Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2010 **Jiřina Cetkovská**

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Žákovské strategie řešení slovních úloh se zlomky

Autor: Jiřina Cetkovská

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2010

Poděkování:

Ráda bych v první řadě poděkovala vedoucí své diplomové práce, doc. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné rady, komentáře k mé práci a čas, který mi věnovala. Také bych ráda poděkovala dalším lidem, kteří mě při psaní diplomové práce podporovali. Svému manželovi, Bc. Martinovi Cetkovskému, a Bc. Janě Leciánové za podporu a pomoc při opravách textu. Děkuji.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto závěrečnou práci vypracovala zcela samostatně a veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály, které jsem použila, uvádím v seznamu literatury.

V Praze dne 25. 6. 2010 Jiřina Cetkovská

Název:

Žákovské strategie řešení slovních úloh se zlomky

Abstrakt:

Diplomová práce se zabývá žákovskými strategiemi řešení slovních úloh se zlomky. Součástí teoretické části je vymezení pojmu slovní úloha, rozdělení slovních úloh podle kritérií, která uvádí literatura, popis procesu řešení slovní úlohy a nejčastější problémy, které mají žáci při řešení slovních úloh. Dále je součástí teoretické části porovnání více než 40 učebnic – zavedení pojmu zlomek a početních operací s nimi, zastoupení slovních a početních úloh se zlomky v učebnicích – a popis možných problémů při počítání se zlomky. V praktické části práce je popis a vyhodnocení případové studie v osmých ročnících sestávající ze tří slovních úloh. Uvedeny jsou očekávané chyby a strategie řešení, chyby a strategie řešení použitých žáky a analýza vybraných žákovských řešení úloh.

Klíčová slova:

slovní úloha, zlomek, strategie řešení úloh, případová studie

Title:

Student strategies for solving word problems with fractions

Abstract:

This Master's Thesis deals with student strategies for solving word problems with fractions. The theoretical part includes the definition of the term word problem, the categorization of word problems based on criteria listed in the literature, the description of the process of solving a word problem, as well as the most frequent difficulties that students encounter when solving word problems. Moreover, the theoretical part also compares more than 40 textbooks - the introduction of the term fraction and of basic operations with them, the content of word and calculation problems with fractions in the textbooks - and describes the difficulties that may arise when calculating with fractions. The practical part of this Thesis contains the description and evaluation of a survey performed with 8th grade students that consisted of three different word problems. The expected solving strategies and mistakes are listed together with the actual strategies employed and mistakes made by the students, including the full analysis of selected student solutions.

Keywords:

word problem, fraction, problem solving strategy, case study

Obsah

1 Úvod 8

2 Slovní úlohy 9

2.1 Co je a co není slovní úloha 9

2.2 Rozdělení slovních úloh – typologie 10

2.3 Proces řešení slovní úlohy 12

2.4 Problémy při řešení slovních úloh 14

2.5 Slovní úlohy v učebnicích pro 2. stupeň základní školy 16

3 Zlomky 17

3.1 Jak se zavádí zlomky v různých řadách učebnic 18

3.2 Početní procvičování a slovní úlohy 21

3.3 Problémy při počítání se zlomky 22

4 Cíle případové studie 24

5 Případová studie v osmých ročnících 24

5.1 Výběr slovních úloh 25

5.2 Testovaná skupina 27

5.3 Způsob získání dat 28

6 Žákovské strategie řešení úloh 28

6.1.1 Dělení čokolády 29

6.1.1.1 Možné strategie řešení 30

6.1.1.2 Očekávané chyby 33

6.1.1.3 Rozbor žákovských řešení 34

6.1.2 Bílá polévka 41

6.1.2.1 Možné strategie řešení 41

6.1.2.2 Očekávané chyby 44

6.1.2.3 Rozbor žákovských řešení 44

6.1.3 Sekáči 50
6.1.3.1 Možné strategie řešení 50
6.1.3.2 Očekávané chyby 53
6.1.3.3 Rozbor žákovských řešení 54
6.2 Vliv stylu výuky na žákovské strategie řešení 61
7 Zhodnocení případové studie 62
8 Závěr 63
Literatura 64
Seznam prostudovaných učebnic 64
Seznam odborné literatury 67
Přílohy 69

1 Úvod

Žákovské strategie řešení slovních úloh jsou velmi rozmanité. Někteří žáci dávají přednost „vyzkoušeným“ postupům, jiní hledají stále nové cesty k vyřešení úlohy. Zajímalo mne, jak si žáci poradí se třemi různými slovními úlohami se zlomky.

Slovní úlohy se zlomky jsem vybrala proto, že z vlastní zkušenosti vím, že počítání se zlomky je pro většinu žáků velmi obtížné. Zadala jsem tři slovní úlohy se zlomky v osmých ročnících. V tomto ročníku by již žáci měli být s počítáním se zlomky dostatečně „seznámeni“ a počítání s nimi by jim nemělo dělat problémy.

Mým hlavním cílem je popsat nejčastější strategie řešení slovních úloh se zlomky a chyby, kterých se žáci nejčastěji dopouštějí. Rozborem žákovských prací bych chtěla zjistit, jak žáci dané úlohy řeší, a nakolik se jejich postupy shodují s těmi, které zvolil jejich vyučující.

V teoretické části své práce nejprve vymezuji pojem slovní úlohy a dělím slovní úlohy podle různých kritérií, která uvádí literatura. Naleznete zde také popis procesu řešení slovní úlohy a nejčastější problémy při řešení slovních úloh.

Součástí teoretické části jsou také kapitoly, které se týkají zlomků. Tyto kapitoly vychází z prostudování odborné literatury a učebnic pro základní školy. Sleduji, jak se zavádí zlomky v různých učebnicích pro základní školy, jaké je zastoupení početních a slovních úloh se zlomky v učebnicích a jaké problémy mohou mít žáci při počítání se zlomky.

V praktické části popisuji průběh a závěry případové studie. Výzkumným vzorkem byli žáci dvou osmých ročníků základní školy a žáci dvou ročníků víceletého gymnázia, které odpovídají osmým ročníkům základní školy. Uvádím očekávané strategie řešení i chyby, kterých by se žáci mohli při řešení úloh dopustit. Součástí praktické části je také rozbor žákovských řešení a popis strategií řešení úloh, které žáci zvolili.

Teoretická část

2 Slovní úlohy

Školní vyučování by mělo připravit žáky na nutnost řešit v běžném životě rozličné úkoly. K tomu velkou měrou přispívá také řešení slovních matematických úloh. Některé slovní úlohy však lze řešit až po zvládnutí určitého matematického aparátu. Ve vyučování matematice by tedy neměla chybět ani jedna z těchto složek – úlohy na procvičení, zdokonalení a prohloubení znalostí a dovedností v daném oboru matematiky a slovní úlohy, které prostupují naším životem, aniž bychom si to uvědomili.

2.1 Co je a co není slovní úloha

Vymezením pojmu matematické úlohy se zabývala již řada autorů. Ve Webster's (in Novotná, 2000) jsou uvedeny tyto dvě definice úlohy v matematice:

Definice 1: „V matematice cokoli, co vyžaduje být uděláno, nebo vyžaduje, aby něco bylo uděláno."

Definice 2: „Otázka...která je komplikovaná nebo obtížná."

Helus, Hrabal, Kulič a Mareš (1979, str. 220) vymezují učební úlohu takto: „Učební úloha je každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle..."

Otázkou je, co lze v matematice považovat za slovní úlohu a co již nikoliv. Novotná (2000) konstatuje, že najít v rozsáhlé literatuře věnované slovním úlohám přesnou odpověď na otázku „Co je slovní úloha?" se nepodaří. Vyšín (1962, str. 104) uvádí: „Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy. Geometrické úlohy se obvykle nepokládají za slovní úlohy." Zároveň však dodává, že ani úloha zadaná například rovnicí se neobejde bez slovního dodatku. Takovéto úlohy však Vyšín za slovní úlohy nepovažuje.

Odvárko (in Novotná 2000, str. 10) vymezuje slovní úlohy jako „úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace z nejrůznějších mimomatematických oblastí“. Zahrnuje tam oproti Vyšínovi i úlohy geometrické. Kuřina (1989, str. 61) charakterizuje slovní úlohu jako úlohu, kde „je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky“.

2.2 Rozdělení slovních úloh – typologie

Stejně jako vymezení pojmu slovní úloha není ani typologie slovních úloh jednotná. Různí autoři dělí úlohy podle různých kritérií. Většinou jde o dva pohledy na dělení slovních úloh. Úlohy se nejčastěji dělí podle oblasti matematiky, do níž se slovní úloha transformuje, nebo podle kontextu (mimomatematické oblasti), do kterého jsou zasazeny. V literatuře se většinou čistě matematické úlohy doplněné slovním zadáním (např. řešte rovnici v R) za slovní úlohy nepovažují.

Vyšín (1962, str. 104) uvádí dělení slovních úloh na tyto dvě skupiny:

- **matematické slovní úlohy**
  - jsou matematické úlohy zapsané slovními výroky s minimálním použitím matematických symbolů. Řešení takovýchto úloh vyžaduje převedení slovního vyjádření do matematických symbolů, například sestavení rovnice. K tomuto procesu je potřeba pouze znalosti matematického názvosloví.
  - typy úloh: Napište součet tří čtvrtin z šedesáti a součinu tří a čtyř.; Myslím si číslo, když od něj odečtu 10 a výsledek vynásobím 4, dostanu číslo 132. Jaké si myslím číslo?
- **slovní úlohy s nematematickým obsahem**
  - tyto úlohy označuje Vyšín jako úlohy matematického charakteru. Témata úloh jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd apod. Řešení takovýchto úloh vyžaduje nejprve převedení na matematickou úlohu – tomuto procesu říkáme matematizace. Vzniklou matematickou úlohu je potřeba vyřešit a poté výsledky interpretovat v kontextu původní úlohy.
  - do této skupiny spadá většina slovních úloh, které lze najít v učebnicích a cvičebnicích pro základní i střední školy.

Odvárko a kol. (1990) dělí úlohy podobným způsobem jako Vyšín, jako speciální skupinu uvádí i úlohy s geometrickým obsahem (např. Vyšetřete množinu všech rovin v prostoru, které mají od dvou daných bodů *A, B* stejné vzdálenosti.; Určete největší možný objem rotačních kuželů, které mají daný povrch *S*.)

Dalším možným dělením, uvedeno např. v (Novotná, 2000, str. 18), je dělení podle kontextu úlohy. Následující dělení úloh se nachází v publikacích především proto, že tyto typy úloh se nejčastěji vyskytují v současných učebnicích a sbírkách úloh z matematiky. Typy úloh, které se vyskytují často, jsou v mnoha publikacích vymezené takto:

- **o pohybu** – v úloze se vyskytují informace o dráze, době pohybu a rychlosti nějakého objektu ve vzájemné kombinaci. K řešení takových úloh lze smysluplně využít vzorec $s = v.t$ (kde s je dráha, v průměrná rychlost a t doba pohybu)
- **o společné práci** – v úloze vystupují dva nebo více subjektů různé výkonnosti, které konají stejnou práci. Výkonností rozumíme dobu, za kterou subjekt vykoná danou práci. Hledanou veličinou bývá individuální nebo společná výkonnost subjektů, případně množství vykonané práce.
- **o směsích** – zjišťujeme optimální složení směsí (teplotu, koncentraci, cenu atd.) nebo jejich jednotlivých složek. Nejčastěji se jedná o mísení roztoků různé koncentrace, slévání různě teplých kapalin atd.
- **o obsahu** – v úlohách zaujímá podstatnou část uvažování o obsahu rovinného obrazce, případně jeho výpočet. Mezi tyto úlohy nejsou zařazovány úlohy na výpočet povrchu těles, i když jsou svým charakterem podobné.
- **o dělení celku na části** – v úlohách vystupuje celek a jeho části. Úlohy mohou být zadány různými způsoby. Tím se mění objekt, na který se ptáme (celek, část, počet částí).

V běžné školní praxi se nejčastěji setkáváme se slovními úlohami, které navazují na probraný okruh matematiky – celá čísla, desetinná čísla, zlomky, rovnice, poměr, procenta, počítání obvodů, obsahů, objemů a povrchů atd. Ve sbírkách úloh pro vyšší ročníky základních škol jsou to pak úlohy dělené podle výše uvedených oblastí (o pohybu, o společné práci atd.).

Slovní úlohy s matematickým obsahem i úlohy nematematické se v řadě učebnic kombinují, nejčastěji za kapitolami, ve kterých je probíráno nové algebraické učivo nebo nový číselný obor (např. Zapiš mocninu, která má základ 20 a mocnitele 11.; Čemu je roven součet rozdílu čísel tři a pět a součinu čísel dva a mínus tři?).

Slovních úloh s matematickým obsahem je v učebnicích a cvičebnicích většinou málo. Pokud autoři chtějí, aby žáci probrané učivo procvičili počítáním, většinou se objevují pouze úlohy na procvičení, které nejsou v literatuře považovány za slovní úlohy.

V této práci budeme shodně s některými prameny rozumět slovními úlohami takové úlohy, které popisují více či méně reálnou situaci a obsahují alespoň jednu otázku, na kterou je potřeba odpovědět, nebo úkol, který je potřeba splnit (např. narýsujte množinu bodů, rozdělte mezi tři děti, zapište atd.). Za slovní úlohy budeme tedy považovat i slovní úlohy matematické (např. Jaké číslo se rovná desetině 50?) i nematematické (např. Karel má o 4 kuličky více než Pepa. Dohromady mají 30 kuliček. Kolik má Pepa kuliček?). Matematické úlohy zadané rovnicí, nerovnicí nebo výrazem (např. Zjednodušte výraz $2x-3+4x-8$.; Vyřešte rovnici v oboru celých čísel atd.) za slovní úlohy považovat nebudeme, i když zadání úlohy obsahuje nematematickou slovní instrukci.

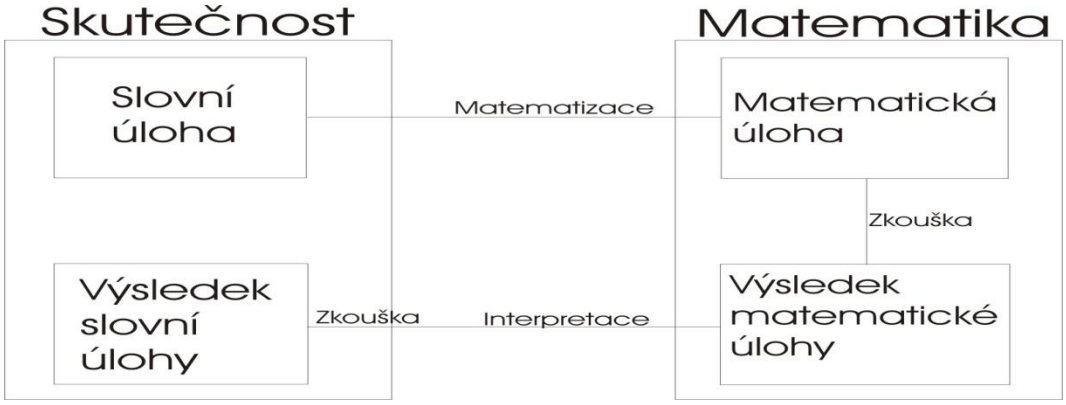
2.3 Proces řešení slovní úlohy

Jak již bylo řečeno, matematická úloha, ať slovní, geometrická nebo početní, je cokoli, co vyžaduje být vyřešeno. Řešení matematických úloh bývá často komplikované, obtížné. To platí i pro slovní úlohy. Jak tedy vypadá proces řešení slovní úlohy? Jaké fáze by mělo toto řešení mít?

Proces řešení slovních úloh se drobně liší u slovních úloh s matematickým a nematematickým obsahem. U úloh s matematickým obsahem se řešitel snaží úlohu „převést“ na jinou matematickou úlohu, kterou umí vyřešit. Odhadem nebo kalkulem tak získává výsledek transformované matematické úlohy, jehož správnost následně musí zkontrolovat v úloze původní.

Úlohy s nematematickým obsahem mohou být pro transformaci náročnější. Nematematickou úlohu je potřeba nejprve převést na úlohu matematickou. Odvárko

(1990, str. 217) nazývá tento proces matematizace. Uvádí, že každá slovní úloha s nematematickým textem stojí mimo oblast matematiky. V tomto případě nejde o pouhou transformaci na jinou matematickou úlohu, ale o „konstrukci matematické úlohy, jež vystihuje něco ze slovní úlohy, ale není vždy jejím přesným „obtiskem“. Přechod od slovní úlohy s nematematickým obsahem k matematické úloze, která má pomoci k vyřešení původní úlohy, se nazývá matematizace slovní úlohy. Zpětný přechod od výsledku matematické úlohy k výsledku slovní úlohy se nazývá interpretace výsledku matematické úlohy v původní situaci.“ V této souvislosti Odvárko uvádí nutnost provedení dvojí zkoušky. První zkouška má být zkouškou správnosti řešení matematické úlohy. Druhá zkouška má za cíl zjistit, zda řešení matematické úlohy odpovídá také původní slovní úloze (např. zda zjištěný věk či počet osob není záporný apod.). Druhá zkouška také může odhalit, že řešitel udělal chybu při matematizaci zadání. Tento proces Odvárko zachycuje jednoduchým schématem.



Novotná (2000) popisuje tyto etapy jako uchopování, transformaci odhalených vztahů a návrat do kontextu zadání úlohy:

1. Etapa uchopování slovní úlohy
    - uchopování všech objektů a vztahů a identifikace těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“
    - hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu
    - hledání a nalezení sjednocujícího pohledu
    - získání celkového vhledu do struktury problému

2. Etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému
3. Etapa návratu do kontextu úlohy

Novotná (2000) uvádí, že uvedený model je ideální, ve skutečnosti se některé etapy mohou opakovat, některé mohou být úplně vynechané.

Toto schéma se snaží podpořit učitelé tím, že od žáků vyžadují zkrácený zápis zadání, rozbor úlohy, srozumitelné řešení a odpověď.

Většina žáků při řešení slovní úlohy hledá signální slova a slovní spojení, která naznačují, jak se „má“ úloha řešit. Např. „Karel má o 4 kuličky více než Jarda“ značí, že pokud počet kuliček, které vlastní Jarda označím x, Karel bude mít $x + 4$ kuliček. Signál „o víc než“ pro žáky znamená „sčítej“. Podobně žáci vyhledávají i další signály v zadání slovní úlohy. Poznají podle nich například i do jaké kategorie slovní úlohu zařadit (např. o pohybu, společné práci, uplatnění přímé úměry, trojčlenky, procent atd.). Problém nastane, pokud je signální slovo použito jinak, než žák očekává (jinak než je použito ve většině jemu doposud známých a předkládaných úloh).

2.4 Problémy při řešení slovních úloh

Řešení slovních úloh je ve školní praxi vyučování matematice velmi složitým prvkem. Jak žáci, tak učitelé se setkávají s řadou obtíží, které řešení slovních úloh provází. Řada výzkumů prokázala, že většina žáků slovní úlohy nerada řeší. Řešitel musí nejprve celý text zadání úlohy přečíst a správně mu porozumět, odhalit všechny důležité informace a vztahy mezi nimi. Uvědomit si, co hledá, jaké prostředky má k dispozici a zda již podobnou úlohu řešil a jak. Získané informace a vztahy mezi jednotlivými objekty musí správně transformovat do matematického jazyka.

Žákům mnohdy chybí porozumění textu, neumí v zadání najít důležité informace a rozkrýt vztahy mezi nimi. Tento problém je možná důsledkem přetechnizované společnosti. Žáci „neumí“ pořádně číst, dělá jim problém psanému textu porozumět (nejen v matematice). V matematice se navíc učitelé snaží žákům rozbor úlohy usnadnit a důležité informace žákům, v rámci urychlení řešení úlohy a ušetření času ve vyučování, pomáhají najít. Díky nedostatku času na rozbor zadání se to ani žáci

nemají kdy naučit. Vylepšení by mohla přinést mezipředmětová spolupráce učitelů matematiky a češtiny a samozřejmě větší důraz na rozbor úlohy v hodině matematiky.

Nejčastější problémy při transformaci matematické slovní úlohy (např. určete všechna celá čísla, která mají svou druhou mocninu o 276 větší než svůj čtrnáctinásobek) na matematickou početní úlohu leží v rovině terminologické, uvádí Vyšín (1962). Pro transformaci matematické slovní úlohy je potřeba znát matematickou terminologii (např. celá čísla, druhá mocnina, součet, součin, čitatel, jmenovatel), což může některým žákům činit značné problémy, jak jsem si všimla během své praxe. Žáci mají pocit, že se na matematiku nemusí příliš učit, protože buďto jim to jde, nebo nejde. Neovládají proto terminologii, kterou je nutno se naučit nazpaměť, jako například slovíčka v němčině.

Obtíží při transformaci nematematické slovní úlohy může být pro řešitele více. Zadání nematematické slovní úlohy bývá zpravidla delší a komplikovanější než zadání matematické slovní úlohy, protože obsahuje větší množství „zbytečných" slov (např. místo matematické slovní úlohy „kolik je součet čísel 3 a 4?" je zadání nematematické slovní úlohy: „Paní Jeřábková donesla v pondělí ráno z kurníku 3 vejce. Téhož dne odpoledne donesl pan Jeřábek z kurníku další 4 vejce. Kolik vajec donesli v pondělí Jeřábkovi z kurníku?"). U některých slovních úloh je potřeba nejprve udělat matematickou úvahu, která přímo nevyplývá ze zadání, aby byl řešitel schopen vztahy mezi objekty matematicky zapsat a dostat se tak k výsledku úlohy (např. viz úloha Sekáči v této práci).

Po matematizaci a transformaci zadání na matematickou početní úlohu, mohou nastat další problémy například proto, že řešitel neumí úlohu díky svým dosavadním znalostem, zkušenostem a dovednostem vyřešit – s matematickými operacemi potřebnými pro vyřešení úlohy se řešitel buď zatím nesetkal, nebo si je dostatečně neosvojil (chybí mu dostatečný matematický aparát pro vyřešení úlohy).

Pokud je během řešení potřeba udělat několik různých kroků ke zjištění správného výsledku, může se stát, že řešitel udělá v některém mezikroku chybu. V případě, že je mezikroků větší počet, může řešitel ztratit pojem o tom, co vlastně chtěl zjistit, a odpoví na jinou otázku, než byl tázán.

Především u slovních úloh s nematematickým obsahem může po správném vyřešení matematické početní úlohy řešitel dospět k chybné odpovědi, pokud neprovede po interpretaci výsledků do kontextu slovní úlohy zkoušku správnosti výsledku v kontextu slovní úlohy a kontrolu splnění všech podmínek úlohy. Může se tedy stát, že řešitel neodhalí rozpor výsledku (nebo výsledků) s kontextem úlohy (např. záporný věk, záporný počet účastníků, nesplnění všech podmínek úlohy, necelý počet zvířat apod.).

Bývá zvykem zapsat řešení slovní úlohy formou slovní odpovědi a většina učitelů slovní odpověď jako součást řešení slovní úlohy vyžaduje. Tento krok – zápis slovní odpovědi – také dělá nemalé části řešitelů potíže. Když jsem se o tomto problému bavila se žáky, zjistila jsem, že většině žáků připadá slovní odpověď zbytečná, protože „přece výsledek viditelně zvýraznili“.

Ve své praxi jsem se přesvědčila i o tom, že žákům dělají velké obtíže úlohy, které nemají řešení. Mají totiž pocit, že když už je jim úloha zadána, musí existovat nějaké řešení. Je to dáno nejspíš tím, že se ani v matematice, ani v jiných předmětech s podobnými „nevyřešitelnými“ úlohami nesetkávají příliš často, troufla bych si tvrdit, že u řady učitelů se s takovými úlohami nesetkají nikdy.

2.5 Slovní úlohy v učebnicích pro 2. stupeň základní školy

Slovní úlohy zaujímají ve školním vyučování na druhém stupni základní školy významné místo. Slovně formulované úlohy najdeme nejen v učebnicích matematiky, ale i v dalších vyučovacích předmětech jako fyzika a chemie, uvádí Kubínová (1998). Dodává: „jejich výhodou je, že jejich zadání bývá často formulováno jako popis skutečné reálné situace, se kterou se žáci běžně setkávají ve svém okolí. Tím je mnohdy na první pohled pro žáka obtížné zadání prezentováno jako přijatelnější a srozumitelnější, protože žák vidí vzájemné vztahy a propojení mezi „normálním“ světem a „teorií“, která je předmětem školního vyučování.“ Zároveň však uvádí, že z řady výzkumů vyplývá, že právě slovní úlohy patří tradičně k úlohám obtížným, mnohdy k úlohám, které žáky stresují ještě dříve, než je žáci začnou řešit.

Díky výsledkům šetření studentů doktorského programu v oboru didaktika matematiky při Oborové radě pro didaktiku matematiky KMDM Pedagogické

fakulty Univerzity Karlovy v Praze (Horáček, Horáčková, 1998; Vaníček, 1998; Černá, 1998; Ludvíková, Roubíček, 1998), vlastní zkušenosti a studiem učebnic jsem zjistila, že slovní úlohy opravdu provází žáky hodinami matematiky velmi často. Ve většině učebnic a pracovních listů jsou zařazeny především úlohy, které mají nematematický charakter. Různé učebnice nabízí různé způsoby rozboru slovní úlohy. Setkala jsem se i se zvýrazněním klíčových slov (např. obvod, délka, kolik) přímo v zadání slovní úlohy, což se mi nezdá příliš šťastné. Myslím, že slovní úloha tím ztrácí svůj velký potenciál. Žáci nemusí přemýšlet, co je v zadání důležité, ale pouze opíší tučně zvýrazněná slova a poté hledají vhodný, již známý algoritmus pro řešení úlohy.

Řada autorů se snaží v celé učebnici uplatňovat spíše konstruktivistický způsob „výkladu“ nové látky, aby nebyla látka žákům pouze předkládána, ale aby měli možnost důležité vztahy odvodit, pochopit a „osahat“. To se projevuje i ve výběru slovních úloh. V novějších řadách učebnic se vyskytují stále častěji nestandardní typy úloh, při jejichž řešení nestačí pouze použít známý algoritmus, a slovní úlohy s nematematickým obsahem, nad kterými se žáci musí více zamyslet. Např. místo úloh na dosazování do vzorce „Vypočítejte povrch kvádru o rozměrech a, b, c“ jsou v novějších učebnicích zařazeny úlohy s nematematickým obsahem (např. Kolik skla je potřeba na výrobu akvária s víkem, má-li mít akvárium rozměry a, b, c).

Ač se autoři všech učebnic, cvičebnic a pracovních sešitů snaží slovní úlohy „brát“ z reálného života, mnohdy to jde velmi těžko, protože reálný svět je komplikovanější než slovní úloha, kterou jsou žáci schopni a ochotni řešit. Některé úlohy jsou pak velmi nereálné a pro žáky nejsou dostatečně motivující (nevidí v jejich řešení užitek pro budoucí praxi ani je neberou jako hru). V takovém případě si myslím, že je lepší, pokud se úloha „netváří“ jako reálná, ale již ze zadání je patrné, že jde o smyšlenou situaci (sci-fi, pohádku atd.). Na druhé straně však existuje velký soubor úloh z reálného života, které jsou žáci schopni vyřešit a tím získat alespoň částečně odpověď na otázku „K čemu nám to bude?“.

3 Zlomky

Podle Rámcového vzdělávacího programu (Jeřábek a kol., 2007) se mají žáci seznámit se zlomky až na druhém stupni, obvykle v sedmém ročníku. Žáci se však

s nimi velmi často setkávají již na prvním stupni základní školy. Při studiu a hodnocení učebnic jsem se proto zaměřila na učebnice pro první až sedmý ročník základní školy.

3.1 Jak se zavádí zlomky v různých řadách učebnic

Učebnice je jednou z největších pomocníků většiny učitelů. Zkoumala jsem proto, jak se v různých řadách učebnic zavádí zlomky a práce s nimi. Prostudovala jsem více než 40 učebnic pro první až sedmý ročník základní školy. Seznam prostudovaných učebnic je součástí seznamu literatury na konci textu.

V učebnicích pro první, druhý a třetí ročník jsou uvedeny pouze zlomky, které mohou být žákům známé (polovina, třetina, čtvrtina). V některých učebnicích pro první tři ročníky základní školy zlomky vůbec zmíněné nejsou[1], je to však spíše výjimka.

Ve všech učebnicích pro čtvrtý, pátý a šestý ročník základní školy, které jsem prostudovala, jsem našla kapitoly věnované zlomkům.

Z 10 prostudovaných učebnic pro sedmý ročník jich 9 obsahovalo kapitoly věnované zlomkům, v jedné[2] bylo počítání se zlomky pouze součástí cvičení na opakování z minulého ročníku, protože manipulace se zlomky a početní úkony s nimi byly v této řadě učebnic zcela vyloženy v učebnici pro šestý ročník.

V učebnicích pro první tři ročníky základní školy jsou zlomky používané pouze v „běžných“ situacích (např. Rozděl tabulku čokolády na dvě poloviny, na třetiny atd.). Nejčastější úlohy se zlomky, které jsou v těchto učebnicích, patří do skupiny úloh „Celek a jeho část“.

V učebnicích pro čtvrtý ročník pokračuje seznamování se zlomkem jako částí celku, především pomocí obrázků – určování velikosti vybarvené a nevybarvené části obrazce jako zlomku celého obrazce – a pomocí reálných situací, které jsou žákům dobře známé – např. deset korun je polovina dvaceti korun atd. V učebnicích se vyskytují také převody časových údajů (např. $\frac{1}{2}$ hodiny je … minut), porovnávání

[1] např. Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 1998;Coufalová, Pěchoučková, Kaslová, 1997; Trch, 2 , Müllerová, Čižmár, Divíšek, Macháček, 1994

zlomků se stejným jmenovatelem, určování zlomku z daného čísla a sčítání zlomků se stejným jmenovatelem. Všechna cvičení a úlohy jsou převážně slovní úlohy nematematického charakteru.

V některých učebnicích pro pátý ročník[3] je zařazeno opakování zlomků, v jiných[4] se se zlomky teprve začíná. Ve všech učebnicích je však obsah probírané látky téměř shodný. Všechny prostudované učebnice pro pátý ročník obsahují velké množství slovních úloh. Úlohy na početní procvičování v těchto učebnicích téměř nejsou. V učebnicích pro pátý ročník jsou především tato témata:

- zápis a čtení zlomku
- určování vyznačené části
- výpočet části z celku např. $\frac{1}{4}$ z 24
- převody jednotek ($\frac{1}{8}$ m je … dm, $\frac{1}{4}$ h je … min, $\frac{1}{2}$ kg je … g apod.)
- porovnávání zlomků se stejnými i různými jmenovateli
- desetinné zlomky a jejich převod na desetinná čísla a naopak
- určování celku, jestliže je známa jeho část (např. $\frac{1}{3}$ je 5, kolik je celek?)
- sčítání a odčítání zlomků se stejným jmenovatelem

V učebnicích pro šestý ročník opět můžeme nalézt příklady na opakování zlomků[5] i probírání zlomků „od začátku“[6]. V učebnicích pro šestý ročník je oproti učebnicím pro pátý ročník více početních úloh na procvičení, slovních úloh s nematematickým obsahem trochu ubývá, někdy se v učebnici objeví i úloha s matematickým obsahem. Nejčastěji probíraná témata v souvislosti se zlomky jsou v učebnicích pro šestý ročník:

- pravý, nepravý zlomek a smíšené číslo

3 např. Justová, 1996a; Justová, 1996b; Coufalová, Pěchoučková, Hejl, Potůček, Coufalová, 1995

4 např. Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 2000; Cihlář, Zelenka, 1995

5 např. Čižmár, Hrdina, Koman, Řebíčková, Zapletal, 1989; Šarounová, Mareš, Růžičková, Väterová, 1996; Coufalová, Pěchoučková, Lávička, Potůček, 1998; Molnár, Kopecký, Lišková, Novák, Slouka, 1998; Kočí, S., Kočí, bez uvedení roku (a); Šarounová, Mareš, Růžičková, Väterová, 1999

6 např. Müllerová, Mikulčák, Kabele, Brant, Ženatá, 1999; Cihlář, Zelenka, 1995; Bitnerová, Fuchs, Tlustý, 2007; Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V., Sinková, 1996;

- určování celku z části a naopak (např. Ve třídě je 30 dětí, $\frac{2}{3}$ jsou dívky. Kolik je ve třídě dívek?; Petr ujel 50 km, což jsou $\frac{2}{5}$ cesty, kterou si naplánoval. Jak dlouhou cestu si Petr naplánoval?)
- desetinné zlomky a jejich převod na desetinná čísla a naopak
- převody jednotek (čas, délka, hmotnost)
- krácení zlomků (jako součást kapitoly „Dělitelnost“)

V některých, především starších, učebnicích[7] je zlomkům věnováno více pozornosti, protože tyto učebnice byly vytvořeny pro osmiletou základní školu. Novější učebnice jsou již koncipované pro devítiletou základní školu, kde je oproti „osmileté matematice“ výrazný posun některých probíraných témat (např. zlomky, rovnice atd.) do vyšších ročníků. Rozsah probírané látky „Zlomky“ je tedy ve starších učebnicích pro šestý ročník stejný jako rozsah této látky v novějších učebnicích pro sedmý ročník základní školy.

Protože sedmý ročník je nejčastěji ročníkem, kdy žáci získávají věškeré poznatky o zlomcích a učí se matematické operace s nimi, je téma zlomky ve všech učebnicích, ve kterých je uvedeno (není ve starších učebnicích[8]), velmi rozsáhlým celkem. Žáci se učí veškeré matematické operace se zlomky.

Nejčastěji jsou jednotlivá témata seřazena následovně:

- určování části celku a zápis jako zlomek (většinou opakování)
- rozšiřování a krácení zlomku
- porovnávání zlomků
- sčítání zlomků
- odčítání zlomků
- násobení zlomku přirozeným číslem
- násobení zlomků
- dělení zlomku přirozeným číslem
- dělení přirozeného čísla zlomkem

7 např. Čižmár, Hrdina, Koman, Řebíčková, Zapletal, 1989; Cihlář, Zelenka, 1995; Šarounová, Mareš, Růžičková, Väterová, 1999

8 Müllerová, Čižmár, Divíšek, Macháček, 1994

- dělení zlomků

Tato témata bývají někdy v jiném pořadí, v některých učebnicích najdeme kapitoly o pravém, nepravém zlomku a smíšených číslech, určování celku, známe-li jeho část nebo naopak, a další rozšiřující učivo. V učebnicích pro sedmý ročník je již více početních úloh. Najdeme zde také matematické slovní úlohy. Ve většině učebnic mají žáci možnost řešit velké množství slovních úloh. V některých, i novějších, učebnicích, však slovních úloh mnoho nenajdeme[9].

3.2 Početní procvičování a slovní úlohy

Počítání se zlomky je pro většinu žáků velmi náročné. I jednoduché úlohy mohou činit velké potíže (např. Tichá, 2003; Tichá, 1998; Hejný, 2004). Je tedy nutné procvičovat se žáky manipulaci a počítání se zlomky a zároveň také dávat zlomky do reálných kontextů slovních úloh. V učebnicích pro první až sedmý ročník základní školy jsem zjišťovala, jak je zastoupeno početní procvičování a slovní úlohy.

V učebnicích pro první až pátý roční jsou téměř výhradně slovní úlohy. V učebnici matematiky pro 6. ročník (Čižmár, Hrdina, Koman, Řebíčková, Zapletal, 1989) je oproti ostatním učebnicím, které jsem prostudovala, u tématu Zlomky a počítání s nimi menší počet slovních úloh. Cihlář a Zelenka (1995) ve své učebnici matematiky pro 6. ročník také zařadili spíše úlohy na početní procvičování než slovní úlohy, i když je tématu zlomků v této učebnici věnována značná část. U ostatních učebnic je poměr procvičovacích početních úloh a slovních úloh vyvážený. V některých učebnicích (např. Novotná, Kubínová, Sýkora, Sinková, 1995; Coufalová, Pěchoučková, Hejl, Potůček, Coufalová ml., 1995; Hošpesová, Divíšek, Kuřina, 2000; Odvárko, Kadleček, 1998) převažuje počet slovních úloh nad počtem úloh pouze početních.

Řada autorů zařazuje zlomky i do úloh (početních i slovních) v učebnicích pro starší ročníky. Nejčastěji se se zlomky můžeme setkat v tematických celcích Poměr, Procenta, Rovnice, Nerovnice, Desetinná čísla a Algebraické výrazy.

9 např. Cihlář, Zelenka, 1995; Čižmár, Hrdina, Koman, Řebíčková, Zapletal, 1989

3.3 Problémy při počítání se zlomky

Zlomky a počítání s nimi je velmi obtížná část učiva matematiky. Žáci potřebují dostatek času a velké množství separovaných modelů (jednotlivých příkladů), aby byli schopni se zlomky pracovat nikoliv pouze automaticky formálně, ale také s porozuměním. Ve většině případů je velkým pomocníkem obrázek, díky kterému žák získá lepší představu o zlomcích a vztazích mezi nimi. Ani obrázek však nemusí být zárukou toho, že žák pochopil podstatu úlohy, jak uvádí Tichá (1998). Analýzou žákovských řešení úloh případové studie, která je popsána v praktické části této práce, jsem zjistila, že většina žáků kreslí obrázky k úlohám se zlomky stereotypně (většinou jako kolečko, které dělí čarami na požadovaný počet dílků, i když by byl v některých případech vhodnější model obdélníkový, např. při dělení celku na větší počet částí).

Žáci, kteří nemají dostatečně rozvinutou představu zlomku jako části určitého celku, se při matematických operacích se zlomky učí pouze algoritmy a poučky, jak se dopracovat k výsledku (který vždy nemusí být správný, protože algoritmus pro danou úlohu nemusí fungovat). Příkladem může být úloha a její řešení žáky, které uvádí Tichá (1998).

Zadání úlohy: Prodavač snížil cenu nanuku o $\frac{1}{4}$ na 6 Kč. Jaká byla cena nanuku před zlevněním?

Zápisy řešení dvou různých řešitelů byly totožné: $6 + \frac{1}{4}$. U prvního řešitele byl matematicky špatný výsledek 8, který však byl správným výsledkem pro danou slovní úlohu (řešitel nezapsal, že se jedná o $\frac{1}{4}$ z celkové sumy, kterou chce dopočítat, matematicky správně by mělo být zapsáno $6 + \frac{1}{4}x = x$). Druhý řešitel měl matematicky správný výsledek vlastního zápisu, což ovšem nebyl správný výsledek dané úlohy, protože ani původní vztah nebyl správně zapsán. I někteří další řešitelé, které Tichá ve svém článku uvádí, danou slovní úlohu nevyřešili správně, protože např. počítali $\frac{1}{4}$ ze 6 (žádné jiné číslo tam není), brali 6 jako $\frac{1}{4}$ celku apod. Tichá uvádí i žákovské strategie, které vedly ke správnému výsledku.

Ani u žáků, kteří mají představu o tom, jakou část např. kruhu zabírá jeho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ apod., není jisté, že budou úlohy se zlomky řešit správně a že se doberou ke správnému výsledku. Hejný (2004) uvádí několik příkladů, ve kterých žák ve školním prostředí umí úlohu vyřešit i vysvětlit, ale zadaná stejná úloha s reálným kontextem mu činí potíže. Často se setkáme i se situacemi, kdy je žák naopak schopen vyřešit reálnou úlohu (např. Dva stejné dorty jsou rozkrájeny jeden na třetiny a druhý na čtvrtiny. Smíš si vzít jeden ukrojený kousek, který si vybereš?), ale neumí vyřešit matematickou školní úlohu (např. Porovnej $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$. Který zlomek je větší?). Někteří žáci bez problémů řeší jednodušší úlohy (např. sčítání zlomků s „malými" jmenovateli), ale mají problém při řešení úloh složitějších (např. sčítání zlomků s „velkými" jmenovateli). Hejný (2004) to dokládají příkladem s porovnáváním zlomků. Žák je schopen porovnat zlomky, které si umí nakreslit („fyzicky" porovnává velikost jednotlivých dílů). Porovnání „nepředstavitelných" zlomků jako je třeba $\frac{1}{11}$ a $\frac{1}{17}$ mu však činí potíže a ani znalost předcházejících nerovností zlomků mu nepomáhá.

Velmi složitým mentálním zdvihem je uchopení zlomku jako operátoru, nikoli jako čísla, se kterým lze „beztrestně" zacházet jako s každým jiným číslem. Zlomky jsou totiž vždy vázány k celku, ze kterého je „bereme". Tento problém bohužel prohlubuje i většina učebnic. Procvičení početní manipulace se zlomky (sčítání, odčítání atd.) je totiž téměř výhradně zapsáno ve tvaru: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{8}$ nebo $2+4-4\frac{1}{6}$, přičemž autor neuvádí, že se jedná o díly téhož celku. Žáci tedy při řešení těchto úloh automaticky předpokládají (většinou se nad tím zřejmě vůbec nezamýšlejí), že se jedná o části stejného celku a výsledkem bude tedy také část tohoto celku. To vede k problémům při řešení slovních úloh se zlomky v případě, že se v úloze vyskytuje zlomek jako část nějakého celku a celé číslo, které udává velikost jiné části téhož celku (viz výše a kap. 6.1.1), případně pokud jsou dány dva zlomky, které nejsou ze stejného celku – např. úloha: „Ze 4.A chybí polovina žáků, ze 4.B chybí třetina žáků. Kolik žáků chybí celkem ve čtvrtých třídách?", kterou uvádí Hejný (2004).

Nelze se tedy divit, že jsou zlomky v žákových představách nejasné a že se žáci raději mechanicky učí algoritmy pro počítání se zlomky, protože „ty jsou jisté".

Praktická část

4 Cíle případové studie

Hlavním cílem mé práce bylo popsat strategie řešení slovních úloh, které žáci při řešení zadaných úloh zvolí. Zkoumala jsem, nakolik se žákovské strategie řešení shodují se strategiemi, které zvolil učitel. Předpokládala jsem, že učitel svým přístupem ke slovním úlohám, jejich vyučováním, procvičováním a hodnocením ovlivňuje strategie řešení, které žáci volí, a proto se většina žákovských strategií řešení úlohy bude shodovat se strategií řešení, kterou zvolil vyučující ve svém řešení.

Při analýze žákovských řešení úloh jsem také sledovala chyby, kterých se žáci při řešení slovních úloh se zlomky dopouštějí. Předpokládala jsem, že jsou pro žáky větší překážkou k získání správného výsledku spíše zlomky nežli samotné slovní úlohy.

V rozboru vybraných úloh se také snažím odhalit příčiny žákova neúspěchu při řešení slovní úlohy.

5 Případová studie v osmých ročnících

Případovou studii žákovských řešení slovních úloh zaměřenou na to, jak si žáci poradí se slovními úlohami se zlomky, jsem provedla ve dvou osmých ročnících základní školy a ve dvou ročnících víceletého gymnázia odpovídajících osmým ročníkům základní školy. Žáky víceletých gymnázií jsem do výzkumného vzorku zařadila především proto, že ze základní školy většina nadanějších žáků po páté třídě přejde na víceleté gymnázium. Osmý ročník jsem vybrala proto, že ve většině základních škol se zlomky a počítání s nimi učí žáci v sedmém ročníku. V osmém ročníku by tedy měly být zlomky pro žáky běžně používanými čísly a práce s nimi by pro ně neměla být ničím výjimečná. Úlohy řešili žáci i jejich učitelé, abych mohla jejich řešení porovnávat.

5.1 Výběr slovních úloh

Pro svou případovou studii jsem vybrala tři slovní úlohy s nematematickým obsahem z různých oblastí počítání se zlomky – dělení celku na části, práce s poměry a logicky řešitelná úloha o společné práci. První úlohu o dělení čokoládových bonbonů jsem vymyslela, protože se mi nepodařilo najít vhodnou úlohu v učebnicích. Druhá úloha je převzata z (Odvárko – Kadleček, 1998, str. 32), třetí úloha z (Pereĺman, in Novotná, 2000, str. 44)

Zadání 1. úlohy – Dělení čokolády: Maminka koupila velikou krabici s čokoládovými bonbony. Dala ji svým dětem s tím, že teď smí rozdělit pouze polovinu bonbonů, které jsou v krabici, a to takto: tatínek a maminka dostanou dohromady čtvrtinu této poloviny, osminu poloviny k rozdělení nechají děti pro dědečka s babičkou a zbytek si smí rozdělit rovným dílem mezi sebe. Každé ze tří dětí dostalo po rozdělení čokoládových bonbonů podle maminčiných pravidel 5 bonbonů. Kolik čokoládových bonbonů bylo původně v krabici?

Úlohu lze zařadit mezi slovní úlohy o dělení celku na části. Při řešení této úlohy musí mít žáci představu o tom, co znamenají jednotlivé zlomky (co je polovina, čtvrtina z poloviny). Žáci musí umět alespoň správně počítat nebo správně zakreslovat údaje o částech celku, které jsou v textu slovní úlohy. Matematické operace, které se mohou při řešení této slovní úlohy objevit, nemusí být příliš složité. Stejně tak úvahy, které vedou ke správnému řešení, nemusí být nijak komplikované, pokud mají žáci základní představu o tom, jakou část celku jednotlivé údaje (zlomky) představují. Žáci při řešení této slovní úlohy mohou využít následující matematické dovednosti:

- grafické znázorňování částí udaných zlomkem (čtvrtina poloviny pro rodiče, osmina poloviny pro prarodiče)
- násobení přirozených čísel (3 děti, každé má 5 bonbonů)
- sčítání zlomků, převod na společného jmenovatele (jaká část bonbonů připadne na rodiče a prarodiče)
- odčítání zlomků, převod na společného jmenovatele (jaká část bonbonů zbývá na rozdělení pro děti)

- násobení zlomku zlomkem (jedna čtvrtina z jedné poloviny)
- dělení zlomku celým číslem (po určení, kolik bonbonů si smí rozdělit děti, vydělením 3 zjistí, jaká část krabice připadá na jedno dítě)
- řešení rovnic se zlomky

Zadání 2. úlohy – Bílá polévka: Paní Hloubalová dělá speciální bílou polévku s houbami, do které k jednomu litru vody přidá $\frac{1}{2}$ litru mléka a $\frac{1}{8}$ litru šlehačkové smetany. Dnes se sešla na chatě velká společnost. V hrnci je připraveno na polévku 2,5 litru vody. Kolik mléka a kolik smetany má paní Hloubalová přidat do hrnce?

Tato úloha je vlastně úlohou o poměru. Předpokládala jsem, že druhá úloha bude nejjednodušší ze všech tří zadaných. Žáci nepotřebují obrázek pro lepší představu o množství mléka a smetany, musí však rozumět použitým pojmům (např. osmina litru) a musí mít dostatečný matematický aparát pro správné vyřešení úlohy. Žáci při řešení této úlohy mohou využít následující matematické dovednosti:

- sčítání zlomků se stejným jmenovatelem (na 1 litr vody je potřeba $\frac{1}{2}$ litru mléka, proto na 2 litry vody je potřeba $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ litr mléka)
- sčítání zlomků s různým jmenovatelem, převod na společného jmenovatele (na 2 litry vody je potřeba 2/8 litru smetany, na $\frac{1}{2}$ litru vody je potřeba $\frac{1}{16}$ litru smetany, na 2 a $\frac{1}{2}$ litru vody je potřeba $\frac{2}{8} + \frac{1}{16}$ litru smetany)
- „půlení“ zlomků – dělení zlomku dvěma (na 1 litr vody je potřeba $\frac{1}{2}$ litru mléka, na půl litru vody je potřeba $\frac{1}{4}$ litru mléka)
- převod desetinného čísla na zlomek nebo převod zlomku na desetinné číslo (2,5 litru vody je $\frac{5}{2}$ litru vody, $\frac{1}{2}$ litru mléka je 0,5 litru mléka)
- násobení zlomku zlomkem, případně násobení dvou desetinných čísel

Zadání 3. úlohy – Sekáči: Sekáči měli pokosit dvě louky; jedna byla dvakrát větší než druhá. Polovinu dne pracovali všichni sekáči na větší louce. Pak se rozdělili na dvě stejné skupiny. První skupina zůstala na větší louce a do večera ji celou

posekala. Druhá skupina kosila menší louku a večer jim zbývalo posekat ještě takový kousek, který další den dosekal jeden sekáč do večera. Kolik sekáčů kosilo trávu?

Úloha byla velmi náročná především na prvotní nápad, jak úlohu matematicky uchopit. Tuto úlohu jsem zařadila především proto, abych zjistila, zda se žáci pokusí úlohu nějak řešit nebo zda po prvním neúspěchu při matematizaci úlohy úlohu zavrhnou a řešit ji nebudou. Úloha se dá téměř celá řešit pouze úvahou s minimálním využitím matematických operací se zlomky, rovnic apod. Žáci při řešení této úlohy mohou využít následující matematické dovednosti:

- znalost řešení úloh o společné práci (když jeden sekáč poseká určitou část louky za celý den, posekají tutéž část za půl dne dva sekáči)
- odčítání zlomků, převod na společného jmenovatele (polovina sekáčů poseká za půl dne třetinu velké louky, z malé louky tedy po prvním dni zbude k posekání $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ velké louky)
- sčítání zlomků se stejným jmenovatelem (první den všichni sekáči posekali $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ velké louky)

5.2 Testovaná skupina

Úlohy jsem zadala ve dvou různých základních školách (17 + 18 žáků) a ve dvou víceletých gymnáziích (15 + 22 žáků), celkem 72 testovaných žáků. Školy jsem vybrala náhodně ze seznamu pražských škol. Jedno víceleté gymnázium je gymnázium soukromé, ostatní školy jsou školy státní.

Vyučující učí v testované třídě buďto třetím rokem (obě základní školy a soukromé gymnázium), nebo prvním rokem (státní víceleté gymnázium). Vyučující na základní škole a státním víceletém gymnáziu se slovními úlohami zabývají často a zařazují je do každého tematického okruhu. Vyžadují zápis zadání úlohy, jeho rozbor, srozumitelné řešení a odpověď. Vyučující na soukromém gymnáziu se slovními úlohami příliš nepracuje, předkládá žákům hlavně úlohy početní, na kterých mohou získané znalosti a dovednosti procvičit. Ani jedna z vyučujících netrvá při řešení úloh (slovních i početních) na určitém způsobu řešení, na zavedeném algoritmu.

5.3 Způsob získání dat

Slovní úlohy, které žáci řešili, jsem zadávala ve třech třídách osobně, v jedné třídě zadávala úlohy vyučující.[10] Ve třídách, ve kterých jsem zadávala úlohy osobně, jsem byla přítomna po celou dobu, kdy žáci úlohy řešili. Měla jsem tak možnost odpovídat žákům na otázky a sledovat průběh řešení úloh u jednotlivých žáků. Některé žáky jsem o vysvětlení postupu řešení slovy požádala ještě v hodině, s jinými jsem jejich myšlenkové postupy probírala až s časovým odstupem, po pročtení a analýze jejich řešení.

Žáci měli na řešení úloh vymezenu jednu vyučovací hodinu. Někteří žáci odevzdali svá řešení dříve. Úlohy řešili žáci anonymně a samostatně bez použití kalkulačky na čistý list formátu A4. Zadání všech tří úloh bylo na jednom listu v pořadí, které je uvedeno výše, žáci však mohli řešit úlohy v libovolném pořadí. Všechny pomocné výpočty měli žáci zaznamenávat na stejný list, případně odevzdat spolu s řešením úlohy.

Žákovská řešení úloh jsem s vyučujícími žáků nekonzultovala, ani jsem jim jednotlivá žákovská řešení jinak neprezentovala. Žákovská řešení úloh nebyla hodnocena známkou.

6 Žákovské strategie řešení úloh

U většiny žákovských i učitelských řešení se vyskytoval nějaký druh zápisu zadání úlohy (slovní nebo obrázková legenda), poté proběhly různé výpočty a jen u necelé poloviny řešení byla připojena i odpověď. Protože jsou úlohy velmi rozdílné, uvádím jejich řešení jednotlivě. Ke každé úloze uvádím před samotným rozborem žákovských prací možné strategie řešení a chyby, které jsem při řešení úlohy očekávala.

Všechna žákovská řešení jsem hodnotila podle následujících kritérií:

- způsob zápisu zadání úlohy
  - slovní legenda
  - slovní legenda doplněná obrázkem
  - pouze obrázek

[10] zadávací arch naleznete v příloze

- ukončení řešení úlohy
  - neřešeno nebo nedořešeno
  - dořešeno (součástí řešení je i odpověď)
  - dořešeno (řešení neobsahuje odpověď, pouze zvýrazněný výsledek)
- výsledek
  - správný
  - chybný
- strategie řešení úlohy
  - rozdělení žákovských řešení podle strategií, které žáci volili

Ke každé zvolené kategorii strategií řešení úlohy jsem vybrala žákovská řešení, která jsou zajímavá svým postupem, zápisem nebo vzniklým problémem, a z nichž je dobře patrná žákova strategie řešení. Protože žáci odevzdávali řešení úloh anonymně, označuji řešitele smyšlenými jmény podle abecedy. Další zajímavá řešení, která nebudu přímo rozebírat v práci, najdete v příloze.

6.1.1 Dělení čokolády

Tuto úlohu jsem sestavila tak, aby k jejímu vyřešení postačil žákům správně nakreslený obrázek. Řešení úlohy vyžadovalo správné „znázornění“ (obrazově nebo v představě) jednotlivých dílů určených rodičům ($\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$), prarodičům ($\frac{1}{8}$ z $\frac{1}{2}$) a dětem (zbytek, po dopočítání $\frac{5}{8}$ z $\frac{1}{2}$).

Zápis zadání:

$\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$ krabice ..... rodiče .....? bonbonů

$\frac{1}{8}$ z $\frac{1}{2}$ krabice ..... dědeček s babičkou .....? bonbonů

? z $\frac{1}{2}$ krabice ..... 3 děti .....15 bonbonů

celá krabice ....? bonbonů

6.1.1.1 Možné strategie řešení

V této kapitole uvedu tři strategie, které vedou k vyřešení úlohy.

1. Strategie „pokus – omyl“ s konkrétními čísly

   Za některou hodnotu (počet bonbonů v celé krabici, počet bonbonů v polovině krabice, počet bonbonů pro dědečka s babičkou, počet bonbonů pro maminku a tatínka, část poloviny krabice, kterou dostaly děti) si řešitel zvolí konkrétní číslo. V závislosti na tomto čísle určí čísla další. Kontrolou výsledků (např. dosazením do zadání) určí, zda zvolené číslo vyhovuje, nebo nevyhovuje zadání úlohy a zda zjištěný celkový počet bonbonů je správným řešením nebo zda úloha vyžaduje nové řešení.

   Tímto způsobem by se dala slovní úloha Dělení čokolády řešit například takto:

   Vím, že maminka s tatínkem dostanou čtvrtinu z poloviny bonbonů a dědeček s babičkou pouze osminu, to je dvakrát méně. Počet bonbonů, které dostanou prarodiče, označím P, rodiče potom dostanou $2P$ bonbonů.

   Za P vezmu třeba číslo 4. Rodiče potom dostanou 8 bonbonů, prarodiče 4. Protože děti mají celkem 15 bonbonů, je v polovině krabice $4 + 8 + 15 = 27$ bonbonů.

   Zkouškou – zpětným rozdělováním – zjistím, že číslo 4 jsem zvolila špatně, protože např. 8 není čtvrtina z 27, ale z 28. Výsledek zatím nemám, jsem ale velmi blízko.

   Protože 28 je víc než 27, vezmu nyní za P číslo 5. Rodiče potom dostanou 10 bonbonů, prarodiče 5. Protože děti mají 15 bonbonů, je v polovině krabice $5 + 10 + 15 = 30$ bonbonů.

   Zkouškou opět zjistím, že nemám správný výsledek. Čtvrtina z 30 opět není rovna 10.

   Zjistila jsem, že zvětšováním čísla P výsledek nezískám, zkusím ho tedy zmenšit. Když P bude 3, pak rodiče dostanou 6 bonbonů a prarodiče 3. Protože děti mají 15 bonbonů, je v polovině krabice $6 + 3 + 15 = 24$ bonbonů.

Zkouškou zjistím, že tento výsledek je správný, protože $\frac{1}{4}$ z 24 je 6 a $\frac{1}{8}$ z 24 je 3. V polovině krabice je tedy 24 bonbonů, v celé krabici je 48 bonbonů.

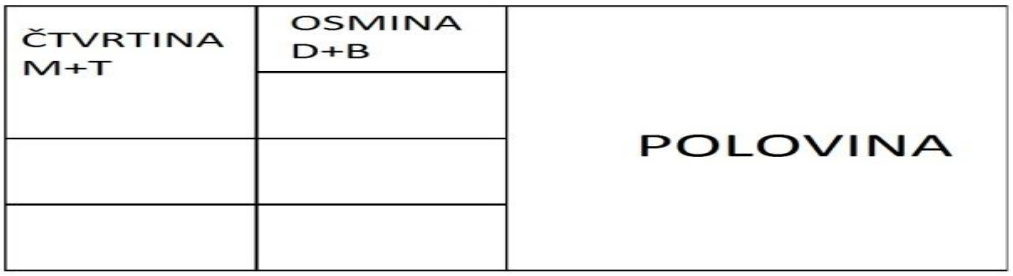
Odpověď: V krabici bylo původně 48 bonbonů.

Tuto strategii jsem příliš mezi žákovskými strategiemi řešení této úlohy neočekávala.

2. Určení části krabice, která je určena pro děti

Ze zadaných údajů se řešitel snaží vyjádřit, jakou část krabice představuje 5 bonbonů, které dostalo jedno dítě, případně 15 bonbonů, které dostaly všechny děti dohromady. Způsobů, jak tuto část zjistit, je opět více – nakreslení obrázku (strategie 2A), nebo odčítání zlomků (strategie 2B). Po vyjádření 5 (nebo 15) bonbonů jako části celkového počtu bonbonů lze celkový počet bonbonů dopočítat. Samozřejmě by neměla chybět kontrola správnosti řešení.

Tímto způsobem by se dala slovní úloha Dělení čokolády řešit například takto (kombinace strategií 2A a 2B):



Z obrázku je dobře vidět, že na děti zbývá 5 osmin z poloviny krabice. Tuto skutečnost můžeme ověřit výpočtem (jednu polovinu nyní vezmeme jako celek): $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ dostanou maminka, tatínek, babička a dědeček, na děti zbude $\frac{5}{8}$ z poloviny bonbonů, které jsou v krabici.

$\frac{5}{8}$ poloviny krabice je 15 bonbonů => $\frac{1}{8}$ poloviny krabice je $15:5=3$ bonbony => polovina krabice je $3\cdot 8=24$ bonbonů => v celé krabici je $2\cdot 24=48$ bonbonů.

Zkoušku lze provést např. rozdělováním celkového počtu bonbonů podle zadání. Pokud na každé dítě připadne 5 bonbonů, je úloha vyřešena správně.

Odpověď: Čokoládových bonbonů bylo celkem 48.

Předpokládala jsem, že tato strategie řešení úlohy bude mezi žákovskými strategiemi nejvíce zastoupena, díky možnosti celý problém vymodelovat pomocí obrázku. Také jsem předpokládala, že nejvíce žáků si po přečtení zadání položí otázku „Jaká část z poloviny bonbonů zbyla na děti?“. Tato otázka je již začátkem řešení celé úlohy.

3. Řešení rovnicí

Úlohu lze řešit jednoduchou soustavou pěti rovnic o pěti neznámých (tuto variantu zde dále nebudu používat, protože je na žáky osmých ročníků příliš komplikovaná a nepředpokládala jsem, že by ji někdo použil). Tuto soustavu lze ihned zjednodušit na jednu rovnici s racionálními koeficienty o jedné neznámé. Vyřešením rovnice získá řešitel výsledek, který po provedení zkoušky (např. dosazení do zadání a kontrola, zda „všechno sedí“), může zapsat jako řešení slovní úlohy.

Tímto způsobem by se dala slovní úloha Dělení čokolády řešit například takto:

Upravíme zápis zadání:

celá krabice ....B bonbonů

rodiče ..... $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$ krabice .....$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\ B$ bonbonů

dědeček s babičkou ..... $\frac{1}{8}$ z $\frac{1}{2}$ krabice .....$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}\ B$ bonbonů

3 děti ....15 bonbonů

Protože chceme zjistit, kolik bonbonů je v celé krabici, stačí sečíst počty bonbonů, které dostanou rodiče, prarodiče a děti. Tento počet bonbonů vynásobený dvěma je roven počtu všech bonbonů.

Sestavíme proto rovnici: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\ B + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}\ B + 15\right) \cdot 2 = B$, po zjednodušení rovnice pomocí ekvivalentních úprav dostaneme: $B = 48$.

Zkoušku lze provést např. rozdělováním celkového počtu bonbonů podle zadání. Pokud na každé dítě připadne 5 bonbonů, je úloha vyřešena správně.

Odpověď: Čokoládových bonbonů bylo celkem 48.

Tuto strategii řešení jsem očekávala jako druhou nejrozšířenější. Očekávala jsem ji především u žáků, kteří mají v matematice lepší známky.

6.1.1.2 Očekávané chyby

Tato slovní úloha v sobě skrývá několik „háčků“, na které bylo nutné dát si při řešení pozor. V jednotlivých strategiích se mohly vyskytnout v žákovských řešeních následující chyby:

- nedopočítané celkové množství bonbonů
    - protože děti rozdělovaly pouze polovinu celkového počtu bonbonů, předpokládala jsem, že někteří žáci vypočítají pouze poloviční počet bonbonů a na celkový počet bonbonů zapomenou
    - předpokládala jsem, že při sestavování rovnice (strategie 3) někteří žáci zapomenou vynásobit počet bonbonů, které byly rozdělené, dvěma (rozdělila se pouze polovina bonbonů v krabici)

- chybně určené množství
    - v žákovských řešeních úlohy jsem očekávala chyby v určování množství nebo částí celku ($\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$ je $\frac{1}{8}$; když $\frac{1}{8}$ je 5, pak $\frac{1}{4}$ je 10; když $\frac{5}{8}$ z $\frac{1}{2}$ je 15, pak $\frac{1}{2}$ je 24 atd.)
    - předpokládala jsem, že někteří žáci by mohli mít problém se zakreslováním daných částí (např. $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$)

- nesprávně sestavená rovnice
    - očekávala jsem, že při sestavování rovnice (strategie 3) zapomenou někteří řešitelé označit $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$ krabice (nebo počtu bonbonů) jako $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$ x (kde x je počet bonbonů v celé krabici) a budou počítat množství bonbonů v polovině krabice jako $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + 15$

- chybný výsledek sestavené rovnice
    - při řešení sestavené rovnice může žák udělat řadu chyb, které vychází ze způsobu počítání se zlomky nebo úpravy rovnic (např. chybně sečtené zlomky, chybně provedené ekvivaletní úpravy)

6.1.1.3 Rozbor žákovských řešení

Úlohu řešili všichni testovaní žáci (72). Nedořešilo ji 11 řešitelů, 34 řešitelů úlohu dořešilo a napsalo odpověď, ostatní řešitelé (27) úlohu také dořešili, ale výsledek pouze zvýraznili, odpověď nenapsali. Ze všech dořešených úloh bylo 27 výsledků správných.

Žákovské zápisy zadání úlohy by se u této úlohy daly rozdělit do tří skupin:

1. zápis zadání pomocí obrázku – 24 řešitelů nepoužilo při zápisu a řešení úlohy žádnou slovní legendu, pouze obrázek. Většina obrázků nebyla doplněna žádným slovním komentářem okolo, žáci vpisovali své komentáře (např. tatínek + maminka, 15 bonbonů, atd.) přímo do obrázku. Někteří žáci připojili slovní legendu po vyřešení úlohy – na vysvětlení „pro mne“. U obrázkových řešení byly jednoduché pomocné výpočty (např. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$).

2. pouze slovní legenda – pouhý zápis zadání pomocí slovní legendy zvolilo 37 řešitelů. Na zápis bez jakéhokoliv obrázku navazovaly rovnou výpočty.

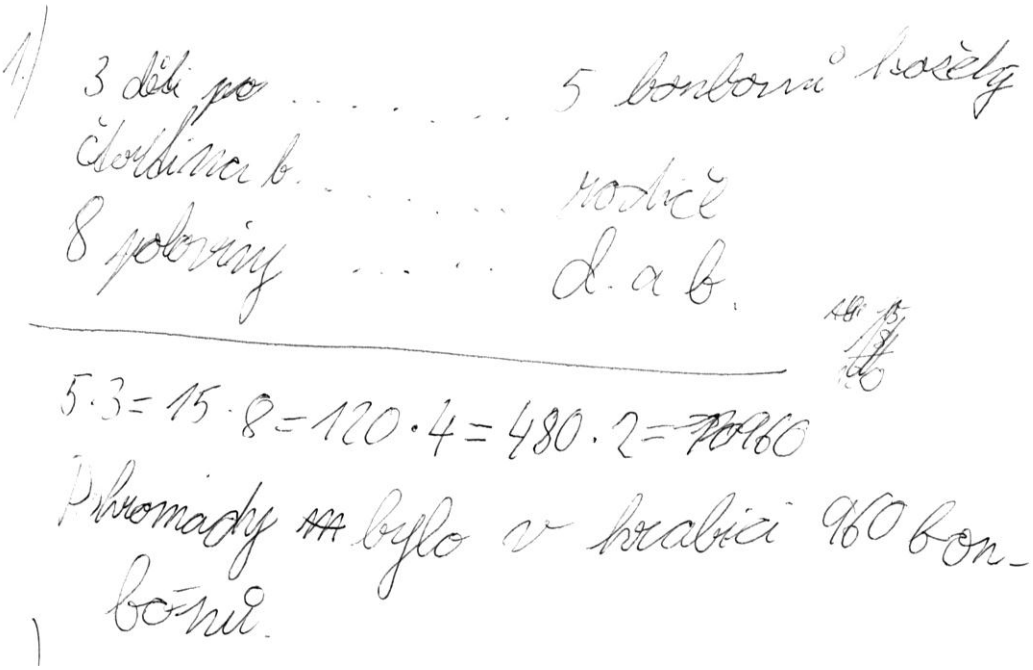
3. slovní legenda doplněná obrázkem – 11 řešitelů nejprve zapsalo zadání úlohy pomocí slovní legendy a poté, zřejmě pro lepší představu a usnadnění výpočtu, doplnilo obrázek. Tyto obrázky se v podstatě shodovaly s obrázky žáků, kteří slovní legendu nepoužili.

Žákovské strategie řešení první úlohy jsem rozdělila do šesti kategorií (Adam, Bolek, Cyril, Dana, Eva, ostatní). Řešení typu Adam se neshodují se žádnou očekávanou strategií řešení. Bolkovo řešení odpovídá strategii řešení 1. Řešení typu Cyril odpovídají strategii řešení 2A, řešení typu Dana odpovídají strategii řešení 2B. Řešení typu Eva odpovídají strategii řešení 3. Řešení zařazená do kategorie ostatní

jsou většinou neřešené úlohy nebo úlohy, ve kterých neumím identifikovat žákovu strategii řešení úlohy.

Jako ukázky jsem vybrala taková řešení, na kterých je dobře patrný myšlenkový postup řešitele nebo kde jsou vidět zajímavé chyby, kterých se řešitel dopustil.

Adam:



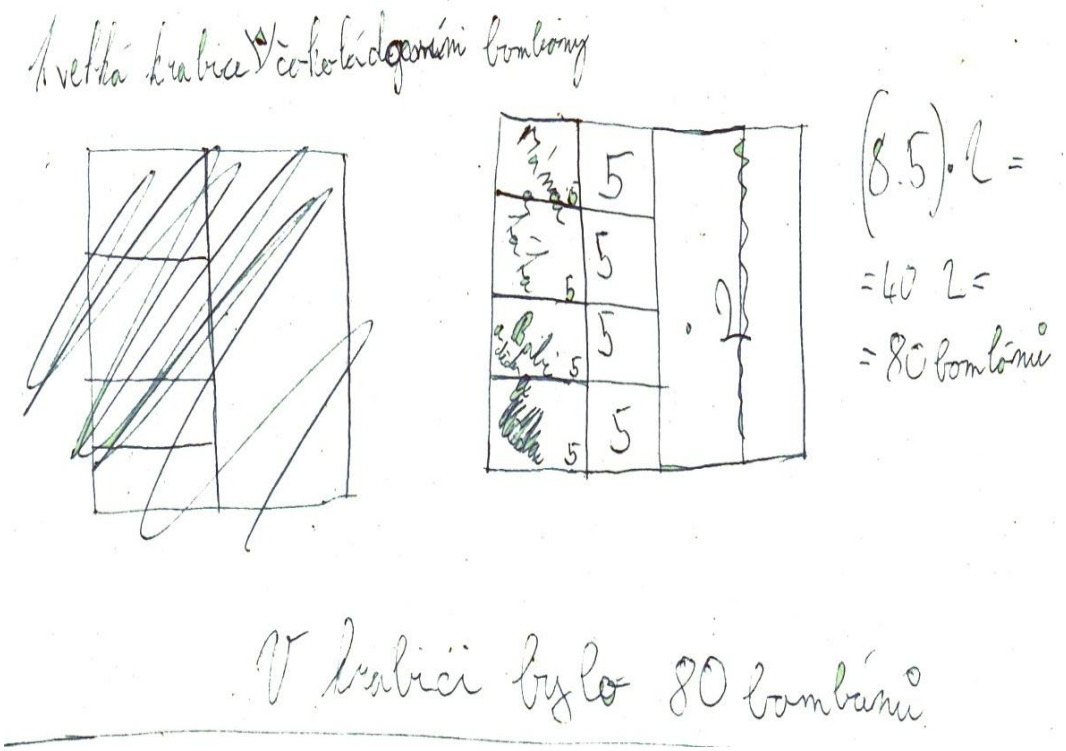
Adam našel v zadání úlohy klíčová slova polovina (signál násob 2, abys dostal celek), čtvrtina (signál násob 4, abys dostal celek), osmina (signál násob 8, abys dostal celek), každé ze tří dětí dostalo pět bonbonů (signál vynásob 3 a 5 a dostaneš počet bonbonů, které dostaly děti). Všechna „tato čísla“ vynásobil a výsledek prohlásil, bez jakéhokoliv zamýšlení nad správností, za řešení úlohy. Řekla bych, že Adam zlomky nepochopil a neumí s nimi pracovat. Usuzuji tak i ze slovní legendy, kde sice píše čtvrtina (nikoliv však jako zlomek) a místo $\frac{1}{8}$ poloviny píše 8 poloviny.

Mezi žákovské strategie řešení typu Adam jsem zařadila taková řešení, kde se žáci snaží něco vypočítat, většinou však bez jakékoliv logiky v návaznosti na zadání úlohy. Tito žáci se snaží se zlomky a čísly provádět matematické operace, které znají (sčítání, odčítání, násobení), bez vhledu do úlohy. Tuto strategii zvolilo 7 řešitelů.

Bolek:

Bolek zvolil strategii pokus – omyl. Zvolil si číslo 16 jako počet bonbonů v polovině krabice a snažil se dopočítat, kolik bonbonů bylo v celé krabici. Jako odpověď napsal (poté, co se dopočítal k číslu 38): „Došlo mi, že jsem 16 vybral špatně, protože by mi to muselo vyjít 32“ (jazykově upraveno). O další řešení úlohy se však již nepokusil. Tuto strategii (pokus – omyl) zvolil pouze Bolek.

Cyril:

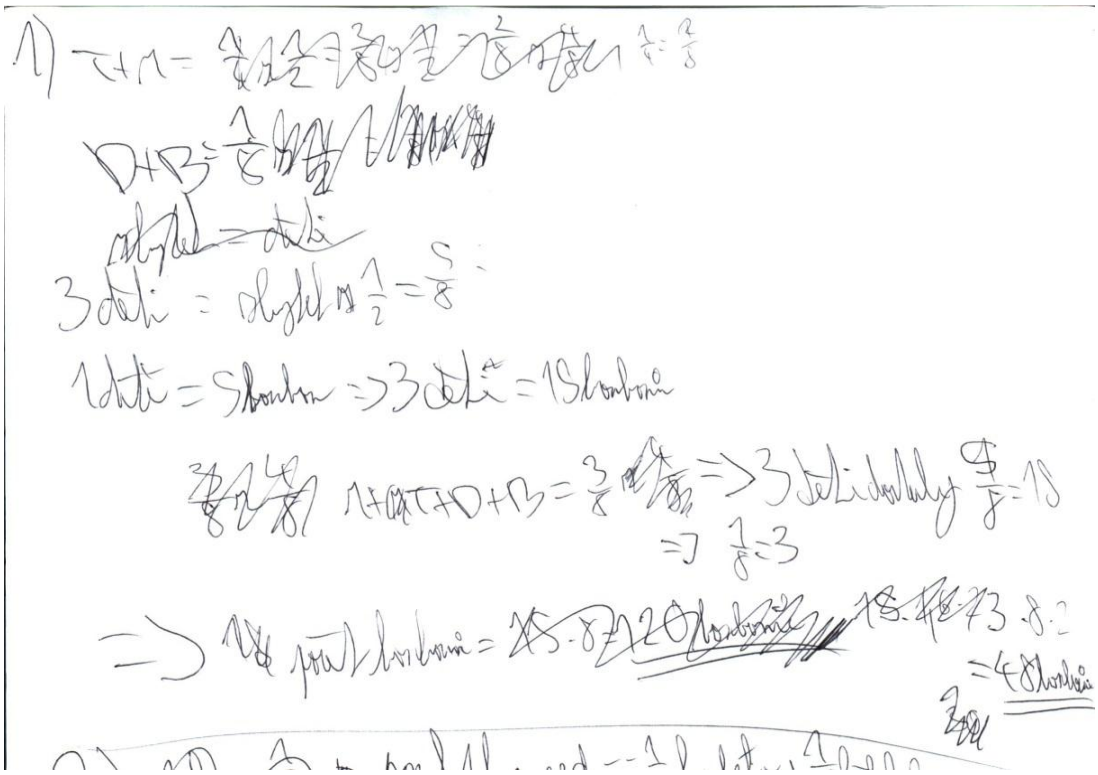


Cyril nezapisoval zadání pomocí slovní legendy, ale použil rovnou obrázek. Předpokládám, že si zadání úlohy nejprve nepřečetl, ale začal kreslit obrázek ihned, jakmile začal číst. Při první pokus byl obrázek moc malý a zřejmě ve chvíli, kdy Cyril dočetl až ke zmínce o osmině poloviny pro dědečka a babičku, původní obrázek škrtl a nakreslil si obrázek větší, přehlednější. V novém obrázku vyznačil, jakou část krabice dostane maminka a tatínek ($\frac{2}{8}$ z poloviny) a jakou část dědeček s babičkou ($\frac{1}{8}$ z poloviny). Zbytek byl pro děti a zřejmě proto, že každé z dětí dostalo 5 bonbonů, dopsal do každé zbývající osminy v rozdělené polovině číslo pět. Zápisem „· 2“ v nerozdělené polovině Cyril zřejmě naznačuje, že po vypočítání

počtu bonbonů v polovině, která byla k rozdělení, vynásobí počet dvěma a dostane celkový počet bonbonů v krabici.

Mezi žákovské strategie řešení typu Cyril jsem zařadila řešení, která obsahují pouze obrázek (vyskytly se „krabice“ kulaté i hranaté) a případný komentář. U žádného z těchto řešení není žádný výpočet (maximálně pomocné výpočty na sčítání nebo násobení celých čísel, která představují množství bonbonů v jednotlivých částech „krabice“). Řešení typu Cyril bylo 18.

Dana:



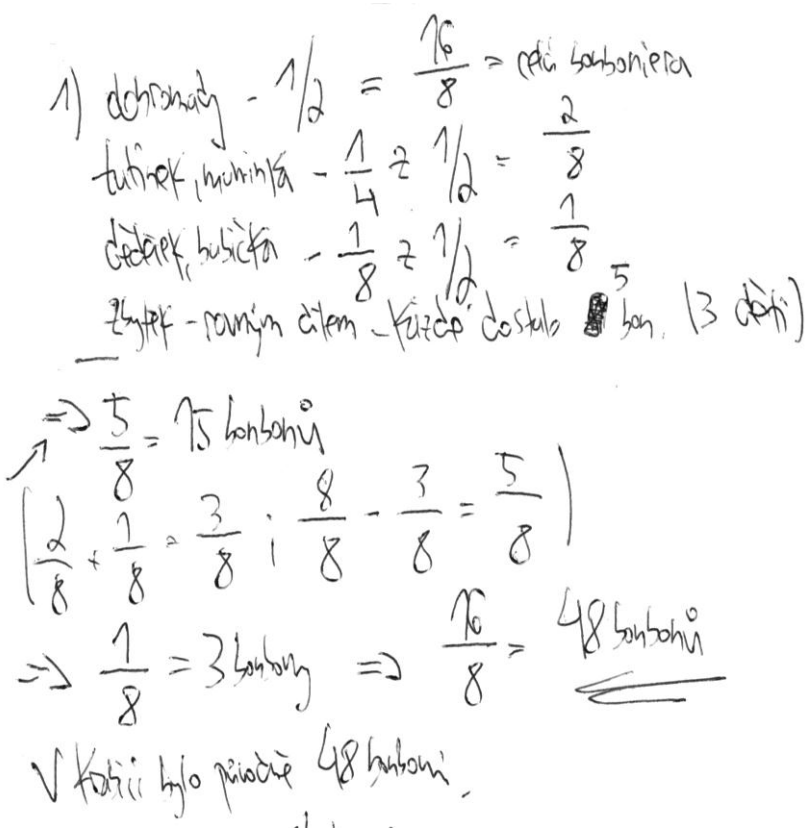
Dana si zřejmě chtěla udělat zápis zadání úlohy pomocí rovností, které vyjadřují, jaká část je komu určena. Zápis zadání upravila převedením všech zlomků na osminy. Poté svůj zápis T+M = $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{8}$ z $\frac{4}{8}$ přeškrtala a rozhodla se pro zápis $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. Stejně tak u zápisu D+B= $\frac{1}{8}$ z $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{8}$ z $\frac{4}{8}$ se rozhodla ponechat pouze zlomek $\frac{1}{8}$. Z toho usuzuji, že po přečtení zadání (a jeho zapsání) se Dana rozhodla pracovat pouze s jednou polovinou krabice, dopočítat, kolik je v ní bonbonů, a konečný výsledek získat vynásobením dvěma. Proto Dana napsala 3 děti: zbytek z $\frac{1}{2}$ = $\frac{5}{8}$. Protože

výpočet, ve kterém Dana číslo $\frac{5}{8}$ získala, je uveden až o dva řádky níže, předpokládám, že původně měla zapsáno pouze, že 3 děti dostanou zbytek z poloviny krabice. Poté si vypočítala, jakou část z poloviny děti dostanou, a pro lepší přehled si toto číslo zapsala i do příslušného řádku výš.

Mezi žákovské strategie řešení typu Dana jsem zařadila řešení, která se snaží dopočítat celkový počet bonbonů v krabici vyjádřením počtu bonbonů v jedné části (nejčastěji $\frac{1}{8}$ v $\frac{1}{2}$ polovině krabice). Tato řešení měla zadání zapsané pomocí slovní legendy, která byla jen velmi výjimečně doplněna obrázkem.

Zvláštní způsob označení celkového množství bonbonů v krabici zvolila Daniela. Její způsob řešení je také řešením typu Dana.

Daniela:



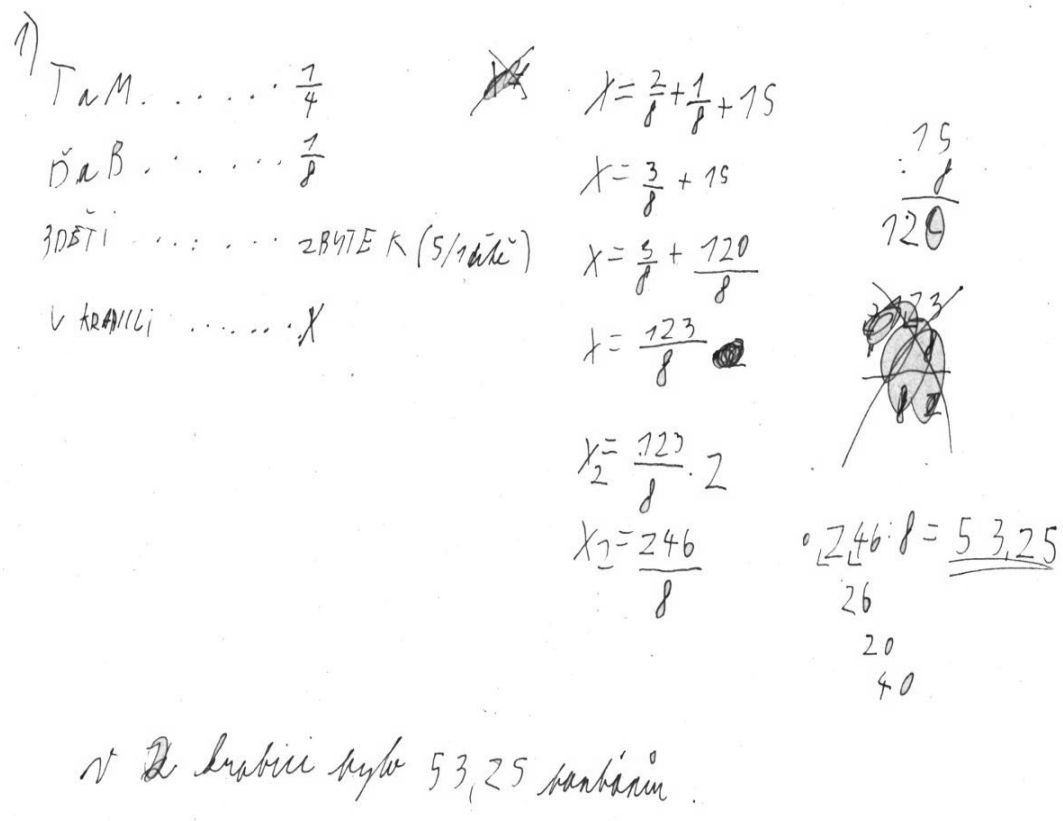
Daniela zvolila velmi ojedinělý způsob výpočtu. Vzala polovinu krabice jako celek a označila celou bonboniéru jako $\frac{16}{8}$. Po dopočítání jedné osminy (obdobným způsobem jako Dana a další řešitelé) tak rovnou získala počet bonbonů v celé krabici

(předposlední řádek, kde píše $\frac{1}{8} = 3$ bonbony => $\frac{16}{8} = 48$ bonbonů). Ostatní řešitelé v této kategorii nejprve vypočítali, kolik bonbonů je v polovině krabice, a následným násobením 2 určili počet bonbonů v celé krabici.

Další nezvyklé řešení, které jsem zařadila do kategorie řešení typu Dana, zvolil Dan. Nejprve zjistil, jaká část krabice připadne na jedno dítě, protože ví, že jedno dítě má 5 bonbonů. Tím zjistil, že $\frac{5}{24}$ poloviny krabice je 5 bonbonů, proto $\frac{1}{24}$ poloviny krabice je 1 bonbon a proto je v polovině krabice 24 bonbonů.

Strategie řešení typu Dana byla nejvíce zastoupená. Tuto strategii zvolilo 26 řešitelů.

Eva:



U Evy došlo k chybě při zápisu slovní legendy (vynechala zmínku o tom, že se rozděluje pouze polovina krabice). Druhou chybu udělala Eva při sestavování rovnice. S číslem $\frac{1}{4}$ počítá, jako by to bylo samostatné číslo (jak je zřejmě zvyklá z úloh na procvičování počítání se zlomky), nikoliv jako s operátorem. Eva při zápisu

legendy přidělila tatínkovi a mamince jednu čtvrtinu, již však nenapsala čeho. Po vyřešení úlohy Eva neprovedla zkoušku výsledku dosazením do původního zadání, neprovedla ani kontextovou kontrolu a do krabice bez rozmýšlení umístila necelé kusy bonbonů. Této chyby se nedopustila pouze Eva, ale i několik dalších řešitelů.

Mezi žákovské strategie řešení typu Eva jsem zařadila řešení pomocí rovnic (bez ohledu na správnost rovnice). Tuto strategii zvolili 3 řešitelé.

Ostatní:

Mezi odevzdanými úlohami se vyskytlo i několik žákovských řešení, ve kterých se jakoby odnikud objevují čísla, k nimž neumím najít myšlenkový pochod, který k nim žáka vedl (je také možné, že řešitel čísla opsal od spolužáka). Do této kategorie žákovských řešení (označena ostatní) jsem zařadila také úlohy, které měly pouze zápis úlohy, řešitel se však o jejich řešení ani náznakem nepokusil. Celkem v této kategorii bylo 17 odevzdaných úloh.

Shrnutí:

Všechny strategie, které jsem očekávala, se mezi strategiemi, které volili žáci, vyskytly. Strategii řešení typu Adam („hlavně něco počítat“) jsem neočekávala. Nepředpokládala jsem, že někdo z žáků bude mít problém s uchopením úlohy. Z očekávaných chyb se ani jednou neobjevila první chyba – nedopočítané celkové množství bonbonů. Tuto informaci všichni žáci v textu našli a počítali s ní.

Následující tabulky jsou přehledem získaných výsledků.

Tabulka č. 1: Žákovský zápis zadání úlohy

Zápis zadání	**Pouze obrázek**	**Pouze slovní legenda**	**Slovní legenda doplněná obrázkem**
Počet žáků	24	37	11

Tabulka č. 2: Ukončení úlohy

Ukončení úlohy	Uvedena odpověď	Neuvedena odpověď	Nedořešeno
Počet žáků	34	27	11

Tabulka č. 3: Úspěšnost řešení

Úspěšnost řešení	Vyřešeno správně	Vyřešeno chybně
Počet žáků	27	34

Tabulka č. 4: Použité strategie řešení

Strategie řešení	Adam	Bolek	Cyril	Dana	Eva	ostatní
Počet žáků	7	1	18	26	3	17

6.1.2 Bílá polévka

Tuto úlohu jsem zařadila jako úlohu „záchytnou“. K jejímu vyřešení žáci nepotřebují představu o velikosti zlomku. K vyřešení úlohy žákům stačí např. pouze násobení zlomků.

Zápis zadání:

na 1 l vody ..... $\frac{1}{2}$ l mléka a $\frac{1}{8}$ l smetany

na 2,5 l vody ..... ? l mléka a ? l smetany

6.1.2.1 Možné strategie řešení

Také druhou úlohu lze řešit různými způsoby. Strategie řešení se u této úlohy v mnoha bodech prolínají.

1. Postupné přidávání

Tato strategie má svůj základ v postupném přidávání vody. Řešitel postupně „přilívá“ vodu a zaznamenává, kolik bude potřeba přidat mléka a smetany. Při přidávání lze využít sčítání zlomků nebo násobení, popřípadě dělení zlomku přirozeným číslem. Postup, který uvádím, využívá sčítání zlomků a představu o velikosti jednotlivých zlomků (např. při určování $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{2}$ l mléka).

na 1 l vody ..... $\frac{1}{2}$ l mléka a $\frac{1}{8}$ l smetany

přidáme jeden litr vody – přidáme tedy $\frac{1}{2}$ l mléka a $\frac{1}{8}$ l smetany:

na 2 l vody ..... $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ l mléka a $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$ l smetany

na 2 l vody ..... $\frac{2}{2}=1$ l mléka a $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ l smetany

přidáme půl litru vody – přidáme tedy polovinu z $\frac{1}{2}$ litru mléka a polovinu z $\frac{1}{8}$ litru smetany, tj. $\frac{1}{4}$ l mléka a $\frac{1}{16}$ l smetany:

na 2,5 l vody ..... $\left(1+\frac{1}{4}\right)$ l mléka a $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)$ l smetany

na 2,5 l vody ..... $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ l mléka a $\frac{5}{16}$ l smetany

Zkoušku lze provést např. vydělením množství mléka (smetany) číslem 2,5 (nebo ekvivalentním zápisem čísla pomocí zlomku $\frac{5}{2}$).

Odpověď: Paní Hloubalová přidá ke 2,5 litru vody $1\frac{1}{4}$ litru mléka a $\frac{5}{16}$ litru smetany.

Tuto strategii jsem očekávala především u žáků, kteří mají v matematice horší výsledky.

2. Řešení pomocí poměru

K řešení úlohy lze využít znalosti práce s poměrem. Zadaná množství vody, mléka a smetany zapíšeme jako poměr:

voda : mléko : smetana = $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=(2{,}5\cdot 1):\left(2{,}5\cdot\frac{1}{2}\right):\left(2{,}5\cdot\frac{1}{8}\right)$

Po odstranění závorek získáme výsledek. Výpočty v závorkách lze provést různými způsoby:

- převedení zlomku na desetinné číslo a vynásobení desetinných čísel
- převedení desetinného čísla na zlomek a vynásobení zlomků
- „postupným násobením“ – podobně jako při použití strategie 1

Mezi úlohy řešené strategií 2 jsou zařazeny i žákovské strategie bez zapsání nebo zmínění poměru. Důležité je, že při řešení úlohy jsou žáci vedeni představou, že když je 2,5krát více vody, musí být také 2,5krát více mléka a 2,5krát více smetany.

Předpokládala jsem, že tato strategie bude nejrozšířenější.

3. Řešení trojčlenkou

Řešitel si označí zjišťované množství mléka a smetany jako neznámé (nejčastěji x a y, případně obě jako x). Tato čísla dopočítá pomocí trojčlenky pro přímou úměru.

na 1 l vody ..... $\frac{1}{2}$ l mléka a $\frac{1}{8}$ l smetany

na 2,5 l vody ..... x l mléka a y l smetany

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2{,}5}{1}$$

$$\mathrm{y} = \frac{\frac{1}{8} \cdot 2{,}5}{1}$$

Výpočty lze provést stejnými způsoby jako ve strategii 2.

Tuto strategii řešení úlohy jsem předpokládala především u žáků, kteří dávají přednost naučeným postupům, a u žáků, kteří jsou vedeni k přesnému zápisu a způsobu řešení slovních úloh.

6.1.2.2 Očekávané chyby

Předpokládala jsem, že při řešení úlohy se vyskytnou především početní chyby:

- „půlení“ zlomků
    - ve všech strategiích řešení mohli žáci dospět k okamžiku, kdy je potřeba „rozpůlit“ zlomek
        - strategie 1: přidání půl litru vody a k tomu odpovídající množství mléka a smetany
        - strategie 2 a 3: vypočítání např. $2{,}5 \cdot \frac{1}{2}$ jako součet dvojnásobku $\frac{1}{2}$ a poloviny $\frac{1}{2}$
- převod zlomku na desetinné číslo
    - chybu jsem očekávala především při převodu $\frac{1}{8}$ na desetinné číslo
- nesprávně vynásobená desetinná čísla
    - předpokládala jsem, že někteří žáci, kteří zvolí převod zlomků na desetinné číslo, udělají chybu při násobení desetinných čísel (chyby u násobení zlomků jsem neočekávala)

6.1.2.3 Rozbor žákovských řešení

Tuto úlohu neřešili 4 žáci. Ostatní řešitelé ze skupiny testovaných žáků neměli problém s tím, jak úlohu řešit. Problémy nastaly pouze u některých žáků díky nedostatečnému matematickému aparátu. Chyby se vyskytovaly např. ve fázi „půlení“ zlomků, násobení zlomku a desetinného čísla, převodu zlomku na desetinné číslo atd. tak, jak jsem očekávala. Jen velmi málo řešitelů (6) si kreslilo pomocný obrázek. Zápis zadání úlohy byl výhradně slovní legendou (60 řešitelů), nebo zcela chyběl (12 řešitelů).

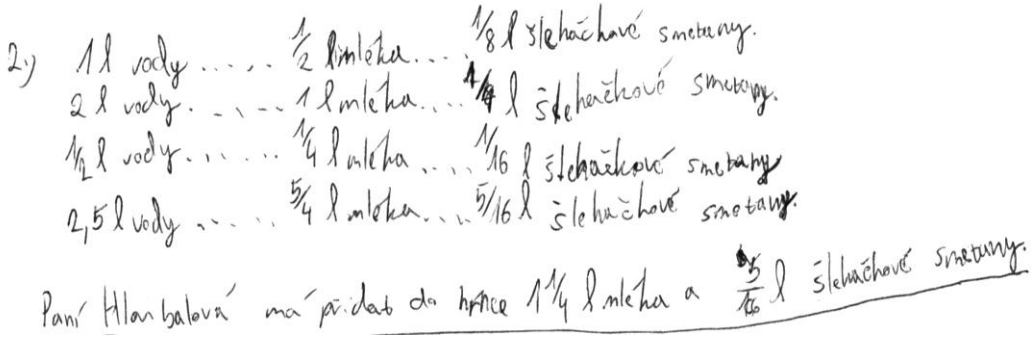
Z celkového počtu testovaných žáků (72), nevyřešilo úlohu 9 řešitelů, z toho 4 žáci úlohu ani řešit nezačali. 34 řešitelů napsalo odpověď, ostatní řešitelé (29) výsledek zvýraznili, avšak odpověď nenapsali. Z vyřešených úloh bylo 35 výsledků správných.

Pozn: Mezi chybné výsledky jsem počítala i chybně zapsané nebo nedopočítané zlomky (např. $\frac{2{,}5}{8}$). Žákovská řešení s těmito výsledky jsem však brala jako dořešená,

protože žáci byli s výsledkem spokojeni a někteří tyto zlomky napsali do odpovědi. Důvodem bylo nejčastěji to, že žáci neuměli zlomek dále upravit, a proto se spokojili alespoň s tímto výsledkem.

Odevzdaná řešení jsem rozdělila do skupin podle zvolené strategie, kterou žáci při řešení úlohy využili. Žákovská řešení typu František odpovídají strategii řešení 1, žákovská řešení typu Gábina odpovídají strategii řešení 2 a žákovská řešení typu Hanka odpovídají strategii řešení 3. Žákovská řešení typu Ivan jsou podobná řešením typu Adam u první úlohy. U skupiny žákovských řešení typu Gábina jsem vybrala k rozboru dvě úlohy, protože žáci postupují v rámci zvolené strategie různě.

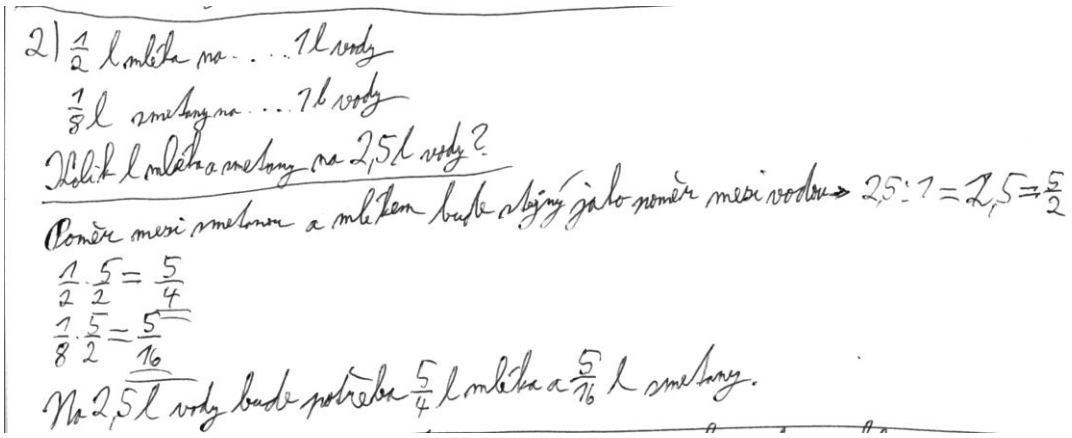
<u>František:</u>



František řešil úlohu „postupným přilíváním“. V zápisu se objevují tři sloupečky. V prvním je uvedeno množství vody, ve druhém množství mléka a ve třetím množství smetany. Zda František zvětšoval množství z 1 litru na 2 litry násobením nebo sčítáním zlomků, nevím. František počítal se zlomky tam, kde byly zlomky také v zadání (mléko a smetana). Půl litru vody označil zlomkem, ale 2,5 litru napsal stejně, jako bylo v zadání desetinným číslem. Františkovo řešení neobsahovalo žádný pomocný obrázek ani výpočet.

Tuto strategii – postupené přilívání – zvolilo 15 řešitelů. U některých se vyskytly chyby při určování polovičního množství (např. na 1 litr vody je potřeba $\frac{1}{8}$ litru smetany => na $\frac{1}{2}$ litru vody je potřeba $\frac{1}{4}$ litru smetany) nebo při přechodu ze 2 litrů vody na 2,5 litru vody (např. na 1 litr vody je potřeba $\frac{1}{2}$ litru mléka, na 2 litry vody je potřeba 1 litr mléka => na 2,5 litru vody je potřeba 1,5 litru mléka).

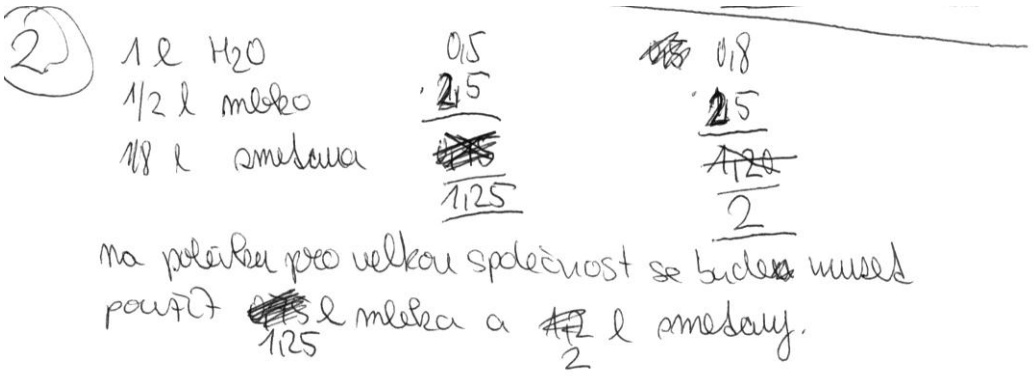
Gábina:



Gábina správně usoudila, že poměr množství mléka v polévce z 2,5 litrů vody a z 1 litru vody bude stejný jako poměr mezi množstvím vody v polévce z 2,5 litrů vody a z 1 litru vody. Totéž bude platit i pro smetanu. Její zápis je matematicky nesprávný, z dalšího postupu lze však usoudit, že to Gábina myslela dobře, pouze se neuměla přesně vyjádřit. Gábina se rozhodla využít při řešení úlohy zlomky. Z poměru 2,5 : 1 vypočítala dělením číslo 2,5, které správně převedla na $\frac{5}{2}$. Tímto zlomkem také správně vynásobila množství mléka a množství smetany, protože „když je vody 2,5 krát víc, musí být tolikrát víc také mléka a smetany, aby byl dodržený ten poměr“, vysvětlila mi Gábina svůj postup.

Podobně jako Gábina využíval zvětšování množství mléka a smetany díky poměru Gusta. Slovo poměr v jeho řešení nikde nefiguruje, postup řešení úlohy však naznačuje, že Gusta postupoval také podle této strategie.

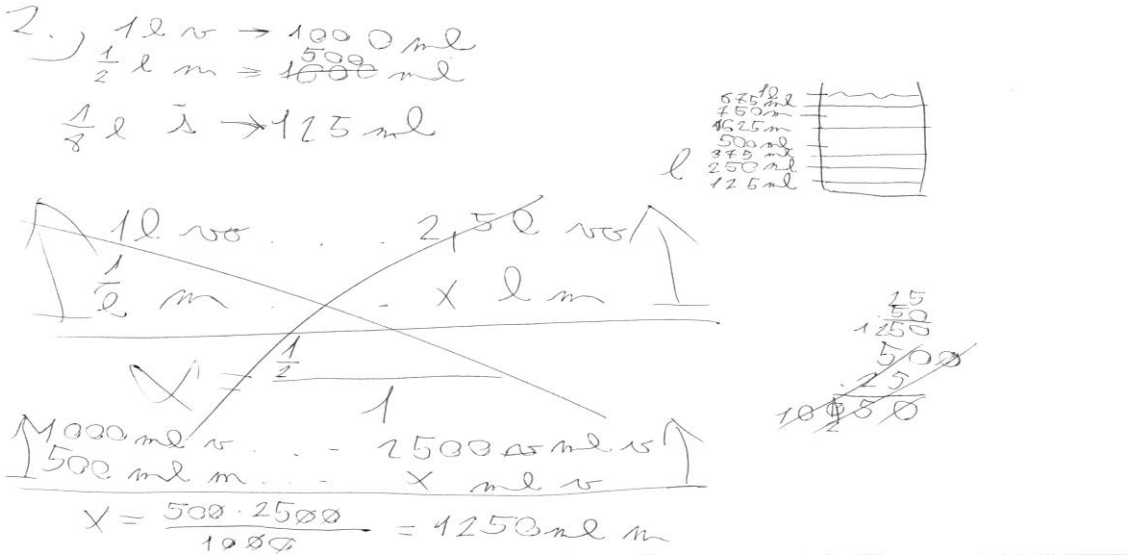
Gusta:



Gusta se rozhodl nahradit zlomky desetinnými čísly a příslušná čísla poté mezi sebou vynásobit, protože když je vody 2,5 krát více, musí být 2,5 krát více také mléka a smetany. Při převodu $\frac{1}{8}$ na desetinné číslo se dopustil chyby, která se objevila i v dalších žákovských řešeních. Samotné písemné násobení desetinných čísel „pod sebe“ již zvládl dobře.

Strategii typu Gábina – využití poměru – zvolilo 45 řešitelů. Z tohoto množství bylo pouze u 4 žáků napsané slovo poměr nebo hodnoty zapsané ve tvaru poměru voda : mléko : smetana. Ostatní žáci využívali poměru „intuitivně“ – poměr mezi vodou, mlékem a smetanou se nemění, proto čím víc je vody, tím víc je mléka a smetany.

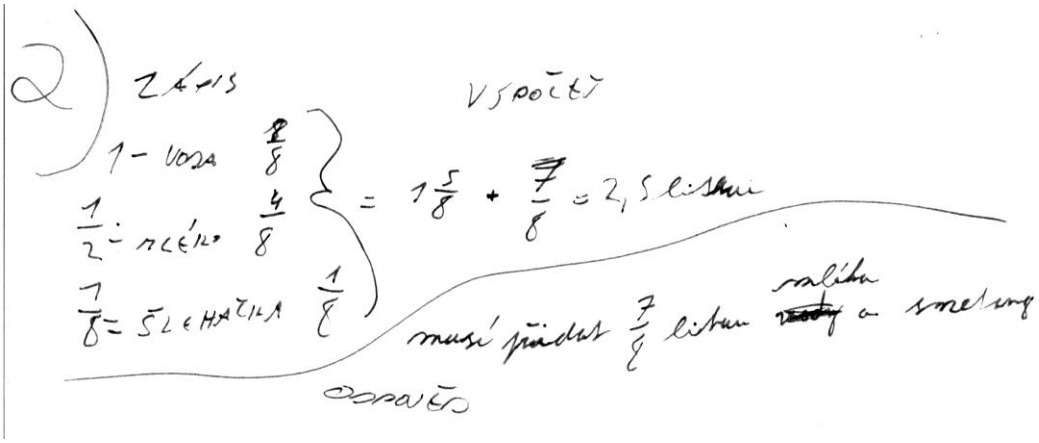
Hanka:



Hanka si vyjádřila v mililitrech, kolik mléka a kolik smetany paní Hloubalová přidává na 1 l vody. K tomu jí pomohla nakreslená „odměrka“ na 1 litr. Pomocí trojčlenky (nejprve zapsané s jednotkou litr) a písemného násobení „pod sebe“ pak vypočítala, kolik mléka a kolik smetany musí přidat ke 2,5 l vody. (pozn.: druhá část výpočtu a odpověď zde není uvedena, výpočet je analogický) Zápis přímé úměrnosti je zvláštní, protože Hanka nenapsala, že na 1 000 ml vody přidá paní Hloubalová 500 ml mléka, ale do jednoho řádku napsala údaje, které se vztahují k vodě, a do druhého řádku údaje o množství mléka. Co ji k tomu vedlo, mi neuměla vysvětlit.

Tuto strategii řešení – trojčlenku – využilo spolu s Hankou 6 žáků. Polovina řešitelů převáděla litry na mililitry, 1 počítal se zlomky a 2 řešitelé převedli $\frac{1}{2}$ litru na 0,5 litru a $\frac{1}{8}$ litru nechali ve tvaru zlomku.

Ivan:



Ivan udělal zápis zadání a všechny zlomky převedl na osminy (i 1 litr vody). Zadaná čísla sečetl a vyšlo mu $1\frac{5}{8}$, ke kterým přičetl $\frac{7}{8}$, zřejmě proto, aby byl výsledek 2,5 litru. Jako odpověď uvedl, že paní Hloubalová musí přidat $\frac{7}{8}$ litru mléka a smetany.

Ivan prováděl bez porozumění textu se zadanými čísly základní operace, které ovládá (sčítání, odčítání). Počítal tedy něco zcela jiného, než co bylo jeho úkolem.

Tato strategie je podobná strategii Adama v první úloze – v obou řešeních se objevuje snaha něco vypočítat. Stejná strategie jako u Ivana – něco počítat – se při řešení této úlohy objevila ještě u jednoho řešitele.

Při řešení této úlohy žáci nejčastěji pracovali pouze se zlomky (22 žáků), nebo pouze s desetinnými čísly (21 žáků). 19 žáků využilo ve svém řešení i zlomků i desetinných čísel. 6 žáků využilo při řešení úlohy převodu litrů na mililitry. 4 žáci úlohu neřešili, ani nenaznačili, jak by se mohla řešit.

Následující tabulky jsou souhrnem zjištěných údajů.

Tabulka č. 5: Žákovský zápis zadání úlohy

Zápis zadání	**Slovní legenda**	**Bez zápisu**	**Řešení obsahuje obrázek**
Počet žáků	60	12	6

Tabulka č. 6: Ukončení úlohy

Ukončení úlohy	**Uvedena odpověď**	**Neuvedena odpověď**	**Nedořešeno**
Počet žáků	34	29	9

Tabulka č. 7: Úspěšnost řešení

Úspěšnost řešení	**Vyřešeno správně**	**Vyřešeno chybně**
Počet žáků	35	28

Tabulka č. 8: Použitá čísla

Použitá čísla	**Zlomky**	**Desetinná čísla**	**Zlomky i desetinná čísla**	**Převod na ml**	**Neřešeno**
Počet žáků	22	21	19	6	4

Tabulka č. 4: Použité strategie řešení

Strategie řešení	**František**	**Gábina**	**Hanka**	**Ivan**
Počet žáků	7	3	18	26

6.1.3 Sekáči

Třetí a zároveň nejnáročnější úloha byla do souboru úloh zařazena záměrně. Sledovala jsem, zda žáci zvolí obrázek nebo slovní legendu, případně zda si zapíší slovní legendu a obrázkem ji doplní (podobně jako u první úlohy). Předpokládala jsem, že většina žáků úlohu nevyřeší, protože je velmi atypická.

Zápis zadání:

celkem sekáčů x

dvě louky ..... plocha L a $2L$

1. den – 1. polovina dne ..... x na velké louce

1. den – 2. polovina dne ..... $\frac{1}{2}x$ na velké, $\frac{1}{2}x$ na malé louce

2. den – celý den ..... zbytek malé louky dodělal 1 sekáč

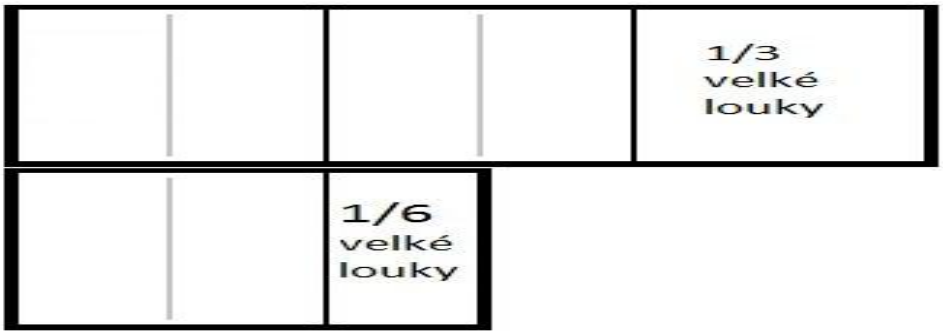
6.1.3.1 Možné strategie řešení

Tuto úlohu lze řešit pomocí dvou rovnic o dvou neznámých. Tuto strategii řešení jsem od žáků osmých ročníků neočekávala, nebudu ji zde proto uvádět. Uvedu zde pouze strategie, které jsem od žáků očekávala.

1. Určení neposekané části po prvním dni

   Řešitel se zamýšlí nad částí louky, kterou poseká za druhý den 1 sekáč.

   Protože velkou louku kosilo během dne $\frac{3}{2}$ všech sekáčů – všichni sekáči půl dne a $\frac{1}{2}$ sekáčů druhou polovinu dne – je část, kterou zvládne posekat $\frac{1}{2}$ sekáčů za půl dne, rovna $\frac{1}{3}$ velké louky. Protože malá louka je rovna $\frac{1}{2}$ velké louky a protože polovinu dne na této malé louce pracovala $\frac{1}{2}$ sekáčů, zbývá na jednoho sekáče na druhý den $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ velké louky. Tyto výpočty lze nahradit správně nakresleným obrázkem, ze kterého lze jednotlivé části „vyčíst“:



Nyní se lze k řešení dobrat dvěma způsoby:

A. Početní porovnávání

Všichni sekáči pokosí za jeden den celou velkou louku (první polovinu dne větší část, druhou polovinu dne menší část) a ještě část malé louky k tomu: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ velké louky. Jeden sekáč pokosí za jeden den $\frac{1}{6}$ velké louky.

Protože všichni sekáči pokosí za jeden den $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$ velké louky a jeden sekáč pokosí za jeden den $\frac{1}{6}$ velké louky, muselo být první den na práci osmkrát více sekáčů než druhý den ($\frac{8}{6}:\frac{1}{6}$).

Odpověď: Sekáčů bylo 8.

B. Logická úvaha

Protože jeden sekáč pokosí za den $\frac{1}{6}$ velké louky, pokosí za půl dne $\frac{1}{6}$ velké louky dva sekáči. Protože polovina sekáčů pokosí za půl dne $\frac{1}{3}$ velké louky (což je dvakrát více), musí být polovina sekáčů 4 lidé. Proto je všech sekáčů 8.

2. Určení času sečení

K řešení úlohy lze využít znalosti doby sečení a poměru velké a malé louky.

První den sekali velkou louku polovinu dne všichni sekáči a polovinu dne polovina sekáčů. Na malé louce pracovala pouze polovinu dne polovina sekáčů.

Pokud by se první den sekáči rozdělili už ráno, potřebovala by polovina sekáčů na posekání velké louky $3 \cdot \frac{1}{2}$ dne, tj. 1,5 dne. Malá louka je dvakrát menší než velká louka, proto by na její posekání stačilo polovině sekáčů $\frac{3}{4}$ dne.

Polovina sekáčů však na malé louce pracovala pouze $\frac{1}{2}$ dne. Práci, kterou by polovina sekáčů na malé louce udělala za $\frac{1}{4}$ dne, dodělával jeden sekáč celý den. Kdyby byli sekáči dva, trvalo by jim dosekat malou louku půl dne. Kdyby byli čtyři, trvalo by jim to čtvrt dne, stejně jako polovině sekáčů. Proto je všech sekáčů 8.

3. Řešení úlohy o společné práci

K řešení úlohy lze využít znalosti strategie řešení úloh o společné práci.

První den poseká celá skupina sekáčů (označme *x*) celou velkou louku a část malé louky. Během druhého dne doseká jeden sekáč zbytek malé louky. Pokud by tedy bylo sekáčů $(x + 1)$, stihli by posekat obě louky první den.

$(x + 1)$ sekáčů poseká $3y$ (*y* je plocha malé louky, $2y$ je plocha velké louky).

1 sekáč tedy za jeden den vykoná práci $\left(3y \cdot \frac{1}{x+1}\right)$.

Na malé louce pracovali polovinu dne $\frac{1}{2}$ sekáčů a jeden den jeden sekáč. Aby byla posekaná stejná část malé louky za jeden den jako od poloviny sekáčů za půl dne, musela by na louce pracovat $\frac{1}{4}$ sekáčů. Proto platí, že za jeden den by posekalo malou louku $\left(\frac{1}{4}x + 1\right)$ sekáčů.

Malou louku (y) poseká $\left(\frac{1}{4}x + 1\right)$ sekáčů „rychlostí“ $\left(3y \cdot \frac{1}{x+1}\right)$.
Platí tedy rovnost: $\left(\frac{1}{4}x + 1\right) \cdot 3y \cdot \frac{1}{x+1} = y$.

Zjednodušením rovnice $\left(\frac{1}{4}x + 1\right) \cdot 3y \cdot \frac{1}{x+1} = y$ pomocí ekvivalentních úprav získáme počet všech sekáčů $x = 8$.

Odpověď: Sekáčů bylo celkem 8.

Jako nejčastější strategii řešení jsem očekávala strategii 1B a poté strategii 3. Předpokládala jsem, že velká část řešitelů si nebude s řešením úlohy vědět rady a že se nebude ani pokoušet něco počítat.

6.1.3.2 Očekávané chyby

Předpokládala jsem, že většina žáků úlohu řešit nebude.

U žáků, kteří budou úlohu řešit nějakou očekávanou strategií, jsem očekávala tyto chyby:

- strategie 1A
    - chybné určení části louky, kterou poseká polovina sekáčů za polovinu dne ($\frac{1}{3}$ velké louky)
    - chybné určení části louky, kterou posekali všichni sekáči za jeden den ($\frac{4}{3}$ velké louky)
- strategie 1B
    - chybné určení části louky, kterou poseká polovina sekáčů za polovinu dne ($\frac{1}{3}$ velké louky)
    - opomenutí časového údaje (polovina sekala půl dne, jeden dosekal za jeden den)
- strategie 2
    - chybné určení času nutného na posekání celé louky polovinou sekáčů (1,5 dne)
    - opomenutí časového údaje (polovina sekala půl dne, jeden dosekal za jeden den)
- strategie 3
    - chybně určená část odvedené práce jedním sekáčem za jeden den – opomenutí velikosti sekané plochy ($3y \cdot \frac{1}{x+1}$)

- chybně určený počet sekáčů nutný na pokosení malé louky za jeden den $\left(\frac{1}{4}x + 1\right)$
- chybně sestavená rovnice ($\left(\frac{1}{4}x + 1\right) \cdot 3y \cdot \frac{1}{x+1} = y$)
- chybně vyřešená rovnice díky chybám při počítání se zlomky nebo díky chybně provedeným ekvivalentním úpravám

6.1.3.3 Rozbor žákovských řešení

Žáci, kteří úlohu začali řešit, zapsali slovně zkrácené zadání nebo použili obrázek doplněný textem. Úlohu neřešilo 6 žáků (nezapsalo zadání, někteří napsali pouze „Netuším.“), 29 žáků zapsalo pouze zadání, 6 žáků se snažilo něco vypočítat, ale k výsledku nedospěli. 31 řešitelů dospělo k nějakému číselnému výsledku.

Z řešení, která měla nějaký číselný výsledek, bylo 8 řešení se správným výsledkem „8 sekáčů“ (více či méně odůvodněným). 9 řešení mělo uvedený poloviční počet sekáčů (tzn. 4). 14 odpovědí byla různá jiná čísla, nejčastěji číslo 6.

U této úlohy jsem žákovské strategie řešení rozdělila do šesti kategorií (označeny římskými číslicemi). Ze strategií řešení, které jsem očekávala, se ani jednou nevyskytly strategie 1A a strategie 3. Strategii 1B zvolilo 15 žáků (označeno jako strategie V). Strategii 2 zvolili dva žáci (označeno jako strategie VI). Ostatní žákovská řešení jsem rozdělila do kategorií I až IV podle toho, v jaké fázi řešení úlohy skončili.

I. <u>bez zápisu zadání</u> – 3 žáci tuto úlohu vůbec nezačali zapisovat

II. <u>zápis zadání bez dalších náznaků řešení</u> – 35 žáků si buďto zadání zapsalo a nijak viditelně úlohu dále neřešilo, nebo napsalo pouze „odpověď“: „Nevím.“. Někteří z nich se nad úlohou jistě zamýšleli, protože mezi odevzdanými řešeními byly např. odpovědi „Netuším, jak to vyřešit.“, „Bylo jich málo, protože to nestihli celé za jeden den.“, „Muselo jich být asi hodně, odhadem tak 38.“, „Sekáčů byl sudý počet.“. U těchto řešení však chybí jakýkoliv náznak o uvažování řešitele, zařadila jsem je proto do této kategorie.

III. vizualizace problému – 12 žáků se snažilo úlohu „rozlousknout“ pomocí vizualizace. Do zakresleného obrázku s legendou přibyly další údaje, které si tam řešitelé zapsali a zakreslili, ale i přes všechny snahy se jim úlohu vyřešit nepodařilo.

IV. pouze logická úvaha – 5 žáků řešilo úlohu pouze logickou úvahou, ve které se nevyskytly úvahy o velikosti posekané plochy za půl dne. Tyto žákovské úvahy vycházely především z žákovy představy postupu sečení (např. Pavla), případně bylo pouze zmíněno, že žák úlohu řešil logickou úvahou, ale samotná úvaha v řešení nebyla uvedena, ani naznačena.

V. určení části louky – 15 žáků řešilo úlohu taktéž úvahou, předmětem jejich úvahy však byla část louky, kterou poseká polovina sekáčů za půl dne. Od zjištění této části (většinou velké louky) se potom odvíjely další žákovské úvahy.

VI. určení času – 2 žáci nejprve určovali, jak dlouho by polovině sekáčů trvalo posekat velkou louku, poté určili, jak dlouho by sekala polovina sekáčů zbytek malé louky, a z tohoto údaje odvodili, kolik bylo celkem sekáčů. Nakolik tito žáci spolupracovali, neumím posoudit – v řešení i v úvahách byly drobné odchylky.

Na následujících žákovských řešeních se pokusím ukázat, jak někteří žáci dospěli ke správným nebo chybným výsledkům. U ukázek uvádím čísla kategorií, do kterých jsem strategie řešení zařadila.

Jirkovu, Karlovu, Lenčinu a Matějovu strategii řešení této úlohy jsem zařadila do kategorie V. Všichni tři určují, jak velkou část louky sekáči pokosí za půl dne.

Jirka:

Jirka si nezapsal, ani nijak neznázornil zadání, napsal pouze své vysvětlení, proč bylo sekáčů 8. (pozn.: jeho vysvětlení se vešlo přesně na stránku formátu A4)

Kvůli špatné čitelnosti jeho text (bez jakýchkoliv úprav) přepisuji:

„$\frac{1}{2}$ dne

Menší louka je $\frac{1}{2}$ větší, a když na něm pracuje polovina sekáčů tak rychle jako všichni na velké, vzhledem (pozn.: slovo vzhledem je na konci řádky)

~~4 sekáči~~ 8 sekáčů

k poměru luk. Když polovina sekáčů na velké louce udělala druhou polovinu dne zbytek louky (pracovali 2x pomaleji), museli mít tudíž po první polovině dne víc než 1. polovinu hotovou. Na malé louce je to úplně stejné, zase vzhledem k poměru. Za půl dne udělala $\frac{1}{2}$ všech sekáčů práci, kterou dodělal jeden sekáč za jeden den.“

Vzhledem k Jirkovu vysvětlení bych řekla, že výsledek částečně odhadl. Naznačuje tomu i přeškrtnutá „odpověď“ 4 sekáči, kterou nahradila „odpověď“ 8 sekáčů. Jirkovo vysvětlení je pro mne v mnohém nepochopitelné, avšak pro něj je naprosto logické a vyčerpávající. Odpověď po vyřešení úlohy Jirka nenapsal.

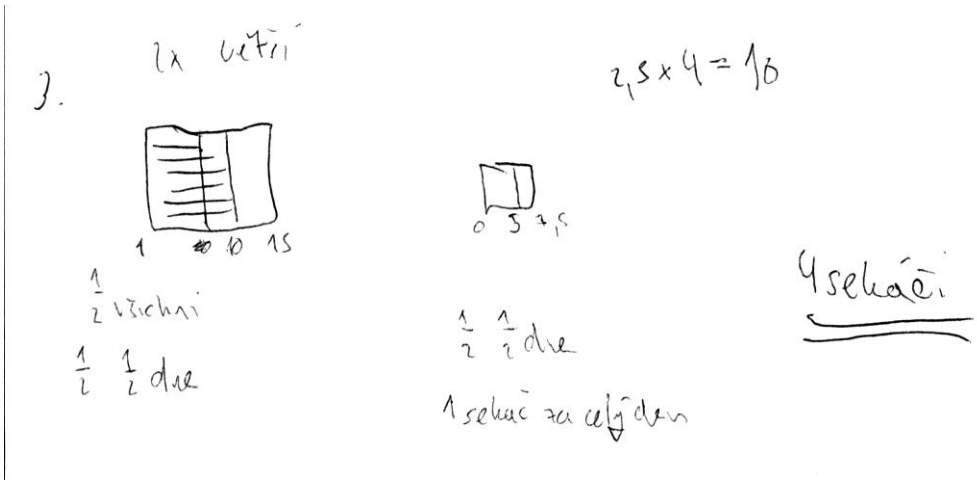
Po vyhodnocení odpovědí jsem se Jirky ptala na dvakrát použité spojení „vzhledem k poměru“. V prvním případě měl Jirka na mysli, že poměr luk ($1:\frac{1}{2}$) je stejný jako poměr sekáčů, kteří pokosí stejnou část velké louky jako malé louky. Aby byla pokosena stejná část velké louky jako malé louky (např. polovina), musí na velké louce pracovat všichni a na malé polovina sekáčů.

Druhé použití spojení „vzhledem k poměru“ pro Jirku znamená, že po půl dni práce poloviny sekáčů je pokoseno víc než polovina malé louky. A to taková část, že zbytek pak dodělá jeden sekáč za jeden den.

Ani po rozhovoru s Jirkou jsem plně nepochopila, jak se dostal právě k číslu 8.

Karel:

Karel pracoval částečně metodou pokusu a omylu. Pro lepší představu a snadnější uchopení úlohy zvolil konkrétní čísla.

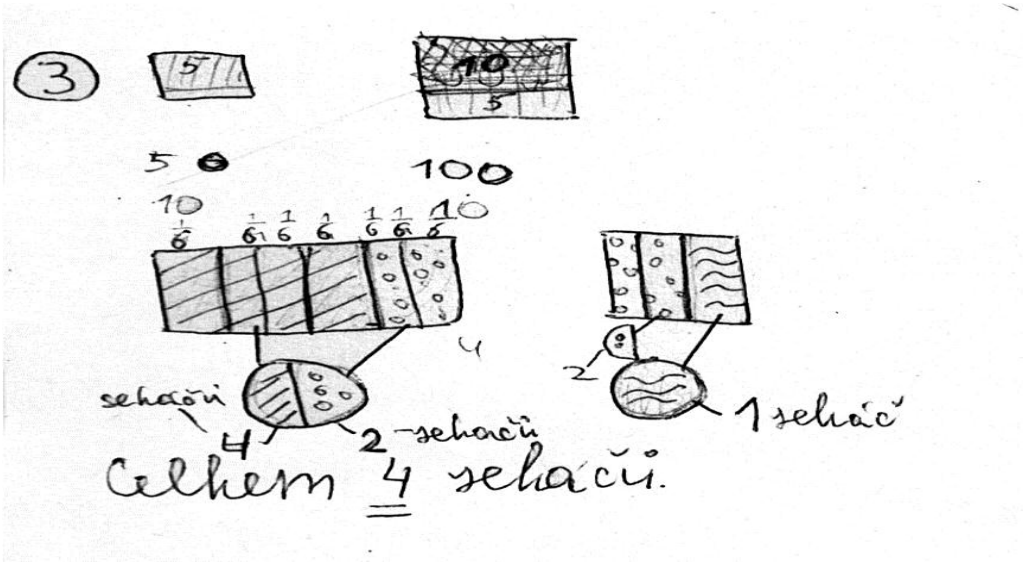


Karel si pro lepší představu o odvedené práci okótoval louky. První louka je dlouhá 15 jednotek, druhá louka je dlouhá 7,5 jednotek. Obrázek je vlastně nakreslený špatně, protože malá louka je v tomto provedení pouze čtvrtinová oproti velké louce, což zřejmě vzniklo tím, že si Karel nejprve nakreslil velkou a malou louku a teprve potom k nim přidal čísla. Při uvažování však Karel vnímá malou louku jako louku poloviční velikosti než louku velkou. Při rozhovoru Karel neuměl vysvětlit, co znamená zápis v pravém horním rohu ($2{,}5 \times 4 = 10$).

Chybné odpovědi se Karel dopustil, stejně jako řešitelé v dalších ukázkách, protože si řekl, že když jeden sekáč pokosí $\frac{1}{3}$ malé louky, tak zbytek malé louky ($\frac{2}{3}$) posekali 2 sekáči a protože je to polovina všech sekáčů, musí být počet všech sekáčů 4. Karel, stejně jako další řešitelé, přehlédl (nebo nevzal v potaz) informaci o délce sekání (půl dne – celý den).

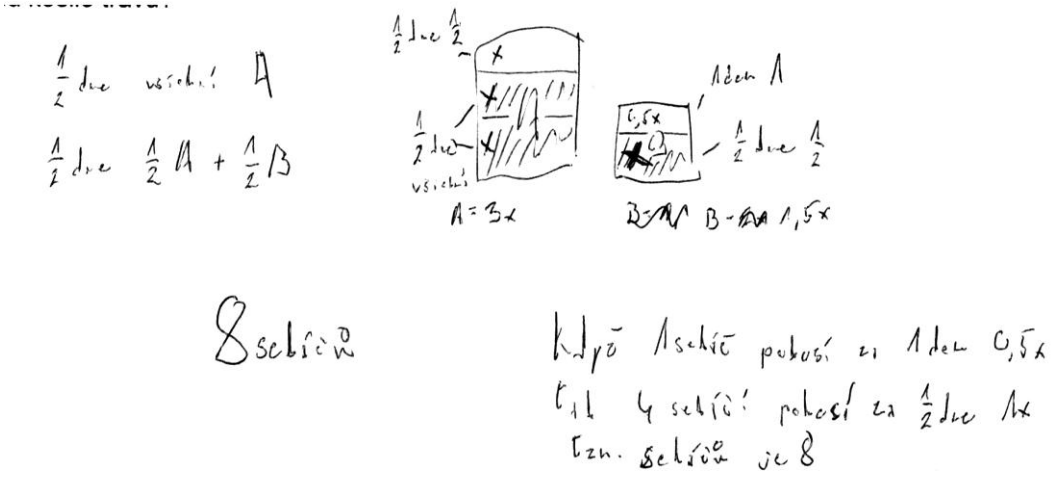
Lenka:

Lenka řešila celou úlohu pouze úvahou a obrázkem. Stejně jako Karel nejprve zvolila konkrétní čísla pro velikosti louky (nebo pro počet sekáčů, kteří pracovali první s druhou polovinu dne). Díky tomu získala do úlohy lepší vhled a dále řešila úlohu obecněji.



První dva horní obrázky byly pokusem o uchopení úlohy – Lenka si zvolila číslo 10 jako obsah plochy, kterou posekají všichni sekáči. Tuto myšlenku poté nahradila zlomky $\frac{1}{6}$ (velké louky). Znázornila si, jakou část poseká jaké množství sekáčů. Stejně jako Karel však zapomněla, že jeden sekáč kosí trávu celý den, kdežto první údaje (všichni posekají, polovina poseká) je uvedena pro polovinu dne. Proto jí vyšel poloviční počet sekáčů.

Matěj:

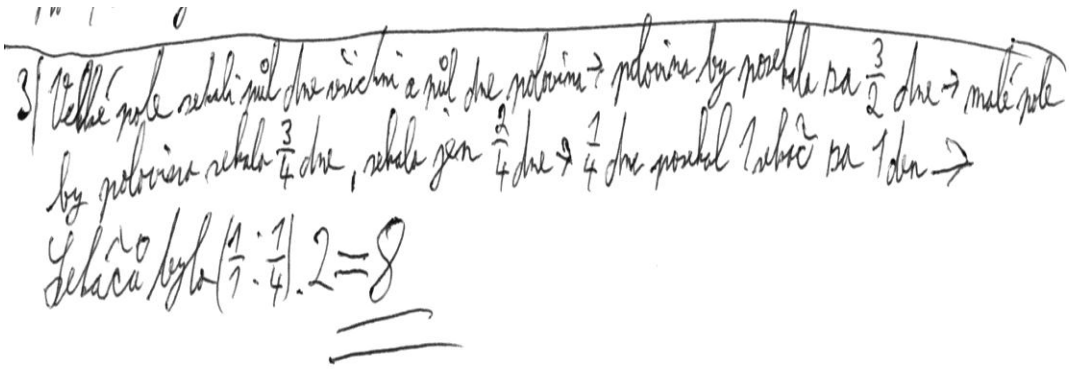


Matěj řešil všechny úlohy přímo do zadání. K řešení úlohy mu vždy stačilo pár řádků. K této úloze si nakreslil malý obrázek, na kterém znázornil obě louky. Úvahou určil, že polovina sekáčů poseká za polovinu dne $\frac{1}{3}$ velké louky, a tuto třetinu

si označil *x*. Velká louka je tedy 3*x* a malá je 1,5*x*. Další úvaha, kterou Matěj také zapsal, se týkala již množství sekáčů (odstavec vpravo dole): „Když 1 sekáč pokosí za 1 den 0,5*x* tak 4 sekáči pokosí za $\frac{1}{2}$ dne 1*x*, tzn. sekáčů je 8."

Ondra:

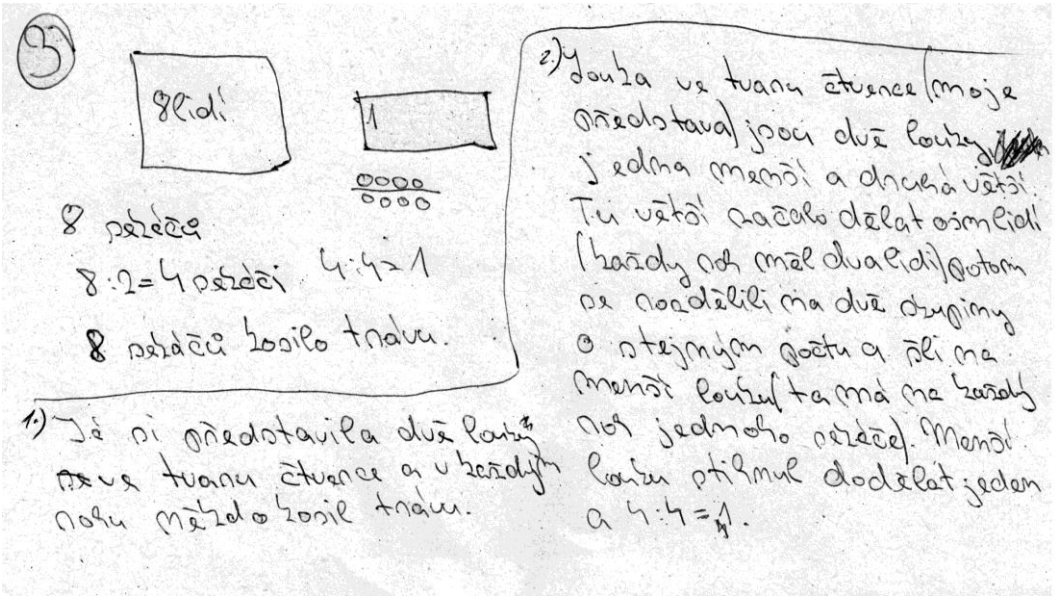
Ondrova strategie řešení úlohy patří do kategorie VI.



Ondra neuvažoval o tom, jakou část pole poseká daná část sekáčů, ale za jak dlouho by posekala polovina sekáčů velké pole. Protože velké pole sekali půl dne všichni sekáči a půl dne polovina sekáčů, posekala by polovina sekáčů celé pole za $\frac{3}{2}$ dne. Protože malé pole je polovinou velkého pole, potřebovala by polovina sekáčů polovinu času, tedy $\frac{3}{4}$ dne. Protože polovina sekáčů sekala malé pole pouze $\frac{2}{4}$ dne, zbyl na jednoho sekáče na celý den takový kus, který by polovina sekáčů posekala za $\frac{1}{4}$ dne. Proto Ondra píše poměr $\frac{1}{1}:\frac{1}{4}$. Protože tento poměr je pro jednoho sekáče a polovinu sekáčů, násobí Ondra celý poměr 2, aby dostal počet všech sekáčů (8).

Pavla:

Pavlino řešení je ukázkou strategie řešení pouze úvahou (kategorie IV).



Pavla nejprve nakreslila obrázek v levém horním rohu a napsala k němu své výpočty. Po mé prosbě v hodině dopsala i jak k výsledku přišla.

„Já si představila dvě louky ve tvaru čtverce a v každým rohu někdo kosil trávu.

Louka ve tvaru čtverce (moje představa) jsou dvě louky jedna menší a druhá větší. Tu větší začalo dělat osm lidí (každý roh měl dva lidi) potom se rozdělili na dvě skupiny o stejným počtu a šli na menší louku (ta má na každý roh jednoho sekáče). Menší louku stihnul dodělat jeden a $4 : 4 = 1$.“

Žádné další vysvětlení Pavla neuměla dát. Výpočet $4 : 4 = 1$ s odstupem času neuměla vysvětlit (Pavla: „nejspíš že jsou 4 sekáči ve 4 rozích louky, já nevím“).

Tato úloha byla pro žáky velmi náročná. Některé žáky to od řešení odradilo, jiní se naopak o vyřešení úlohy snažili. V jedné třídě, ve které se zlomky a se slovními úlohami žáci příliš nepracují, se jedna dvojice dívek snažila úlohu vyřešit pomocí procentového počtu. Větší louku posekanou celou skupinou a polovinou sekáčů dělily na 60 % a 40 %. Po mé radě, aby si vyjádřily posekanou plochu ve zlomku, přišly na to, že je to $\frac{1}{3}$, do obrázku však vytrvale psaly 30 %. Ani po relativně dlouhé době se k výsledku nedobraly. Ocenila jsem však jejich nasazení a snahu úlohu vyřešit.

Následující tabulky jsou souhrnem zjištěných údajů.

Tabulka č. 10: Ukončení úlohy

Ukončení úlohy	**Uveden výsledek**	**Snahy o vyřešení**	**Pouze zápis zadání**	**Neřešeno**
Počet žáků	31	6	29	6

Tabulka č. 11: Úspěšnost řešení

Úspěšnost řešení	**Vyřešeno správně (8 sekáčů)**	**Poloviční počet (4 sekáči)**	**Jiný výsledek**
Počet žáků	8	9	14

Tabulka č. 12: Použité strategie řešení

Strategie řešení	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Počet žáků	3	35	12	5	15	2

6.2 Vliv stylu výuky na žákovské strategie řešení

Styl výuky a osobnost učitele mají na žáky velký vliv. Zajímalo mne, zda bude tento vliv patrný i v žákovských řešeních zadaných úloh.

Pouze v jedné třídě paní učitelka se žáky se slovními úlohami a se zlomky příliš nepracuje. Styl výuky je spíše instruktivní (žáci mají „návody“, jak úlohy řešit, velmi málo poznatků z matematiky žáci sami objevují, většina je jim učitelkou předkládána). V ostatních třídách se paní učitelky snaží k látce přistupovat více konstruktivisticky (žáci více „objevují“ matematické vztahy a „poučky“), při řešení slovních úloh vyžadují učitelky zápis zadání, zápis řešení úlohy a odpověď, způsob řešení úlohy ponechávají z větší části na žácích – tzn. při společném rozboru a řešení úlohy ukážou jeden nebo dva přístupy k řešení podobných úloh, ale netrvají na nich.

Touto případovou studií se nepotvrdilo, že by žáci byli výrazně ovlivněni učiteli. U nemalé části žákovských řešení chyběl zápis úlohy (slovní legenda nebo obrázek doplněný textem) a odpověď. Strategie, které žáci volili k řešení úloh, byly také velice rozmanité. To může být částečně dáno i tím, že úlohy nebyly zcela typické a že početní úkony a slovní úlohy se zlomky byli látkou minulého ročníku. Žáci tedy neměli „v živé paměti“, jak by úlohu asi řešila paní učitelka, a hledali vlastní způsoby vyřešení daného problému.

7 Zhodnocení případové studie

Žákovské strategie řešení úloh se většinou shodovaly se strategiemi, které jsem očekávala. Případová studie nepotvrdila významný vliv učitelova přístupu k řešení slovních úloh na strategie a styly řešení slovních úloh, které volí žáci.

Analýzou žákovských řešení úloh jsem odhalila chyby, které jsem předpokládala. Některá žákovská řešení obsahovala i chyby, které jsem neočekávala, a postupy, které mne překvapily. Případová studie odhalila řadu nedostatků v žákovských představách o zlomcích a početních úkonech s nimi.

Více chyb bylo způsobeno žákovou neznalostí práce se zlomky nežli samotnou slovní úlohou. Žáci většinou neměli problém s matematizací zadání slovní úlohy. Výjimkou byla třetí úloha – Sekáči – která byla pro žáky náročná na uchopení. Většina žáků měla problém při matematizaci zadání této slovní úlohy. Jiné zadání třetí úlohy by možná vedlo k většímu počtu správných výsledků.

8 Závěr

V diplomové práci jsem zavedla pojem slovní úloha, popsala jsem proces řešení slovní úlohy a nejčastější problémy při jejich řešení. Porovnala jsem způsoby zavedení zlomků v učebnicích a popsala žákovské chyby při řešení slovních úloh se zlomky. Přínosem práce je i její praktická část, ve které jsem na konkrétních slovních úlohách popsala možné chyby a strategie řešení a tyto pak porovnala s chybami a strategiemi řešení současných žáků osmých ročníků.

Prostudováním více než 30 učebnic jsem zjistila, že různí autoři se v podstatě shodují v zavádění zlomků a početních úkonů s nimi. Nehledě na ročník, ve kterém autoři zlomky v učebnicích zavádí, všechny učebnice uvádí žáky do problematiky zlomků pomocí dělení koláčů a různých dalších „předmětů“ a obrazců. Ve většině učebnic se nachází velké množství slovních úloh se zlomky, pouze v učebnicích pro sedmé ročníky nad slovními úlohami ojediněle převažují úlohy početní.

Pro účely případové studie v rámci této diplomové práce jsem zadala ve čtyřech osmých ročnících k řešení tři slovní úlohy na počítání se zlomky. V každé třídě řešili stejné úlohy jako žáci i jejich učitelé.

Porovnáním řešení učitele a jeho žáků jsem zjistila, že strategie řešení úloh, které volí žáci, nejsou vždy zcela stejné jako strategie, které volí pro řešení dané úlohy jejich učitel. Nepotvrdila se tedy moje hypotéza, že žákovské strategie budou „kopírovat“ strategii řešení učitele.

Navrhla jsem strategie, které by žáci při řešení slovních úloh mohli zvolit. Moje představa o tom, jak budou žáci danou slovní úlohu řešit, se většinou shodovala se strategiemi řešení, které volili žáci.

Analýzou žákovských řešení slovních úloh jsem odhalila chyby, kterých se žáci při řešení zadaných slovních úloh se zlomky dopustili, a popsala jsem jejich možné příčiny. Potvrdila se moje hypotéza, že žáci budou chybovat v řešení slovních úloh se zlomky nejčastěji kvůli nedostatečně zvládnuté manipulaci se zlomky. Výjimku tvořila pouze třetí úloha, kde zadání nenapovídalo postup vedoucí k řešení úlohy. U této úlohy měla většina žáků problém při matematizaci slovního zadání.

Literatura

Seznam prostudovaných učebnic

BITNEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P.: *Matematika 6. Aritmetika : učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň : Fraus, 2007.

CIHLÁŘ, J., ZELENKA, M.: *Matematika pro 5. ročník základních škol, 1. díl : Pracovní učebnice*. Praha : Fortuna, 1995.

CIHLÁŘ, J., ZELENKA, M.: *Matematika pro 6. ročník zálkadních škol, 1. díl : Pracovní učebnice*. Praha : Foruna, 1995.

CIHLÁŘ, J., ZELENKA, M.: *Matematika pro 7. ročník ZŠ, 1. díl : Pracovní učebnice*. Praha : Fortuna, 1994.

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., HERVERT, J.: *Matematika pro čtvrtý ročník základní školy, část druhá*. Praha : Fortuna, 1995.

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M.: *Matematika pro sedmý ročník základní školy : Učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha : Fortuna, 1999.

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., POTŮČEK, J., COUFALOVÁ, J. ml.: *Matematika pro pátý ročník základní školy, 1. část, 2. část* : *Učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha : Fortuna, 1995

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., KASLOVÁ, M.: *Matematika – Pracovní učebnice pro první ročník základní školy část první : Učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu základní škola*. Praha : Fortuna,, 1997.

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., KASLOVÁ, M.: *Matematika – Pracovní učebnice pro první ročník základní školy část druhá : Učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha : Fortuna, 1998.

COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., LÁVIČKA, M., POTŮČEK, J., : *Matematika pro šestý ročník základní školy : Učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha : Fortuna, 1998.

ČIŽMÁR, J., HRDINA, Ľ., KOMAN, M., ŘEBÍČKOVÁ, D., ZAPLETAL, F.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl*. Praha : SPN, 1989.

DIVÍŠEK, J., HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F.: *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 4. ročník*. Praha : Prometheus, 1999.

DIVÍŠEK, J., HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F.: *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 2. ročník*. Praha : Prometheus, 1997.

HOŠPESOVÁ, A., DIVÍŠEK, J., KUŘINA, F.: *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 3. ročník*. Praha : Prometheus, 1998.

HOŠPESOVÁ, A., DIVÍŠEK, J., KUŘINA, F.: *Svět čísel a tvarů : matematika pro 5. ročník*. Praha : Prometheus, 2000.

JUSTOVÁ, J.: *Matematika pro 5. ročník základních škol, 1. díl*. Praha : Alter, 1996a.

JUSTOVÁ, J.: *Matematika pro 5. ročník základních škol, 3. díl*. Praha : Alter, 1996b.

KÁROVÁ, V.: *Matematika pro 4. ročník základní školy : učebnice*. Praha : Scientia, 1999.

KASLOVÁ, M., JAROŠOVÁ, J., NECHANICKÁ, R.: *Matematika 4 : Učebnice zpracovaná podle vzdělávacího programu Základní škola*. Praha : SPN, 1999.

KITTLER, J., KUŘINA, F., TICHÁ, M.: *Matematika pro 3. ročník základní školy : Učebnice*. Praha : Matematický ústav AV ČR, 1995.

KITTLER, J.: *Matematika pro 1. ročník základní školy (vhodná pro obecnou školu) : Učebnic*e. Praha : Matematický ústav AV ČR, 1994.

KOČÍ, S., KOČÍ, L.: *Matematika : Pracovní sešit A pro 6. ročník 1. pololetí základní a občanské školy*. Šumperk : TV Graphics, bez uvedení roku (a).

KOČÍ, S., KOČÍ, L.: Matematika : *Pracovní sešit B, C pro 7. ročník základní a občanské školy*. Šumperk : TV Graphics, bez uvedení roku (b).

KOMAN, M., KUŘINA, F., TICHÁ, M.: *Matematika pro 4. ročník základní školy : Učebnice*. Praha : Matematický ústav AV ČR, 1996.

MELICHAR, J., BÁLINT, Ľ., BĚLÍK, M., ČERVINKA, M., JANKŮ, M.: *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

MOLNÁR, J., KOPECKÝ, M., LIŠKOVÁ, H., NOVÁK, B., SLOUKA, J.: *Matematika 6 : učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc : Prodos, 1998.

MOLNÁR, J., LEPÍK, L., LIŠKOVÁ, H., SLOUKA, J.: *Matematika 7 : učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc : Prodos, 1999.

MÜLLEROVÁ, J., ČIŽMÁR, J., DIVÍŠEK, J., MACHÁČEK, V.: *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. Praha : Prometheus, 1994b.

MÜLLEROVÁ, J., ČIŽMÁR, J., DIVÍŠEK, J., MACHÁČEK, V.: *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl*. Praha : Prometheus, 1994a.

MÜLLEROVÁ, J., MIKULČÁK, J., KABELE, J., BRANT, J., ŽENATÁ, E.: *Matemtika pro 6. ročník základní školy : Aritmetika*. Praha : Kvarta, 1999.

NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V., HANKOVÁ, J., SINKOVÁ, M.: *Matematika s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy.* Praha : Scientia, 1997.

NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V., SINKOVÁ, M.: *Matematika s Betkou 1 pro 6. ročník základní školy*. Praha : Scientia, 1996.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Matematika 1 pro 7. ročník základní školy*. Praha : Prometheus, 1998.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Matematika 1 pro 7. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1998.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Matematika 1 pro 8. ročník základní školy*. Praha : Prometheus, 2006.

ROSECKÁ, Z., ČUHAJOVÁ, V., RŮŽIČKA, J.: *Aritmetika : Učebnice pro 6. ročník.* Brno : Nová škola, 1997.

ROSECKÁ, Z., RŮŽIČKA, J.: *Počítej a zamýšlej se : učebnice matematiky pro 3. ročník*. Brno : Nová škola, 2008.

ŠAROUNOVÁ, A., MAREŠ, J., RŮŽIČKA, J., VÄTEROVÁ, V.: *Matematika 6, 1. díl*. Praha : Prometheus, 1999.

ŠAROUNOVÁ, A., MAREŠ, J., RŮŽIČKOVÁ, J., VÄTEROVÁ, V.:*Matematika 6, 1. dil*. Praha : Prometheus, 1996.

TREJBAL, J., JIROTKOVÁ, D., SÝKORA, V.: *Matematika 7, 1. díl : Učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha : SPN, 1999.

TRCH, M., ZAPOTILOVÁ, E., LAUERMANNOVÁ, I., TURECKÁ, V.: *Matematika pro 1. ročník obecné a základní školy 2. díl*. Praha : Scientia, 1995.

Seznam odborné literatury

ČERNÁ, B.: Slovní úlohy o směsích. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

HEJNÝ, M.: Zlomky. In: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 1. díl. Ed. M. Hejný, J. Novotná, N. Stehlíková. Praha : PedF UK, 2004.

HELUS, Z., HRABAL, V., KULIČ, V., MAREŠ, J.: *Psychologie školní úspěšnosti žáků*. Praha : SPN, 1979.

HORÁČEK, I., HORÁČKOVÁ, J.: Úlohy o pohybu. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

JEŘÁBEK, J., a kol.: *Rámcový vzdělávací program*. Praha : VÚP, 2007.
Dostupné na World Wide Web:
http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf

KUBÍNOVÁ, M., NOVOTNÁ, J.: Strategie žákovských řešení slovních úloh, jejichž základem je dělení celku na části. In: *Sborník XIII. kolokvium řízení osvojovacího procesu*. Vyškov : VVŠPV, 1995.

KUBÍNOVÁ, M.: Slovní úlohy v učebnicích matematiky pro druhý stupeň základní školy. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha : SPN, 1989.

LUDVÍKOVÁ, J., ROUBÍČEK, F.: Úlohy o společné práci. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

NOVOTNÁ, J.: *Analýza řešení slovních úloh*. Praha : PedF UK, 2000.

ODVÁRKO, O., a kol.: *Metody řešení matematických úloh*. Praha : SPN, 1990.

ODVÁRKO, O.: *Tvorba a řešení aplikačních úloh v matematice pro 11-15leté žáky*. Vzdělávací program Iniciativa, Cyklus Jak tvořit se žáky v matematice. Praha : PedF UK, 1995.

PELIKÁN, J.: *Základy výzkumu*. Praha : Karolinum, 1998.

PEREĹMAN, J. I.: *Zajímavá algebra*. (Překlad z ruštiny) Praha : SNTL, 1985.

TICHÁ, M.: Following the path of discovering fractions. In: *SEMT '03 International Symposium Elementary Math Teaching*. Ed. J. Novotná. Praha : PedF UK, 1998.

TICHÁ, M.: Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

TICHÁ, M.: Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

VANÍČEK, J.: Slovní úlohy o obsahu v učebnicích matematiky. In: *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Ed. M. Ausbergová, J. Novotná. Plzeň : JČMF, 1998.

VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh*. Praha : SPN, 1962.

Webster's New World Dictionary. New York : Warner Books, 1979.

Přílohy

Milé žačky, milí žáci,

dostávají se vám do rukou slovní úlohy, které jsou součástí mé diplomové práce. Mým hlavním cílem není hodnotit správnost řešení, ale různé postupy, které si vy, žáci, k řešení vybíráte. Úlohy nebudou známkované.

Prosím vás o vyřešení následujících třech úloh. Protože mi nejde o správnost řešení, ale o postup, prosím vás, abyste škrtali pouze jednou nebo dvěma čarami a odevzdali s řešením úlohy úplně všechny papíry, které jste popsali. Zároveň vás prosím, abyste do pravého horního rohu udělali nějakou svoji unikátní značku, podle které si budete schopni případně svou práci později najít, kdybych měla nějaké dotazy k vašemu řešení (značku si zapamatujte – může to být např. čtyřmístné číslo, sled obrázkových symbolů, nebo vaše speciální značka, kterou nebude mít nikdo jiný :)).

Počítejte prosím bez kalkulačky, výpočty nejsou složité.

Děkuji za vaši spolupráci a přeji hodně zdaru!

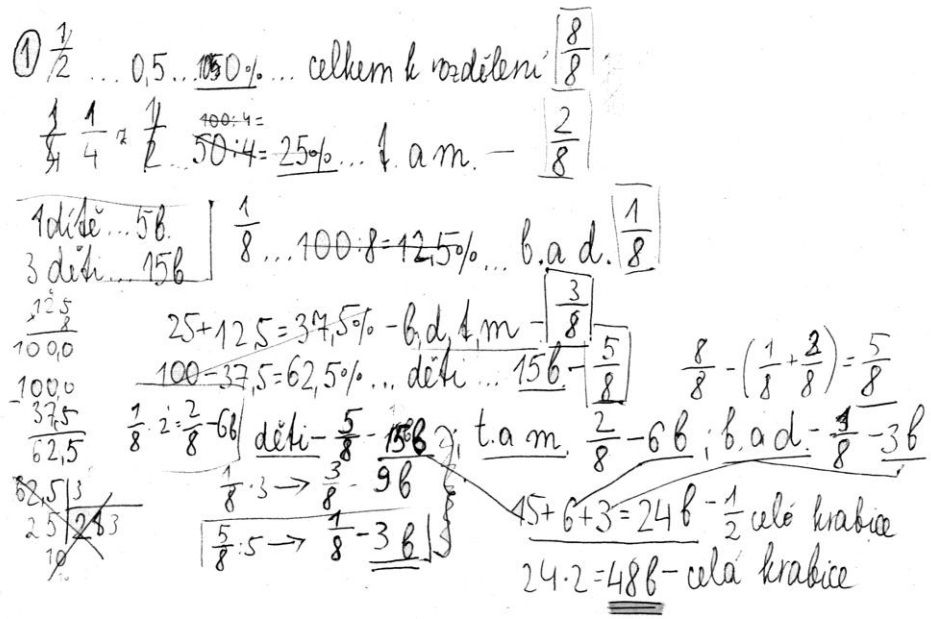
Jiřina Fišerová

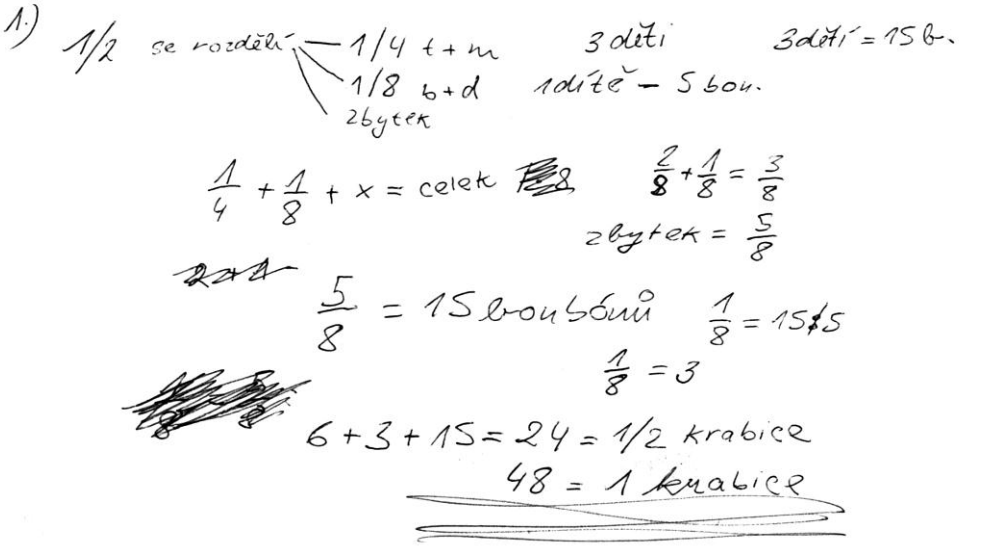
Zadání slovních úloh

1. Maminka koupila velikou krabici s čokoládovými bonbony. Dala ji svým dětem s tím, že teď smí rozdělit pouze polovinu bonbonů, které jsou v krabici, a to takto: tatínek a maminka dostanou dohromady čtvrtinu této poloviny, osminu poloviny k rozdělení nechají děti pro dědečka s babičkou a zbytek si smí rozdělit rovným dílem mezi sebe. Každé ze tří dětí dostalo po rozdělení čokoládových bonbonů podle maminčiných pravidel 5 bonbonů. Kolik čokoládových bonbonů bylo původně v krabici?

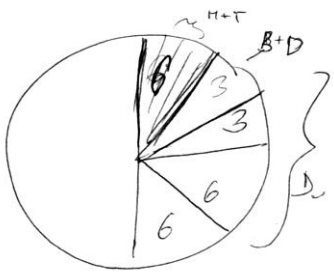
2. Paní Hloubalová dělá specální bílou polévku s houbami, do které k jednomu litru vody přidá ½ litru mléka a 1/8 litru šlehačkové smetany. Dnes se sešla na chatě velká společnost. V hrnci je připraveno na polévku 2,5 litru vody. Kolik mléka a kolik smetany má paní Hloubalová přidat do hrnce?

3. Sekáči měli pokosit dvě louky; jedna byla dvakrát větší než druhá. Polovinu dne pracovali všichni sekáči na větší louce. Pak se rozdělili na dvě stejné skupiny. První skupina zůstala na větší louce a do večera ji celou posekala. Druhá skupina kosila menší louku a večer jim zbývalo posekat ještě takový kousek, který další den dosekal jeden sekáč do večera. Kolik sekáčů kosilo trávu?


① 1/2 ... 0,5 ... 50% ... celkem k rozdělení 8/8
1/4 1/4 1/2 50:4 = 25% ... 1. a m. – 2/8
1 dítě ... 5 b.
3 děti ... 15 b
1/8 ... 100:8 = 12,5% ... b. a d. 1/8
25+12,5=37,5% - b, d, 1 m - 3/8
100-37,5=62,5% ... děti ... 15 b - 5/8
8/8 - (1/8 + 2/8) = 5/8
1/8 : 2 = 2/8 - 6 b
děti - 5/8 - 15 b
1/8 · 3 → 3/8 - 9 b
5/8 : 5 → 1/8 - 3 b
1. a m. 2/8 - 6 b ; b. a d. - 1/8 - 3 b
15+6+3=24 b - 1/2 celé krabice
24·2=48 b - celá krabice

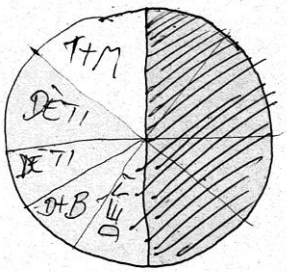

1.) 1/2 se rozdělí — 1/4 t + m
1/8 b + d
zbytek
3 děti
1 dítě – 5 bon.
3 děti = 15 b.
1/4 + 1/8 + x = celek
2/8 + 1/8 = 3/8
zbytek = 5/8
5/8 = 15 bonbónů
1/8 = 15 : 5
1/8 = 3
6 + 3 + 15 = 24 = 1/2 krabice
48 = 1 krabice

1.



$6 \cdot 4 = 24 \cdot 2 = 68$ bonbonů

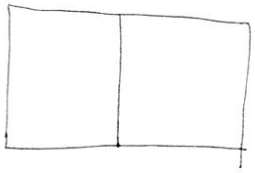
1.



1 DÍTĚ = $\frac{1}{4}$ = 5 bonbonů

$\frac{1}{2}$ hadice = 20 bonbonů · 2 = 40 bonbonů

1)



celkem bylo
40 bombónu
(asi)

$5+5+5+5=\underline{\underline{20}}$

$20 \cdot 2 = \underline{\underline{40}}$

1) a) děti – $\frac{1}{2}$

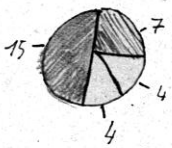
b) máma
táta – $\frac{1}{4}$

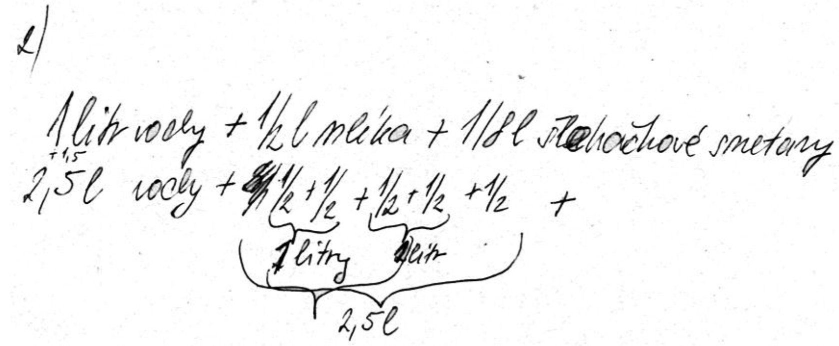
c) babička
děda – $\frac{1}{8}$

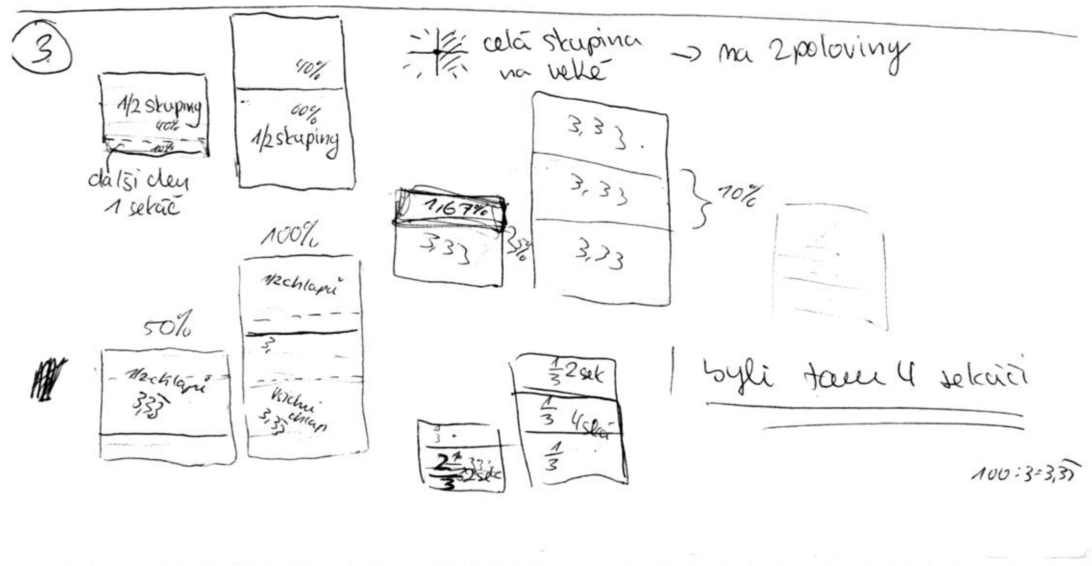
d) děti x?

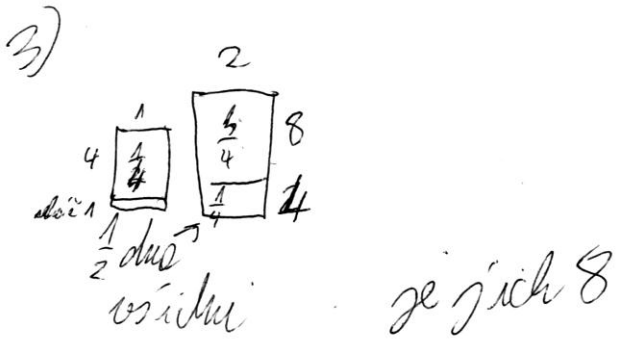
$x = 30.$

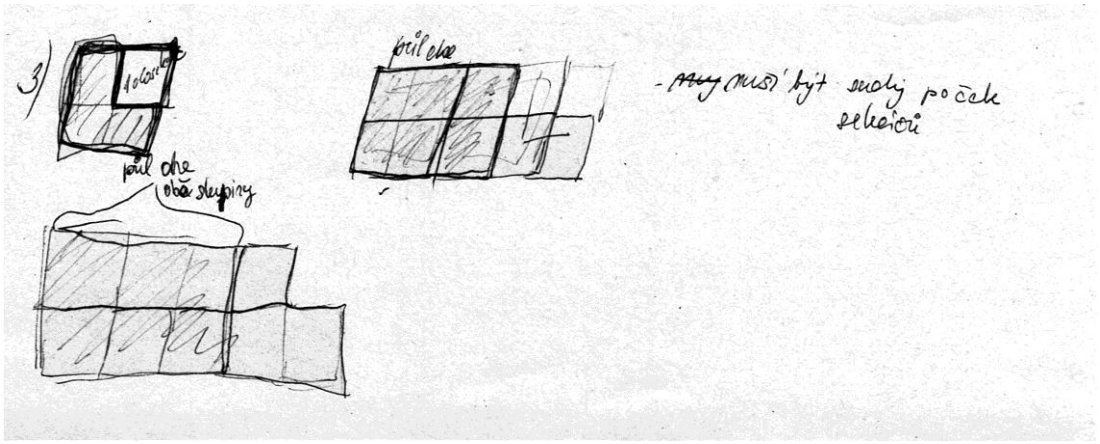
Bonkóni bylo 30.




2)
1 litr vody + 1/2 l mléka + 1/8 l šlehačkové smetany
2,5 l vody + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 +
1 litry
litr
2,5 l


3
1/2 skupiny
40%
60%
1/2 skupiny
další člen 1 sekáč
celá skupina na velké
→ na 2 poloviny
3,33
10%
1,67%
100%
1/2 chlapů
50%
vrchní
1/3 2 sek
1/3 4 sek
1/3
byli tam 4 sekáči
100 : 3 = 3,33


3)
1
2
4
8
4
1/2 dna
všichni
je jich 8


3)
půl dne
půl dne
obě skupiny
- ~~my~~ musí být sudý počet sekáčů