 5.4. Funkcia $f:\ y = \frac{1}{x}$.

Tiež máme:

Definícia 5.6. *Funkcia f* má *v nevlastnom bode $-\infty$ vlastnú limitu L*, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo x_0 tak, že pre všetky reálne $x < x_0$ patria funkčné hodnoty $f(x)$ do okolia $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. □

A zapisujeme

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.}$$

Napr. $\lim_{x \to -\infty} 3^x = 0$.

Na začiatku tejto podkapitoly sme uvažovali funkciu $f:\ y = \frac{1}{x}$ (obr. 5.4.). Ukázali sme si podobnosť s postupnosťou $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ (obr. 5.3.). Limitu tejto postupnosti sme už hľadali v príklade 4.3. v kapitole o postupnostiach. Jej limitou bolo číslo nula. Hľadajúc teraz limitu funkcie $f:\ y = \frac{1}{x}$ v nevlastnom bode plus nekonečno máme podobne:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vidíme, že nájsť súvislosť medzi tým, čo už žiaci poznajú (vlastná limita postupnosti) a novým učivom (vlastná limita funkcie v nevlastnom bode) nie je až tak ťažké.

5.3. Nevlastná limita funkcie vo vlastnom bode

Teraz, keď už niečo o limite funkcie (v nevlastnom bode) vieme, by nemal byť problém pochopiť, ako je to s limitou funkcie vo vlastnom bode. Skúsme najprv uvažovať graf funkcie $f\ :y = \frac{1}{x^2}$. Keď si predstavíme tento graf, vidíme, že ak sa na osi x-ovej blížime k číslu nula (zľava aj sprava), tak na osi y-ovej sa príslušné funkčné hodnoty blížia do plus nekonečna. Táto úvaha súvisí aj s nasledujúcim motivačným príkladom.

Príklad 5.2. Riešme nerovnicu

$$\frac{1}{x^2} > 10\,000, \qquad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$

Riešenie: Keď si vyjadríme x, dostaneme

$$|x| < \frac{1}{100},$$

resp.

$$x \in \Big(-\frac{1}{100}; \frac{1}{100}\Big).$$

Vidíme teda, že pre každé reálne číslo $x \in \big(-\frac{1}{100}; \frac{1}{100}\big)$ je $\frac{1}{x^2} > 10\,000$. □

Pozrime sa na definíciu. Vidieť aj určitú príbuznosť s predchádzajúcimi definíciami jednotlivých limít.

Definícia 5.7. *Funkcia* f má *vo vlastnom bode* x_0 *nevlastnú limitu* $+\infty$, ak ku každému číslu A existuje také $\delta > 0$, že pre všetky reálne $x \neq x_0$ z okolia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu x_0 je $f(x) > A$. □

Túto skutočnosť zapisujeme ako

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.}$$

Z predchádzajúceho príkladu uvažujúc funkciu $f : y = \frac{1}{x^2}$ máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

DEFINÍCIA 5.8. *Funkcia* f má *vo vlastnom bode* x_0 *nevlastnú limitu* $-\infty$, ak ku každému číslu A existuje také $\delta > 0$, že pre všetky reálne $x \neq x_0$ z okolia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu x_0 je $f(x) < A$. $\square$

Zápis je obdobný.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.}$$

Napr. $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

5.4. Vlastná limita funkcie vo vlastnom bode

Zostal nám posledný zo štyroch typov limity funkcie. Teraz by sme mali vidieť, že pojem vlastná limita funkcie vo vlastnom bode je akési vyvrcholenie tejto kapitoly. Aby sme si uvedomili, že môžeme opäť nadviazať na pojem limita postupnosti, začneme s takýmto príkladom.

PRÍKLAD 5.3. Zistíme, či má funkcia $f : y = x^3 - 5$ v bode $x_0 = 2$ limitu.

RIEŠENIE: Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ľubovolná postupnosť s

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2,$$

kde $a_n \neq 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ďalej vytvoríme postupnosť $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ príslušnej funkčnej hodnoty. Dostaneme $f(a_n) = a_n^3 - 5$. Potom zistíme, či postupnosť $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Takže počítame:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^3 - 5) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^3 - 5 = 2^3 - 5 = 3.$$

Takto sme ukázali, že pre ľubovolnú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou 2 konverguje postupnosť $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ k hodnote 3 pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Teda

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3. \ \square$$

Vidíme teda jasnú väzbu medzi limitou postupnosti a limitou funkcie. Tieto poznatky teraz zovšeobecníme do nasledujúcej definície, v ktorej je táto väzba zohľadnená.

DEFINÍCIA 5.9. Nech f je funkcia a x_0 a L sú reálne čísla. Funkcia f nech je definovaná v okolí bodu x_0, nanajvýš s výnimkou tohto bodu. Hovoríme, že *funkcia* f má *vo vlastnom bode* x_0 *vlastnú limitu* L vtedy, keď pre každú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathsf{D}_f$ a $a_n \neq x_0$, ktorá konverguje k x_0, konverguje postupnosť $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ k číslu L. □

To, že funkcia f má v bode x_0 limitu L, vyjadrujeme pomocou zápisu

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L.}$$

Na lepšie ozrejmenie nového pojmu skúsime ešte jeden podobný príklad.

PRÍKLAD 5.4. Majme funkciu $f : y = \frac{x^2-4}{x-2}$. Má táto funkcia v bode $x_0 = 2$ limitu?

RIEŠENIE: Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ľubovolná postupnosť, pre ktorú platí

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2,$$

kde $a_n \neq 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Pre postupnosť $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ príslušnej funkčnej hodnoty platí $f(a_n) = a_n + 2$ (je to analogické s predchádzajúcim príkladom). Z toho máme

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + 2) = \left(\lim_{n \to \infty} a_n \right) + 2 = 2 + 2 = 4,$$

čiže táto postupnosť konverguje.

Ukázali sme tak, že pre ľubovolnú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou 2 konverguje postupnosť $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ k hodnote 4 pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Teda

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4. \ \square$$

POZNÁMKA 5.1. V tejto podkapitole sme uviedli zavedenie pojmu vlastná limita funkcie vo vlastnom bode pomocou dvojitej konvergencie, čo by sa viacerým žiakom i učiteľom mohlo zdať trochu náročnejšie. Ja si však na základe analýzy viacerých stredoškolských učebníc matematiky myslím, že aj náročnejšie zavedenia pojmov stoja za námahu, ak sa tým vytvárajú širšie väzby naprieč celou matematikou. Ak by čitateľ predsalen trval na „klasickom“ zavedení tohto pojmu, odporúčam ho napr. na učebnicu Hrubého/Kubáta [11] alebo E. Kraemera [14], o ktorých som už hovoril v podkapitole 2.1. (v analýze) a prirodzene aj na príslušnú definíciu 2.1. (v podkapitole 2.4.). Učiteľ, ktorý bude učiť túto tému, môže prípadne žiakom vysvetliť oba tieto prístupy.

V kapitole o limite postupnosti sme si uviedli, že každá postupnosť má najviac jednu limitu. Podobne to platí aj pre funkcie.

Veta 5.10. *Funkcia f má v bode x_0 najviac jednu limitu.*

5.5. Aplikácie

Pozrieme sa na dva jednoduché aplikačné príklady z fyziky. Aj keď je to menej zvyčajné, vyriešil som ich pomocou limity funkcie (čím sa dosiahol presný výsledok).

Príklad 5.5. ([19]) Určte veľkosť okamžitej rýchlosti hmotného bodu v čase $t = 5$ s, ak poznáme veľkosť zrýchlenia $a = 2$ m$\cdot s^{-2}$ a veľkosť počiatočnej rýchlosti $v_0 = 3$ m$\cdot$s^{-1}.

Riešenie: Veľkosť okamžitej rýchlosti vypočítame ako

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

kde Δs je zmena dráhy a Δt je zmena času.

Keďže

$$s + \Delta s = v_0(t + \Delta t) + \frac{1}{2}\, a(t + \Delta t)^2 = v_0 t + \frac{1}{2}\, at^2 + v_0\, \Delta t + \frac{1}{2}\, a\, \Delta t^2 + at\, \Delta t,$$

tak

$$\Delta s = v_0\, \Delta t + \frac{1}{2}\, a\, \Delta t^2 + at\, \Delta t$$

a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + \frac{1}{2}\, a\, \Delta t + at.$$

Čiže

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + at = 3 + 2 \cdot 5 = 13\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}. \ \square$$

Príklad 5.6. ([19]) Priamočiary pohyb je opísaný rovnicou $s(t) = b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3$. Určte veľkosť jeho zrychlenia.

Riešenie: Pre veľkosť zrýchlenia platí

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

kde Δv je zmena rýchlosti.

Keďže

$$s+\Delta s = b_1(t+\Delta t)^3+b_2(t+\Delta t)^2+b_3 = b_1t^3+b_2t^2+b_3+b_1(3t^2\Delta t+3\Delta t^2 t+\Delta t^3)+b_2(2t\Delta t+\Delta t^2)$$

a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = b_1(3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) + b_2(2t + \Delta t),$$

tak

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3b_1t^2 + 2b_2t.$$

Keďže

$$v + \Delta v = 3b_1(t + \Delta t)^2 + 2b_2(t + \Delta t),$$

tak

$$\Delta v = 3b_1(2t\Delta t + \Delta t^2) + 2b_2\Delta t$$

a

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = 6b_1t + 3b_1\Delta t + 2b_2.$$

Čiže

$$a = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6b_1t + 2b_2. \ \square$$

Oba tieto príklady by sme mohli spočítať ďaleko jednoduchšie pomocou derivácie (pozri príklady A.3. a A.4. v dodaktku A), ktorú si zavedieme v nasledujúcej kapitole 6.

Ešte sa pozrieme na veľmi jednoduchý príklad z bežného života, ktorý som si vymyslel sám. Všimol som si totiž, že mnohí ľudia celkom nerozumejú pojmu pravdepodobnosť.

Príklad 5.7. Minulý týždeň som stretol svojho dobrého kamaráta Michala. Akonáhle sme sa stretli, pochválil sa mi, že už má 3 deti. Tiež mi povedal, že sa niekde dočítal, že je asi 50-percentná pravdepodobnosť, že sa mu narodí chlapec a rovnako asi 50-percentná pravdepodobnosť, že to bude dievča. On má však už troch synov, takže matematika podľa neho asi klame.

Vysvetlite Michalovi, prečo sa mýli.

Riešenie: Je to jednoduché. Michal nechápe rozdiel medzi pojmom pravdepodobnosť P a pojmom relatívna početnosť $\frac{m}{n}$. Pre pravdepodobnosť (podľa štatistickej definície) platí

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Čiže čím viac detí by Michal mal, tým viac by sa pomer medzi počtom synov a počtom dcér blížil k pomeru 1:1. □

KAPITOLA 6

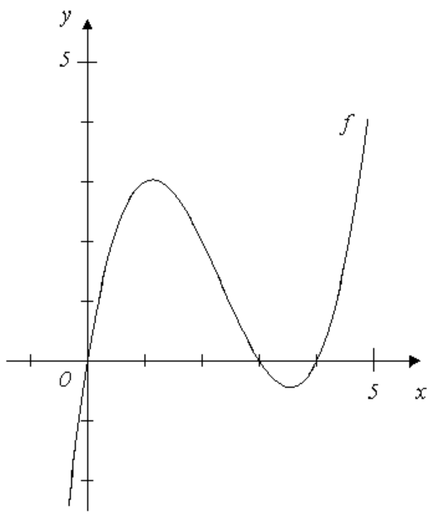
Zavedenie pojmu derivácia funkcie v bode

V tejto kapitole sa pozrieme, ako inak môžeme zapísať istú limitu a prečo to vlastne robíme. Napokon zistíme, že limity nám prinášajú dômyselný matematický aparát, s ktorým môžeme riešiť množstvo problémov (pozri dodatok A). Pri tvorbe tejto kapitoly som sa nechal inšpirovať dielami [2], [8], [11], [20].

Na začiatku tejto kapitoly by som rád pripomenul problém, že keď učiteľ učí, niekedy sám nevie, čo je ťažké naučiť a čo je ľahké. Ide o znak pozitivistického poňatia vedomostí [4]. Takýto učiteľ potom automaticky považuje za jednoduché každé učivo, ktoré sám dobre ovláda, prípadne si len myslí, že ho ovláda. Z toho nám vyplýva, že pri tvorbe akéhokoľvek matematického kurzu sa nemožno starať len o formálno-logickú dokonalosť textu, ale potrebné je budovať takýto kurz (či už pre žiakov stredných škôl alebo pre budúcich učiteľov) aj na určitej intuitívnej úrovni a budovať tak určitý nadhľad rešpektujúc zásady poznávania.

Pri začínaní kapitoly o deriváciách však učitelia občas nerešpektujú mechanizmy poznávacieho procesu, čo sa následne prejavuje v deformovanom poznaní študentov. Sémantické predstavy sú potom len hmlisté alebo chýbajú. Strategické nasmerovanie úsilia žiaka sa tak mení z cieľa „porozumieť“ na cieľ „zapamätať si“ [4]. Takéto znalosti potom podliehajú častému opakovaniu, resp. úplne miznú, keď má žiak po skúške alebo písomke.

Aby sme sa dostali k pojmu derivácia, začnime s nasledujúcou motiváciou, ktorá sa snaží mechanizmy poznávacieho procesu plne rešpektovať. Využijeme tiež poznatky z prvej časti tejto práce — analýzy a budeme tak postupovať dynamickým spôsobom zavedenia tohto pojmu. (Použijeme aj pojmy ako (lokálne) maximum a minimum funkcie. Narábať s nimi budeme skôr intuitívne.)



OBR. 6.1. Funkcia f z príkladu 6.1.

PRÍKLAD 6.1. Z veľkého výkresu, ktorý má tvar obdĺžnika s rozmermi 8 dm a 6 dm, môžeme vystrihúť v rohoch (zhodné) štvorce tak, aby zo zbytku bolo možné zhotoviť zložením (otvotenú) krabicu s čo najväčším objemom. Aké veľké musia byť tieto štvorce?

RIEŠENIE: Objem krabice je funkciou strany štvorca. Túto stranu nazveme x. Rozmery krabice sú teda $8-2x$ dm, $6-2x$ dm a x dm. Jej objem je $(8-2x)(6-2x)x$ dm^3.

Keďže funkcia nadobúda už pre malé hodnoty x veľké hodnoty (napr. pre $x = 1$ už 24), budeme uvažovať funkciu

$$f:\ y = \frac{1}{8}(8-2x)(6-2x)x,$$

tj. $\frac{1}{8}$ objemu.

Je zrejmé, že funkcia f aj objem súčasne stúpajú aj súčasne klesajú, takže sledovaním f nadobudneme tiež prehľad o zmene objemu. Znásobíme:

$$f:\ y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x.$$

Je to funkcia tretieho stupňa. Z grafu (pozri obr. 6.1.) vidíme, že maximum nadobúda niekde kúsok za x=1. Ako to zistiť presne? Táto funkcia nadobúda (lokálne) maximum v bode, v ktorom je rovnica dotyčnice ku grafu funkcie rovná konštante, tj. dotyčnica je rovnobežná s osou x-ovou. Tento bod nazveme $T[x_0,\ y_0]$. Stačí nám teda nájsť smernicu príslušnej dotyčnice a položiť ju rovnú nule.

Ak si na grafe našej funkcie nájdeme ľubovolný ďalší bod $B[x,\, y]$, tak smernica sečnice k našej krivke s priesečníkmi $T[x_0,\, y_0]$ a $B[x,\, y]$ bude $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. Aby sme však dostali dotyčnicu (v bode $T[x_0,\, y_0]$), musia sa tieto body k sebe neobmedzene blížiť, tj. smernica dotyčnice bude

$$k_T = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tu máme

$$y_0 = \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0^2 + 6x_0$$

a

$$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x.$$

Z toho

$$\Delta y = y - y_0 = \frac{1}{2}\Delta x(x_0^2 + xx_0 + x^2) - \frac{7}{2}\Delta x(x_0 + x) + 6\Delta x.$$

Takže

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}(x_0^2 + xx_0 + x^2) - \frac{7}{2}(x_0 + x) + 6.$$

Potom

$$k_T = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 3x_0^2 - \frac{7}{2} \cdot 2x_0 + 6.$$

Už sme povedali, že funkcia f nadobúda krajných hodnôt tam, kde je dotyčnica rovnobežná s osou x-ovou, takže smernica takejto dotyčnice musí byť 0. Počítame tak rovnicu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

tj.

$$\frac{3}{2}x_0^2 - 7x_0 + 6 = 0.$$

Z toho

$$x_{01,\,02} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{3}\ \text{dm}.$$

Vidíme teda, že krabica bude mať najväčší objem, ak je strana štvorca asi 1, 13 dm. (Druhý koreň vypočítanej kvadratickej rovnice by patril (lokálnemu) minimu, čo vidieť aj z grafu.) □

Limita z tohto príkladu nás privádza k novému pojmu — derivácia funkcie v bode.

Definícia 6.1. *Deriváciou funkcie f v bode x_0* nazývame

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},}$$

ak táto limita existuje. Označujeme ju $f'(x_0)$.[1] $\square$

Poznámka 6.1. Platí rovnosť

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ak je $f'(x_0)\in\mathbb{R}$, hovoríme, že f má v bode x_0 *vlastnú deriváciu.* Ak je $f'(x_0) = \pm\infty$, hovoríme, že f má v bode x_0 *nevlastnú deriváciu.* Ak vyšetrovaná limita neexistuje, hovoríme, že f nemá v bode x_0 deriváciu alebo že $f'(x_0)$ neexistuje.

Príklad 6.2. Vypočítajte deriváciu funkcie $f:\ y = x^2$ v bode $x_0\in\mathbb{R}$.

Riešenie:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} x + x_0 = 2x_0 \ \square$$

Poznámka 6.2. Motivačný príklad 6.1. nám ukazuje *geometrickú interpretáciu* derivácie funkcie v bode. Mali by sme vedieť, že pre smernicu dotyčnice k_T ku grafu danej funkcie v danom bode $T[x_0, y_0]$ platí $k_T = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Táto limita bola definovaná ako derivácia funkcie v bode, čiže $k_T = f'(x_0)$. Rovnicu tejto dotyčnice môžeme teda zapisovať ako

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).}$$

[1] Skôr vo fyzike sa používa označenie $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$.

Záver

Po dokončení analýzy vybraných českých aj zahraničných učebníc môžem skonštatovať nasledujúce závery. Pojem postupnosť bola najlepšie zavedená v nemeckej učebnici [13], keďže tam bola najlepšie vidieť nadväznosť na pojem limita postupnosti (ktorý sa zavádza neskôr). Takto sa vytvárajú väzby medzi jednotlivými matematickými pojmami. Samotný pojem limita postupnosti už bol zavedený vo všetkých učebniciach veľmi podobne. Najviac minimalistická bola učebnica T. Hechta [7], kde chýbala najmä nevlastná limita postupnosti i užitočné aplikácie. S aplikáciami na limity postupnosti na tom bola najlepšie učebnica O. Odvárka [16], ktorá nechcela len, aby žiaci mechanicky počítali limity postupností, ale aby pri tom museli aj premýšľať.

Pokiaľ ide o zavedenie pojmu limita funkcie a derivácia funkcie, tak u českých autorov E. Kraemera [14] a Hrubého/Kubáta [11] je potrebné najprv zaviesť pojem spojitosť funkcie v bode a pojem okolie bodu. Potom sa autori pozerajú na rôzne jednoduché spojité funkcie, kde „vytrhnú" jeden bod a pýtajú sa, čo je limitou danej funkcie v bode, kde funkcia nie je definovaná. Ide o statický prístup. Na základe všetkých preštudovaných učebníc som presvedčený, že efektívnejším prístupom je prístup dynamický, ktorý sa snaží dostať k novému pojmu viac prirodzene. Tento prístup vidieť u T. Hechta [8] a B. Riečana [18]. (Pojmy ako spojitosť či okolie sú na začiatku chápané skôr intuitívne.)

Učebnica Hrubého/Kubáta bola výrazne maximalistická (často ju používajú aj študenti v bakalárskom štúdiu), učebnica T. Hechta [8] bola skôr minimalistická (z jednotlivých typov limity tu bola len vlastná limita funkcie vo vlastnom bode).

Najviac názorná definícia limity funkcie bola v nemeckej učebnici [13]. Využíva totiž aj znalosti o postupnostiach, ktoré by žiaci už mali mať. Túto učebnicu zároveň považujem za najlepšiu aj v aplikáciách, pretože je tam asi najlepšie vidieť aplikovateľnosť týchto pojmov.

Keď som bol na konci tejto analýzy, pýtal som sa sám seba, či je takáto analýza dosť široká, a či nám teda podáva dostatok informácií k tomu, aby sme mali čo najkomplexnejší pohľad na túto problematiku. Uvedomil som si, že je dobré analýzu učebníc o limite funkcie a deriváciách rozšíriť aj o (aspoň naše) historické učebnice, ktoré nám dajú ešte viac informácií a nadhľadu. Ten sa potom skutočne využil pri písaní druhej časti tejto práce — syntézy. Môžem povedať, že využité historické učebnice od J. Vojtěcha [21] a B. Bydžovského [2] boli tými najlepšími učebnicami, s akými som sa pri písaní svojej diplomovej práce stretol.

Okrem toho, že táto analýza poslúžila na vypracovanie druhej časti práce — syntézy, môže poslúžiť aj celému spektru stredoškolských učiteľov ako prehľad rôznych prístupov k pojmu limita, ako aj prostriedok na budovanie väčšieho nadhľadu v tejto téme.

Ďalej teda nasledovala syntéza, ktorú som sa snažil budovať dynamicky. Začal som s postupnosťami. Zaviedol som ich v duchu nemeckej učebnice [13], teda tak, aby nás potom takéto zavedenie mohlo motivovať k zavedeniu pojmu (vlastná) limita postupnosti. Keď som prišiel k limite postupnosti, uvažoval som nad poradím jednotlivých typov limít. Uvedomil som si, že je lepšie začať s nevlastnou limitou postupnosti, až potom by mala ísť vlastná limita, čo som tu aj zdôvodnil. Vlastnú limitu postupnosti som zaviedol využijúc viacero jednoduchých motivácií vrátane odkazu na zavedenie pojmu postupnosť. Napokon som ukázal (ako jej aplikáciu) využitie veľmi elegantných (dnes už žiakom málo známych) reťazových zlomkov.

V kapitole o limite funkcie som sa zaoberal aj tým, prečo je podľa mňa prirodzenejšie zaviesť najprv limitu funkcie v nevlastnom bode a až potom vo vlastnom zdôrazňujúc väzbu medzi limitou postupnosti a limitou funkcie v nevlastnom bode (plus nekonečno). Keď nám navyše zostal posledný zo štyroch uvedených typov limity funkcie (tj. vlastná limita funkcie vo vlastnom bode), chcel som, aby bolo evidentné, že tento pojem je akési vyvrcholenie tejto kapitoly. Pri tomto zavedení som sa opäť nechal najviac inšpirovať nemeckou učebnicou [13], keďže som chcel, aby bola vytvorená jasná a viditeľná väzba medzi limitou postupnosti a limitou funkcie. Napokon som uviedol niekoľko aplikácií, v ktorých sa dalo vystačiť len s limitou funkcie (teda nebolo ešte nutné použiť pojem derivácia funkcie).

Pri zavedení pojmu derivácia funkcie v bode som sa nechal inšpirovať najmä historickou učebnicou od B. Bydžovského [2]. Snažil som sa tak využiť mechanizmy plne rešpektujúce poznávací proces. Šlo o využitie dynamického prístupu k zavedeniu tohto pojmu. Takto bolo možné zaviesť pojem derivácia funkcie v bode veľmi prirodzene pomocou konkrétneho (aplikačného) príkladu.[2]

Môžeme teda skonštatovať, že táto syntéza tvorí akúsi „ideálnu“ možnosť pre stredoškolských učiteľov, ako vhodne učiť túto tému tak, aby sa rešpektovala nadväznosť jednotlivých fragmentov učiva, ako aj čo najširšie budovanie väzieb medzi jednotlivými pojmami. Celá táto práca má teda za cieľ byť akýmsi pomocníkom pre stredoškolských učiteľov, ktorí si takto môžu osvojiť väčší matematický i didaktický nadhľad a budovať tak prípadne aj nadhľad u svojich žiakov.

[2]K tejto kapitole je na konci práce aj dodatok, v ktorom sú uvedené rôzne aplikácie z diferenciálneho počtu. Ide o geometriu a viaceré oblasti fyziky. Na jeho konci sú aj moje vlastné aplikácie z oblasti špeciálnej teórie relativity na stredoškolskej úrovni.

Literatúra

[1] BEDNÁŘOVÁ, S.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií — Zošit 4 (Zbierka úloh),* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2002.

[2] BYDŽOVSKÝ, B.: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných,* Jednota českých mathematiků, Praha, 1911.

[3] EISENMANN P.: *Propedeutika infinitezimálního počtu,* UJEP, Ústí nad Labem, 2002.

[4] FULIER, J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy,* Edícia prírodovedec, Nitra, 2001.

[5] HAJKO, V.: *Fyzika v príkladoch,* Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1966.

[6] HECHT, T.: *Matematika pre 3. ročník gymnázií — Zošit 1 (Funkcie II),* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1999.

[7] HECHT, T.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií — Zošit 1 (Postupnosti),* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2005.

[8] HECHT, T.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií — Zošit 2 (Matematická analýza. Logika),* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2000.

[9] HECHT, T., ČERNEK, P.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií — Zošit 1 (Funkcie),* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2002.

[10] HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika,* Portál, Praha, 2009.

[11] HRUBÝ, D., KUBÁT, J.: *Matematika pro gymnázia (Diferenciální a integrální počet),* Prometheus, Praha, 1997.

[12] JIRÁSEK, F., BENDA, J.: *Matematika pro bakalářské studium,* Ekopress, Praha, 2006.

[13] KOENIG, G., SCHULTZ, K. J., SCHULTZ, M., SCHULTZ, W., STOYE, W., ZÄNKER, S.: *Mathematik Sekundarstufe II (Analysis - Leistungskurs),* Volk und

Wissen Verlag GmbH, Berlin, 1997.

[14] KRAEMER, E.: *Matematika pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (Větev přírodovědná),* SPN, Praha, 1967.

[15] ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia (Funkce),* Prometheus, Praha, 1993.

[16] ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia (Posloupnosti a řady),* Prometheus, Praha, 1995.

[17] POTŮČEK, J.: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900-1945, II. díl,* Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1993.

[18] RIEČAN, B.: *Matematika pro IV. ročník gymnázií,* SPN, Praha, 1987.

[19] TEPLIČKA, I.: *Fyzika,* Enigma, Nitra, 2001.

[20] VESELÝ, J.: *Matematická analýza pro učitele I,* Matfyzpress, Praha, 2001.

[21] VOJTĚCH, J.: *Geometrie pro VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií,* Jednota českých mathematiků, Praha, 1912.

DODATOK A

Ďalšie aplikácie diferenciálneho počtu

Teraz si ukážeme ďalšie možné aplikácie z diferenciálneho počtu, a to aj nad rámec už vyloženého učiva. Pôjde najmä o aplikácie s využitím pojmu derivácia funkcie v bode. Predpokladá sa, že žiak už vie derivovať, vie pomocou derivácie vyšetrovať funkciu a pod. Takýchto aplikácií z rôznych oblastí ľudského života je mnoho. Mali by sme sa však zamyslieť, že žiaci sa takto nielen dozvedia, k čomu je dané učivo dobré, ale rozvíjajú sa aj ich poznávacie schopnosti, vytvárajú sa často medzipredmetové väzby a tiež dochádza k pestovanou určitých postojov u žiakov [4].

V tomto dodatku si teda ukážeme konkrétne využitie znalostí z diferenciálneho počtu, a to v geometrii a viacerých oblastiach fyziky. Začneme s geometriou.

Príklad A.1. ([13]) Aké rozmery musí mať konzerva v tvare valca s objemom 1 l, aby sa na jej výrobu použilo čo najmenej plechu?

Riešenie: Pre povrch valca platí

$$S_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

kde r je polomer a h je výška.

Pre jeho objem platí

$$V = \pi r^2 h.$$

Z toho máme

$$h[\mathrm{cm}] = \frac{1\,000}{\pi r^2}.$$

Dosadíme do rovnice pre povrch

$$S_0 = 2\left(\pi r^2 + \frac{1\,000}{r}\right).$$

Teraz sa môžeme pýtať na extrém funkcie

$$f(r) = \pi r^2 + \frac{1\,000}{r}, \quad r \in (0;\ \infty).$$

Derivácia je rovná

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{1\,000}{r^2}.$$

Z toho pre r_0 máme

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Keďže

$$f''(r) = 2\pi + \frac{2\,000}{r^3} > 0,$$

pre všetky $r > 0$, našli sme minimum.

Napokon teda máme, že rozmery konzervy musia byť

$$r_0 \approx 5,4 \text{ cm},$$

$$h_0 = \frac{1000}{\pi r_0^2} \approx 10,8 \text{ cm}. \;\square$$

Príklad A.2. ([12]) Je daná guľová plocha s polomerom r. Potom je možné uvažovať nekonečne mnoho rotačných valcov tak, že obvody oboch podstáv každého z nich ležia na tejto ploche (valec je do guľovej plochy vpísaný). Ktorý z týchto valcov má a) najväčší objem; b) najväčší plášť?

Riešenie: Nech x je veľkosť polomeru podstavy vpísaného valca. Jeho objem je teda

$$V = 2\pi x^2\sqrt{r^2 - x^2}$$

a jeho plášť je

$$P = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Hľadáme extrémy funkcií

$$y = 4\pi^2(r^2x^4 - x^6)$$

a

$$z = 16\pi^2(r^2x^2 - x^4).$$

V prípade a) po derivovaní a položení rovné nule máme

$$x = \frac{r}{3}\sqrt{6}.$$

V prípade b) vychádza

$$x = \frac{r}{2}\sqrt{2}. \;\square$$

Ukážme si aj rôzne úlohy z fyziky. Začneme s dvomi príkladmi, ktoré sme už raz riešili len pomocou limity funkcie. Boli to príklady 5.5. a 5.6.

PRÍKLAD A.3. ([19]) Určte veľkosť okamžitej rýchlosti hmotného bodu v čase $t = 5$ s, ak poznáme veľkosť zrýchlenia $a = 2$ m$\cdot s^{-2}$ a veľkosť počiatočnej rýchlosti $v_0 = 3$ m$\cdot$s^{-1}.

RIEŠENIE: Veľkosť okamžitej rýchlosti vypočítame ako

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

To zapíšeme pomocou derivácie

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v_0 t + \frac{at^2}{2})}{\mathrm{d}t}.$$

Po derivovaní máme

$$v = v_0 + at = 3 + 2 \cdot 5 = 13\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}. \ \square$$

PRÍKLAD A.4. ([19]) Priamočiary pohyb je opísaný rovnicou $s(t) = b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3$. Určte veľkosť jeho zrýchlenia.

RIEŠENIE: Pre veľkosť zrýchlenia platí

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

Po dosadení máme

$$a = \frac{\mathrm{d}^2(b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Urobíme prvú deriváciu

$$a = \frac{\mathrm{d}(3b_1 t^2 + 2b_2 t)}{\mathrm{d}t}.$$

Napokon druhú deriváciu

$$a = 6b_1 t + 2b_2. \ \square$$

Nasledujúci príklad bude skôr abstraktný.

PRÍKLAD A.5. ([12]) Bod sa pohybuje po kubickej parabole $12y = x^3$. Zistite, ktorá z jeho súradníc sa mení rýchlejšie.

RIEŠENIE: Nech sú premenné x a y funkciami času t. Rýchlosť zmeny súradnice x, resp. y je daná hodnotou derivácie $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, resp. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{4}.$$

Z toho

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 : 4.$$

Pre $|x| < 2$ je podiel $\frac{x^2}{4}$ menší než jedna, pre $|x| = 2$ je to 1 a pre $|x| > 2$ je to viac než jedna. Je teda vidieť, že pre $-2 < x < 2$ sa druhá súradnica y mení pomalšie než x. Naopak pre $x < -2$ a $x > 2$ sa y mení rýchlejšie než súradnica x. $\square$

Z fyziky máme i jednoduchšie príklady (pokiaľ poznáme fyzikálne vzorce).

PRÍKLAD A.6. ([5]) Je daná priama homogénna tyč dĺžky $l = 1$ m. Nájdite vzdialenosť od stredu tyče, v ktorej musíme tyč upevniť, aby sa kývala ako fyzikálne kyvadlo s minimálnou periódou.

RIEŠENIE: Pre periódu fyzikálneho kyvadla máme

$$T = 2\pi \frac{J}{mgx},$$

kde J je moment zotrvačnosti. Pre J tyče platí

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + mx^2.$$

Keďže chceme, aby bola perióda minimálna, musíme nájsť minimum výrazu

$$y = \frac{J}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} ml^2 + mx^2}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} l^2 + x^2}{gx}.$$

Čiže nasledujúcu deriváciu položíme rovnú nule a vyjadríme x.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2gx^2 - g\left(\frac{1}{12} l^2 + x^2\right)}{g^2x^2} = 0.$$

Z toho

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} \doteq 0,29\,\mathrm{m}.$$

To, že ide skutočne o minimum, je hneď vidieť, keďže ak $x \to 0$, tak $T \to \infty$. $\square$

Príklad A.7. ([5]) Bodový predmet, umiestnený na optickej osi spojnej šošovky, sa približuje k šošovke stálou rýchlosťou v_1. Akou rýchlosťou v_2 sa pohybuje jeho obraz? Využite rovnicu

$$x_1 \cdot x_2 = f^2,$$

čo je šošovková rovnica, keď meriame vzdialenosť predmetu (x_1) od predmetového ohniska a obrazu (x_2) od obrazového ohniska.

Riešenie: Okamžitá rýchlosť v_2 je daná ako

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}.$$

Podľa šošovkovej rovnice $x_2 = \frac{f^2}{x_1}$ máme

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{f^2}{x_1}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{f^2}{x_1}\right)}{\mathrm{d}x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{f^2}{x_1^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}.$$

Ak uvážime, že $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$ je vlastne okamžitá rýchlosť v_1, tak napokon máme

$$v_2 = -\frac{x_2}{x_1} v_1. \square$$

Príklad A.8. ([18]) Určte, pri akej hodnote odporu R na rezistore zapojeného sériovo s rezistorom s odporom R_0 bude na rezistore s odporom R_0 maximálny výkon. (Odpor R_0 a napätie U_0 batérie pokladáme za konštantné.)

Riešenie: Pre veľkosť prúdu v obvode podľa Ohmovho zákona máme

$$I = \frac{U_0}{R + R_0}.$$

Pre výkon na rezistore s odporom R_0 platí

$$P = I^2 \cdot R_0,$$

a keďže prúd I závisí na R, je zrejmé, že

$$P(R) = I^2 \cdot R_0 = \frac{U_0^2 \cdot R_0}{(R + R_0)^2} = U_0^2 \cdot R_0 \cdot (R + R_0)^{-2}.$$

Keďže $R \geq 0$, musíme nájsť (globálne) maximum funkcie P v intervale $\langle 0; +\infty)$. Preto vypočítame deriváciu

$$P'(R) = -2U_0^2 R_0 \frac{1}{(R + R_0)^3} < 0.$$

Vidíme, že derivácia je záporná, teda funkcia P v intervale $\langle 0; +\infty)$ klesá. Čiže maximum nadobúda pre $R = 0$. $\square$

Napokon si ukážeme niekoľko aplikácií na pojem limita funkcie (a tiež derivácia), ktoré som si vymyslel sám. Verím, že tieto aplikácie nebudú považované za pseudoaplikácie, ale za využitie limity v konkrétnych reálnych problémoch. Rozhodol som sa pre príklady z oblasti špeciálnej teórie relativity (na stredoškolskej úrovni). Ak by mal čitateľ pocit, že tieto príklady nie sú z bežného života, rád by som teraz zdôraznil, že sú. Stačí si spomenúť napríklad na známy navigačný systém GPS, ktorý by bez tejto teórie nefungoval.

Príklad A.9. Podľa špeciálnej teórie relativity platí pre veľkosť rýchlosti rovnomerne zrýchleného pohybu vzťah

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}},$$

kde v je veľkosť rýchlosti, a je veľkosť zrýchlenia, t je čas a c je konštanta — rýchlosť svetla. Odvoďte z tejto rovnice, aký vzťah môžu kľudne používať bežní ľudia na Zemi, teda v nerelativistických podmienkach. Tento vzťah by mali poznať všetci stredoškoláci.

Riešenie: Bežní ľudia môžu tento vzťah kľudne zjednodušiť pre $t << \frac{c}{a}$. Čiže pokiaľ máme čas t, ktorý je „blízko“ nuly, môžeme používať vzťah

$$v_{\text{nerel.}} = at. \ \square$$

Príklad A.10. S využitím predchádzajúceho príkladu zistite, akú maximálnu veľkosť rýchlosti môžeme získať pri rovnomerne zrýchlenom pohybe, keby sme rovnomerne zrýchlovali tak dlho, až by pre uplynutý čas platilo, že $t >> \frac{c}{a}$.

Riešenie: Keďže

$$\lim_{t\to\infty} \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} = c,$$

tak pre maximálnu veľkosť rýchlosti, akú by sme mohli získať, máme

$$v_{\text{max.}} \approx c. \ \square$$

Nasledujúci aplikačný príklad zo špeciálnej teórie relativity je azda najnáročnejším príkladom tejto práce. Je možné, že by ho vedel vyriešiť len máloktorý maturant. Ja tu však napriek tomu tento príklad uvádzam ako akési vyvrcholenie, resp. ako jeden z vrcholov osvietenosti ľudského rozumu (pri obyčajnom úvode do diferenciálneho počtu).

PRÍKLAD A.11. Snáď každý stredoškolák pozná známu Einsteinovu rovnicu

$$E = mc^2,$$

ktorá nám hovorí, že energia E a hmotnosť m sú jedno a to isté (resp. sú odlišnými prejavmi tej istej entity). Symbol c je konštanta — rýchlosť svetla. Odvoďte túto rovnicu použitím relativistickej pohybovej rovnice

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F},$$

kde $\vec{p}$ je hybnosť, t je čas a $\vec{F}$ je sila.

RIEŠENIE: Pre zjednodušenie si našu pohybovú rovnicu prepíšeme ako deriváciu:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.$$

Využijeme, že platí

$$\vec{F}\vec{v} = P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},$$

kde $\vec{v}$ je rýchlosť a P je výkon.

Z toho máme

$$\vec{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť. Výraz na ľavej strane upravíme:

$$\vec{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\vec{v}\frac{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \vec{v}\frac{1}{2}\frac{2\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0\frac{\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2}\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= m_0\frac{\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m_0\frac{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\vec{v})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m_0\,c^2\frac{1}{2}\frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= m_0\,c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Čiže sme dostali rovnicu

$$c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

Z toho

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E.$$

Čiže máme

$$E=mc^2+k,$$

kde k je konštanta. Z experimentov týkajúcich sa anihilácie (napr. interakcia elektrónu a jeho antičastice — pozitrónu, po ktorej vzniknú dva fotóny), vieme, že $k=0$. Takže napokon máme

$$E=mc^2. \square$$