Univerzita Karlova v Prahe, Filozofická fakulta
Katedra logiky

ANNA HORSKÁ

GENTZENOV DÔKAZ BEZESPORNOSTI ARITMETIKY

Diplomová práca

Vedúci práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

2011

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím uvedených prameňov a literatúry a že práca nebola využitá v rámci iného vysokoškolského štúdia či k získaniu iného alebo rovnakého titulu.

V Prahe 1. mája 2011

Anna Horská

Abstrakt

Práca podáva podrobne vysvetlené dva dôkazy bezespornosti Peanovej aritmetiky, ktoré v rokoch 1936 a 1938 uverejnil nemecký matematik Gerhard Gentzen. Dôkazy boli naštudované z pôvodných zdrojov, a to z článkov „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“ a „Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie“. Prvý z uvedených dôkazov je zaujímavý z historického hľadiska, Gentzen pri ňom využíva kalkul prirodzenej dedukcie a ordinálne čísla, ktoré kvôli dôkazu sám vymyslel. Druhý dôkaz je viac-menej dnes bežne známy ako dôkaz bezespornosti Peanovej aritmetiky.

Abstract

This paper contains detailed description of two consistency proofs, which state that in the system called Peano arithmetic no contradiction can be obtained. The proofs were first published in 1936 and 1938 by the German mathematician Gerhard Gentzen. For the purpose of this paper, the proofs were read and studied from the original articles called „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“ and „Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie“. The first mentioned proof is interesting from the historical point of view. Gentzen used a natural deduction sequent calculus and ordinal numbers in an unusual form he invented. The second proof is similar to the consistency proof, which is commonly known as a consistency proof for Peano arithmetic nowadays.

Obsah

1 Úvod 7
1.1 Gentzen . . . 7
1.2 Hilbertov program . . . 8
1.3 Gentzen a Hilbertov program . . . 10
1.4 O čom práca je . . . 13

2 Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie 14
2.1 Pojem sekvent . . . 14
2.2 Zavedenie kalkulu . . . 14
2.3 Iniciálne sekventy . . . 15
2.4 Odvodzovacie pravidlá . . . 15
2.5 Priebeh dôkazu bezespornosti PA . . . 17
2.6 Prípravný krok . . . 18
2.7 Skorektnenie odvodenia . . . 19
2.8 Redukčné kroky na sekventoch . . . 20
2.9 Redukcie iniciálnych sekventov na cieľovú formu . . . 22
2.10 Nová definícia odvodenia . . . 25
2.11 Reťazové pravidlo . . . 26
2.12 Ordinálne čísla . . . 28
2.13 Dobré usporiadanie ordinálnych čísel . . . 30
2.14 Vzťah Gentzenových ordinálnych čísel a ordinálnych čísel z teórie množín . . . 34
2.15 Priradenie ordinálnych čísel odvodeniam . . . 37
2.16 Zmenšovanie ordinálnych čísel pri vykonávaní redukčných krokov na odvodeniach . . . 41

3 Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie 65
3.1 Zavedenie kalkulu . . . 65
3.2 Iniciálne sekventy . . . 65
3.3 Odvodzovacie pravidlá . . . 66
3.4 Príklady odvodení . . . 67
3.5 Syntaktické pojmy . . . 69
3.6 Pomocné tvrdenia . . . 72
3.7 Teória o ordinálnych číslach . . . 77
3.8 Priebeh dôkazu bezespornosti PA . . . 84
3.9 Algoritmus na priradenie ordinálov odvodeniam . . . 84
3.10 Redukcie . . . 88
3.11 Krok 1 (odstránenie voľných premenných) . . . 88

3.12 Krok 2 (odstránenie indukcie z finálneho úseku) 88
3.13 Krok 3 (odstránenie log. inic. sekventov z finálneho úseku) . . 92
3.14 Krok 4 (odstránenie pravidla oslabenia z finálneho úseku) . . . 94
3.15 Krok 5 (využitie vhodného rezu z finálneho úseku) 101

4 Komentár k dôkazom 108
4.1 Kalkul 108
4.2 Myšlienka dôkazu 108

Literatúra 111

1 Úvod

1.1 Gentzen

> ***Menzler-Trott***: *„Er war liberaler, sachlich distanzierter Beobachter, der Politik ablehnte und neben seinem Alltag allein die Mathematik akzeptierte.“*[1]

Gerhard Karl Erich Gentzen sa narodil 24.11.1909 v Greifswalde rodičom Hansovi Gentzenovi a Melanie Gentzenovej, rodenej Bilharz, ktorá mala v čase pôrodu už 36 rokov. Narodil sa do vzdelanej a vzdelanie podporujúcej rodiny, ktorá mala blízky vzťah nie len k matematike. Gerhardov starý otec z otcovej strany, Wilhelm Gentzen, pôsobil celý život ako učiteľ matematiky na gymnáziu. Podobne Gerhardov strýko z otcovej strany, Erich Gentzen, študoval matematiku a tiež sa uplatnil ako učiteľ na gymnáziu. Príbuzní z matkinej strany, a to starý otec Gerharda Alfonz Bilharz ako aj jeho brat Theodor Bilharz boli lekármi. Theodor je dokonca dodnes známy ako objaviteľ pôvodcu parazitálneho ochorenia schistosomóza. Gerhardov otec bol tiež vynikajúci, nadaný žiak. Študoval právo. V roku 1911 sa Gerhardovi v Bergene narodila ešte mladšia sestra Waltraut Sophie Margarete.

Nie je teda extrémne prekvapivé, že Gerhard sa už od základnej školy javil ako nadané dieťa. Ako malý rád písal básničky, hlavne pre matku a starých rodičov. Sestre vymýšľal vtipy, hádanky a divadelné hry pre bábiky, ktoré potom hrali so súrodencami Ottom a Herthou Michaelis. V škole Gerhardovi učarovala matematika, neskôr astronómia a často písaval listy starému otcovi Alfonzovi o tom, čo nové sa v tomto smere naučil, prípadne čo vymyslel. Starý otec jeho záujem o matematiku masívne podporoval.

V roku 1928 zložil Gentzen maturitné skúšky na gymnáziu v Stralsunde ako najlepší z ročníka a získal štipendium od „Studienstiftung des Deutschen Reiches“, aby mohol pokračovať v štúdiu na univerzite. Za obor štúdia si zvolil matematiku. So svojím priateľom Lotharom Collatzom začali študovať v Greifswalde, na radu Hellmutha Knesera odišli neskôr do Göttingenu, po jednom semestri strávili tiež v Mníchove a Berlíne. Na konci šiesteho semestra bolo potrebné sa rozhodnúť, na ktorej univerzite chcú štúdium ukončiť. Collatz si vybral Berlín, Gentzen sa vrátil do Göttingenu. V tom čase už

---

[1] Menzler-Trott o Gentzenovi. Citované podľa knihy [MT01], str. 114.

mal za sebou Hilbertovu prednášku s názvom „Teória množín“, kde sa preberali témy ako algebraické čísla, množiny, paradoxy, ordinálne čísla, Dedekindova teória čísel, povolené a nepovolené úsudky, základné pojmy matematickej logiky a problém bezespornosti. Ďalej preštudoval knihu „Grundzüge der theoretischen Logik“ od Hilberta a Ackermanna. Dá sa tiež predpokladať, že v Berlíne navštevoval prednášky Erwina Schrödingera, pretože jeho priateľ Collatz na ne chodil. Po návrate do Göttingenu (apríl 1931) sa na radu Paula Bernaysa zaoberá Hilbertovými ideami o výskume základov matematiky a Hilbertovým programom.

1.2 Hilbertov program

> ***Hilbert***: *„Matematika je hra, ktorá sa hrá na papieri podľa istých jednoduchých pravidiel so značkami bez významu.“*[2]

Zdá sa, že matematika je veda jedinečná v tom, že svoje závery formuluje pomocou apriorného rozumu, a tak ju empirické objavy týkajúce sa sveta nemôžu ohroziť. Jej apriórnosť a rigoróznosť býva často prezentovaná ako vzor poznania. Súčasne sú tieto vlastnosti podozrivé. Ako môže matematika plniť funkciu poznávania, keď je apriórna?

Keď chceme v matematike niečo dokázať, vychádzame z istých predpokladov, poznáme závery iných dôkazov. Táto postupnosť musí niekde začať, nejaké pravdy musia byť aj v matematike dané „zmyslami“, napríklad matematickou intuíciou. Ako ale rozpoznať správne intuície od nesprávnych? To nie je úplne isté… Každopádne si môžeme intuície, o ktorých pravdivosti sme presvedčení, zapísať do axiomatického systému. Axiómy sú „intuitívne jasné“, „dané“, „triviálne“, „samozrejmé“, a keďže odvodzovacie pravidlá, ktoré si zvolíme budú pravdivosť zachovávať, všetky vety, ktoré z tohto systému odvodíme, budú tiež pravdivé. Bohužiaľ sa ukázalo, že to nie je vždy tak jednoduché…

Vieru v intuitívne jasné axiómy podkopala neeuklidovská geometria a paradoxy teórie množín. Intuície sa ukázali byť zavádzajúce a objavili sa snahy zbaviť sa ich úplne. To sa dá dosiahnuť tak, že sa axiomatický systém zbaví významov (okrem tých, ktoré môžu byť definované pomocou stanovených

---

[2] Citované podľa knihy [Gol05], str. 116.

pravidiel systému). Stane sa z neho formálny systém, ktorý sa netvári, že popisuje objektívnu realitu. Názor, že formálne systémy sú pre matematické skúmania postačujúce, je známy ako *formalizmus.*

Za hlavného predstaviteľa formalizmu sa pokladá David Hilbert. Ako odpoveď na krízu vyvolanú paradoxmi, navrhol okolo roku 1920 niečo, čo je dnes známe ako Hilbertov program. Spočíva v snahe formalizovať zaradom všetky matematické teórie a pomocou *finitných metód* dokázať bezespornosť každej z nich. Ďalej Hilbert požadoval dôkaz toho, že z formalizovaných teórií sa dajú odvodiť všetky matematické pravdy a chcel algoritmus, ktorý by rozhodoval o pravdivosti resp. nepravdivosti ľubovoľného matematického výroku. Išlo vlastne o to, dokázať bezespornosť matematiky v matematike a tým ju postaviť na pevné základy.

Existovali *relatívne* dôkazy bezespornosti, napr. Hilbert previedol bezespornosť geometrie na bezespornosť aritmetiky reálnych čísel. Pri dôkaze bezespornosti celej matematiky by bolo možné vytvoriť „hierarchiu teórií“ a pri dôkaze bezespornosti jednej sa odvolať na bezespornosť inej. Na začiatku tejto postupnosti by ale musela byť „najjednoduchšia“ teória, ktorej bezespornosť sa dá ukázať bez odvolania sa na bezespornosť iného systému, tj. jej dôkaz bezespornosti by bol *absolútny.* Takéto dôkazy sa našli napr. pre aritmetiku prirodzených čísel bez úplnej indukcie. Verilo sa, že aj aritmetika s indukciou je bezesporná a keby sa to podarilo formálne ukázať a k tomu ešte aj jej úplnosť, znamenalo by to úspešné zahájenie Hilbertovho programu.

Finitné metódy hrajú pri dôkazoch bezespornosti dôležitú rolu, pretože sa dá vycítiť, že paradoxy v teórii množín vznikli kvôli ľahkovážnemu zaobchádzaniu s nekonečnom. (Množina *všetkých* množín, ktoré si nenáležia. Cantorova univerzálna množina *všetkých* množín, ktorá má takú istú mohutnosť ako jej potenčná množina.) Intuície o nekonečne jednoducho nie sú spoľahlivé.

Okrem toho, nekonečno spôsobovalo pochybnosti aj ohľadom piateho Euklidovho postulátu, ktorý hovorí, že ľubovoľným bodom, ktorý neleží na priamke, sa dá viesť práve jedna rovnobežka s pôvodnou priamkou. To je taká, ktorá sa s ňou nikdy nepretne. Keď vezmeme konečný úsek priestoru, môžeme týmto bodom viesť viac rôznych priamok, ktoré sa s pôvodnou priamkou nepretnú… Problémy s týmto postulátom stáli pri zrode neeuklidovskej geometrie.

1.3 Gentzen a Hilbertov program

Dňa 13.12.1932 píše Gentzen v liste svojmu niekdajšiemu profesorovi Kneserovi, že doteraz síce existovali dôkazy bezespornosti pre aritmetiku bez indukcie, prípadne nejak inak obmedzenú (Ackermann, v.Neumann, Hilbert-Ackermann, Herbrand), ale on už rok pracuje na dôkaze bezespornosti Peanovej aritmetiky s indukciou (die Arithmetik mit vollständiger Induktion) a dúfa, že s danou prácou by mohol promovať u Paula Bernaysa.

Gentzenove plány ohľadne dizerátie, ktoré spomínal v liste, nevyšli. Jeho dizertáciou sa napokon stala práca „Untersuchungen über das logische Schließen“. Bola rozdelená na dve časti, ktoré ako články vyšli v rokoch 1934 a 1935 v časopise „Mathematische Zeitschrift“. Jeho ústna skúška sa konala 12.7.1933 a keďže Paul Bernays bol od 28.4.1933 suspendovaný kvôli svojmu židovskému pôvodu (odišiel do Švajčiarska), promoval Gentzen pri Hermannovi Weylovi. Gentzen vo svojej práci zaviedol kalkulus prirodzenej dedukcie a sekventový kalkulus pre klasickú ako aj intuicionistickú logiku. Dokázal eliminovateľnosť rezu pre sekventový kalkulus a bezespornosť Peanovej aritmetiky bez indukcie. V správe o Gentzenovej dizertácii túto Hermann Weyl označil ako „sehr gut“. Sekventový kalkulus prirodzenej dedukcie a „gentzenovský sekventový kalukus“ (Gentzen ho nazýval $\mathcal{LK}$) neskôr Gentzen využije pri dôkazoch bezespornosti Peanovej aritmetiky.

V novembri 1933 Gentzen úspešne zložil štátne skúšky, aby mohol vyučovať. Dostáva sa do finančných problémov a opäť sa začína zaoberať dôkazom bezespornosti aritmetiky. Finančné problémy sa vyriešili získaním miesta Hilbertovho asistenta („wissenschaftliche Hilfskraft für Professor Hilbert“), na ktoré nastúpil 1.11.1935. Profesor Hilbert poňal pracovné povinnosti svojho asistenta veľmi svojsky, údajne k nemu chodil Gentzen domov, aby mu nahlas predčítaval poéziu od Schillera.

Gentzen stále pracoval na dôkaze bezespornosti aritmetiky, dokonca v liste z dňa 5.12.1934 adresovaného Hellmuthovi Kneserovi uvádza, že tento dôkaz už má a práve v tomto čase ho pripravuje na uverejnenie v Mathematische Annalen. Bol to *prvý* Gentzenov dôkaz na túto tému. Založený bol na redukciách sekventov odvoditeľných v aritmetike (podobne ako aj nasledujúce dva dôkazy), nebolo v ňom však explicitne ukázané, že redukcie po konečne mnoho krokoch končia. Voči tomu boli námietky (Bernays, Gödel, Weyl, predpokladá sa, že i von Neumann). Gentzen kritiku akceptoval. Dôkaz uverejnený nebol (až dlho po jeho smrti v roku 1974, keď ho vydal Bernays).

Gentzen sa prvým „neúspechom“ nenechal odradiť. Dôkaz opravil tak, že konečnosť redukčného procesu je ukázaná pomocou ordinálnych čísel menších ako ε_0 (ktoré sú vyjadrené vybranými reálnymi číslami). Je to jeho *druhý* dôkaz bezespornosti aritmetiky. Táto verzia bola uverejnená v článku „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“ v časopise Mathematische Annalen v roku 1936 a je podrobne vysvetlená v predloženej práci.

Vo všeobecnosti bol dôkaz prijatý veľmi priaznivo. Gentzen získal mnohé kontakty, napr. na Andreja Nikolajeviča Kolmogorova, Lászla Kalmára, Andreja Andrejeviča Markova ml., Heinricha Scholza. Friedrich Waismann spomína jeho dôkaz vo svojej knihe „Einführung in das mathematische Denken“. Zaujímavé je vyjadrenie Alfreda Tarského, ktorý sa po preštudovaní dôkazu nechal počuť, že bezespornosť aritmetiky mu aj tak jasnejšia nie je.

Čo sa pôvodného Hilbertovho programu týka, má dôkaz jeden zásadný háčik. Gentzen využíva transfinitnú indukciu. To nie je v súlade s plánom, používať jedine finitné metódy (ktoré ale, ako Gentzen sám tvrdí, neboli nikdy formálne vymedzené). Z Gödelových výsledkov, ktoré v danom čase už boli dobre známe, je jasné, že obyčajná indukcia na takýto dôkaz stačiť nemôže. Toto všetko si Gentzen samozrejme uvedomoval. Snažil sa presadiť názor, že nie len finitné metódy, ale aj metódy konštruktivistické, sú pri dokazovaní rovnako spoľahlivé. Pri dôkaze toho, že jeho ordinálne čísla menšie ako ε_0 sú dobre usporiadané, využíva pojem „dosiahnuteľné číslo“ („erreichbar“). Tvrdí, že číslo β je dosiahnuteľné len vtedy, keď všetky čísla pod β sú dosiahnuteľné. Definícia dosiahnuteľného čísla je pre neho konštruktivistická, a teda „unbedenklich“.

V roku 1938 je v časopise „Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften“, ktorý vydáva Gentzenov priateľ Heinrich Scholz, publikovaný už *tretí* Gentzenov dôkaz bezespornosti aritmetiky. Článok nesie názov „Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie“. Bude podrobne vysvetlený v predloženej práci. Nie je isté, prečo Gentzen svoj dôkaz z roku 1936 opäť prepracoval, každopádne je nový dôkaz „jednoduchší a dôkladnejší“ ako uvádza sám Gentzen v liste Bernaysovi v decembri 1937. Pri dôkaze použil sekventový kalkulus (nie kalkulus prirodzenej dedukcie) a využil ordinálne čísla z teórie množín, čím sa tiež zjednodušilo priraďovanie čísel jednotlivým odvodeniam.

Od 31.10.1938 je Gentzenovi predĺžené jeho miesto asistenta u Hilberta o jeden rok. Pri tejto príležitosti píše Helmut Hasse posudok o Gentzenovej práci, kde je Gentzen vykreslený ako (síce veľmi schopný ale iba) dovršovateľ Hilbertových snáh. Nie je isté, či Gentzen daný posudok poznal, ale pravdepodobne by sa mu takýto opis veľmi nepáčil... Tiež nie je isté, aký filozofický názor vlastne Gentzen zastával, ak vôbec nejaký. Už v spomínanom liste Hellmuthovi Kneserovi z roku 1932 explicitne píše, že filozofia mu nie je „sympatická“ a chce sa zaoberať len problémami, ktorých skúmanie pripúšťa matematické metódy. Možno mu teda vôbec nešlo o „očistenie matematiky“ ako Hilbertovi. Dôkaz bezespornosti aritmetiky mohol byť pre neho zaujímavý výlučne z technického hľadika. Gentzen bol dosť introvertný a nik (z osôb oslovených autorom knihy [MT01]) si nespomenul, že by ho bol počul sa s niekým baviť, prípadne sa s ním on sám bavil o filozofii alebo politike.

Dňa 28.9.1939 nastupuje Genzten nie veľmi nadšene do vojenskej služby. Pôsobí medzi Münsterom a Braunschweigom vo vojenskom letectve ako rádiotelegrafista (Funker). Úlohou oddielu, kde pôsobí, bolo dozerať na vymedzený vzdušný priestor (Luftgaue) a podávať zistené informácie protileteckej obrane. Na začiatku vojny navštívi v pracovnom tábore Gailsdorf v Thüringene svoju dlhoročnú kamarátku Herthu Michaelis a požiada ju o ruku. Svadba sa síce nekoná, ale dohodnú sa, že si budú pravidelne písať...

Ešte v roku 1939 napísal Gentzen článok s názvom „Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie“. V roku 1940 danú prácu predložil v Göttingene ako svoju habilitačnú prácu. Posudok na ňu vypracovali Ackermann a Scholz, bola prijatá pozitívne. Gentzen v tejto práci v podstate dokázal ešte raz Gödelovu vetu o neúplnosti, podľa ktorej existujú pravdivé vety, ktoré sa síce dajú formulovať vo formalizme danej teórie, ale nedajú sa v nej dokázať. Rozšíril Peanovu aritmetiku o nekonečné ordinály. Axiómy o nich ako aj transfinitnú indukciu pridal do kalkulu. Potom ukázal, že transfinitná indukcia po číslo ε_0 je formulovateľná, ale nie je dokazateľná. Postupoval pri tom podobne ako pri prepracovanom dôkaze bezespornosti aritmetiky, v oboch prípadoch ide napokon o ukázanie nedokazateľnosti. Najprv definoval, čo to znamená odvodiť transfinitnú indukciu po istý ordinál. Odvodeniam potom priraďoval ordinálne čísla menšie ako ε_0. Napokon ukázal, že odvodenie transfinitnej indukcie po isté číslo musí mať priradený ordinál, ktorý je väčší ako toto číslo. To znamená, že transfinitná indukcia po ε_0 sa nedá odvodiť. Ako dôsledok ďalej dostávame, že aritmetika je bezesporná, pretože zo sporu by plynulo čokoľvek. Je to *štvrtý* dôkaz od Gentzena, z ktorého plynie bezespornosť aritmetiky. Táto práca je v roku 1943 publikovaná v časopise Mathematische Annalen a je to Gentzenova posledná uverejnená práca vôbec. Paul Bernays ju v roku 1944 recenzuje v časopise Journal of Symbolic Logic, čím ju spraví medzinárodne známou.

Ackermann trochu vyčítal Gentzenovi, že do aritmetiky pridával ordinálne čísla, ktoré pôsobia ako „cudzí element“. Tvrdí, že dôkaz sa dá uskutočniť aj bez tohto pridávania a bolo by ešte zrejmejšie, že neúplná je samotná aritmetika (bez rôznych doplnkov).

Dňa 21.1.1942 sa Gentzen psychicky zrúti, o deň neskôr sa dostáva do nemocnice. (Pripomeňme, že od 28.9.1939 slúžil Gentzen v armáde. Kvôli svojej habilitácii, či pri iných príležitostiach, ako napr. Gödelova prednáška o hypotéze kontinua, si brával dovolenku.) Za neschopného vojenskej služby je oficiálne prehlásený dňa 19.11.1942. Ako dôvod sa uvádza „nervové ochorenie v dôsledku vyčerpávajúcej vojenskej služby“. Medzitým už ale chvíľu pobudol v sanatóriu, jeho stav sa zlepšil. Bývalý kolega z Göttingenu Hans Rohrbach s prihliadnutím na Gentzenove vedecné znalosti a schopnosti ho pozval, aby sa stal docentom na „Deutsche-Karls Universität“ v Prahe. Gentzen ponuku prijal.

Nasledujúce udalosti už nemajú súvis s Hilbertovým programom a nie sú obzvlášť potešujúce. Pravdepodobne by sa o nich dala napísať samostatná práca, a preto predložená práca na tomto mieste rozprávanie o Gentzenovi ukončí.

1.4 O čom práca je

Práca predkladá podrobne vysvetlený druhý a tretí dôkaz bezespornosti Peanovej aritmetiky podľa Gentzena. Dôkazy boli naštudované z pôvodných zdrojov, a to z článkov [Gen36] a [Gen38]. Pri dôkaze číslo dva to iným spôsobom nešlo, pretože autorke nie je známa novodobá publikácia, v ktorej by bol daný dôkaz spracovaný. Dôkaz číslo tri je s malými odchýlkami štandardná verzia známa v súčasnosti ako dôkaz bezespornosti Peanovej aritmetiky a je obsiahnutý napr. v knihe [Tak75]. Je ale spracovaný detailnejšie. Dôkaz číslo dva je pozoruhodný z historického hľadiska. Často sa dôkazy viet časom zjednodušujú, vyučuje sa samozrejme najprehľadnejšia verzia a cesta, ktorá k nej viedla upadne do zabudnutia. Pritom táto cesta mohla byť dlhá a komplikovaná, často sa na nej podieľa viacero osôb. Preto je tiež zaujímavé, že tieto dôkazy boli celé v réžii Gentzena samotného. Poskytujú nám svedectvo o vývoji jeho myšlienok, ktorý sa podľa autorky týka hlavne technickej realizácie, pretože samotná idea dôkazu ostáva v oboch prípadoch viac - menej rovnaká.

2 Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie

(1936)

2.1 Pojem sekvent

Chceme zaviesť logický kalkulus pre Peanovu aritmetiku, ktorej jazyk je $\mathcal{L} = \{+, \cdot, \mathrm{S}, =, 0\}$, kde + a $\cdot$ sú binárne funkčné symboly, S je unárny funkčný symbol, = je binárny predikátový symbol a 0 je konštantný symbol. Vo svojom článku z roku 1936 s názvom „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“ Gentzen využíva kalkulus prirodzenej dedukcie, ktorý „zodpovedá skutočnému mysleniu matematika pri dokazovaní“. Gentzen delí pravidlá na *zavedenie* a *odstránenie* logickej spojky. Odstránenie spojky & by mohlo vyzerať napríklad takto:

Ak sme dokázali $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$, tak sa dá dokázať i $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$.

Lenže dôkazy často neodvodzujú z pravdivých formulí ďalšie pravdivé formule. Zväčša máme predpoklady, o ktorých vyhlásime, že sú pravdivé a z nich odvodzujeme. Pravdivosť odvodených formulí závisí potom od pravdivosti predpokladov. Túto vlastnosť Gentzen formalizoval pomocou pojmu *sekvent*:

$$\langle \qquad \underbrace{\mathcal{A}_1 .\,. \mathcal{A}_n}_{\text{Ak predpokladáme pravdivosť týchto formulí,..}} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{..tak je pravdivá i táto.}} \qquad \rangle$$

Formule $\mathcal{A}_1 .\,. \mathcal{A}_n$ nazývame *predné* formule sekventu. Chápeme ich ako postupnosť. Je prípustné, že žiadne predné formule v sekvente nie sú. Potom sekvent vyzerá takto $\langle \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$. Formulu $\mathcal{B}$ nazývame *zadná* formula sekventu. Je vždy len jedna a nesmie chýbať.

2.2 Zavedenie kalkulu

Zavedieme *sekventový kalkulus prirodzenej dedukcie* pre Peanovu aritmetiku. Budeme mať dva druhy iniciálnych sekventov, a to logické a matematické. Ďalej definujeme tri druhy odvodzovacích pravidiel: štrukturálne pravidlá, logické pravidlá a indukciu.

2.3 Iniciálne sekventy

Logické iniciálne sekventy majú tvar $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \rangle$, kde $\mathcal{D}$ je ľubovoľná formula v jazyku $\mathcal{L}$. Matematické iniciálne sekventy sú tvaru $\langle \Rightarrow \mathcal{C} \rangle$, kde $\mathcal{C}$ je axióm rovnosti alebo axióm Robinsonovej aritmetiky. (Pre indukciu bude existovať špeciálne odvodzovacie pravidlo.)

Axiómy rovnosti:

- $\forall x(x = x)$
- $\forall x, y(x = y \to y = x)$
- $\forall x, y, z(x = y \;\&\; y = z \to x = z)$
- $\forall x_1, .., x_n, y_1, .., y_n(x_1 = y_1 \;\&\; .. \;\&\; x_n = y_n \to \mathcal{F}(x_1, .., x_n) = \mathcal{F}(y_1, .., y_n))$, kde $\mathcal{F}$ je n-árny funkčný symbol jazyka $\mathcal{L}$.
- $\forall x_1, .., x_n, y_1, .., y_n(x_1 = y_1 \;\&\; .. \;\&\; x_n = y_n \;\&\; \mathcal{R}(x_1, .., x_n) \to \mathcal{R}(y_1, .., y_n))$, kde $\mathcal{R}$ je n-árny predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}$.

Axiómy Robinsonovej aritmetiky:

- $\forall x \forall y(\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \to x = y)$
- $\forall x(\mathrm{S}(x) \neq 0)$
- $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(\mathrm{S}(y) = x))$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y(x + \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x + y))$
- $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \cdot \mathrm{S}(y) = x \cdot y + x)$

2.4 Odvodzovacie pravidlá

Štrukturálne pravidlá:

- Výmena dvoch predných formulí.
- Kontrakcia dvoch rovnakých predných formulí.
- Oslabenie, čiže doplnenie ľubovoľnej formule k predným formulám.

- Premenovanie viazanej premennej.

Pravidlo indukcie:

- $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(0) \quad \mathcal{F}(a), \Delta \Rightarrow \mathcal{F}(a+1)}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{F}(t)}$,
  kde a je eigenvariable indukcie a nie je voľná v Γ, Δ, $\mathcal{F}(0)$, $\mathcal{F}(t)$ a t je ľubovoľný term jazyka $\mathcal{L}$.

Logické pravidlá:

Spojka	**Zavedenie**	**Pozn.**	**Odstránenie**	**Pozn.**
$\&$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \quad \Theta \Rightarrow \mathcal{B}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \mathcal{A} \& \mathcal{B}}$		$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \& \mathcal{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}}$	
$\bigvee$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \bigvee \mathcal{B}}$		$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \bigvee \mathcal{B} \quad \mathcal{A}, \Delta \Rightarrow \mathcal{C} \quad \mathcal{B}, \Theta \Rightarrow \mathcal{C}}{\Gamma, \Delta, \Theta \Rightarrow \mathcal{C}}$	
$\rightarrow$	$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \Rightarrow \mathcal{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}$		$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \quad \Delta \Rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{B}}$	
$\neg$	$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \Rightarrow \mathcal{B} \quad \mathcal{A}, \Delta \Rightarrow \neg \mathcal{B}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \neg \mathcal{A}}$		$\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\neg \mathcal{A}}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}}$	
$\forall$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x)}$	♠	$\frac{\Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x)}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(t)}$	♣
$\exists$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x \mathcal{F}(x)}$	♣	$\frac{\Gamma \Rightarrow \exists x \mathcal{F}(x) \quad \mathcal{F}(a), \Delta \Rightarrow \mathcal{C}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{C}}$	♠

Pomocou pravidiel pre implikáciu sa dá simulovať rez.

♣ - t je term v jazyku $\mathcal{L}$ substituovateľný za x do formule $\mathcal{F}$.

♠ - Premenná a sa nazýva eigenvariable pravidla a nie je voľná v $\Gamma \bigcup \{\forall x \mathcal{F}(x)\}$ resp. $\Gamma \bigcup \Delta \bigcup \{\mathcal{C}\} \bigcup \{\exists x \mathcal{F}(x)\}$.

Definícia 1. Odvodenie *v danom kalkule je stromová štruktúra tvorená sekventami, kde každý sekvent je iniciálny alebo je odvodený nejakým povoleným pravidlom. Posledný sekvent odvodenia nazývame* výsledný.

Definícia 2. *Sekvent je v* cieľovej forme*, keď je bez voľných premenných, jeho zadná formula je pravdivá uzavretá atomická formula alebo je jeho zadná formula nepravdivá uzavretá atomická formula a aj vpredu je aspoň jedna taká. Môžeme prehlásiť, že sekvent v cieľovej forme je pravdivý sekvent, pretože má vpredu nepravdivú formulu alebo má vzadu pravdivú formulu. Pravdivosť resp. nepravdivosť uzavretých atomických formulí môžeme ľahko vypočítať, pretože funkčné i predikátové symboly sú realizované rekurzívnymi funkciami a predikátmi.*

2.5 Priebeh dôkazu bezespornosti PA

Vezmime si ľubovoľné odvodenie v Peanovej aritmetike. Vyrobíme z neho odvodenie v „novom zmysle“, čo zahŕňa odstránenie logických symbolov $\bigvee$, $\rightarrow$ a $\exists$, ďalej pozmenenie prípustných odvodzovacích pravidiel a iniciálnych sekventov. V takomto odvodení nahraďme všetky voľné premenné okrem eigenvariable ľubovoľnými numerálmi a vyrátajme hodnoty termov, u ktorých sa to dá (= ktoré neobsahujú eigenvariable ani viazanú premennú). Termy potom nahraďme numerálom s príslušnou hodnotou.

Tento krok môže porušiť obecný predpis pravidla indukcie: nech napr. formula $\mathcal{F}(a)$, ktorá obsahuje eigenvariable a, ju obsahuje v rámci termu $a + x$, po nahradení voľných premenných numerálmi v rámci termu napr. $a + \overline{4}$. Vo výslednom sekvente vo formuli $\mathcal{F}(a)$ za a dávame ľubovoľný term, takže napr. term $\overline{2} \cdot \overline{3}$, spolu teda máme term $\overline{2} \cdot \overline{3} + \overline{4}$. Keď vyrátame jeho hodnotu, bude na danom mieste numerál $\overline{10}$, čím sme zmenili pôvodnú formulu $\mathcal{F}(a)$ a odvodzovací krok teda nie je realizovaný podľa obecného predpisu pravidla indukcie. Takéto použitie pravidla indukcie budeme pokladať za korektné.

Stačí sa nám zaoberať odvodeniami typu popísaného v prvom odstavci, pretože prípadné odvodenia sporu, čiže sekventu $\langle \Rightarrow 0 = 1 \rangle$, by bolo tiež také. Ako uvidíme, tak odvodenie v „novom zmysle“ sa dá urobiť z každého odvodenia, nahradenie voľných premenných okrem eigenvariable a vyrátanie hodnôt termov odvodenie sporu nepokazí. Výsledný sekvent totiž obsahuje uzavretú atomickú formulu a ostatné formule, či už mali alebo nemali voľné premenné, museli v priebehu odvodenia zmiznúť rezom (ktorý sa dá ľahko simulovať) alebo po použití nejakého pravidla, lebo neplatí subformula property.

Pre sekventy budeme definovať redukcie (s názvom 13.2 a 13.5), ktoré ich budú zjednodušovať v tom zmysle, že po redukcii bude mať sekvent (zväčša) menej logických spojok. Pomocou tohto pojmu nadefinujeme pojem redukcia na odvodení, ukáže sa, že každé odvodenie spomínaného typu sa dá redukovať, ak jeho výsledný sekvent nie je v cieľovej forme. Ak je v cieľovej forme, redukcia preň definovaná nie je.

Redukcia na odvodení bude prebiehať tak, že z odvodenia sa po redukcii stane iné korektné odvodenie a jeho výsledný sekvent ostane nezmenený alebo bude práve po jednom redukčnom kroku podľa 13.2 resp. 13.5. Budeme chcieť ukázať, že tieto redukčné kroky odvodenia v istom zmysle zjednodušujú. Za mieru komplikovanosti si vezmeme ordinálne čísla, ktoré budú reprezentované istými vybranými reálnymi číslami. Tieto budeme priraďovať odvodeniam.

Ukáže sa, že ordinálne čísla reprezentované ako reálne čísla sú dobre usporiadané a každý redukčný krok odvodenia jeho ordinálne číslo zmenší. Tj. po konečne mnoho krokoch sa dopracujeme k odvodeniu, ktoré sa ďalej redukovať nedá. Takže jeho výsledný sekvent je v cieľovej forme. Keby nebol, tak je preň definovaná redukcia, tá by zmenšila ordinálne číslo odvodenia, ale to nejde.

Z toho vyplýva: Každé odvodenie nášho typu sa v konečne mnoho krokoch dá modifikovať tak, aby jeho výsledný sekvent bol v cieľovej forme. Takže by to malo platiť i o odvodení sekventu $\langle \Rightarrow 0 = 1\rangle$. Definícia nám hovorí, že tento sekvent nie je v cieľovej forme. Jeho odvodenie by sa preto malo dať redukovať. Ak sa aj dá, tak nie tak, aby sekvent $\langle \Rightarrow 0 = 1\rangle$ bol zmenený, pretože uvidíme, že sa naň nedá aplikovať ani redukcia 13.2, ani 13.5. Takéto redukovanie by k cieľovej forme výsledného sekventu neviedlo. Preto sa spor v PA nedá odvodiť.

2.6 Prípravný krok

Prípravný krok spočíva v odstránení logických spojok $\bigvee$, $\to$ a $\exists$ z odvodenia. Vymenované spojky nahradíme týmito im ekvivalentnými výrazmi:

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{A} \bigvee \mathcal{B}) & \leftrightarrow & \neg(\neg\mathcal{A} \& \neg\mathcal{B})) \\ \exists x \mathcal{F}(x) & \leftrightarrow & \neg\forall x \neg\mathcal{F}(x) \\ (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) & \leftrightarrow & \neg(\mathcal{A} \& \neg\mathcal{B}) \end{array}$$

Teraz musíme celé odvodenie skorektniť:

- Ak sa úprava udiala v logickom iniciálnom sekvente $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}\rangle$, tak sa z neho stal iný, ale stále logický iniciálny sekvent.
- Úprava v matematickom iniciálnom sekvente $\langle \Rightarrow \mathcal{C}\rangle$, kde $\mathcal{C}$ je axióm rovnosti alebo axióm Robinsonovej aritmetiky, iniciálny sekvent nepokazí. Jedná sa totiž o ekvivalentné úpravy v klasickej predikátovej logike. Axiómy zostanú axiómami aj po úprave. Najjednoduchšie by bolo, hneď na začiatku si axiómy zapísať bez spojok $\bigvee$,$\to$,$\exists$.
- Štrukturálne pravidlá nie sú úpravou porušené.
- Odvodzovacie pravidlá pre spojky &,$\neg$,$\forall$ nie sú úpravou porušené.

- Odvodzovacie pravidlá pre spojky $\bigvee$,$\rightarrow$,$\exists$ sú úpravou porušené a je potrebné ich napraviť.

2.7 Skorektnenie odvodenia

V celej časti venujúcej sa skorektneniu odvodenia budú predstavovať formule s hviezdičkou formule po úprave z oddielu 2.6.

Použitie pravidla $\bigvee$-*zavedenie* vyzeralo pôvodne takto: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\bigvee\mathcal{B}}$, po úprave vyzerá takto: $\frac{\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{A}^*}{\Gamma^*\Rightarrow\neg(\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}$.

Na miesto nekorektného použitia pravidla vložíme takúto časť odvodenia:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{A}^*}{\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*,\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{A}^*} \qquad \dfrac{\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*\Rightarrow\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*}{\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*\Rightarrow\neg\mathcal{A}^*}}{\Gamma^*\Rightarrow\neg(\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}$$

Použitie pravidla $\bigvee$-*odstránenie* vyzeralo pôvodne takto: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\bigvee\mathcal{B}\quad\mathcal{A},\Delta\Rightarrow\mathcal{C}\quad\mathcal{B},\Theta\Rightarrow\mathcal{C}}{\Gamma,\Delta,\Theta\Rightarrow\mathcal{C}}$, po úprave vyzerá takto: $\frac{\Gamma^*\Rightarrow\neg(\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)\quad\mathcal{A}^*,\Delta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*\quad\mathcal{B}^*,\Theta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}{\Gamma^*,\Delta^*,\Theta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}$. Na miesto nekorektného pravidla vložíme takúto časť odvodenia:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\mathcal{C}^*\Rightarrow\neg\mathcal{C}^*}{\mathcal{A}^*,\neg\mathcal{C}^*\Rightarrow\neg\mathcal{C}^*}\quad\mathcal{A}^*,\Delta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}{\neg\mathcal{C}^*,\Delta^*\Rightarrow\neg\mathcal{A}^*}\qquad\dfrac{\dfrac{\neg\mathcal{C}^*\Rightarrow\neg\mathcal{C}^*}{\mathcal{B}^*,\neg\mathcal{C}^*\Rightarrow\neg\mathcal{C}^*}\quad\mathcal{B}^*,\Theta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}{\neg\mathcal{C}^*,\Theta^*\Rightarrow\neg\mathcal{B}^*}}{\neg\mathcal{C}^*,\Delta^*,\Theta^*\Rightarrow\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*}\qquad\dfrac{\Gamma^*\Rightarrow\neg(\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}{\neg\mathcal{C}^*,\Gamma^*\Rightarrow\neg(\neg\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}}{\Gamma^*,\Delta^*,\Theta^*\Rightarrow\neg\neg\mathcal{C}^*}}{\Gamma^*,\Delta^*,\Theta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}$$

Použitie pravidla $\exists$-*zavedenie* vyzeralo pôvodne takto: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(t)}{\Gamma\Rightarrow\exists x\mathcal{F}(x)}$, po úprave vyzerá takto: $\frac{\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{F}(t)^*}{\Gamma^*\Rightarrow\neg\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*}$. Jeho použitie nahradíme týmto:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{F}(t)^*}{\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*,\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{F}(t)^*}\qquad\dfrac{\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*\Rightarrow\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*}{\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*\Rightarrow\neg\mathcal{F}(t)^*}}{\Gamma^*\Rightarrow\neg\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*}$$

Použitie pravidla $\exists$-*odstránenie* vyzeralo takto: $\frac{\Gamma\Rightarrow\exists x\mathcal{F}(x)\quad\mathcal{F}(a),\Delta\Rightarrow\mathcal{C}}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\mathcal{C}}$, po úprave sme dostali toto: $\frac{\Gamma^*\Rightarrow\neg\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*\quad\mathcal{F}(a)^*,\Delta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}{\Gamma^*,\Delta^*\Rightarrow\mathcal{C}^*}$. Vzniklo nekorektné použitie pravidla, ktoré nahradíme týmto úsekom:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\mathcal{C}^* \Rightarrow \neg\mathcal{C}^*}{\mathcal{F}(a)^*, \neg\mathcal{C}^* \Rightarrow \neg\mathcal{C}^*} \quad \mathcal{F}(a)^*, \Delta^* \Rightarrow \mathcal{C}^*}{\neg\mathcal{C}^*, \Delta^* \Rightarrow \neg\mathcal{F}(a)^*}}{\neg\mathcal{C}^*, \Delta^* \Rightarrow \forall x\neg\mathcal{F}(x)^*} \qquad \dfrac{\Gamma^* \Rightarrow \neg\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*}{\neg\mathcal{C}^*, \Gamma^* \Rightarrow \neg\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*}}{\Gamma^*, \Delta^* \Rightarrow \neg\neg\mathcal{C}^*}}{\Gamma^*, \Delta^* \Rightarrow \mathcal{C}^*}$$

V upravenom úseku používame pravidlo $\forall$-zavedenie, ktoré vyžaduje, aby eigenvariable a nebola voľna v $\neg\mathcal{C}^*$, Δ^* a v $\forall x\neg\mathcal{F}(x)^*$. Pôvodne sme používali pravidlo $\exists$-odstránenie, takže z predpokladu vieme, že premenná a nie je voľná v Γ, Δ, $\mathcal{C}$ a v $\exists x\mathcal{F}(x)$. Nahradenie logických spojok nemenilo voľné premenné na viazané a naopak, preto je požiadavka na eigenvariable a splnená aj v upravenom odvodení.

Použitie pravidla $\rightarrow$*-zavedenie* vyzeralo pôvodne takto: $\frac{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\mathcal{B}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}}$, po úprave vyzerá takto: $\frac{\mathcal{A}^*,\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{B}^*}{\Gamma^*\Rightarrow\neg(\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}$. Nahradíme ho nasledujúcim úsekom:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*}{\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \neg\mathcal{B}^*}}{\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \neg\mathcal{B}^*} \quad \mathcal{A}^*, \Gamma^* \Rightarrow \mathcal{B}^*}{\Gamma^*, \mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \neg\mathcal{A}^*} \qquad \dfrac{\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*}{\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \mathcal{A}^*}}{\Gamma^* \Rightarrow \neg(\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}$$

Použitie pravidla $\rightarrow$*-odstránenie* vyzeralo pôvodne takto: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A} \quad \Delta\Rightarrow\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\mathcal{B}}$, teraz po úprave je na danom mieste toto: $\frac{\Gamma^*\Rightarrow\mathcal{A}^* \quad \Delta^*\Rightarrow\neg(\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}{\Gamma^*,\Delta^*\Rightarrow\mathcal{B}^*}$. Nahradíme ho týmto úsekom:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma^* \Rightarrow \mathcal{A}^* \quad \neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \neg\mathcal{B}^*}{\Gamma^*, \neg\mathcal{B}^* \Rightarrow \mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*} \qquad \dfrac{\Delta^* \Rightarrow \neg(\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}{\neg\mathcal{B}^*, \Delta^* \Rightarrow \neg(\mathcal{A}^*\&\neg\mathcal{B}^*)}}{\Gamma^*, \Delta^* \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}^*}}{\Gamma^*, \Delta^* \Rightarrow \mathcal{B}^*}$$

Máme opäť korektné odvodenie, ale nevyskytujú sa v ňom spojky $\bigvee$, $\rightarrow$ a $\exists$.

2.8 Redukčné kroky na sekventoch

Budeme používať Gentzenovo číslovanie. Gentzen dôsledne čísluje takmer každý odsek svojho článku, paragrafy 1–11 pojednávajú o nutnosti dôkazov bezespornosti a finitných metódach. Preto sú čísla odsekov, v ktorých sú popísané redukcie sekventov, relatívne vysoké. Odsek 13.4 obsahuje definíciu cieľovej formy.

Redukčné kroky pre sekventy bez logických spojok $\bigvee$, $\exists$, $\rightarrow$ a bez voľných premenných sú definované nasledovne:

- 13.21 Ak má zadná formula sekventu tvar $\forall x \mathcal{F}(x)$, tak ju nahradíme formulou $\mathcal{F}(\overline{n})$, kde $\overline{n}$ je ľubovoľný numerál:
$$\langle \Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x) \rangle \sim\!\succ \langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n}) \rangle$$
- 13.22 Ak má zadná formula sekventu tvar $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$, tak ju nahradíme formulou $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$ pričom si môžeme ľubovoľne zvoliť:
$$\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B} \rangle \sim\!\succ \langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \rangle \text{ resp. } \langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$$
- 13.23 Ak má zadná formula sekventu tvar $\neg\mathcal{A}$, zmeníme ju na nepravdivú uzavretú atomickú formulu a formulu $\mathcal{A}$ pridáme k predným formulám:
$$\langle \Gamma \Rightarrow \neg\mathcal{A} \rangle \sim\!\succ \langle \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$$

Sekvent po redukcii má vždy menej logických spojok. Ak nenastane ani jedna z možností 13.21 až 13.23, tak zadná formula sekventu je atomická uzavretá formula. Ak je táto pravdivá, tak je daný sekvent v cieľovej forme. Pre sekventy v cieľovej forme redukcie nedefinujeme. Nech je to teda nepravdivá uzavretá atomická formula. Definujme ďalšie redukčné kroky na základe predných formulí:

- 13.51 Ak sa medzi prednými formulami sekventu vyskytuje formula tvaru $\forall x \mathcal{F}(x)$, bude mať daný sekvent po redukcii jeden z týchto tvarov:
$$\langle \Gamma, \forall x \mathcal{F}(x) \Rightarrow 0 = 1 \rangle \sim\!\succ \begin{cases} \langle \Gamma, \forall x \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(\overline{n}) \Rightarrow 0 = 1 \rangle \\ \langle \Gamma, \mathcal{F}(\overline{n}) \Rightarrow 0 = 1 \rangle \end{cases}$$
Pritom bude predpisom určené, či formula $\forall x \mathcal{F}(x)$ ostane stáť a aký numerál $\overline{n}$ za x doplníme.
- 13.52 Ak sa medzi prednými formulami sekventu vyskytuje formula tvaru $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$, bude mať daný sekvent po redukcii jeden z týchto tvarov:
$$\langle \Gamma, \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow 0 = 1 \rangle \sim\!\succ \begin{cases} \langle \Gamma, \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle \\ \langle \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle \end{cases}$$
Pričom na ľavej strane môže namiesto samotnej formule $\mathcal{A}$ stáť aj formula $\mathcal{B}$ a vždy bude predpisom určené, ktorá z možností nastane.

- 13.53 Ak sa medzi prednými formulami sekventu vyskytuje formula tvaru $\neg\mathcal{A}$, bude mať daný sekvent po redukcii jeden z týchto tvarov:

$$\langle \Gamma, \neg\mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle \rightsquigarrow \begin{cases} \langle \Gamma, \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle \\ \langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \rangle \end{cases}$$

  Predpisom bude určené, ktorá z možností nastane.

Budeme sa snažiť redukovať sekventy tak, aby sme formulu, ktorej sa redukcia týka, odstránili. Nie vždy to ale bude možné. Ak by redukciou vznikla formula, ktorá sa už medzi prednými formulami redukovaného sekventu nachádza, tak jej ďalší výskyt nezapíšeme. Toto sú všetky definované redukcie na sekventoch. Všimnime si, že sekvent $\langle \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ sa redukovať nedá a taktiež nie je v cieľovej forme.

2.9 Redukcie iniciálnych sekventov na cieľovú formu

Venujme sa najprv logickým iniciálnym sekventom tvaru $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \rangle$. Redukčné kroky sú definované pre sekventy bez logických spojok $\bigvee$, $\exists$, $\rightarrow$ a bez voľných premenných. Nech to formula $\mathcal{D}$ spĺňa. Robme redukčné kroky typu 13.2, teda úpravy zadnej formule, až kým táto nemá tvar $\neg\mathcal{C}$ alebo nie je uzavretá atomická.
Rozlíšime tri prípady:

- Ak je vzadu pravdivá uzavretá atomická formula, dosiahli sme cieľovú formu.

- Nech je vzadu nepravdivá uzavretá atomická formula. Máme sekvent typu $\langle \mathcal{D} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$. Na prednej formuli $\mathcal{D}$ vykonávajme teraz redukčné kroky 13.5 tak, aby jej úpravy boli také isté ako na zadnej formuli $\mathcal{D}$, ktoré sme už vykonali. Obe úpravy nech sa skladajú z krokov v tom istom poradí a s rovnakými voľbami. Týmto spôsobom dostaneme aj vpredu nepravdivú uzavretú atomickú formulu a dosiahneme cieľovú formu.

- Nech sme vzadu dostali $\neg\mathcal{C}$. Máme teda sekvent $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \neg\mathcal{C} \rangle$. Po vykonaní kroku 13.23 dostaneme $\langle \mathcal{D},\ \mathcal{C} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$. Na prednej formuli $\mathcal{D}$ vykonávajme teraz redukčné kroky 13.5 tak, aby jej úpravy boli také isté ako na zadnej formuli $\mathcal{D}$, ktoré sme už vykonali. Obe úpravy nech sa skladajú z krokov v tom istom poradí a s rovnakými voľbami. Dostaneme sekvent $\langle \neg\mathcal{C},\ \mathcal{C} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$. Uplatníme krok 13.53 a máme

$\langle \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \rangle$. Toto je zas logický iniciálny sekvent. Formula $\mathcal{C}$ obsahuje aspoň o jednu logickú spojku menej ako formula $\mathcal{D}$, pretože redukovaním formule $\mathcal{D}$ sme získali $\neg\mathcal{C}$: spojky$(\mathcal{D}) \geq$ spojky$(\neg\mathcal{C}) >$ spojky$(\mathcal{C})$. Celý postup opakujme so sekventom $\langle \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \rangle$ a po konečne mnoho krokoch sa dostaneme k cieľovej forme.

Venujme sa ďalej matematickým iniciálnym sekventom typu $\langle \Rightarrow \mathcal{C} \rangle$, kde $\mathcal{C}$ je axióm rovnosti alebo axióm Robinsonovej aritmetiky. Obecne budeme pri redukcii týchto sekventov, okrem pri sekvente vytvoreného z tretieho axiómu $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(\mathrm{S}(y) = x))$, postupovať nasledovne, sekvent z tretieho axiómu je redukovaný v príkladoch:

- Zapíšeme si axióm bez logických spojok $\bigvee$, $\rightarrow$, $\exists$. Je to prípravný krok pred redukciou. Nejlepšie je zvoliť si axiómy tak, aby tieto spojky neobsahovali.
- Všetky premenné sú viazané všeobecným kvantifikátorom a celý axióm je v prenexnej normálnej forme, takže prvý krok redukcie bude 13.21, tj. dosadenie numerálov za premenné. Na konci týchto krokov ostanú všetky fomule bez premenných, voľné premenné tam neboli, viazané výskyty sme práve odstránili.
- Uplatňujme ďalej kroky 13.2 kým je to možné. Kroky 13.2 nám zo správneho sekventu dajú vždy správny sekvent, tj. ak všetky predné formule sú pravdivé, tak i zadná formula je pravdivá.
- Teda, keď začne byť potrebné vykonať krok 13.5, máme správny sekvent s nepravdivou zadnou formulou. Preto i vpredu existuje nepravdivá formula. Vieme zistiť, ktorá to je, pretože všetky formule sú bez premenných a realizácie funkčných ako aj predikátových symbolov sú definované rekurzívne. Túto nepravdivú formulu si zvolíme pre redukciu. Prípadnú voľbu formule v redukcii 13.52 vykonáme tak, aby nám vpredu zas vznikla nepravdivá formula.
- Pôvodnú formulu pri redukcii *nikdy* nenecháme stáť.

Príklady:

1. Redukujme sekvent $\langle \Rightarrow \forall x, y(\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \rightarrow x = y) \rangle$.
    - $\langle \Rightarrow \forall x, y\ \neg(\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y)\ \&\ x \neq y) \rangle$ Príprava k redukcii, odstránenie spojky →.
    - $\langle \Rightarrow \neg(\mathrm{S}(0) = \mathrm{S}(0)\ \&\ 0 \neq 0) \rangle$ 13.21, všade dosadený numerál 0
    - $\langle (\mathrm{S}(0) = \mathrm{S}(0)\ \&\ 0 \neq 0) \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ 13.23

- $\langle 0 \neq 0 \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ 13.52
- $\langle \Rightarrow 0 = 0 \rangle$ 13.53

2. Redukujme sekvent $\langle \Rightarrow \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(\mathrm{S}(y) = x)) \rangle$.

   - $\langle \Rightarrow \forall x \neg (x \neq 0 \ \& \ \forall y(\mathrm{S}(y) \neq x)) \rangle$ Príprava k redukcii, odstránenie spojky →.
   - $\langle \Rightarrow \neg (0 \neq 0 \ \& \ \forall y(\mathrm{S}(y) \neq 0)) \rangle$ 13.21, za x dosadený numerál 0
   - $\langle (0 \neq 0 \ \& \ \forall y(\mathrm{S}(y) \neq 0)) \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ 13.23
   - $\langle 0 \neq 0 \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ 13.52
   - $\langle \Rightarrow 0 = 0 \rangle$ 13.53

Ukážme si ešte, ako na cieľovú formu redukovať tieto sekventy: $\langle \mathcal{A} \& \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$, $\langle \forall x \mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n}) \rangle$, $\langle \mathcal{A}, \ \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \& \mathcal{B}) \rangle$, $\langle \mathcal{A}, \ \neg \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$, $\langle \neg\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$. Predpokladáme, že neobsahujú logické spojky $\bigvee$, $\rightarrow$, $\exists$ a taktiež voľné premenné.

1. Sekvent $\langle \mathcal{A} \& \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$: Tento sekvent sa vyskytne v procese redukovania logického iniciálneho sekventu $\langle \mathcal{A} \& \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \& \mathcal{B} \rangle$ po aplikovaní kroku 13.22. Ďalej postupujeme, akoby sme redukovali spomínaný iniciálny sekvent.

2. Sekvent $\langle \forall x \mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n}) \rangle$: Tento sekvent sa vyskytne v procese redukovania logického iniciálneho sekventu $\langle \forall x \mathcal{F}(x) \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x) \rangle$ po aplikovaní kroku 13.21. Ďalej postupujeme, akoby sme redukovali spomínaný iniciálny sekvent.

3. Sekvent $\langle \mathcal{A}, \ \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \& \mathcal{B}) \rangle$: Na tento sekvent uplatníme najprv redukčný krok 13.22 a dostaneme $\langle \mathcal{A}, \ \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$ resp. $\langle \mathcal{A}, \ \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$ podľa voľby. Ďalej budeme redukovať presne tak isto, ako keby sme mali iniciálny sekvent $\langle \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$ resp. $\langle \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$. Druhá predná formula neprekáža, nič s ňou nerobíme, len ju „ťaháme so sebou“.

4. Sekvent $\langle \mathcal{A}, \ \neg \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$: Na tento sekvent použijeme krok 13.53, dostaneme sekvent $\langle \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$ a pokračujeme v redukovaní tohto iniciálneho sekventu.

5. Sekvent $\langle \neg\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$: Aplikujme kroky 13.2 až kým sa zadná formula $\mathcal{A}$ nemodifikuje na uzavretú atomickú formulu alebo nie je tvaru $\neg \mathcal{C}$.

   - Ak je to pravdivá uzavretá atomická formula, sme v cieľovej forme.

- Nech je to nepravdivá uzavretá atomická formula. Potom sme dostali sekvent $\langle \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1\rangle$. Využijeme 13.53, získame $\langle \Rightarrow \neg\mathcal{A}\rangle$, po redukcii podľa 13.23 máme sekvent $\langle \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1\rangle$. Takýto sekvent by sme v tomto prípade (prípad, keď zadná formula $\mathcal{A}$ sa po redukciách 13.2 zmení na nepravdivú uzav. at. formulu) získali už popísaným spôsobom redukovania logického iniciálneho sekventu $\langle \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\rangle$. Pokračujeme teda ako by sme redukovali tento iniciálny sekvent.
- Nech sa zadná formula sekventu $\langle \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\rangle$ modifikovala na formulu $\neg\mathcal{C}$. Získali sme sekvent $\langle \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{C}\rangle$. Pokračujeme krokom 13.23, dostaneme $\langle \neg\neg\mathcal{A}, \mathcal{C} \Rightarrow 0 = 1\rangle$, následne využijeme krok 13.53, to vedie k $\langle \mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{A}\rangle$, napokon aplikujeme 13.23, čím získame $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \Rightarrow 0 = 1\rangle$. K tomuto sekventu by v tomto prípade (prípad, keď sa zadná formula $\mathcal{A}$ modifikuje na formulu $\neg\mathcal{C}$) viedlo aj redukovanie logického iniciálneho sekventu $\langle \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\rangle$. Pokračujeme teda ako by sme redukovali tento iniciálny sekvent.

Pri redukciách iniciálnych sekventov je dôležité, že *v krokoch 13.5 sme formulu zasiahnutú redukciou odstránili, nikdy neostala stáť nezmenená.* Tým sme si zaistili, že po redukcii má sekvent menej logických spojok.

2.10 Nová definícia odvodenia

Kvôli zjednodušeniu definície pojmu „redukcia na odvodení“ pozmeníme definíciu odvodenia. Ukážeme, že každé odvodenie v starom zmysle sa dá transformovať na odvodenie v novom zmysle, teda, že týmto krokom nestratíme žiadne dokazateľné sekventy.

Odvodenie v novom zmysle bude opäť stromová štruktúra skladajúca sa zo sekventov. V týchto sa môžu nachádzať len logické spojky $\forall$, $\&$, $\neg$. *Nové matematické iniciálne sekventy* sú všetky pôvodné matematické iniciálne sekventy a všetky sekventy vzniknuté uplatnením konečne mnoho redukčných krokov na ne. Povolené *logické iniciálne sekventy* sú:

- $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}\rangle$
- $\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\rangle$
- $\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}\rangle$
- $\langle \mathcal{A},\ \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle$
- $\langle \forall x\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(t)\rangle$

- $\langle \mathcal{A},\ \neg\mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1\rangle$
- $\langle \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\rangle$

a všetky sekventy vzniknuté uplatnením konečne mnoho redukčných krokov na ne.

Z pôvodných pravidiel si ponecháme len $\forall$-*zavedenie* a *indukciu*. Pridáme si dve nové pravidlá, a to *vyvrátenie* a *reťazové pravidlo*. Vyvrátenie má tvar:

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1}{\Gamma \Rightarrow \neg\mathcal{A}}$$

2.11 Reťazové pravidlo

Vágne sa dá povedať, že reťazové pravidlo je zobecnené pravidlo rezu. Nasleduje formálna definícia:

Mám postupnosť sekventov $\langle \Gamma_1 \Rightarrow \mathcal{A}_1\rangle .. \langle \Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}_n\rangle$, $n \geq 1$. Z tejto postupnosti odvodím nový sekvent nasledujúcim spôsobom. Vyberiem si jeden sekvent z postupnosti, nech je to $\langle \Gamma_i \Rightarrow \mathcal{A}_i\rangle$, $i \leq n$. Nazvem ho *hlavná premisa*. Jeho zadnú formulu použijem ako zadnú formulu nového sekventu. Ak je $\mathcal{A}_i$ nepravdivá atomická uzavretá formula, môžem si namiesto nej zobrať inú nepravdivú atomickú uzavretú formulu. Predné formule nového sekventu vytvorím takto: Vezmem si všetky formule z $\Gamma_1 .. \Gamma_i$ a ľubovoľne ich usporiadam. U každej formule mám poznačené, z ktorého sekventu pochádza, napr. formula $\mathcal{B}_j$ je zo sekventu s indexom j. Teraz usporiadané formule zaradom preberám. Nech je na rade $\mathcal{B}_j$. Ak sa $\mathcal{B}_j$ už nachádza medzi prednými formulami nového sekventu, tak ju tam nezapíšem. Ak je $\mathcal{B}_j$ zadná formula nejakého sekventu s indexom $k < j$, tak ju zas nezapíšem. Inak $\mathcal{B}_j$ musím zapísať medzi predné formule nového sekventu. Napokon si medzi predné formule nového sekventu môžem pridať ďalšie ľubovoľné formule a môžem premenovávať viazané premenné.

Sekventy za hlavnou premisou síce nepoužijeme, nemôžeme ich ale škrtnúť, pretože pri redukcii celého odvodenia sa budú používať ordinálne čísla ich odvodení. Hlavnú premisu budeme pri aplikovaní reťazového pravidla dávať kvôli lepšej viditeľnosti do rámika.

Lemma 1. *Mám postupnosť sekventov* $\langle \Gamma_1 \Rightarrow \mathcal{A}_1\rangle .. \langle \Gamma_m \Rightarrow \mathcal{A}_m\rangle$, $m \geq 1$. *Za hlavnú premisu si vezmem sekvent* $\langle \Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}_n\rangle$, $n \leq m$. *Po použití reťazového pravidla dostanem výsledok* $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A}_n\rangle$. *Pravidlo aplikujem ešte raz, ale* *zvolím si inú hlavnú premisu* $\langle \Gamma_i \Rightarrow \mathcal{A}_i \rangle$*,* $i < n$*. V tomto prípade dostanem výsledok* $\langle \Gamma^\star \Rightarrow \mathcal{A}_i \rangle$*. Ak som v oboch prípadoch nevyužila možnosť, svojvoľne si na konci pridávať formule medzi predné formule výsledku, tak platí* $\Gamma^\star \subseteq \Gamma$*.*

Dôkaz. Prvé popísané použitie reťazového pravidla vyzerá takto:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \,..\, \Gamma_i \Rightarrow \mathcal{A}_i \,..\, \boxed{\Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}_n},\ \Gamma_{n+1} \Rightarrow \mathcal{A}_{n+1} \,..}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}_n}$$

Druhé popísané použitie reťazového pravidla vyzerá takto:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \,..\, \boxed{\Gamma_i \Rightarrow \mathcal{A}_i} \,..\, \Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}_n,\ \Gamma_{n+1} \Rightarrow \mathcal{A}_{n+1} \,..}{\Gamma^\star \Rightarrow \mathcal{A}_i}$$

Postupujme sporom. Nech existuje formula $\mathcal{B}$ taká, že $\mathcal{B} \in \Gamma^\star$ a súčasne $\mathcal{B} \notin \Gamma$. Keďže $\mathcal{B} \in \Gamma^\star$, tak musí platiť, že $\mathcal{B} \in \Gamma_1 \bigvee .. \bigvee \mathcal{B} \in \Gamma_i$. Z toho, že $\mathcal{B}$ nepatrí do Γ vieme, že sa muselo pri reťazovom pravidle s hlavnou premisou $\langle \Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}_n \rangle$ škrtnúť. To sa mohlo len vtedy, keď je $\mathcal{B}$ zadná formula nejakého sekventu s indexom menším ako je index sekventu, z ktorého predných formulí pochádza. To by sa $\mathcal{B}$ škrtalo aj pri druhom reťazovom pravidle s hlavnou premisou $\langle \Gamma_i \Rightarrow \mathcal{A}_i \rangle$ a nedostalo by sa medzi predné formule výsledku $\langle \Gamma^\star \Rightarrow \mathcal{A}_i \rangle$. Ale formula $\mathcal{B}$ do $\Gamma^\star$ z predpokladu patrí a to je spor. □

Chceme teraz ukázať, že odvodenie v starom zmysle sa dá vždy modifikovať na odvodenie v novom zmysle tak, aby výsledný sekvent ostal nezmenený, prípadne bol aspoň ekvivalentný s pôvodným výsledným sekventom.

Už sme popísali, ako z odvodenia v starom zmysle odstrániť spojky $\bigvee$, $\exists$, $\rightarrow$. Vezmime si odvodenie v starom zmysle upravené tak, aby neobsahovalo vymenované spojky. Logické a matematické iniciálne sekventy, ktoré sa v ňom nachádzajú, sú logické a matematické iniciálne sekventy aj v novom zmysle. Štrukturálne pravidlá sme schopní simulovať pomocou reťazového pravidla:

- *Výmena*: $\frac{\Gamma,\mathcal{A},\mathcal{B},\Delta \Rightarrow \mathcal{C}}{\Gamma,\mathcal{B},\mathcal{A},\Delta \Rightarrow \mathcal{C}}$, hlavnou premisou reťazového pravidla je jediná premisa výmeny a reťazové pravidlo nám dovolí zapísať predné formule vo výslednom sekvente v ľubovoľnom poradí.
- *Kontrakcia*: $\frac{\Gamma,\mathcal{A},\mathcal{A},\Delta \Rightarrow \mathcal{B}}{\Gamma,\mathcal{A},\Delta \Rightarrow \mathcal{B}}$, hlavnou premisou reťazového pravidla je jediná premisa kontrakcie a reťazové pravidlo nariaďuje vynechať formule, ktoré sa už medzi prednými formulami výsledku nachádzajú.

- *Oslabenie*: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{B}}{\Gamma,\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}$ sa zmení na reťazové pravidlo

$$\frac{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}\quad\boxed{\Gamma\Rightarrow\mathcal{B}}}{\Gamma,\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}.}$$

- *Premenovanie viazanej premennej*: $\frac{\Gamma,\forall x\mathcal{F}(x),\Delta\Rightarrow\mathcal{A}}{\Gamma,\forall y\mathcal{F}(y),\Delta\Rightarrow\mathcal{A}}$, hlavnou premisou reťazového pravidla je jediná premisa premenovania, predné formule zoradíme do výsledku v tom istom poradí ako je ich poradie v premise a napokon premenujeme viazané premenné. To reťazové pravidlo umožňuje.

Pomocou reťazového pravidla budeme simulovať aj pravidlá, ktoré v odvodení v novom zmysle povolené nie sú, ale v starom odvodení bez spojok $\bigvee$, $\exists$, $\to$ sa môžu vyskytnúť. Sú to pravidlá: &-zavedenie, &-odstránenie, $\forall$-odstránenie, $\neg$-zavedenie a $\neg$-odstránenie.

- &-zavedenie: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\quad\Theta\Rightarrow\mathcal{B}}{\Gamma,\Theta\Rightarrow\mathcal{A}\&\mathcal{B}}\quad\sim\!\succ\quad\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\quad\Theta\Rightarrow\mathcal{B}\quad\overline{|\mathcal{A},\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\&\mathcal{B}|}}{\Gamma,\Theta\Rightarrow\mathcal{A}\&\mathcal{B}}$
- &-odstránenie: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\&\mathcal{B}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}}\quad\sim\!\succ\quad\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}\&\mathcal{B}\quad\overline{|\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}|}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}}$
- $\forall$-odstránenie: $\frac{\Gamma\Rightarrow\forall x\mathcal{F}(x)}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(t)}\quad\sim\!\succ\quad\frac{\Gamma\Rightarrow\forall x\mathcal{F}(x)\quad\overline{|\forall x\mathcal{F}(x)\Rightarrow\mathcal{F}(t)|}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(t)}$
- $\neg$-zavedenie: $\frac{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\mathcal{B}\quad\mathcal{A},\Delta\Rightarrow\neg\mathcal{B}}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\neg\mathcal{A}}\quad\sim\!\succ\quad\frac{\dfrac{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\mathcal{B}\quad\mathcal{A},\Delta\Rightarrow\neg\mathcal{B}\quad\overline{|\mathcal{B},\neg\mathcal{B}\Rightarrow 0=1|}}{\mathcal{A},\Gamma,\Delta\Rightarrow 0=1}}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\neg\mathcal{A}}$
- $\neg$-odstránenie: $\frac{\Gamma\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}}\quad\sim\!\succ\quad\frac{\Gamma\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A}\quad\overline{|\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}|}}{\Gamma\Rightarrow\mathcal{A}}$

Hlavné premisy reťazových pravidiel sú logické iniciálne sekventy v novom zmysle. Pri simulácii pravidla $\neg$-zavedenie sme v poslednom kroku využili pravidlo „vyvrátenie“.

V nasledujúcom texte budeme pri dôkaze bezespornosti používať odvodenie v novom zmysle.

2.12 Ordinálne čísla

Chceme ukázať, že ak máme odvodenie a opakovane na ňom budeme robiť redukčné kroky, tak po konečne mnoho týchto krokoch dostaneme odvodenie, ktorého posledný sekvent je v cieľovej forme. Na to potrebujeme ukázať, že redukčný krok odvodenia ho v istom zmysle zjednoduší. Každému odvodeniu bude priradené ordinálne číslo, ktoré bude reprezentovať mieru komplikovanosti daného odvodenia. Dá sa ukázať, že každý redukčný krok na odvodení jeho ordinálne číslo zmenší. Ordinálne čísla sú dobre usporiadané, a teda nemôžu klesať donekonečna. Odvodenie s číslom, ktoré sa už nedá zmenšiť, bude mať výsledný sekvent v cieľovej forme. Keby tento v cieľovej forme nebol, bol by pre toto odvodenie definovaný ďalší redukčný krok, po ktorého vykonaní by sa číslo opäť zmenšilo. To by bol spor.

Definícia 3. *Ordinálne čísla budú reprezentované vybranými reálnymi číslami, kde časť pred desatinnou čiarkou budeme nazýva* numerus *a časť za desatinnou čiarkou budeme nazývať* mantisa. *Mantisa* m_1 *je menšia ako mantisa* m_2*, keď pre čísla* $0, m_1$ *a* $0, m_2$ *platí:* $0, m_1 < 0, m_2$.

- *Ordinálne čísla s numerusom* 0 *sú:* $0,1$; $0,11$; $0,111\ ..\ 0,2$*; čiže všetky čísla, ktoré majú v mantise iba konečne mnoho jedničiek a ešte* $0,2$.
- *Nech už sú definované čísla s numerusom* ϱ*, chceme definova čísla s numerusom* $\varrho+1$. *Urobíme to pomocou čísel s numerusom* ϱ. *Vezmime si ľubovoľný konečný počet* ≥ 1 navzájom rôznych *čísel s numerusom* ϱ. *Ich mantisy usporiadajme podľa veľkosti a to od najväčšej po najmenšiu. Tj.* $m_1 > m_2 > m_3 > .. > m_k$.

Číslo s numerusom $\varrho+1$ *potom vznikne takto:*

$$\varrho+1, m_1 \underbrace{0\,..\,0}_{\substack{\textit{Medzi každé dve}\\ \textit{mantisy zapíšeme}\\ \varrho+1\ \textit{núl.}}} m_2\ 0\,..\,0\ m_3\,..\,m_k$$

Nuly na koniec mantisy nepridávame. Hoci prakticky by sa veľkosť čísel nezmenila, chceme ich mať definované jednoznačne. Ak máme dané číslo s numerusom $\varrho+1$, dá sa jednoznačne zistiť, z akých čísel s numerusom ϱ vzniklo.

Všimnime si, že v mantisách sú povolené len číslice 0, 1, 2. Platí to preto, lebo čísla s numerusom 0 obsahujú v mantisách len 1, 2 a ostatné čísla vzniknú z nich pomocou spájania nulami. Číslice 1 a 2 v mantisách pri sebe nikdy nestoja. V mantisách čísel s numerusom 0 pri sebe nestoja a v ďalších číslach budú vždy oddelené úsekom núl.

Predpokladáme štandardné usporiadanie reálnych čísel.

Príklady:

- Číslo $1,1102$ nie je správne vytvorené, pretože sa síce skladá z korektných čísel $0,11$ a $0,2$, ale pri tvorení nového čísla neboli ich mantisy zoradené od najväčšej po najmenšiu.
- Číslo $1,202$ nie je správne vytvorené, pretože sa skladá z dvoch rovnakých čísel $0,2$, čo nie je povolené.
- Číslo $1,20011$ nie je správne vytvorené, pretože sa síce skladá z korektných čísel $0,2$ a $0,11$, ale maximálny úsek za sebou idúcich núl v mantise nového čísla nemôže by väčší ako hodnota numerusu. Tento úsek môže byť menší ako hodnota numerusu, ak sme nové číslo tvorili len z jedného čísla. Preto je napr. číslo $2,201$ korektne vytvorené. Vzniklo z čísla $1,201$, ktoré vzniklo z čísel $0,2$ a $0,1$.
- Číslo $3,\underline{201111010020011101}000\underline{11}$ je správne vytvorené. Vzniklo z čísel $2,\underline{20111101}00\underline{2}00\underline{11101}$ a $2,11$. Prvé z nich vzniklo z $1,20111101$ a $1,2$ a $1,11101$, druhé vzniklo z $1,11$.

2.13 Dobré usporiadanie ordinálnych čísel

Nech α je ordinálne číslo s numerusom $\varrho \geq 0$. Definujme systém $\sigma(\alpha)$, prislúchajúci číslu α:

$$\alpha \rightsquigarrow \sigma(\alpha),$$

kde $\sigma(\alpha)$ je systém čísel s numerusom $\varrho + 1$, pri ktorých tvorení sa využije ako najväčšie číslo s numerusom ϱ práve číslo α. Nech $\alpha = (\varrho, m)$, potom

$$\sigma(\alpha) = \{(\varrho + 1, \overline{m}) \mid \overline{m} = m \ \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\varrho+1 \text{ núl}} \,.\,.\}$$

Dôležité je, že mantisa $\overline{m}$ začína mantisou m. Ostatné mantisy, z ktorých sa skladá, môžu byť ľubovoľné (za predpokladu, že vznikne korektné ordinálne číslo). Oddelené sú vždy $\varrho + 1$ nulami. Každé číslo s numerusom $\varrho + 1$ patrí do nejakého takéhoto systému, ktorý je pre dané číslo jednoznačne určený.

Lemma 2. *Nech α_1, α_2 sú dve ordinálne čísla. Potom platí:*

$$\alpha_1 < \alpha_2 \ \rightarrow \ \forall \beta_1 \in \sigma(\alpha_1) \ \forall \beta_2 \in \sigma(\alpha_2) \ (\beta_1 < \beta_2).$$

Dôkaz. Keď α_1 je menšia ako α_2, tak mohli nastať nasledujúce dve možnosti.

- Majú rovnaký numerus, ale α_1 má menšiu mantisu ako α_2. Potom aj β_1 a β_2 majú rovnaký numerus, a to o jedna väčší, ako majú α_1, α_2, ale β_1 začína menšou mantisou ako β_2, a preto je menšia.
- Číslo α_1 má menší numerus ako α_2. Potom i číslo β_1 má menší numerus ako číslo β_2.

Z toho plynie, že usporiadanie ordinálnych čísel sa prenáša na usporiadanie systémov σ. ☐

O usporiadaní čísel s numerusom $\varrho + 1$ v rámci systému $\sigma(\alpha)$ platí, že najmenšie číslo tam je $\alpha + 1$. Každé ďalšie číslo vznikne z $\alpha + 1$ tak, že za $\alpha + 1$ napíšeme $\varrho + 1$ núl, a potom mantisu nejakého čísla s numerusom $\varrho + 1$, ktoré je menšie ako $\alpha + 1$. Ak by sme predpokladali, že čísla s numerusom $\varrho + 1$ menšie ako $\alpha + 1$ sú už usporiadané, tak ich usporiadanie sa prenesie i na čísla v systéme $\sigma(\alpha)$.

Veta 1. *Ordinálne čísla sú dobre usporiadané.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej úvahy dostávame návod, ako ordinálne čísla usporiadať. Najmenšie číslo je $0,1$. Za ním položíme všetky ostatné čísla s numerusom 0, tj. $0,11$; $0,111$ .. $0,2$. Vidíme, že čísla s numerusom 0 sú dobre usporiadané. Nech sú už čísla s numerusom ϱ dobre usporiadané. Usporiadajme čísla s numerusom $\varrho + 1$. Každé číslo s numerusom $\varrho + 1$ začína svoju mantisu nejakou mantisou čísla s numerusom ϱ. Preto vieme všetky čísla s numerusom $\varrho + 1$ rozdeliť do systémov $\sigma(\alpha)$, kde α má numerus ϱ. Čísla s numerusom ϱ máme z indukčného predpokladu dobre usporiadané. Preto najprv dobre usporiadajme systémy $\sigma(\alpha)$ podľa čísel α, α má numerus ϱ:

$$\sigma(\varrho, 1) \quad \sigma(\alpha_1) \quad \sigma(\alpha_2) \,..\, \sigma(\alpha_i) \,..\, \sigma(\alpha_n) \,..$$

Platí $\sigma(\varrho, 1) = \{\varrho + 1, 1\}$, tj. systém obsahuje len $\varrho, 1 \ + \ 1$, pretože mantisa menšia ako 1 už neexistuje. Predpokladajme teraz, že všetky čísla v systémoch stojacich pred systémom $\sigma(\alpha_i)$ sú už dobre usporiadané. Ich zjednotenie je tiež dobre usporiadané. Môžeme si dovoliť to predpokladať na základe Lemmy 2.

Čísla v systéme $\sigma(\alpha_i)$ usporiadajme nasledovne. Najmenšie číslo tam je $\alpha_i + 1$. Ďalej sú tam čísla s numerusom $\varrho + 1$, ktoré začínajú mantisou ako má α_i, za ňou je $\varrho + 1$ núl a mantisa čísla s numerusom $\varrho + 1$, ktoré je menšie ako $\alpha_i + 1$. Tieto čísla sú z predchádzajúcich systémov, a teda už dobre usporiadané. Toto usporiadanie prenesieme na čísla zo systému $\sigma(\alpha_i)$. Takto vieme dobre usporiadať všetky čísla s numerusom $\varrho + 1$.

Preformulujme teraz dôkaz o dobrom usporiadaní do štandardnej podoby: vezmime si neprázdnu množinu ordinálnych čísel a hľadajme v nej najmenší prvok.

Nech $\mathcal{X} \neq 0$ je množina ordinálnych čísel s numerusom 0. Najmenší prvok v $\mathcal{X}$ je to číslo, ktoré v mantise obsahuje najmenší nenulový počet jedničiek. Ak tam také nie je, tak najmenšie je $0, 2$. O najmenšom počte jedničiek sa môžeme baviť, pretože počty jedničiek sú prirodzené čísla.

Vezmime teraz $\mathcal{X} \neq 0$ množinu ordinálnych čísel s numerusmi 0 až $\varrho + 1$ a predpokladajme, že z $\mathcal{Y} \neq 0$ množiny ordinálnych čísel s numerusmi 0 až ϱ už vieme vybrať najmenší prvok. Hľadáme najmenší prvok v $\mathcal{X}$. Všetky čísla s numerusmi 0 až ϱ označme Ω_ϱ. Ďalej označme $\mathcal{Z} = \Omega_\varrho \bigcap \mathcal{X}$. Ak $\mathcal{Z} \neq 0$, tak najmenší prvok zo $\mathcal{Z}$ je najmenší aj v $\mathcal{X}$. Ak $\mathcal{Z} = 0$, tak množina $\mathcal{X}$ obsahuje len čísla s numerusom $\varrho + 1$.

Predpokladajme teda, že $\mathcal{X}$ obsahuje len čísla s numerusom $\varrho + 1$. Roztrieďme $\mathcal{X}$ do systémov $\sigma(\alpha)$, α má numerus ϱ. Vyberme si to najmenšie α, že $\sigma(\alpha) \bigcap \mathcal{X} \neq 0$. To môžeme, pretože čísla α majú numerus ϱ a podľa indukčného predpokladu z nich vieme vybrať najmenší prvok. Nech je to α_i. Teraz pokračujme hľadaním najmenšieho prvku v systéme $\mathcal{X}' = \sigma(\alpha_i) \bigcap \mathcal{X}$.

V systéme $\sigma(\alpha_i)$ sú prvky s numerusom $\varrho + 1$, ktoré začínajú rovnakou mantisou, ako má číslo α_i, za ňou je $\varrho + 1$ núl a mantisa čísla s numerusom $\varrho + 1$, ktoré je menšie ako $\alpha_i + 1$. Vezmime čísla zo systému $\mathcal{X}'$, odstráňme zo začiatku ich mantisy mantisu čísla α_i a nasledujúcich $\varrho + 1$ núl (ak tam sú). Zvyšky týchto mantís sú tiež korektné mantisy pre čísla s numerusom $\varrho + 1$, takže z nich môžeme tieto čísla vyrobiť a ďalej pracovať s nimi. Množinu čísel s takto upravenými mantisami nazvyme $\mathcal{A}$. Ak sa pri vyššie popísanej úprave mantís niektorá mantisa „minula“, tak pôvodné číslo, ktorého úpravy k nej viedli, vezmeme za najmenšie hľadané číslo v systéme $\mathcal{X}$. Ak sa žiadna mantisa „neminula“, roztriedime čísla z množiny $\mathcal{A}$ opäť do systémov $\sigma(\alpha)$, α má numerus ϱ a pokračujeme spôsobom opísaným v minulom odstavci až kým sa niektorá mantisa „neminie“. To musí raz nastať, pretože dĺžka mantís skúmaných čísel je konečná a skracuje sa.

Je možné, že pri postupe podľa tohto návodu sa „minú“ dve čísla súčasne? Keby sa minuli dve čísla súčasne, znamenalo by to, že ich mantisy končili rovnakým úsekom a aj všetky úseky, ktoré sme z nich odstránili predtým boli identické, pretože sme vždy upravovali len čísla z jedného zvoleného systému $\sigma(\alpha)$, do ktorého sa dostali na základe toho, že ich mantisy začínali mantisou čísla α (teda rovnako). Preto je číslo, ktoré vyberieme za najmenšie číslo zo systému $\mathcal{X}$ dané jednoznačne.

Ukážme si, že číslo nájdené týmto postupom je skutočne najmenšie číslo z $\mathcal{X}$. Nech najmenšie číslo nájdené algoritmom je α a nech v $\mathcal{X}$ existuje číslo β, ktoré je ostro menšie: $\beta < \alpha$. Obe čísla majú rovnaký numerus $\varrho+1$. Rozlíšme dva prípady:

- Prvá číslica, na ktorej sa ich mantisy líšia je v β menšia ako v α. Táto číslica sa môže nachádzať v mantisách, z ktorých je α a β zložená $(b < a)$:

  $$\begin{aligned}\alpha &= \varrho+1, \gamma_1 0..0\gamma_2 0..0 \;..\; 0..0\gamma_n a \gamma_{n+1} 0..0 \;..\\ \beta &= \varrho+1, \gamma_1 0..0\gamma_2 0..0 \;..\; 0..0\gamma_n b \gamma_{n+1}^{'} 0..0 \;..\end{aligned}$$

  alebo je táto číslica v nejakej mantise, z ktorej je α zložená a v β je to číslica 0 z niektorého úseku núl dĺžky $\varrho+1$ (v γ_{n+1} môže byť maximálne ϱ núl idúcich za sebou):

  $$\begin{aligned}\alpha &= \varrho+1, \gamma_1 0..0\gamma_2 0..0 \;..\; 0..0\gamma_n \gamma_{n+1} 0..0 \;..\\ \beta &= \varrho+1, \gamma_1 0..0\gamma_2 0..0 \;..\; 0..0\gamma_n 0..0 \;..\end{aligned}$$

  Vidíme, že v oboch prípadoch sa pri niektorom delení čísel do systémov σ dostane (zvyšok z čísla) α do istého systému $\sigma(\alpha_1)$ a (zvyšok z čísla) β sa dostane do $\sigma(\beta_1)$, kde $\beta_1 < \alpha_1$. To je spor s tým, že algoritmus našiel α ako najmenšie číslo.

- Mantisa čísla β tvorí počiatočný úsek mantisy čísla α. Potom čísla α a β vyzerajú takto:

  $$\begin{aligned}\alpha &= \varrho+1, \gamma_1 0..0\gamma_2 0..0 \;..\; 0..0\gamma_n 0..0 \;..\\ \beta &= \varrho+1, \gamma_1 0..0\gamma_2 0..0 \;..\; 0..0\gamma_n\end{aligned}$$

  Vidíme, že v tomto prípade sa β „minie“ skôr, čo je zas v spore s tým, že algoritmus našiel α ako najmenšie číslo.

Druhá možnosť, ako môžu α a β vyzerať je:

$$\begin{aligned}\alpha &= \varrho+1,\gamma_1 0..0\gamma_2 0..0\ \ ..\ \ 0..0\gamma_n\gamma_{n+1}0..0\ ..\\ \beta &= \varrho+1,\gamma_1 0..0\gamma_2 0..0\ \ ..\ \ 0..0\gamma_n\end{aligned}$$

Potom sa pri istom delení do systémov σ (zvyšok z čísla) α dostane do systému $\sigma(\alpha_1)$ a (zvyšok z čísla) β sa dostane do systému $\sigma(\beta_1)$, kde $\beta_1 < \alpha_1$. To je opäť spor s tým, že algoritmus našiel α ako najmenšie číslo. ☐

Toto usporiadanie ordinálnych čísel sa zhoduje so štandardným usporiadaním na reálnych číslach.

Gentzen si definoval vlastné ordinálne čísla, aby sa vyhol ordinálnym číslam z teórie množín, ktorá sa mu zdala príliš komplexná, obsahovala paradoxy a rôzne „pochybné“ metódy dôkazu.

2.14 Vzťah Gentzenových ordinálnych čísel a ordinálnych čísel z teórie množín

Ukážme si pre zaujímavosť, že ordinálne čísla s numerusom ϱ majú typ usporiadania ako štandardné ordinálne čísla z teórie množín, a to konkrétne typ 2^α, kde α je typ čísel s numerusom $\varrho - 1$:

$$\begin{array}{lcl}\text{numerus } 0 & \rightsquigarrow & \text{typ } \omega+1\\ \text{numerus } 1 & \rightsquigarrow & \text{typ } 2^{\omega+1}=\omega+\omega\\ \text{numerus } 2 & \rightsquigarrow & \text{typ } 2^{\omega+\omega}=\omega\cdot\omega\\ \text{numerus } 3 & \rightsquigarrow & \text{typ } 2^{\omega\cdot\omega}=\omega^\omega\\ \text{numerus } 4 & \rightsquigarrow & \text{typ } 2^{(\omega^\omega)}=\omega^{(\omega^\omega)}\\ & .. & \end{array}$$

Suprémum tejto postupnosti je ε_0. Tvrdenie bez dôkazu uvádza Gentzen v článku [Gen36] na str. 555. Dôkaz bol vypracovaný za účelom predloženej práce.

Dôkaz. Čísla s numerusom 0 vieme zobraziť na $\omega + 1$ týmto spôsobom:

$$\begin{array}{cccccc} 0,1 & 0,11 & 0,111 & 0,1111 & & 0,2\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & .. & \downarrow\\ 0 & 1 & 2 & 3 & & \omega\end{array}$$

Toto usporiadanie zodpovedá typu $\omega+1$, lebo táto obsahuje všetky prirodzené čísla a aj ich limitu ω.

Tvrdíme, že čísla s numerusom 1 sú ordinálneho typu $\omega + \omega$. Aby sme to ukázali, tak si tieto čísla najprv zostrojíme, a to pomocou systémov σ:

0. $\sigma(0,1) = \{1,1\}$

1. $\sigma(0,11) = \{1,11 \mid 1,1101\}$

2. $\sigma(0,111) = \{1,111 \mid 1,11101 \mid 1,111011 \mid 1,11101101\}$

3. $\sigma(0,1111) = \{1,1111 \mid 1,111101 \mid 1,1111011 \mid 1,111101101 \mid 1,11110111 \mid$

$1,1111011101 \mid 1,11110111011 \mid 1,1111011101101\}$

. .

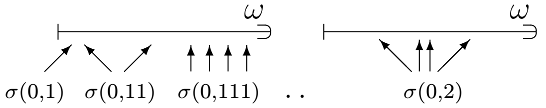
ω-tý $\sigma(0.2) = \{1,2 \mid 1,201 \mid 1,2011 \mid 1,201101 \mid 1,20111 \mid 1,2011101 \mid 1,20111011 \mid$

$1,2011101101 \mid 1,201111 \mid 1,20111101 \mid ..\}$

Indukciou podľa poradového čísla systému ukážeme, že všetky systémy okrem $\sigma(0,2)$ majú konečne mnoho prvkov, a to 2^n, kde n je poradové číslo daného systému:

Platí $|\sigma(0,1)| = 1 = 2^0$. Nech systémy s poradovým číslom $j < i < \omega$ majú 2^j prvkov. Vyrátajme, koľko prvkov má systém s poradovým číslom i. Najmenší prvok v ňom je novovytvorený, zvyšné vznikli na základe prvkov predchádzajúcich systémov, za jeden prvok z predchádzajúceho systému jeden nový prvok. Systém s poradovým číslom i má teda $1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + .. + 2^{i-1} = 1 + \frac{2^i-1}{2-1} \cdot 1 = 1 + 2^i - 1 = 2^i$ prvkov.

Ordinálny typ usporiadania prvkov v týchto konečných systémoch spoločne je ω. Z toho, ako je vytvorený systém $\sigma(0,2)$ vidíme, že jeho typ je $1+\omega$ čo je ω. Usporiadanie všetkých prvkov s numerusom 1 je typu $\omega + \omega$:



Platí: $2^{\omega+1} = 2^\omega \cdot 2 = \sup\{2^n; n < \omega\} \cdot 2 = \omega \cdot 2 = \omega + \omega$. Keď γ je typ prvkov s numerusom 0 a δ je typ prvkov s numerusom 1, tak naozaj platí $2^\gamma = \delta$. Pokračujme indukciou. Nech systém s numerusom ϱ má typ α. Chceme ukázať, že systém s numerusom $\varrho + 1$ má typ 2^α.

Zo systému čísel s numerusom ϱ vznikne systém čísel s numerusom $\varrho + 1$ ako zjednotenie systémov σ:

$$\sigma(\varrho, m_0)\ \sigma(\varrho, m_1)\ \sigma(\varrho, m_2) \mathinner{..} \sigma(\varrho, m_n) \mathinner{..} \sigma(\varrho, m_\omega) \mathinner{..}$$

Systémy σ sú usporiadané ako systém čísel s numerusom ϱ, tj. ich usporiadanie má typ α. Ukážme teraz, že σ-systém s poradovým číslom β je usporiadaný ako 2^β. Pre poradové čísla 0, 1, .. ω sme to už ukázali. Vezmime si $\beta > \omega$. Nech pre σ-systémy s menším poradovým číslom ako β to už platí. Poradové číslo β je buď izolované alebo limitné.

- Nech je β izolované. Potom $\exists \gamma$, že platí $\beta = \gamma + 1$. Z indukčného predpokladu máme, že prvky v systéme s poradovým číslom γ majú usporiadanie 2^γ. Počiatočný úsek prvkov zo systému s poradovým číslom β je tiež usporiadaný ako 2^γ, pretože vznikol z tých istých prvkov ako systém s poradovým číslom γ. Za týmto úsekom sa nachádzajú prvky, ktoré vznikli z prvkov v samotnom systéme s poradovým číslom γ. Celkovo dostávame, že systém $\sigma(\varrho, m_\beta)$ má usporiadanie $2^\gamma + 2^\gamma = 2^\gamma \cdot 2 = 2^{\gamma+1} = 2^\beta$.

- Nech je β limitné. Vieme, že pre $\forall \gamma < \beta$ platí, že usporiadanie prvkov v systéme s poradovým číslom γ je 2^γ. Typ usporiadania prvkov v systéme s poradovým číslom β je ten istý typ, ako majú všetky systémy s menším poradovým číslom, keď sa uložia za sebou. Z toho, ako je každý nasledujúci systém konštruovaný (má usporiadanie ako typ usporiadania predchádzajúceho systému položený dvakrát za sebou, čo sa rovná typu všetkých prechádzajúcich systémov uložených za sebou) vidíme, že typ usporiadania prvkov v systéme s poradovým číslom β je suprémum z ordinálov, ktoré predstavujú typy usporiadaní jemu predchádzajúcich systémov: $\sup\{2^\gamma; \gamma < \beta\} = 2^\beta$. Rovnosť je zrejmá z definície mocnenia limitných ordinálnych čísel.

Vytvorme si teraz imaginárny σ-systém, ktorý bude predstavovať systém s najmenším zatiaľ nevyužitým poradovým číslom. Toto číslo je α, pretože typ usporiadania σ-systémov vytvárajúcich čísla s numerusom $\varrho + 1$ je α, a teda ľubovoľné $\gamma \in \alpha$ bolo využité. Imaginárny systém bude vytvorený tak, ako každý systém pred ním, tj. bude obsahovať usporiadané prvky všetkých systémov, ktoré mu predchádzajú. V tomto prípade všetky prvky s numerusom $\varrho + 1$. Z dokázaného tvrdenia plynie, že prvky v ňom majú typ 2^α, kde α je poradové číslo imaginárneho systému. Všimnime si ale, že α je aj typ usporiadania čísel s numerusom ϱ. Z toho plynie záver, ktorý sme chceli ukázať. □

2.15 Priradenie ordinálnych čísel odvodeniam

Mantisa čísla priradeného odvodeniu bude vo všeobecnosti vždy vyzerať nasledovne. V mantise za sebou nasleduje maximálne $\nu > 1$ núl. Tento počet budeme nazývať *stupeň mantisy*. Všetky časti v mantise rozdelené postupnosťou ν núl začínajú cifrou 2, okrem poslednej časti, tá celá pozostáva z jedničiek:

$$\varrho, \underbrace{2\,..}\underbrace{0\,..\,0}_{\nu}\underbrace{2\,..}\underbrace{0\,..\,0}_{\nu} \;\cdot\cdot\; \underbrace{0\,..\,0}_{\nu}\;\underbrace{1\,..\,1}_{\substack{\text{posledná časť}\\\text{z jedničiek}}}$$

Platí, že numerus ϱ je väčší, nanajvýš rovný ako stupeň mantisy ν:

$$\varrho \geq \nu$$

Z definície ordinálnych čísel je zrejmé, že numerus môže byť rovný stupňu mantisy. Väčší ako stupeň mantisy môže byť tiež, a to v prípade, keď sme číslo s numerusom ϱ tvorili len z jedného čísla s numerusom $\varrho - 1$. Vtedy sme mantisy od seba nedelili ϱ nulami, pretože sme mali mantisu len jednu.

Je isté, že v mantise bude úsek núl dĺžky ν aspoň jeden, a teda nebude celá tvorená len svojou „záverečnou“ časťou zloženou z jedničiek. Ordinálne číslo pre iniciálne sekventy je tak nadefinované a mantisy ordinálnych čísel odvodení, ktorých výsledný sekvent vznikol nejakým povoleným odvodzovacím pravidlom, vznikli spájaním mantís čísel odvodení premís, prípadne sa k mantise odvodenia premisy niečo pridalo alebo je ich štruktúra pevne určená s tým, že začínajú číslicou 2. Vidíme, že číslo s numerusom 0 žiadne odvodenie nikdy nedostane, pretože stupeň mantisy každého odvodenia je aspoň 2. Z tohto istého dôvodu nedostane žiadne odvodenie ani číslo s numerusom 1.

Pristúpme k priraďovaniu čísel pre odvodenia. Nech je výsledný sekvent odvodenia *iniciálny* sekvent. Odvodenie dostane číslo $2, 2001\,..\,1$, kde počet jedničiek v poslednom úseku je o jedna väčší ako počet logických spojok v iniciálnom sekvente. Toto číslo spĺňa obecnú podmienku a je to korektné ordinálne číslo, vzniklo z $1, 2$ a $1, 1\,..\,1$. Tieto dve vznikli z $0, 2$ a $0, 1\,..\,1$.

Nech výsledný sekvent vznikol pravidlom *vyvrátenie* $\frac{\Gamma,\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}{\Gamma\Rightarrow\neg\mathcal{A}}$ alebo pravidlom $\forall$-*zavedenie* $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(a)}{\Gamma\Rightarrow\forall x\mathcal{F}(x)}$, kde a je eigenvariable. Číslo pre toto odvodenie vytvoríme z čísla α, ktoré je priradené odvodeniu premisy spomínaných pravidiel, a to pridaním jedničky na koniec jeho mantisy.

Príklad:

$$\begin{array}{cc} \mathcal{A},\mathcal{B}\Rightarrow 0=1 & 2{,}20011 \\ \cline{1-1} \mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B} & 2{,}200111 \end{array}$$

Intuitívne by sme mohli povedať, že pridaná jednička predstavuje logickú spojku, ktorá po použití pravidla pribudla. Číslo celého odvodenia spĺňa obecnú podmienku, pretože číslo α ju spĺňalo. Tiež to je korektné ordinálne číslo: Číslo α bolo korektné z predpokladu. Každá postupnosť núl v mantise ju delí na mantisy čísel s menším numerusom. Takže aj postupnosť jedničiek $1\,..\,1$, ktorá tvorí záverečnú časť, je mantisa nejakého čísla. Nemusíme skúmať akého čísla, pretože takúto mantisu, či už je tam o jednu jedničku viac alebo menej, má povolené číslo s ľubovoľným numerusom.

Nech výsledný sekvent vznikol použitím *reťazového* pravidla. Z indukčného predpokladu majú odvodenia premís priradené svoje ordinálne čísla, ktoré sú korektné. Vezmime si mantisy ordinálnych čísel všetkých odvodení premís. Vezmime si mantisu spomedzi nich, ktorá má maximálny stupeň, nech je to ν. Ak majú odvodenia niektorých premís rovnaké mantisy, musíme tieto odlíšiť.

K rovnakým mantisám napojíme postupne dozadu:

- $\nu + 1$ núl a 1
- $\nu + 1$ núl a 11
- $\nu + 1$ núl a 111
- . .

Mantisy čísel odvodení premís sú teraz rôzne, nemusia so svojím numerusom tvoriť korektné ordinálne číslo, ale to neprekáža. Sú to korektné mantisy. Stupeň každej upravenej mantisy je presne $\nu + 1$. Úsek núl dlhý $\nu + 1$ sa tam vyskytuje práve raz, takže je tvorená z dvoch menších mantís. Nestane sa, že mantisa z prednej časti by bola menšia ako mantisa zo zadnej časti (tj. úsek $1\,..\,1$), pretože predná časť podľa obecnej podmienky začína číslicou 2.

Mantisy čísel všetkých odvodení premís (v prípade potreby upravených, aby boli po dvoch rôzne) zoraďme od najväčšej po najmenšiu. Vložme medzi ne $\nu + 2$ núl, na koniec dajme ďalších $\nu + 2$ núl a číslo 1:

$$\underbrace{m_1 > m_2 > m_3 \,..\, > m_k}_{\text{upravené mantisy premís, aby boli rôzne a usporiadané od najväčšej po najmenšiu}}$$

Mantisa ordinálneho čísla celého odvodenia:

$$m_1 \underbrace{0\,..\,0}_{\nu+2} m_2 \underbrace{0\,..\,0}_{\nu+2} \,..\, m_k \underbrace{0\,..\,0}_{\nu+2} 1$$

Definujme teraz numerus ϱ ordinálneho čísla pre celé odvodenie. Budeme potrebovať pojem *nadbytok* ordinálneho čísla, čo definujeme ako rozdiel numerusu a stupňa mantisy daného čísla. Niekedy budeme hovoriť o nadbytku numerusu, vždy sa to bude vzťahovať k numerusu a mantise čísla, o ktorom je reč. Numerus ϱ bude *najmenšie prirodzené číslo* také, že spĺňa tieto tri podmienky:

- $\varrho \geq \nu + 2$, kde $\nu + 2$ je stupeň jeho mantisy
- Vezmime si nadbytky všetkých čísel odvodení premís. Vezmime si najväčší z nich, nech je to r_i. Potom numerus ϱ musí byť taký, aby nadbytok čísla celého odvodenia bol aspoň $r_i - 2$. Tj. $\varrho - (\nu + 2) \geq r_i - 2$. Tj. $\varrho \geq \nu + r_i$.
- Vezmime si všetky zadné formule premís nachádzajúcich sa pred hlavnou premisou reťazového pravidla. Vezmime si tú, ktorá má najviac logických spojok, nech daný počet je y. Potom numerus ϱ musí byť taký, aby nadbytok čísla celého odvodenia bol aspoň $2y$. Tj. $\varrho - (\nu + 2) \geq 2y$. Tj. $\varrho \geq \nu + 2(1 + y)$.

Mantisa spĺňa obecnú podmienku, lebo $\nu + 2 > 1$, každá časť oddelená maximálnym počtom núl začína číslom 2, pretože predtým boli tieto časti samostatné mantisy. Posledná čas sú samé jedničky. Je to korektné ordinálne číslo: numerus je väčší/rovný ako stupeň mantisy. Mantisy použité pri skladaní sú mantisy menších čísel, resp. dajú sa z nich vyrobiť čísla s numerusom $\nu + 1$, pretože stupeň každej je maximálne $\nu + 1$. Tiež sme zaistili, že sú po dvoch rôzne a usporiadané od najväčšej po najmenšiu.

Nech výsledný sekvent vznikol použitím pravidla *indukcie*: $\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(0)\quad\mathcal{F}(a),\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(a+1)}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(t)}$, kde a je eigenvariable. Mantisa celého odvodenia bude typu:

$$20\underbrace{1\,.\,.\,1}\underbrace{0\,.\,.\,0}1$$

Vezmime väčšiu mantisu z odvodenia premís. Ak táto začína 200, tak sem dáme jednu jedničku. Ak začína 201 . . 1, tak sem dáme o jednu jedničku viac, ako obsahuje tento súvislý úsek jedničiek. Nemôže začínať 202, pretože mantisa musí byť postavená z nazvájom rôznych mantís, nemôže začínať $20x$, kde $x \geq 3$, pretože výskyt číslic väčších ako 3 nie je v mantisách povolený, tiež nemôže začínať 21, pretože číslice 2 a 1 v mantisách pri sebe nestoja.

Nech ν je maximálny stupeň mantís z čísel odvodení premís. Sem si zapíšeme $\nu + 2$ núl. Z obecnej podmienky vieme, že $\nu > 1$, preto i $\nu + 2 > 1$. Vidíme teda, že $\nu + 2$ je stupeň novej mantisy. Prvý úsek začína dvojkou a na konci sú jedničky, preto táto spĺňa obecnú podmienku.

Numerus ϱ bude to najmenšie prirodzené číslo, ktoré spĺňa nasledujúce tri podmienky:

- $\varrho \geq \nu + 2$
- Nadbytok čísla musí byť aspoň $r_i - 2$, kde r_i je maximálny nadbytok z čísel odvodení premís.
- Nech počet logických spojok vo formuli $\mathcal{F}(0)$ je y. Potom nadbytok čísla celého odvodenia musí byť aspoň $2y$.

Takto vznikne korektné ordinálne číslo: Numerus má hodnotu aspoň takú, ako je stupeň mantisy. Časť mantisy naľavo od sekvencie núl, ktorých počet je stupeň mantisy, teda časť 201 . . 1, je mantisa od numerusu 1. Časť mantisy napravo od tej istej sekvencie núl, teda úsek 1, je mantisa od numerusu 0. Numerus celého čísla je najmenej $\nu + 2$, čo je vzhľadom k tomu, že $\nu > 1$, aspoň 4.

2.16 Zmenšovanie ordinálnych čísel pri vykonávaní redukčných krokov na odvodeniach

Budeme definovať redukčné kroky a súčasne ukážeme, že pri ich vykonaní sa ordinálne číslo odvodenia zmenší.

Majme odvodenie v Peanovej aritmetike v starom zmysle. Vyrobme z neho odvodenie v novom zmysle, nahraďme následne všetky voľné premenné numerálmi okrem eigenvariable v pravidlách ∀-zavedenie a indukcia. Vyrátajme hodnoty termov, u ktorých je to možné, nahraďme ich následne príslušným numerálom.

Dokážeme:

Prostredníctvom redukčného kroku sa zmení odvodenie na iné odvodenie a výsledný sekvent pôvodného odvodenia sa nezmení alebo naň bude vykonaný práve jeden redukčný krok podľa 13.2 alebo 13.5. Pre odvodenie, ktorého výsledný sekvent je v cieľovej forme, nie je redukčný krok definovaný. Predpokladajme teda, že máme odvodenie, ktorého výsledný sekvent nie je v cieľovej forme. Toto odvodenie má priradené ordinálne číslo. Ukážeme, že po redukčnom kroku sa numerus nezväčší a mantisa sa zmenší. Tým pádom sa zmenší celé ordinálne číslo. Stupeň mantisy sa tiež nezmení, okrem prípadu redukcie e3, v tomto prípade sa stupeň zväčší presne o 2.

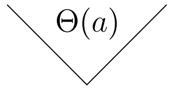
a) Nech výsledný sekvent odvodenia je *iniciálny* sekvent. Vykonáme práve jeden redukčný krok podľa návodu pre redukovanie iniciálnych sekventov. Opäť získame iniciálny sekvent v novom zmysle, tj. vzniklo nové odvodenie. Redukčné kroky na iniciálnych sekventoch sú definované tak, aby vždy zmizla jedna logická spojka. Aj kroky 13.5 sú definované tak, aby sa možnosť nechať stáť redukovanú formulu nevyužila. Ordinálne číslo sa ráta podľa počtu spojok v iniciálnom sekvente:

$$\underbrace{\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle} \qquad \overset{13.2}{\rightsquigarrow} \qquad \underbrace{\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\rangle}$$

Nech formule $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ neobsahujú spojky. Potom číslo tohto odvodenia je $2,200111$, tj. posledný úsek má o jednu jednotku viac ako je počet spojok v sekvente.

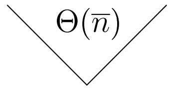
Číslo tohto odvodenia je $2,20011$. Numerus sa nezväčšil, stupeň mantisy ostal nezmenený, mantisa sa zmenšila. ⇒ Celé číslo sa zmenšilo.

b) Nech výsledný sekvent odvodenia vznikol použitím pravidla $\forall$-*zavedenie*:



$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x)}$$

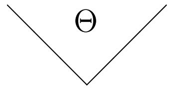
kde eigenvariable a nie je voľná v $\Gamma \bigcup \{\forall x \mathcal{F}(x)\}$. Redukcia prebehne tak, že výsledný sekvent vynecháme, vezmeme si jeho premisu $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(a) \rangle$, kde za a do celého odvodenia $\Theta(a)$ dáme ľubovoľný numerál $\overline{n}$. Dostaneme:



$$\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n})$$

V odvodení $\Theta(\overline{n})$ vyrátame hodnoty tých termov, z ktorých po dosadení $\overline{n}$ za a všetky eigenvariable zmizli. Nové odvodenie je korektným odvodením a výsledný sekvent je oproti starému po redukcii 13.2. Nech ordinálne číslo odvodenia sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(a) \rangle$ je ϱ, m. Potom ordinálne číslo odvodenia sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x) \rangle$ je $\varrho, m1$, tj. pripísali sme na koniec mantisy číslicu 1. Odvodenie sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n}) \rangle$ má také isté číslo ako odvodenie starej premisy, čiže ϱ, m. Numerus nového odvodenia sa teda nezväčšil, stupeň mantisy ostal nezmenený a mantisa sa zmenšila. Z toho plynie, že číslo odvodenia po redukcii sa zmenšilo.

c) Nech výsledný sekvent odvodenia vznikol použitím pravidla *vyvrátenie*:



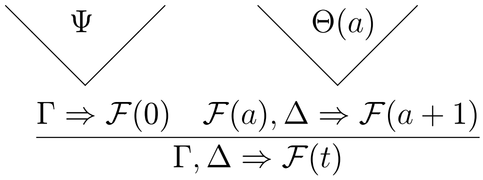
$$\frac{\Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1}{\Gamma \Rightarrow \neg \mathcal{A}}$$

Urobíme to isté, ako pri redukcii v bode **b)**:

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1}{\Gamma \Rightarrow \neg \mathcal{A}} \quad \overset{13.2}{\rightsquigarrow} \quad \langle \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow 0 = 1 \rangle$$

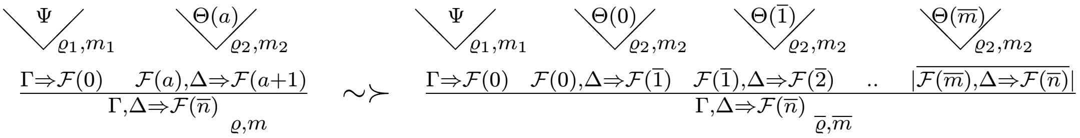
Vynecháme výsledný sekvent a za nový výsledný sekvent si vezmeme jeho premisu. Oproti starému výslednému sekventu je nový po redukcii 13.2. Ordinálne číslo nového odvodenia sa zmenšilo, pričom numerus sa nezväčšil, stupeň mantisy sa nezmenil a samotná mantisa sa zmenšila. Číslo nového odvodenia je totiž to isté, ako číslo odvodenia starej premisy.

d) Nech výsledný sekvent vznikol použitím pravidla *indukcie*:



$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(0) \quad \mathcal{F}(a), \Delta \Rightarrow \mathcal{F}(a+1)}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{F}(t)}$$

kde $a \notin \Gamma,\ \Delta,\ \mathcal{F}(0),\ \mathcal{F}(t)$. Keďže sme za všetky voľné premenné dali numerály a vyrátali hodnoty tých termov, ktoré neobsahujú eigenvariable, vieme, že term t je numerál. Nech je to napr. numerál $\overline{n} > 0$. Nech $\overline{m} = \overline{n} - 1$. Vytvorme odvodenia $\Theta(0), \Theta(\overline{1})\ ..\ \Theta(\overline{m})$, ktoré sú také isté ako odvodenie $\Theta(a)$, len za a sme doplnili príslušný numerál v zátvorke a vyrátali sme hodnoty termov, u ktorých to šlo. Redukované odvodenie bude vyzerať takto:



$$\frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(0) \quad \mathcal{F}(a),\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(a+1)}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(\overline{n})}\ {}_{\varrho,m} \quad \sim\!\succ \quad \frac{\Gamma\Rightarrow\mathcal{F}(0) \quad \mathcal{F}(0),\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(\overline{1}) \quad \mathcal{F}(\overline{1}),\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(\overline{2}) \quad .. \quad |\overline{\mathcal{F}(\overline{m}),\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(\overline{n})}|}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\mathcal{F}(\overline{n})}\ {}_{\overline{\varrho},\overline{m}}$$

Z indukcie sa stalo reťazové pravidlo, odvodený sekvent je v oboch prípadoch rovnaký. Číslo pri sekvente predstavuje ordinálne číslo odvodenia daného sekventu.

Uvedomme si, čo je nový numerus $\overline{\varrho}$:

- Tento závisí od maximálneho stupňa mantís z ordinálnych čísel odvodení premís. Nech je to ν. Hodnota ν je presne taká istá ako hodnota spomínanej veličiny v starom odvodení, pretože množina mantís čísel pre odvodenia premís v starom odvodení sa rovná tej istej množine v odvodení po redukcii.

- Ďalej $\overline{\varrho}$ závisí od maximálneho počtu logických spojok v zadnej formuli sekventov naľavo od hlavnej premisy, tj. od počtu spojok vo formuli $\mathcal{F}(0)$. Starý numerus ϱ závisí presne od toho istého čísla.

- Nový numerus $\overline{\varrho}$ závisí ešte od maximálneho nadbytku numerusov v číslach odvodení premís. Vzhľadom na to, že množiny čísel pre odvodenia premís v starom a novom odvodení sa rovnajú, je maximálny nadbytok numerusov premís v oboch prípadoch rovnaký.

Numerus je najmenšie prirodzené číslo, ktoré spĺňa isté tri podmienky, ktoré sú dané hodnotami, ktoré sme práve analyzovali. Keďže tieto tri významné hodnoty sú v starom i novom odvodení zhodné, platí: $\varrho = \overline{\varrho}$.

Vyrátajme novú mantisu $\overline{m}$. Stará mantisa vyzerá takto:

$$m = 20\underbrace{1\,.\,.\,1}\ \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\nu+2 \text{ núl}}\ 1$$

Nech väčšia mantisa čísel pre odvodenie premís je m_1. Sem dáme toľko jedničiek, koľko ich má m_1 na odpovedajúcom mieste a ešte jednu pridáme.

Novú mantisu $\overline{m}$ poskladáme z mantís čísel pre odvodenia premís. Keďže mantisa m_2 sa v číslach premís vyskytuje opakovane, musíme tieto mantisy odlíšiť:

$$\begin{aligned} m_2^{'} &= m_2 0\,.\,.\,01 \\ m_2^{''} &= m_2 0\,.\,.\,011 \\ &\,.\,. \\ m_2 \underbrace{'\,.\,.\,'}_{n \text{ čiarok}} &= m_2\ \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\nu+1 \text{ núl}}\ \ \underbrace{1\,.\,.\,1}_{n \text{ jedničiek}} \end{aligned}$$

Predpokladali sme, že platí $m_1 > m_2$. Potom to bude platiť i po úprave mantisy m_2, tj.:

$$\begin{aligned} m_1 &> m_2^{'} \\ m_1 &> m_2^{''} \\ &\,.\,. \\ m_1 &> m_2^{'\cdot\cdot'} \end{aligned}$$

Buď platí, že prvá číslica, na ktorej sa mantisy m_1 a m_2 líšia, je v mantise m_2 menšia, a potom je zrejmé, že m_1 je v tomto istom vzťahu aj so všetkými $m_2^{'\cdot\cdot'}$, alebo mantisa m_2 tvorí počiatočný úsek mantisy m_1. Počiatočný úsek mantís $m_2^{'\cdot\cdot'}$ tvorí tiež pôvodná mantisa m_2 a za ňou nasleduje $\nu + 1$ núl.

Mantisa m_1 môže mať za úsekom tvoreným mantisou m_2 maximálne ν núl, pretože ν je maximálny stupeň v mantisách m_1 a m_2. Zo všeobecnej podmienky, ktorá sa kladie na mantisy ordinálnych čísel odvodení vieme, že m_1 nekončí nulou. Preto najneskôr na $\nu + 1$. mieste tohto úseku sa m_1 a ľubovoľná $m_2^{'\cdot\cdot'}$ začnú líšiť, a to tak, že číslica na tomto mieste v m_1 bude väčšia ako číslica v ľubovoľnom $m_2^{'\cdot\cdot'}$ na tom istom mieste.

Mantisa $\overline{m}$ má takýto tvar:

$$\overline{m} = m_1 \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\nu+2} m_2^{'\cdot\cdot'} \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\nu+2} \,.\,.\, m_2^{''} \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\nu+2} m_2^{'} \underbrace{0\,.\,.\,0}_{\nu+2} 1$$

Potrebujeme ukázať, že prvá číslica, na ktorej sa m a $\overline{m}$ líšia je v novej mantise $\overline{m}$ menšia: Nová mantisa začína mantisou m_1, ktorá má vo všeobecnosti tvar (201 . . 1 . .). V porovnaní s m má v prvom slede jedničiek o jednu jedničku menej a za týmto sledom pokračuje sled núl (či už sú to nuly z m_1 alebo doplnených $\nu + 2$ núl). Z toho plynie, že nová mantisa $\overline{m}$ je menšia ako stará mantisa m, i keď možno omnoho dlhšia.

Keby sme predpokladali, že $m_2 > m_1$, tak úvaha bude podobná.
Zrekapitulujme si vzťah medzi ordinálnym číslom starého a nového odvodenia, tj. medzi číslami ϱ, m a $\overline{\varrho}, \overline{m}$:

- $\varrho = \overline{\varrho}$
- $m > \overline{m}$
- Stupeň mantís m a $\overline{m}$ je rovnaký, a to $\nu + 2$.

Preskúmajme ešte prípad, keď $n = 0$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \bigvee_{\varrho_1,m_1}\\ \Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(0)\end{array} \quad \begin{array}{c}\Theta(a)\\ \bigvee_{\varrho_2,m_2}\\ \mathcal{F}(a),\Delta \Rightarrow \mathcal{F}(a+1)\end{array}}{\Gamma,\Delta \Rightarrow \mathcal{F}(0)_{\varrho,m}} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \bigvee_{\varrho_1,m_1}\\ \boxed{\Gamma \Rightarrow \mathcal{F}(0)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Theta(0)\\ \bigvee_{\varrho_2,m_2}\\ \mathcal{F}(0),\Delta \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{1})\end{array}}{\Gamma,\Delta \Rightarrow \mathcal{F}(0)_{\overline{\varrho},\overline{m}}}$$

Pravidlo indukcie sa opäť zmenilo na reťazové pravidlo. Druhá premisa reťazového pravidla $\langle \mathcal{F}(0), \Delta \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{1}) \rangle$ sa nevyužíva, pretože stojí za hlavnou premisou. Množina formulí Δ sa do výsledku reťazového pravidla dostala ako svojvoľne pridaná množina.

Porovnajme numerusy ϱ a $\overline{\varrho}$:

- Maximálny nadbytok numerusov z čísel pre odvodenia premís je v oboch prípadoch rovnaký, nech je to r_i.
- Maximálny stupeň mantís z čísel odvodení premís je zas rovnaký, nech je to ν.
- Nech y je počet spojok vo formuli $\mathcal{F}(0)$. Nech $\overline{y}$ je maximálny počet spojok v zadnej formuli nejakej premisy pred hlavnou premisou. Vidíme, že $\overline{y} = 0$, pretože pred hlavnou premisou už žiadne sekventy nie sú. Platí teda, že $\varrho \geq \nu + 2 + 2y$ a $\overline{\varrho} \geq \nu + 2 + 0$. Preto sa môže stať, že $\overline{\varrho} \leq \varrho$. To je v súlade s dokazovaným tvrdením, že nový numerus sa oproti starému nezväčší.

Mantisy m i $\overline{m}$ sa obe vyrábajú z tých istých mantís, a to z m_1 a m_2. Ale mantisa m, keďže sa vyrába podľa predpisu pre pravidlo indukcie, bude mať v prvom slede jedničiek o jednu jedničku viac ako $\overline{m}$. Mantisa $\overline{m}$ sa vyrába podľa predpisu pre reťazové pravidlo, kde sa len pôvodné mantisy m_1 a m_2 zoradia podľa veľkosti, ale inak sa s nimi nemanipuluje. Dostávame, že nová mantisa $\overline{m}$ je ostro menšia ako m.

e) Nech výsledný sekvent vznikol aplikovaním *reťazového pravidla*. Vykonáme najprv prípravný krok:

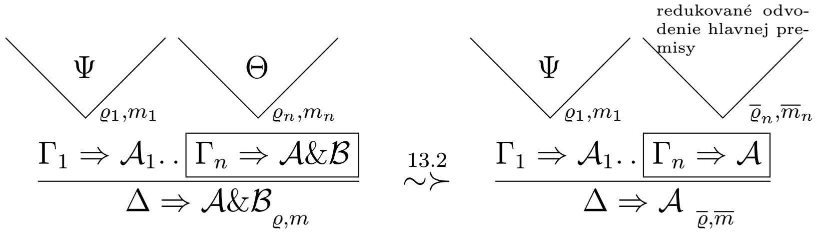
V prípade, že hlavná premisa má vzadu nepravdivú, uzavretú a atomickú formulu, vezmeme za hlavnú premisu prvý sekvent v rade, ktorého zadná formula je tiež nepravdivá, uzavretá a atomická. Tento krok ordinálne číslo odvodenia nezväčší. Mantisa sa ráta z mantís čísel pre odvodenia všetkých premís a odvodenia premís sme nemenili. Možno sa ale zmenší numerus, pretože pri vyberaní zadnej formule s maximálnym počtom logických spojok niektoré sekventy (tie, čo sú napravo od novej hlavnej premisy) vypadnú z hry. Z tohto dôvodu sa môže stať, že vybratá formula má menej logických spojok ako formula pôvodne vybratá, čo môže viesť k zmenšeniu numerusu upraveného odvodenia. Je možné, že po zmene hlavnej premisy budeme musieť medzi predné formule výsledného sekventu nejaké formule doplniť tak, aby výsledný sekvent pred i po zmene hlavnej premisy bol rovnaký. Toto doplňanie je pri reťazovom pravidle povolené a je možné podľa Lemmy 1.

Z predpokladu vieme, že výsledný sekvent nie je v cieľovej forme. Z toho plynie, že ani hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Keby bola, tak má buď vzadu pravdivú, uzavretú, atomickú formulu a túto má vzadu i výsledný sekvent, očividne tak je tiež v cieľovej forme alebo má hlavná premisa zadnú formulu nepravdivú, uzavretú, atomickú a vpredu má tiež najmenej jednu takú. Hlavná premisa je prvá v rade, ktorá má vzadu nepravdivú, uzavretú, atomickú formulu, a tak sa nepravdivá, uzavretá, atomická formula spredu musela dostať medzi predné formule výsledného sekventu. Nemohla sa škrtnúť. Keďže výsledný sekvent má zadnú formulu zhodnú so zadnou formulou hlavnej premisy, bol by tiež v cieľovej forme a zas dostávame spor.

Vieme, že pre odvodenia sekventov, ktoré nie sú v cieľovej forme, existuje redukčný krok. Preto môžme predpokladať, že pre odvodenie hlavnej premisy máme definovaný redukčný krok.

Rozlíšime 4 prípady. Na začiatku každého prípadu bude kvôli prehľadnosti uvedený podrobný popis situácie, ktorú daný prípad analyzuje.

e1) Výsledný sekvent vznikol aplikovaním reťazového pravidla. Hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Pre jej odvodenie existuje redukčný krok. Nech pri ňom na ňu bola uplatnená redukcia podľa 13.2. To znamená, že aj na výsledný sekvent sa dá aplikovať redukčný krok podľa 13.2, pretože majú rovnakú zadnú formulu:



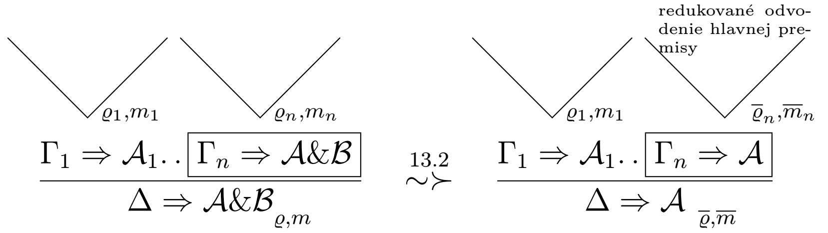
Máme korektné reťazové pravidlo a výsledný sekvent je oproti starému zredukovaný podľa 13.2, pričom prípadnú voľbu sme vykonali tak isto ako pri hlavnej premise.

Lemma e1. *Po redukcii e1 sa stupeň mantisy m a $\overline{m}$ nemení. Obe čísla majú tiež rovnaký numerus, tj. $\varrho = \overline{\varrho}$. Pritom číslo zredukovaného odvodenia je menšie.*[3]

Dôkaz. Dôkaz bude prebiehať indukciou. Vezmime si také využitie reťazového pravidla, že toto pri redukcii použije krok e1 a nad ním už také iné reťazové pravidlo nie je. Nech toto využitie reťazového pravidla vyzerá nasledovne.

---

[3] Lemma bola formulovaná a dokázaná na základe návodu od Gentzena z článku [Gen36], str. 553.



Premisa $\langle \Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B} \rangle$ bola pri redukcii celého svojho odvodenia fyzicky zmenená, a to podľa kroku 13.2, takže musela byť odvodená jedným z týchto pravidiel:

- iniciálny sekvent
- vyvrátenie
- $\forall$-zavedenie
- reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e1

Redukcie odvodení, ktorých posledné využité pravidlo je iné, ako práve spomínané, výsledný sekvent nemenia alebo ho menia podľa redukného kroku 13.5. Sekvent $\langle \Gamma_n \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B} \rangle$ musí byť iniciálny alebo výsledok pravidiel vyvrátenie prípadne $\forall$-zavedenie, pretože keby bol odvodený reťazovým pravidlom, dostali by sme sa do sporu s úvodnou voľbou. Z toho plynie:

- $\overline{\varrho}_n = \varrho_n$
- $\overline{m}_n < m_n$
- Mantisy $\overline{m}_n$ a m_n majú rovnaký stupeň.

Chceme porovnať čísla ϱ, m a $\overline{\varrho}, \overline{m}$:

- Numerusy ϱ a $\overline{\varrho}$ sa rovnajú, pretože všetky tri veličiny od ktorých závisia, teda maximálny stupeň mantís z ordinálnych čísel pre odvodenia premís, maximálny nadbytok numerusov z čísel pre odvodenia premís a maximálny počet logických spojok v zadnej formuli sekventov pred hlavnou premisou, sú v starom i novom odvodení rovnaké.
- Z toho, že maximálny stupeň mantís z ordinálnych čísel pre odvodenia premís je v starom i novom odvodení rovnaký, plynie i to, že mantisy $\overline{m}$ a m majú opäť rovnaký stupeň. Porovnajme ešte ich veľkosti. Nech zoradené mantisy premís starého odvodenia sú:

$$k_1 > k_2 > . . k_n$$

Nech zoradené mantisy premís nového odvodenia sú:

$$k_1^{'} > k_2^{'} >\ldotp\ldotp k_n^{'}$$

a súčasne vieme, že $\exists\ i$, že $k_i > k_i^{'}$. Prvá číslica, kde sa $\overline{m}$ a m začnú odlišovať je práve v tejto i-tej mantise, teda ich i-tej zložke, a to tak, že táto číslica je v $\overline{m}$ menšia ako v m. Ak je $k_i^{'}$ menšia ako k_i z dôvodu, že „končí skôr“, tak z pravidiel skladania mantisy $\overline{m}$ vieme, že za $k_i^{'}$ nasleduje minimálne $\nu + 1$ núl, kde ν je maximálny stupeň mantís z čísel pre odvodenia premís. V mantise k_i existujú úseky núl dlhé maximálne ν a k_i istotne nekončí nulou. Preto aj v tomto prípade vynde, že $m > \overline{m}$.

Ak bola mantisa m_n z nejakej skupiny rovnakých a pri tvorení mantisy m bolo potrebné ich rozlišovať, tak po jej zmenšení na $\overline{m}_n$ stratí skupina rovnakých mantís jedného člena a pri odlišovaní dostanú tieto mantisy na koniec vždy o jednu jedničku menej. Nová mantisa $\overline{m}$ a stará mantisa m celého odvodenia sa budú odlišovať práve v tejto jedničke, pretože v novej mantise $\overline{m}$ bude na tejto pozícii už nula. Preto nová mantisa celého odvodenia bude i v tomto prípade menšia.

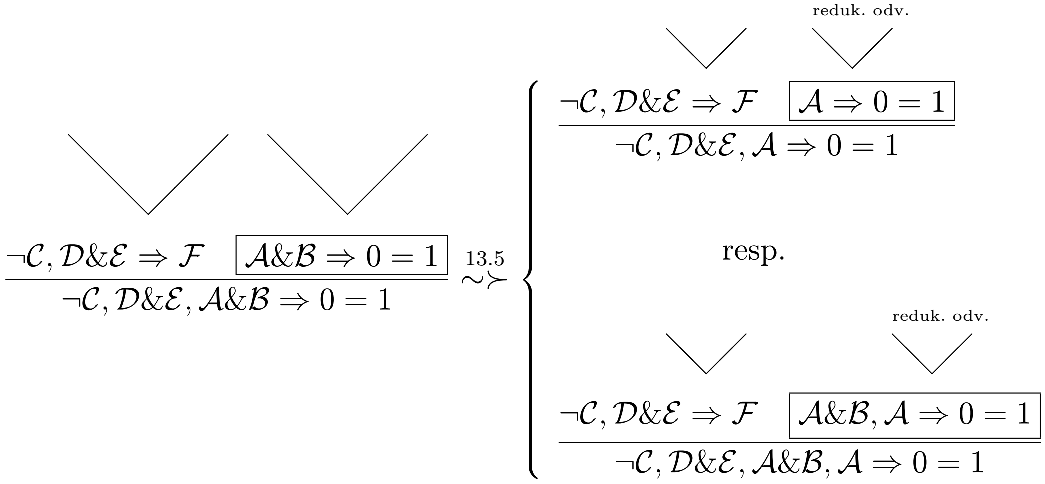
Vyslovme *indukčný predpoklad*: Nech pre sekvent odvodený reťazovým pravidlom, ktoré vyžaduje redukciu e1 už platí, že číslo redukovaného odvodenia je menšie, lebo mantisa sa zmenšila, numerusy sú rovnaké a stupne mantís sú tiež rovnaké. Chceme ukázať, že to platí aj pre nasledujúci sekvent odvodený reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e1. Úvaha prebehne presne tak isto, ako úvaha, ktorá predchádzala indukčnému predpokladu. □

e2) Výsledný sekvent vznikol aplikovaním reťazového pravidla. Hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Pre jej odvodenie existuje redukčný krok. Nech pri ňom na ňu bola uplatnená redukcia podľa 13.5 a dotknutá predná formula sa pri reťazovom pravidle dostala k predným formulám výsledného sekventu, resp. sa nedostala, pretože taká istá formula sa medzi prednými formulami výsledného sekventu už nachádzala. Takéto odvodenie zredukujeme nasledovne:

Vezmeme si odvodenie hlavnej premisy po redukčnom kroku. Krok 13.5 urobíme aj na výsledný sekvent reťazového pravidla. Použijeme tú istú prednú formulu, ktorú využil redukčný krok odvodenia hlavnej premisy. Prípadnú voľby vykonáme presne tak isto, ako pri redukovaní odvodenia hlavnej premisy.

Teraz je potrebné reťazové pravidlo opäť skorektniť. Rozoberme situácie, ktoré mohli nastať:

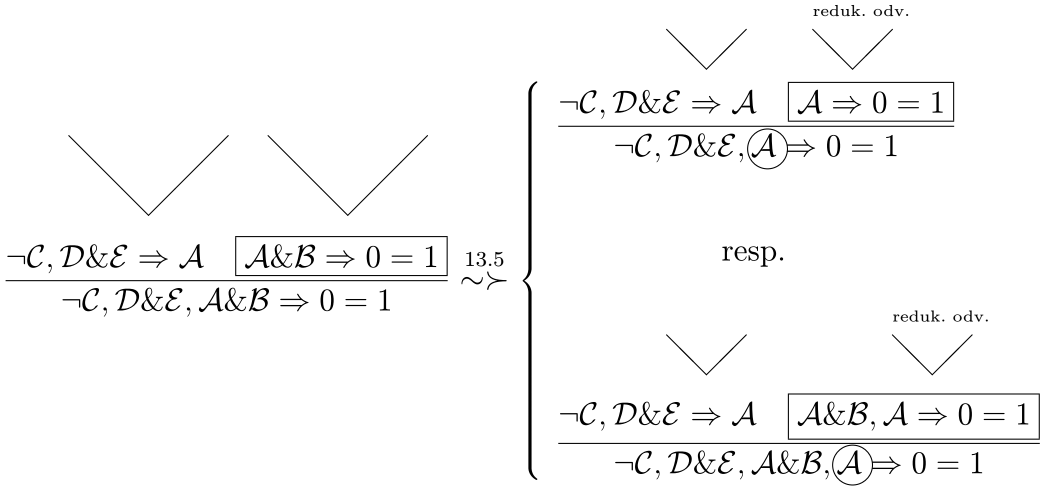
1. Vo všeobecnosti vyzerá analyzovaná redukcia takto:



$$\frac{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{F}\quad\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}}{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}\ \overset{13.5}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{F}\quad\overset{\text{reduk. odv.}}{\boxed{\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}}{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}\\[3em]\text{resp.}\\[3em]\dfrac{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{F}\quad\overset{\text{reduk. odv.}}{\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}}{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}\end{array}\right.$$

   Pre obe možné redukcie platí, že reťazové pravidlo ostalo korektné a výsledný sekvent je zredukovaný podľa kroku 13.5.

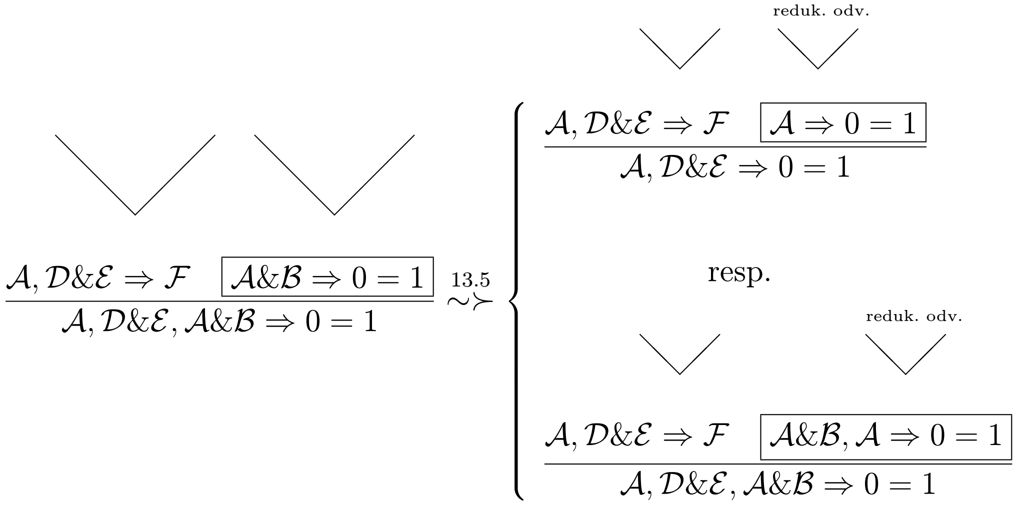
2. Formula vzniknutá redukciou (v tomto príklade $\mathcal{A}$) sa nachádza ako zadná formula nejakého sekventu pred hlavnou premisou:



$$\frac{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{A}\quad\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}}{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}\ \overset{13.5}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{A}\quad\overset{\text{reduk. odv.}}{\boxed{\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}}{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\enclose{circle}{\mathcal{A}}\Rightarrow 0=1}\\[3em]\text{resp.}\\[3em]\dfrac{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{A}\quad\overset{\text{reduk. odv.}}{\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}}{\neg\mathcal{C},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\&\mathcal{B},\enclose{circle}{\mathcal{A}}\Rightarrow 0=1}\end{array}\right.$$

   Reťazové pravidlo predpisuje nezapísať formulu $\mathcal{A}$ medzi predné formule výsledného sekventu (jedná sa o zakrúžkovanú formulu). Na druhej strane, dovoľuje nám doplniť si tam ľubovoľnú formulu. Takže použitie reťazového pravidla po redukcii ostalo korektné a výsledný sekvent je zredukovaný podľa kroku 13.5.

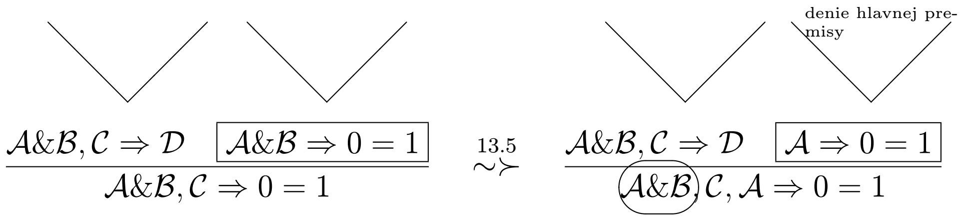
3. Formula vzniknutá redukciou (v tomto príklade $\mathcal{A}$) sa nachádza ako predná formula nejakého sekventu pred hlavnou premisou:



$$\frac{\mathcal{A},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{F}\qquad\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}}{\mathcal{A},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}\ \overset{13.5}{\leadsto}\ \begin{cases}\dfrac{\mathcal{A},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{F}\qquad\boxed{\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}{\mathcal{A},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow 0=1}\\ \text{resp.}\\ \dfrac{\mathcal{A},\mathcal{D}\&\mathcal{E}\Rightarrow\mathcal{F}\qquad\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}{\mathcal{A},\mathcal{D}\&\mathcal{E},\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}\end{cases}$$

Reťazové pravidlo hovorí, že ak sa istá formula už vyskytuje medzi prednými formulami výsledného sekventu, nezpíšeme tam je ďalšie výskyty. To isté hovorí i redukčný krok 13.5., tj. ak pri redukcii vznikne formula, ktorá už medzi prednými formulami je, nezapíšeme ju tam opäť. Preto ostalo reťazové pravidlo po redukcii korektné a výsledný sekvent je zredukovaný podľa 13.5.

4. Redukovaná formula z hlavnej premisy sa nedostane medzi predné formule výsledného sekventu, pretože sa už nachádza medzi prednými formulami nejakého sekventu pred hlavnou premisou:

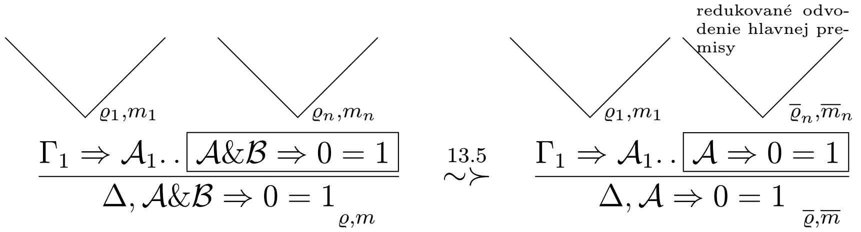


$$\frac{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{D}\qquad\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Rightarrow 0=1}}{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{C}\Rightarrow 0=1}\ \overset{13.5}{\leadsto}\ \frac{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{D}\qquad\boxed{\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}}{\enclose{circle}{\mathcal{A}\&\mathcal{B}},\mathcal{C},\mathcal{A}\Rightarrow 0=1}$$

Redukčný krok 13.5 umožňuje nechať redukovanú formulu stáť. Toto využijeme pri redukcii výsledného sekventu. Redukovanú formulu necháme stáť aj v prípade, že pri redukcii hlavnej premisy táto stáť neostala (zakrúžkovaná formula). Reťazové pravidlo ostalo korektné a výsledný sekvent je po redukcii podľa 13.5.

Lemma e2. *Po redukcii e2 sa stupeň mantisy nemení. Ordinálne čísla pôvodného a zredukovaného odvodenia majú rovnaký numerus. Pritom číslo zredukovaného odvodenia je menšie.*

Dôkaz. Dôkaz bude prebiehať indukciou. Vezmime si také využitie reťazového pravidla, že toto pri redukcii použije krok e2 a nad ním už také iné reťazové pravidlo nie je. Nech toto využitie reťazového pravidla vyzerá nasledovne:



Na výpočet ordinálneho čísla redukovaného odvodenia nemá vplyv to, či redukciou zasiahnutá formula ostala stáť alebo nie. Ordinálne číslo sa ráta z ordinálnych čísel pre odvodenia premís a tieto čísla sú dané. Nadbytok môžu ovplyvniť zadné formule sekventov, ale táto redukcia sa týka predných formulí.

Premisa $\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow 0 = 1\rangle$ bola pri redukcii celého svojho odvodenia fyzicky zmenená a to podľa kroku 13.5, takže musela byť odvodená jedným z týchto pravidiel:

- iniciálny sekvent
- reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e2

Redukcie odvodení, ktorých posledné využité pravidlo je iné, ako práve spomínané, výsledný sekvent nemenia alebo ho menia podľa kroku 13.2. Sekvent $\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B} \Rightarrow 0 = 1\rangle$ musí byť iniciálny, pretože keby bol odvodený reťazovým pravidlom, dostali by sme sa do sporu s úvodnou voľbou. Z toho plynie:

- $\overline{\varrho}_n = \varrho_n$
- $\overline{m}_n < m_n$
- Mantisy $\overline{m}_n$ a m_n majú rovnaký stupeň.

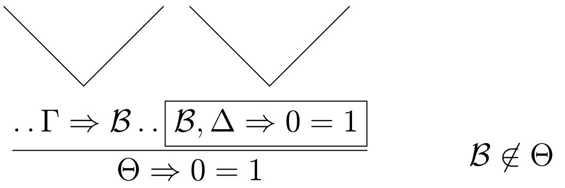
Chceme porovnať čísla ϱ, m a $\overline{\varrho}, \overline{m}$:

- Numerusy ϱ a $\overline{\varrho}$ sa rovnajú z toho istého dôvodu ako už bolo uvedené v Lemme e1.

- Stupeň mantís m a $\overline{m}$ je rovnaký, pričom platí $\overline{m} < m$. Vysvetlenie by bolo také isté, ako pri Lemme e1.

Vyslovme *indukčný predpoklad*: Nech pre sekvent odvodený reťazovým pravidlom, ktoré vyžaduje redukciu e2 už platí, že číslo redukovaného odvodenia je menšie, lebo mantisa sa zmenšila, numerusy sú rovnaké a stupne mantís sú tiež rovnaké. Chceme ukázať, že to platí aj pre nasledujúci sekvent odvodený reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e2. Úvaha prebehne presne tak isto, ako úvaha, ktorá predchádzala indukčnému predpokladu. ☐

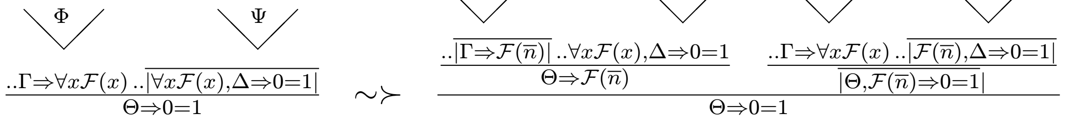
e3) Výsledný sekvent vznikol aplikovaním reťazového pravidla. Hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Pre jej odvodenie existuje redukčný krok. Nech pri ňom na ňu bola uplatnená redukcia podľa 13.5 a dotknutá predná formula $\mathcal{B}$ sa pri reťazovom pravidle nedostala k predným formulám výsledného sekventu, lebo sa nachádzala ako zadná formula nejakého sekventu pred hlavnou premisou:



Formula $\mathcal{B}$ nie je atomická uzavretá formula, pretože je aktérkou redukcie podľa 13.5. Aj pre premisu $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$, ktorá teda nie je v cieľovej forme, existuje z predpokladu redukcia jej odvodenia. Nech pri tom na ňu bola uplatnená redukcia podľa 13.2. (Je to jediná možná redukcia, sekvent mohol ešte ostať nezmenený, ale to sa rieši v prípade e4.2 a e4.4.)

Rozlíšime tri prípady:

1. $\mathcal{B} = \forall x \mathcal{F}(x)$:

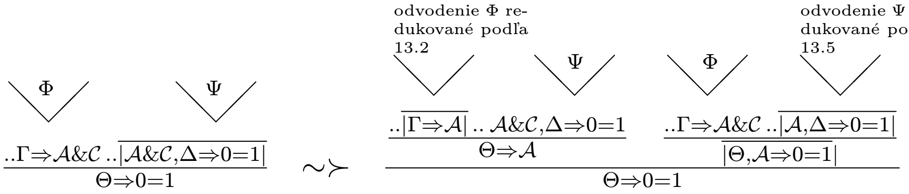


Odvodenie hlavnej premisy redukované podľa 13.5 máme z predpokladu. Namiesto premennej x, viazanej všeobecným kvantifikátorom, je vo výslednom sekvente redukovaného odvodenia istý numerál $\overline{n}$. Takýto istý numerál si tiež zvolíme pri redukovaní odvodenia premisy $\langle \Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x) \rangle$ podľa kroku 13.2. S použitím výsledných sekventov týchto redukovaných odvodení, urobíme dve reťazové pravidlá (nazvyme ich ľavé a pravé) podobné pôvodnému, len hlavná premisa tu už je po redukcii. Výsledky týchto dvoch pravidiel použijeme v treťom reťazovom pravidle. Dostávame pôvodný výsledný sekvent. Výsledný sekvent redukovaného odvodenia sa tak rovná výslednému sekventu odvodenia pred redukciou.

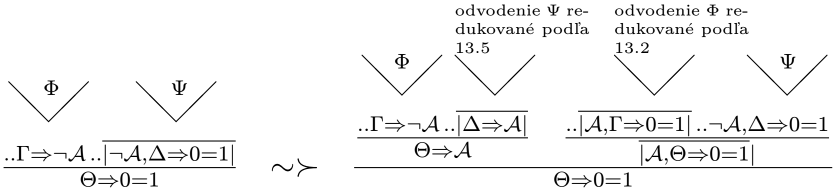
Pri ľavom reťazovom pravidle sme využili Lemmu 1, ktorá vraví, že pri posune hlavnej premisy dopredu v rade, dostaneme výsledný sekvent, ktorého predné formule tvoria podmnožinu predných formulí pôvodného výsledného sekventu. Aby mal výsledný sekvent ľavého reťazového pravidla vpredu opäť celé Θ, tak si chýbajúce formule doplníme. To reťazové pravidlo umožňuje.

Čo sa pravého reťazového pravidla týka, keby pri redukcii 13.5 redukovaná formula $\forall x \mathcal{F}(x)$ ostala stáť, tak to nevadí. Pravé reťazové pravidlo ju škrtne, lebo pred hlavnou premisou stojí premisa $\langle \Gamma \Rightarrow \forall x \mathcal{F}(x) \rangle$.

2. $\mathcal{B} = \mathcal{A} \& \mathcal{C}$:

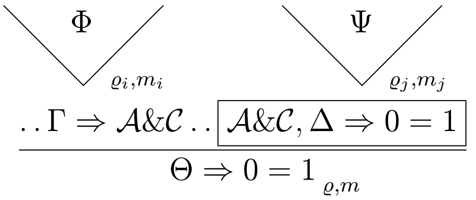


3. $\mathcal{B} = \neg \mathcal{A}$:



Porovnajme teraz ordinálne číslo pôvodného a redukovaného odvodenia.

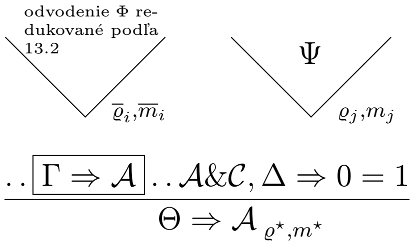
Nech ordinálne čísla odvodení pred redukciou boli nasledovné:



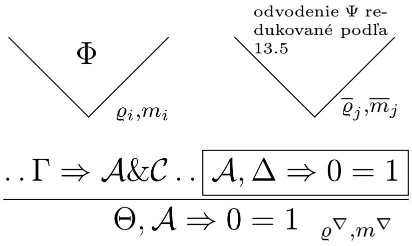
$$\frac{\ldots\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{C}\ldots\boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{C},\Delta \Rightarrow 0=1}}{\Theta \Rightarrow 0=1 \;{}_{\varrho,m}} \qquad \mathcal{A}\&\mathcal{C} \notin \Theta$$

Stupeň mantisy m je $\nu+2$, pričom ν je maximálny stupeň mantís z ordinálnych čísel pre odvodenia premís.

Analyzujme najprv dve pomocné reťazové pravidlá redukovaného odvodenia:



$$\frac{\ldots\boxed{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}}\ldots\mathcal{A}\&\mathcal{C},\Delta \Rightarrow 0=1}{\Theta \Rightarrow \mathcal{A} \;{}_{\varrho^\star,m^\star}}$$



$$\frac{\ldots\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{C}\ldots\boxed{\mathcal{A},\Delta \Rightarrow 0=1}}{\Theta,\mathcal{A} \Rightarrow 0=1 \;{}_{\varrho^\triangledown,m^\triangledown}}$$

Premisa $\langle\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{C}\rangle$ bola pri redukcii svojho odvodenia fyzicky zmenená podľa kroku 13.2, tj. musela nastať jedna z týchto možností:

- Je to iniciálny sekvent.
- Je odvodená pravidlom vyvrátenie.
- Je odvodená pravidlom ∀-zavedenie.
- Je odvodená reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e1.

Z definície redukcie pre iniciálne sekventy, redukcie pre odvodenia, ktorých posledné pravidlo je vyvrátenie alebo ∀-zavedenie a z Lemmy e1 máme:

- $\varrho_i = \overline{\varrho}_i$
- $\overline{m}_i < m_i$
- Mantisy $\overline{m}_i$ a m_i majú rovnaký stupeň.

Premisa $\langle\mathcal{A}\&\mathcal{C},\Delta \Rightarrow 0=1\rangle$ bola pri redukcii svojho odvodenia fyzicky zmenená podľa kroku 13.5, tj. musela nastať jedna z týchto možností:

- Je to iniciálny sekvent.

- Je odvodená reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e2.

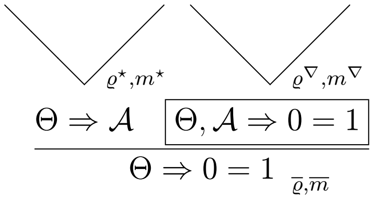
Z definície redukcie pre iniciálne sekventy a z Lemmy e2 máme:

- $\varrho_j = \overline{\varrho}_j$
- $\overline{m}_j < m_j$
- Mantisy $\overline{m}_j$ a m_j majú rovnaký stupeň.

Porovnajme ordinálne čísla pomocných reťazových pravidiel s ordinálnym číslom ϱ, m pôvodného odvodenia:

- numerus $\varrho^\star$: Maximálny stupeň mantís z čísel pre odvodenia premís ostal taký istý ako v starom odvodení, teda ν, lebo stupeň m_i sa rovná stupňu $\overline{m}_i$ a ostatné mantisy sme nemenili vôbec. Maximálny nadbytok numerusov premís ostal opäť taký istý, pretože $\varrho_i = \overline{\varrho}_i$. Maximálny počet logických spojok v zadnej formuli sekventu pred hlavnou premisou sa oproti pôvodnému odvodeniu možno zmenšil, lebo niektoré sekventy pred bývalou hlavnou premisou sme teraz nebrali do úvahy. Z toho plynie $\varrho^\star \leq \varrho$.
- mantisa $m^\star$: Mantisy m a $m^\star$ majú rovnaký stupeň, a to $\nu + 2$, lebo maximálny stupeň mantís čísel pre odvodenia premís je v oboch odvodeniach rovnaký. Mantisa $m^\star$ je zložená z tých istých mantís premís ako m až na jednu, ktorá je v porovnaní s jej zodpovedajúcou mantisou v m, menšia. Preto $m^\star < m$.
- numerus ϱ^∇: Platí, že $\varrho^\nabla = \varrho$. Vysvetlenie je také isté ako pri numeruse $\varrho^\star$.
- mantisa m^∇: Platí, že $m^\nabla < m$ a majú rovnaký stupeň $\nu + 2$. Vysvetlenie je také isté pri mantise $m^\star$.

Zahrňme do analýzy tretie reťazové pravidlo redukovaného odvodenia:



Pripomeňme:
$\varrho^\star \leq \varrho$, $\varrho^\nabla = \varrho$, $m^\star < m$, $m^\nabla < m$, a všetky uvedené mantisy majú rovnaký stupeň $\nu + 2$.

Porovnajme najprv m a $\overline{m}$: Mantisa $\overline{m}$ začína väčšou mantisou z $m^\star$, m^∇ a potom má $\nu+3$, vo všeobecnosti $\nu+4$ núl. Nech je väčšia napr. $m^\star$. Vieme, že $m^\star < m$, takže prvé číslo, na ktorom sa odlišujú je v $m^\star$ menšie alebo je $m^\star$ nejaký počiatočný úsek mantisy m. Potom i $\overline{m}$, ktorá začína mantisou $m^\star$, je menšia ako m, lebo buď sa líšia na niektorej číslici z $m^\star$ alebo $m^\star$ skončila skôr ako m a je za ňou najmenej $\nu+3$ núl, pričom m v sebe môže obsahovať maximálne $\nu+2$ núl za sebou a z obecnej podmienky kladenej na mantisy končí jedničkou. Z toho plynie, že $\overline{m} < m$.

Stupeň mantisy $\overline{m}$ je $\nu+4$ a stupeň mantisy m je $\nu+2$. Stupeň mantisy $\overline{m}$ je presne o 2 viac ako stupeň mantisy m. Keby bola z dvojice $m^\star$, m^∇ väčšia mantisa m^∇, tak úvaha prebehne takto isto a dovedie nás k rovnakému záveru.

Porovnajme teraz ϱ a $\overline{\varrho}$. Platí:

- $\varrho \geq \nu+2$
- $\overline{\varrho} \geq \nu+4$

Vzhľadom na to, že chceme dôjsť k výsledku $\overline{\varrho} \leq \varrho$, to zatiaľ nevyzerá dobre.

Pokračujme v analýze. Zapojme podmienku o spojkách v zadných formulách sekventu pred hlavnou premisou. Maximálny počet logických spojok v týchto formulách ovplyvňuje nadbytky numerusov, nech výraz (spojky$|\ \mathcal{B}\ |$) vyjadruje počet logických spojok vo formuli $\mathcal{B}$:

- $\varrho \geq \nu+2+2(\text{spojky} \mid \mathcal{A}\&\mathcal{C} \mid) = \nu+2+2(x+i) = \nu+2+2x+2i$, kde (spojky$|\ \mathcal{A}\ |$) $= x \geq 0$ a $i \geq 1$.
- $\overline{\varrho} \geq \nu+4+2(\text{spojky} \mid \mathcal{A} \mid) = \nu+4+2x$

Položme: $\varrho = \nu+2+(\text{nadbytok})_\varrho$, kde vidíme, že $(\text{nadbytok})_\varrho \geq 2x+2i \geq 2$. Vieme, že $(\text{nadbytok})_\varrho = (\text{nadbytok})_{\varrho^\nabla}$, lebo $\varrho = \varrho^\nabla$ a mantisy m, m^∇ majú rovnaký stupeň.

Z definície nadbytku ďalej vidíme:

$$\overline{\varrho} \geq \nu+4+(\text{nadbytok})_{\varrho^\nabla} - 2 = \nu+2+(\text{nadbytok})_\varrho.$$

Použili sme $(\text{nadbytok})_{\varrho^\nabla}$, pretože je to maximálny nadbytok premís. Vieme to z toho, že $\varrho^\star \leq \varrho$ pričom mantisy m, $m^\star$ a m^∇ majú rovnaký stupeň, čo vedie k tomu, že $(\text{nadbytok})_{\varrho^\star} \leq (\text{nadbytok})_{\varrho^\nabla}$.

Zistili sme, že $\overline{\varrho}$ je najmenšie prirodzené číslo také, ktoré spĺňa:

- $\overline{\varrho} \geq \nu + 4 + 2x$, kde $x \geq 0$.
- $\overline{\varrho} \geq \nu + 2 + (\text{nadbytok})_\varrho$, kde $(\text{nadbytok})_\varrho \geq 2$

Keby platilo:

$$\nu + 4 + 2x \leq \underbrace{\nu + 2 + (\text{nadbytok})_\varrho}_{\varrho}$$

tak dostaneme požadované $\overline{\varrho} = \varrho$.

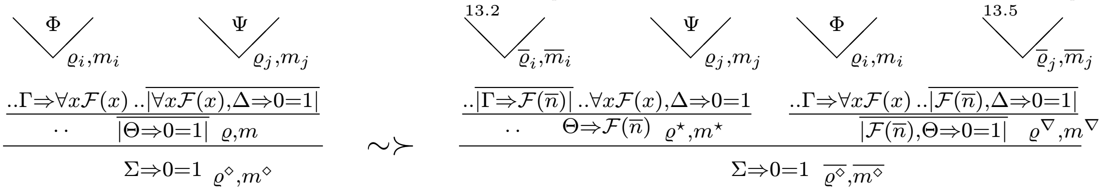
Nech teda platí, že $\nu + 2 + (\text{nadbytok})_\varrho < \nu + 4 + 2x$. To by znamenalo $\overline{\varrho} > \varrho$. Doveďme predpoklad $\nu + 2 + (\text{nadbytok})_\varrho < \nu + 4 + 2x$ do sporu:

$$\begin{array}{lcl}
\nu + 4 + 2x - (\nu + 2 + (\text{nadbytok})_\varrho) & > & 0 \\
\nu + 4 + 2x - \nu - 2 - (\text{nadbytok})_\varrho & > & 0 \\
2 + 2x - (\text{nadbytok})_\varrho & > & 0 \\
2 + 2x & > & (\text{nadbytok})_\varrho
\end{array}$$

Vieme ale, že $(\text{nadbytok})_\varrho \geq 2x + 2i$, kde $i \geq 1$. Dostávame spor. Z toho plynie, že naozaj $\overline{\varrho} = \varrho$.

e4) Budeme rozlišovať 4 podprípady. (Tento prípad mal Gentzen popísaný extrémne stručne.)

1.) Výsledný sekvent vznikol aplikovaním reťazového pravidla. Hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Pre jej odvodenie existuje redukčný krok. Nech po ňom ostala nezmenená a posledný krok v odvodení hlavnej premisy je reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e3 (redukcia e3 výsledný sekvent nemení). Potom celková redukcia takéhoto odvodenia vyzerá nasledovne:



Hlavná premisa, o ktorú sa jedná, je sekvent $\langle \Theta \Rightarrow 0 = 1 \rangle$. Namiesto nej máme v redukovanom odvodení dve nové premisy, a to $\langle \Theta \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n}) \rangle$ a $\langle \mathcal{F}(\overline{n}), \Theta \Rightarrow 0 = 1 \rangle$. Sú to výsledky dvoch pomocných reťazových pravidiel, s akými sa pracuje pri redukcii e3. Nerobíme s nimi ale tretie reťazové pravidlo, ako vyžaduje štandardná redukcia podľa e3. Dosadíme ich jednoducho namiesto výsledku nevykonaného tretieho reťazového pravidla (teda hlavnej premisy $\langle \Theta \Rightarrow 0 = 1 \rangle$). Celkový výsledný sekvent $\langle \Sigma \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ je taký istý ako pred redukciou.

Z doterajšieho dôkazu je zrejmé:

- Z Lemmy e1 máme, že $\varrho_i = \overline{\varrho}_i$, $\overline{m}_i < m_i$, mantisy $\overline{m}_i$ a m_i majú rovnaký stupeň.
- Z Lemmy e2 máme, že $\varrho_j = \overline{\varrho}_j$, $\overline{m}_j < m_j$, mantisy $\overline{m}_j$ a m_j majú rovnaký stupeň.
- Z rozboru redukcie e3 máme, že $\varrho^\star \leq \varrho$, $m^\star < m$, mantisy $m^\star$ a m majú rovnaký stupeň $\nu + 2$.
- Z rozboru redukcie e3 máme, že $\varrho^\nabla = \varrho$, $m^\nabla < m$, mantisy m^∇ a m majú rovnaký stupeň $\nu + 2$.

Chceme porovnať ordinálne čísla $\varrho^\diamond, m^\diamond$ a $\overline{\varrho^\diamond}, \overline{m^\diamond}$:

- Obe mantisy $m^\diamond$, $\overline{m^\diamond}$ majú rovnaký stupeň, a to $\nu + 2 + i$, kde $i \geq 2$ a ν je maximálny stupeň mantís ordinálnych čísel odvodení (najvrchnejších nakreslených) premís. Sekventy $\langle \Theta \Rightarrow 0 = 1 \rangle$, $\langle \Theta \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{n}) \rangle$ a $\langle \mathcal{F}(\overline{n}), \Theta \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ majú v čísle svojho odvodenia mantisu so stupňom $\nu + 2$, ale s nimi sú pri aplikovaní reťazového pravidla využívané ešte iné sekvnety, ktoré maximálny stupeň mantís premís môžu zväčšiť. Každopádne v starom i novom odvodení rovnako, pretože zvyšné premisy v starom i novom odvodení sú rovnaké. Vieme, že $m^\star < m$ a $m^\nabla < m$, takže mantisa m hlavnej premisy zo starého odvodenia bola v novom odvodení nahradená dvoma menšími mantisami. Výsledkom je celkové zmenšenie $\overline{m^\diamond} < m^\diamond$.
- Pre numerusy platí: $\varrho^\diamond \geq (\nu + 2 + i)$ a $\overline{\varrho^\diamond} \geq (\nu + 2 + i)$, kde $i \geq 2$. Budú nás zaujímať nadbytky. Tie závisia od nadbytkov numerusov čísel pre odvodenia premís a od maximálneho počtu spojok v zadnej formuli sekventov pred hlavnou premisou. Maximálny nadbytok premís v oboch odvodeniach je taký istý, a to buď $\varrho - (\nu + 2) = \varrho^\nabla - (\nu + 2) \geq \varrho^\star - (\nu + 2)$, alebo maximálny nadbytok patrí nejakej nenakreslenej premise a tieto sú v oboch odvodeniach rovnaké.

Čo sa maximálneho počtu spojok v zadnej formuli sekventu pred hlavnou premisou týka, tak sú opäť dve možnosti. Buď maximálny počet „zabezpečí“ nejaký nenakreslený sekvent, a potom $\varrho^\diamond = \overline{\varrho^\diamond}$, alebo by mohol byť maximálny počet logických spojok v novom odvodení vo formuli $\mathcal{F}(\overline{n})$. Znamená to, že skúmaný maximálny počet v starom odvodení je menší/rovný ako počet spojok v $\mathcal{F}(\overline{n})$. (Ak by bol väčší, tak by to spôsobila nejaká nenakreslená formula. Taká istá sa nachádza aj v novom odvodení a to by bol spor s tým, že max. počet log. spojok má formula $\mathcal{F}(\overline{n})$). To nám ale nevadí. Počet spojok do rátania nadbytkov v tomto prípade nezasiahne, pretože ukážeme:

$$\underbrace{((\text{nadbytok})_\varrho - 2)}_{\text{nadbytok čísel } (\varrho^\diamond, m^\diamond),\ (\overline{\varrho^\diamond}, \overline{m^\diamond})\text{je aspoň toto}} \qquad \geq \quad (2 \cdot \text{spojky} \mid \mathcal{F}(\overline{n}) \mid)$$

Rátajme:

$(\text{nadbytok})_\varrho - 2 \geq 2(\text{spojky} \mid \forall x \mathcal{F}(x) \mid) - 2 = 2(y+1) - 2 = 2y$, kde $y = \text{spojky} \mid \mathcal{F}(x) \mid$

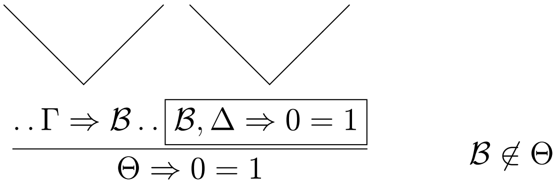
Ukázali sme, čo sa požadovalo. Keď zhrnieme, ako vyzerá sitácia v prípade, že maximálny počet logických spojok v zadnej formuli sekventu pred hlavnou premisou v novom odvodení je vo formuli $\mathcal{F}(\overline{n})$, tak jediné možné usporiadanie preskúmaných veličín (ovplyvňujúcich nadbytok numerusov $\varrho^\diamond$ a $\overline{\varrho^\diamond}$) je:

$$(\text{nadbytok})_\varrho - 2 \geq (2 \cdot \text{spojky} \mid \mathcal{F}(\overline{n}) \mid) \geq 2 \cdot \kappa$$

kde, κ predstavuje maximálny počet logických spojok v zadnej formuli sekventu pred hlavnou premisou v starom odvodení.

Keďže $(\text{nadbytok}_\varrho) = (\text{nadbytok}_{\varrho^\nabla})$ a numerus je najmenšie prirodzené číslo spĺňajúce všetky tri podmienky formulované na strane 39, tak rozhodujúcu rolu pri určovaní nadbytkov numerusov $\varrho^\diamond$ a $\overline{\varrho^\diamond}$ budú hrať maximálne nadbytky numerusov odvodení premís a počty logických spojok nezavážia. Dostaneme opäť $\varrho^\diamond = \overline{\varrho^\diamond}$.

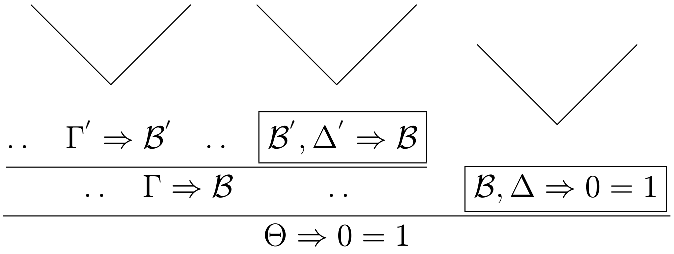
2.) Výsledný sekvent vznikol aplikovaním reťazového pravidla. Hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Pre jej odvodenie existuje redukčný krok. Nech pri ňom na ňu bola uplatnená redukcia podľa 13.5 a dotknutá predná formula $\mathcal{B}$ sa pri reťazovom pravidle nedostala k predným formulám výsledného sekventu, lebo sa nachádzala ako zadná formula nejakého sekventu pred hlavnou premisou (zatiaľ identické s prípadom e3):



$$\frac{..\Gamma \Rightarrow \mathcal{B}..\ \boxed{\mathcal{B},\Delta \Rightarrow 0=1}}{\Theta \Rightarrow 0=1} \qquad \mathcal{B} \notin \Theta$$

Formula $\mathcal{B}$ nie je atomická uzavretá formula, pretože je aktérkou redukcie podľa 13.5. Aj pre premisu $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$, ktorá teda nie je v cieľovej forme, existuje z predpokladu redukcia jej odvodenia. Nech po ňom ostala nezmenená a posledný krok v jej odvodení je reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e3 (odlišnosť od prípadu e3).

Opísaný prípad vyzerá takto a dôjdeme k nasledujúcemu záveru:



$$\cfrac{\cfrac{..\ \Gamma' \Rightarrow \mathcal{B}'\ ..\ \boxed{\mathcal{B}',\Delta' \Rightarrow \mathcal{B}}}{..\ \Gamma \Rightarrow \mathcal{B}\ ..} \quad \boxed{\mathcal{B},\Delta \Rightarrow 0=1}}{\Theta \Rightarrow 0=1}$$

Keď odvodenie premisy $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{B} \rangle$ vyžaduje redukciu e3, tak formula $\mathcal{B}$ musí byť 0=1. To je ale spor s tým, že formula $\mathcal{B}$ nie je atomická. Preto takýto prípad nemôže nastať.

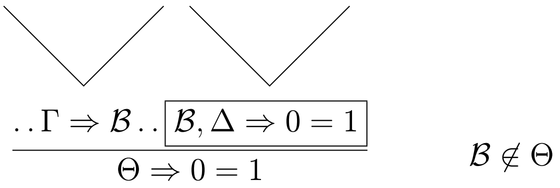
Prípady 3.) a 4.) preskúmame súčasne:

Sú to prípady podobné prípadom 1.) a 2.) až na to, že sekvent, ktorý pri redukcii svojho odvodenia ostal nezmenený, nebude odvodený reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e3, ale ľubovoľným iným pravidlom, ktoré výsledný sekvent pri redukcii tiež nemení.

Popíšme si situáciu pre prípady 3 a 4 presne:

3.) Výsledný sekvent vznikol aplikovaním reťazového pravidla. Hlavná premisa nie je v cieľovej forme. Pre jej odvodenie existuje redukčný krok. Nech po ňom ostala nezmenená a posledný krok v odvodení hlavnej premisy *nie* je reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e3.

4.) Nech pri redukčnom kroku odvodenia hlavnej premisy bola na ňu uplatnená redukcia podľa 13.5 a dotknutá predná formula $\mathcal{B}$ sa pri reťazovom pravidle nedostala k predným formulám výsledného sekventu, lebo sa nachádzala ako zadná formula nejakého sekventu pred hlavnou premisou:



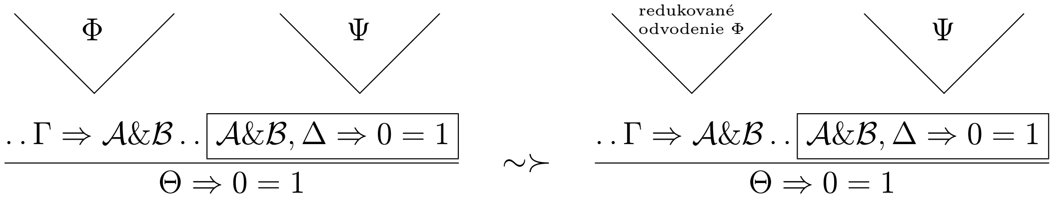
$$\dfrac{..\,\Gamma \Rightarrow \mathcal{B}\,..\ \boxed{\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow 0 = 1}}{\Theta \Rightarrow 0 = 1} \qquad \mathcal{B} \notin \Theta$$

Keďže $\mathcal{B}$ nie je uzavretá atomická formula, tak daný sekvent nie je v cieľovej forme, a preto existuje redukcia jeho odvodenia. Nech po nej ostal nezmenený a posledný krok jeho odvodenia *nie* je reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e3.

Popíšme redukciu v týchto prípadoch:

Pre prípad 3.) platí, že si jednoducho vezmeme redukované odvodenie hlavnej premisy, ktorého výsledný sekvent je zas ona sama nezmenená. Reťazové pravidlo ostane korektné, výsledný sekvent v starom a novom odvodení sa nezmenil.

V prípade 4.) vykonáme redukčný krok iba na odvodení nezmenenej premisy, hlavnú premisu ako aj jej odvodenie necháme stáť:



$$\dfrac{..\,\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B}\,..\ \boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow 0 = 1}}{\Theta \Rightarrow 0 = 1} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{..\,\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B}\,..\ \boxed{\mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow 0 = 1}}{\Theta \Rightarrow 0 = 1}$$

Reťazové pravidlo ostane korektné, výsledný sekvent v starom a novom odvodení sa nezmenil.

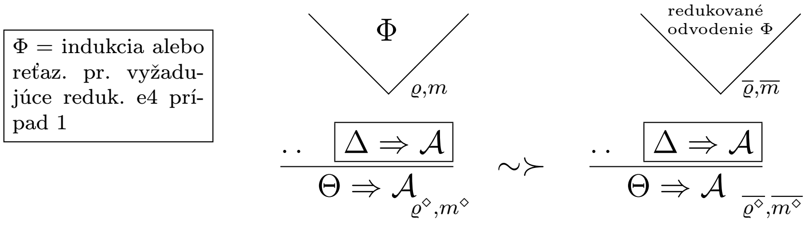
Zmenšenie ordinálnych čísel odvodení po redukcii dokážeme v oboch prípadoch naraz, a to indukciou. Vezmime si také využitie reťazového pravidla, že toto pri redukcii použije krok e4, prípad 3 alebo 4 a súčasne nad ním už také iné reťazové pravidlo nie je.

Ak je vybrané reťazové pravidlo také, že sa redukuje podľa e4 prípad 3, tak jeho hlavná premisa musela byť odvodená jedným z týchto pravidiel:

- indukcia
- reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e4 prípad 1

Nemohla byť odvodená reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e3, pretože toto pravidlo je z definície analyzovaného prípadu zakázané a tiež nemohla byť odvodená reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e4 prípad 3 alebo 4, pretože by to bol spor s úvodnou voľbou. Redukcie odvodení, ktorých posledné využité pravidlo je iné ako práve spomínané, výsledný sekvent menia, a preto neprichádzajú do úvahy.

Skúmaná redukcia vyzerá takto:



Pre ordinálne číslo odvodenia hlavnej premisy $\langle \Delta \Rightarrow \mathcal{A} \rangle$ platí:

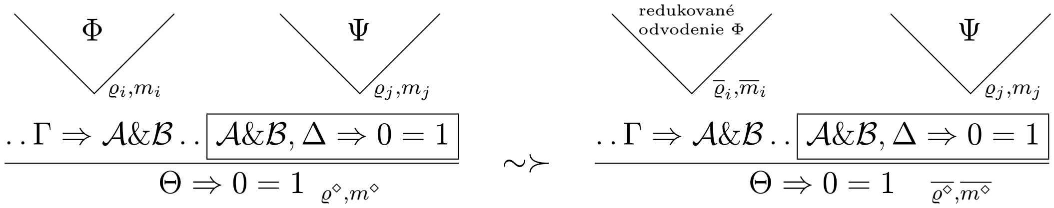
- Ak bola odvodená indukciou, tak $\overline{\varrho} \leq \varrho$, $\overline{m} < m$, mantisy $\overline{m}$ a m majú rovnaký stupeň.
- Ak bola odvodená reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu podľa e4 prípad 1, tak $\overline{\varrho} = \varrho$, $\overline{m} < m$, mantisy $\overline{m}$ a m majú rovnaký stupeň.

Potom pre čísla $\varrho^\diamond, m^\diamond$ a $\overline{\varrho^\diamond}, \overline{m^\diamond}$ celých odvodení platí:

- Mantisy $m^\diamond$ a $\overline{m^\diamond}$ majú rovnaký stupeň.
- $\overline{m^\diamond} < m^\diamond$
- $\overline{\varrho^\diamond} \leq \varrho^\diamond$

Ak je „prvé nájdené“ reťazové pravidlo také, že sa naopak redukuje podľa e4 prípad 4, tak jeho (pomocná) premisa $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B} \rangle$ musela byť odvodená jedným z týchto pravidiel:

- indukcia
- reťazové pravidlo vyžadujúce redukciu e4 prípad 1



Opäť vynde, že mantisy $\overline{m^\diamond}$ a $m^\diamond$ majú rovnaký stupeň, $\overline{m^\diamond} < m^\diamond$, $\overline{\varrho^\diamond} \leq \varrho^\diamond$.

Vyslovme *indukčný prepoklad*: Nech pre sekvent odvodený reťazovým pravidlom, ktoré vyžaduje redukciu e4 prípad 3 resp. 4 už platí, že číslo redukovaného odvodenia je menšie, lebo mantisa sa zmenšila, stupeň si zachovala a numerus sa nezväčšil. Chceme ukázať, že to platí aj pre nasledujúci sekvent odvodený reťazovým pravidlom vyžadujúcim redukciu e4 prípad 3 resp. 4. Úvaha prebehne presne tak isto, ako úvaha, ktorá predchádzala indukčnému predpokladu.

Týmto je rozbor prípadov ukončený a je dokázané, že všetky redukcie odvodení spôsobia zmenšenie ordinálneho čísla redukovaného odvodenia oproti odvodeniu starému. Takže sa raz musíme dostať k odvodeniu, ktorého ordinálne číslo sa zmenšiť nedá, to znamená, k odvodeniu, ktoré sa viac redukovať nedá, teda jeho výsledný sekvent je v cieľovej forme. Odvodenie sekventu $\langle \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ nie je možné redukovať tak, aby jeho výsledný sekvent bol po redukcii zmenený, pretože pre sekvent $\langle \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ nie je definovaný žiadny redukčný krok. Zároveň tento sekvent nie je v cieľovej forme. Preto by sa jeho odvodenie malo dať redukovať donekonečna a každá redukcia by zmenšila ordinálne číslo daného odvodenia. To je spor s tým, že ordinálne čísla sú dobre usporiadané. Dostávame, že sekvent $\langle \Rightarrow 0 = 1 \rangle$ nie je možné odvodiť v Peanovej aritmetike.

3 Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie

(1938)

3.1 Zavedenie kalkulu

Chceme zaviesť sekventový kalkulus pre Peanovu aritmetiku, ktorá má jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot, \mathrm{S}, =, 0\}$. Gentzen sa rozhodol, použiť v tomto dôkaze kalkul $\mathcal{LK}$, ktorý zaviedol vo svojej dizertácii, pretože sa lepšie hodí na teoretické skúmania ako kalkul prirodzenej dedukcie (z minulého dôkazu). Kalkul $\mathcal{LK}$ je gentzenovský kalkul, ako ho poznáme dnes. Budeme mať dva druhy iniciálnych sekventov a tri druhy odvodzovacích pravidiel.

3.2 Iniciálne sekventy

Logické iniciálne sekventy majú tvar $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \rangle$, kde $\mathcal{D}$ je ľubovoľná formula v jazyku $\mathcal{L}$. Matematické iniciálne sekventy sú vytvorené z axiómov rovnosti a axiómov Robinsonovej aritmetiky nasledujúcim spôsobom (myšlienka použiť len atomické formule pochádza od Gentzena):

- $\langle \Rightarrow s = s \rangle$
- $\langle s = t \Rightarrow t = s \rangle$
- $\langle r = s, s = t \Rightarrow r = t \rangle$
- $\langle s_1 = t_1, .\,., s_n = t_n \Rightarrow \mathcal{F}(s_1, .\,., s_n) = \mathcal{F}(t_1, .\,., t_n) \rangle$
- $\langle s_1 = t_1, .\,., s_n = t_n, \mathcal{R}(s_1, .\,., s_n) \Rightarrow \mathcal{R}(t_1, .\,., t_n) \rangle$

kde r, s, t, $s_1, .\,., s_n$, $t_1, .\,., t_n$ sú ľubovoľné termy jazyka $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ je n-árny funkčný symbol jazyka $\mathcal{L}$ a $\mathcal{R}$ je n-árny predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}$.

- $\langle \mathrm{S}(s) = \mathrm{S}(t) \Rightarrow s = t \rangle$
- $\langle \mathrm{S}(s) = 0 \Rightarrow \rangle$
- $\langle \Rightarrow s + 0 = s \rangle$
- $\langle \Rightarrow s + \mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(s + t) \rangle$
- $\langle \Rightarrow s \cdot 0 = 0 \rangle$
- $\langle \Rightarrow s \cdot \mathrm{S}(t) = s \cdot t + s \rangle$

kde s, t sú ľubovoľné termy jazyka $\mathcal{L}$.

Vidíme, že sekventy vytvorené z aritmetických axiómov zodpovedajú axiómom Robinsonovej aritmetiky v tomto poradí:

- $\forall x(\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \to x = y)$
- $\forall x(\mathrm{S}(x) \neq 0)$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x, y(x + \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x + y))$
- $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
- $\forall x, y(x \cdot \mathrm{S}(y) = x \cdot y + x)$

Vidíme tiež, že chýba axióm $\forall x(x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x)$. Svoj proťajšok v sekventovom kalkule nemá, pretože sa dá pomocou indukcie dokázať z ostatných axiómov (viz. príklady odvodení).

Definícia 4. Stupeň formule *je počet logických spojok a kvantifikátorov, ktoré sa v nej nachádzajú.*

3.3 Odvodzovacie pravidlá

Štrukturálne pravidlá:

- Výmena: $\frac{\Gamma,\mathcal{A},\mathcal{B},\Delta\Rightarrow\Theta}{\Gamma,\mathcal{B},\mathcal{A},\Delta\Rightarrow\Theta}, \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A},\mathcal{B},\Theta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{B},\mathcal{A},\Theta}$
- Kontrakcia: $\frac{\mathcal{A},\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta}{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta}, \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A},\mathcal{A}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}}$
- Oslabenie: $\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta}{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta}, \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}}$
- Rez: $\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{D} \quad \mathcal{D},\Theta\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Sigma}$

Všetky štrukturálne pravidlá okrem rezu nazývame *slabé*. *Stupeň rezu* je stupeň „rezanej formule“ $\mathcal{D}$. Táto sa nazýva *vstupná* formula rezu.

Pravidlo indukcie:

- $\dfrac{\mathcal{F}(a), \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathcal{F}(\mathrm{S}(a))}{\mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathcal{F}(t)}$,

  kde t je ľubovoľný term v jazyku $\mathcal{L}$, môže obsahovať i a. Premenná a je *eigenvariable* indukcie, tj. a nie je voľná v $\mathcal{F}(0)$, Γ, Δ. *Stupeň indukcie* je stupeň formule $\mathcal{F}(a)$.

Logické pravidlá:

Spojka	Right	Poznámka	Left	Poznámka
$\&$	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A} \quad \Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{B}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}\&\mathcal{B}}$		$\dfrac{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta}{\mathcal{A}\&\mathcal{B},\Gamma\Rightarrow\Delta}$	
$\bigvee$	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}\bigvee\mathcal{B}}$		$\dfrac{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta \quad \mathcal{B},\Gamma\Rightarrow\Delta}{\mathcal{A}\bigvee\mathcal{B},\Gamma\Rightarrow\Delta}$	
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma,\mathcal{A}\Rightarrow\Delta,\mathcal{B}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}}$		$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A} \quad \Gamma,\mathcal{B}\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}\Rightarrow\Delta}$	
$\neg$	$\dfrac{\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\mathcal{A}}$		$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{A}}{\neg\mathcal{A},\Gamma\Rightarrow\Delta}$	
$\forall$	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{F}_x(a)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\forall x\mathcal{F}(x)}$	♣	$\dfrac{\mathcal{F}_x(t),\Gamma\Rightarrow\Delta}{\forall x\mathcal{F}(x),\Gamma\Rightarrow\Delta}$	♠
$\exists$	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\mathcal{F}_x(t)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\exists x\mathcal{F}(x)}$	♠	$\dfrac{\mathcal{F}_x(a),\Gamma\Rightarrow\Delta}{\exists x\mathcal{F}(x),\Gamma\Rightarrow\Delta}$	♣

♣ - Jedná sa o pravidlá *generalizácie*. Premenná a musí byť substituovateľná za x do formule $\mathcal{F}$, nazýva sa *eigenvariable*, nesmie mať voľné výskyty v $\Gamma\bigcup\Delta\bigcup\{\forall x\mathcal{F}(x)\}$ resp. $\Gamma\bigcup\Delta\bigcup\{\exists x\mathcal{F}(x)\}$.

♠ - Jedná sa o pravidlá *špecifikácie*. Term t je ľubovoľný term jazyka $\mathcal{L}$ a musí by substituovateľný za x do formule $\mathcal{F}$.

Pre takýto kalkulus platí *subformula property*. Formule, ktoré po použití log. pravidla vznikli, nazývame *principálne*. Formule, ktoré pri tom zmizli, nazývame *vstupné*. Ostatné formule sú *postranné*. Pre slabé štrukturálne pravidlá platí, že formule z horného sekventu, s ktorými pravidlo manipuluje sú *vstupné*, tie isté formule v dolnom sekventu sú *principálne* a ostatné sú *postranné*.

3.4 Príklady odvodení

Odvoďme v tomto kalkule schému indukcie, ako by ju formuloval Hilbertovský kalkulus pre PA:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\varphi(a)\Rightarrow\varphi(a)\rangle \quad \langle\varphi(\mathrm{S}(a))\Rightarrow\varphi(\mathrm{S}(a))\rangle}{\langle\varphi(a),\varphi(a)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(a))\Rightarrow\varphi(\mathrm{S}(a))\rangle}\ \text{oslabenia, }\rightarrow\text{ left}}{\langle\varphi(a),\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(x)))\Rightarrow\varphi(\mathrm{S}(a))\rangle}\ \forall\text{ left}}{\langle\varphi(0),\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(x)))\Rightarrow\varphi(z)\rangle}\ \text{indukcia, } a \text{ je eigenvar.}}{\langle\varphi(0),\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(x)))\Rightarrow\forall x\varphi(x)\rangle}\ \forall\text{ right, } z \text{ je eigenvar.}}{\langle\varphi(0),\varphi(0)\&\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(x)))\Rightarrow\forall x\varphi(x)\rangle}\ \&\text{ left}}{\langle\varphi(0)\&\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(x)))\Rightarrow\forall x\varphi(x)\rangle}\ \&\text{ left, kontrakcia}}{\langle\Rightarrow[\varphi(0)\&\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(\mathrm{S}(x)))]\rightarrow\forall x\varphi(x)\rangle}\ \rightarrow\text{ right}$$

Odvoďme v tomto kalkule axióm PA $\forall x(x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x)$. Vytvoríme najprv dve pomocné pododvodenia, ich výsledky spojíme pravidlom & right, napokon využijeme predchádzajúce odvodenie a rez:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle \Rightarrow 0 = 0\rangle}{\langle \Rightarrow 0 = 0, \exists y \mathrm{S}(y) = 0\rangle}\;\text{oslabenie}}{\langle 0 \neq 0 \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = 0\rangle}\;\neg\text{ left}}{\langle \Rightarrow 0 \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = 0\rangle}\;\to\text{ right}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{oslabenie}\;\;\neg\text{ right}, \neg\text{ left}\;\dfrac{\dfrac{\text{∃ right}\;\dfrac{\langle x = 0 \Rightarrow \mathrm{S}(0) = \mathrm{S}(x)\rangle}{\langle x = 0 \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}}{\langle x = 0 \Rightarrow \mathrm{S}(x) = 0, \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}}{\langle \mathrm{S}(x) \neq 0 \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x), x \neq 0\rangle} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle \mathrm{S}(a) = x \Rightarrow \mathrm{S}(\mathrm{S}(a)) = \mathrm{S}(x)\rangle}{\langle \mathrm{S}(a) = x \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}\;\exists\text{ right}}{\langle \exists y \mathrm{S}(y) = x \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}\;\exists\text{ left}}{\langle \exists y \mathrm{S}(y) = x \Rightarrow \mathrm{S}(x) = 0, \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}\;\text{oslabenie}}{\langle \mathrm{S}(x) \neq 0, \exists y \mathrm{S}(y) = x \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}\;\neg\text{ left}}{\langle \mathrm{S}(x) \neq 0, (x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x) \Rightarrow \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x)\rangle}\;\to\text{ left}}{\langle (x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x) \Rightarrow (\mathrm{S}(x) \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x))\rangle}\;\to\text{ right}}{\langle \Rightarrow \forall x[(x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x) \to (\mathrm{S}(x) \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x))]\rangle}\;\to\text{ right}, \forall\text{ right}$$

Pravidlom & right by sme odvodili sekvent, ktorý nemá predné formule a vzadu má konjunkciu zo zadných formulí práve odvodených sekventov. Využime predposledný odvodený sekvent z minulého príkladu

$$\langle \varphi(0) \& \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{S}(x))) \Rightarrow \forall x \varphi(x)\rangle,$$

kde za formulu $\varphi(x)$ dosadíme formulu

$$x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x.$$

Teraz na tento sekvent a sekvent s konjunkciou vzadu použijeme rez, čím získame formulu $\forall x \varphi(x)$, teda $\forall x(x \neq 0 \to \exists y \mathrm{S}(y) = x)$. Je to axióm PA, ktorý sme chceli odvodiť.

3.5 Syntaktické pojmy

1. *Následník, predchodca*: Nech $\mathcal{E}$ je formula v hornom sekvente nejakého pravidla. Následník pre formulu $\mathcal{E}$ je definovaný nasledovne:

- Ak $\mathcal{E}$ je vstupná formula rezu, tak následníka nemá.
- Ak $\mathcal{E}$ je vstupná formula v pravidle inom ako rez a výmena, tak jej následník je principálna formula daného pravidla.
- Ak $\mathcal{E}$ je vstupná formula vo výmene, nazvyme ju $\mathcal{C}$, tak $\mathcal{C}$ v dolnom sekvente výmeny je jej následník.
- Ak $\mathcal{E}$ je postranná formula ľubovoľného pravidla, tj. je v postupnosti napr. Γ na k-tom mieste, tak k-ta formula v postupnosti Γ z dolného sekventu daného pravidla je jej následníkom.

Formula $\mathcal{E}$ je predchodca svojmu následníkovi.

Je jasné, že v logických pravidlách tvoria vstupná a principálna formula pár predchodca-následník. Zjednodušene sa dá povedať, že pre postrannú formulu platí, že následník je ona sama sebe v dolnom sekvente (jej výskyt v dolnom sekvente). U štrukturálnych pravidiel je výnimočné pravidlo rezu, kde vstupná formula mizne a následníka nemá. Inak rovnaké formule v hornom a dolnom sekvente tvoria pár predchodca-následník. Pri kontrakcii platí, že následník vstupných formulí má dvoch predchodcov. Principálna formula v pravidle oslabenie nemá predchodcu. Pri indukcii je následníkom formule $\mathcal{F}(a)$ formula $\mathcal{F}(0)$ a následníkom formule $\mathcal{F}(\mathrm{S}(a))$ je $\mathcal{F}(t)$. Inak opäť rovnaké formule v hornom a dolnom sekvente tvoria pár predchodca-následník.

2. *Vlákno*: Postupnosť sekventov, ktoré prejdeme, keď ideme v odvodení od istého iniciálneho sekventu nadol k výslednému sekventu odvodenia. Sekvent $\mathcal{S}_1$ je nad $\mathcal{S}_2$, keď $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sú v tom istom vlákne a $\mathcal{S}_1$ sa vyskytuje bližšie k začiatku odvodenia. Ak $\mathcal{S}_1$ je nad $\mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_2$ je nad $\mathcal{S}_3$, tak $\mathcal{S}_2$ je medzi $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_3$. *Pravidlo je pod sekventom $\mathcal{S}$, ak jeho dolné sekventy sú pod $\mathcal{S}$.* Každé pravidlo je pod svojim horným sekventom.

3. *Línia*: Je to postupnosť formulí v odvodení, ktorá má nasledujúce vlastnosti:

- Začína formulou z iniciálneho sekventu alebo principálnou formulou z oslabenia.

- Končí formulou z posledného sekventu alebo vstupnou formulou rezu. Ak končí formulou z posledného sekventu, tak je to *explicitná* línia. Ak končí vstupnou formulou rezu, tak je to *implicitná* línia.
- Každá formula v línii okrem poslednej je nasledovaná svojím následníkom.

Krok odvodenia používajúci logické pravidlo je *explicitný* alebo *implicitný* podľa toho, či je vstupná formula pravidla explicitná alebo implicitná. Formula z explicitnej línie je explicitná. Formula z implicitnej línie je implicitná.

4. *Predok, potomok*: Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú formule patriace do tej istej línie. Nech $\mathcal{A}$ je v tejto línii vyššie než $\mathcal{B}$. Potom $\mathcal{A}$ je predok $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ je potomok $\mathcal{A}$.

5. *Finálny úsek*: Finálny úsek je časť odvodenia. Sekvent je vo finálnom úseku práve vtedy, keď žiadne implicitné logické odvodzovacie pravidlo nie je pod týmto sekventom (tj. keď dolný sekvent žiadneho implicitného logického pravidla nie je pod týmto sekventom). Keď si vezmeme nejaké najnižšie implicitné logické pravidlo v odvodení, tak jeho dolné sekventy patria do finálneho úseku a horné už nie.

My sa budeme zaujímať o odvodenie sporu, teda sekventu $\langle \Rightarrow \rangle$. Vidíme, že pred koncom odvodenia musia všetky formule zmiznúť, a to môžu jedine rezom. To znamená, že všetky logické pravidlá v odvodení sú implicitné. Preto finálny úsek v odvodení sporu môžeme opísať takto (uvádzame preto, že je to zjednodušenie obecnej definície):

- Do finálneho úseku patria všetky sekventy, ktoré prejdeme po všetkých vláknach od posledného sekventu $\langle \Rightarrow \rangle$ nahor, kým pri tejto ceste nenarazíme na čiaru patriacu logickému odvodzovaciemu pravidlu. Dolné sekventy tohto pravidla patria ešte do finálneho úseku, horné nie. Finálny úsek obsahuje len štrukturálne pravidlá, pravidlo indukcie a ľubovoľné iniciálne sekventy.

6. *Hranica*: Nech $\mathcal{J}$ je pravidlo použité v odvodení. Povieme, že $\mathcal{J}$ patrí do hranice, keď jeho dolné sekventy sú vo finálnom úseku a horné nie. Ak pravidlo $\mathcal{J}$ patrí do hranice, tak je to isto implicitné logické odvodzovacie pravidlo.

7. *Vhodný rez, esenciálny/neesenciálny rez*: Rez vo finálnom úseku je vhodný, keď obe vstupné formule pravidla rezu majú predka, ktorý je vstupnou formulou odvodzovacieho pravidla z hranice. Vstupná formula neesenciálneho

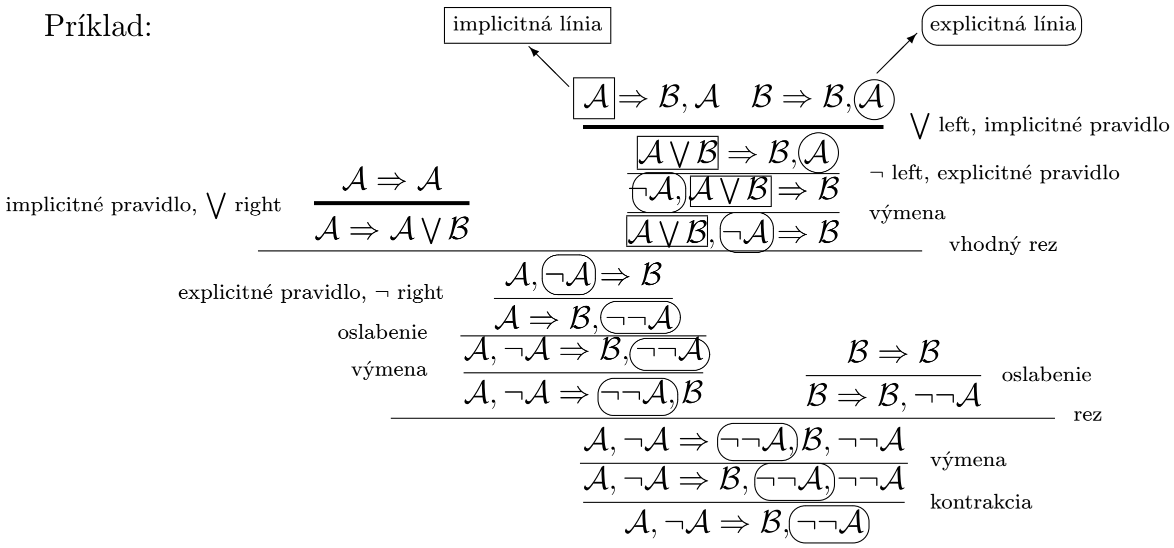
rezu je atomická, v PA teda tvaru $s = t$. Vstupná formula esenciálneho rezu nie je atomická.

8. *Stupeň formule, stupeň rezu, stupeň indukcie*: Stupeň formule je počet logických spojok a kvantifikátorov, ktoré obsahuje. Stupeň rezu je stupeň vstupnej formule pravidla rezu. Stupeň indukcie je stupeň formule $\mathcal{F}(a)$, tj. formule cez ktorú sa robí indukcia.

9. *Výška sekventu*: Výška sekventu $\mathcal{S}$ v odvodení $\mathcal{P}$, píšeme $h(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ resp. $h(\mathcal{S})$, je maximálny stupeň rezu alebo indukcie, ktorá sa vyskytuje v odvodení $\mathcal{P}$ pod sekventom $\mathcal{S}$. Platí:

- Výška výsledného sekventu je 0.
- Ak sekvent $\mathcal{S}_1$ je nad sekventom $\mathcal{S}_2$, tak $h(\mathcal{S}_1) \geq h(\mathcal{S}_2)$.
- Ak sekventy $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sú horné sekventy nejakého pravidla, tak $h(\mathcal{S}_1) = h(\mathcal{S}_2)$.

Príklad:



Logické odvodzovacie pravidlá s hrubšou čiarou tvoria hranicu. Všetky sekventy pod touto čiarou patria do finálneho úseku.

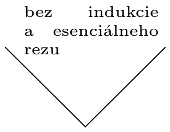
3.6 Pomocné tvrdenia

Lemma 3. ***a)*** *Pre uzavretý term s existuje numerál $\overline{n}$, že sekvent $\langle\Rightarrow s=\overline{n}\rangle$ dokážeme v PA bez indukcie a esenciálneho rezu.*
b) *Nech s, t sú uzavreté termy, že sekvent $\langle\Rightarrow s=t\rangle$ je dokazateľný v PA bez esenciálneho rezu a indukcie. Potom pre ľubovoľnú formulu $\mathcal{F}(x)$ vieme bez esenciálneho rezu a indukcie dokázať sekvent $\langle s=t,\mathcal{F}(s)\Rightarrow\mathcal{F}(t)\rangle$.*

Dôkaz. ***a)*** Dôkaz bude prebiehať indukciou podľa zložitosti termu s.

- $s=0$, tak za hľadaný numerál vezmeme konštantu 0 a sekvent $\langle\Rightarrow 0=0\rangle$ je dokazateľný podľa iniciálneho sekventu pre rovnosť $\langle\Rightarrow s=s\rangle$.

- $s=\mathrm{S}(t)$: Z indukčného predpokladu vieme, že pre uzavretý term t existuje numerál $\overline{m}$, že sekvent $\langle\Rightarrow t=\overline{m}\rangle$ je dokazateľný v PA bez indukcie a esenciálneho rezu. Dokážeme sekvent $\langle\Rightarrow s=\mathrm{S}(\overline{m})\rangle$, teda za hľadaný numerál si vezmeme numerál $\overline{m+1}$:



$$\dfrac{\langle\Rightarrow s=\mathrm{S}(t)\rangle \quad \dfrac{\text{neesenc. rez}\ \dfrac{\langle\Rightarrow t=\overline{m}\rangle \quad \langle t=\overline{m}\Rightarrow \mathrm{S}(t)=\mathrm{S}(\overline{m})\rangle}{\langle\Rightarrow \mathrm{S}(t)=\mathrm{S}(\overline{m})\rangle} \quad \langle s=\mathrm{S}(t),\mathrm{S}(t)=\mathrm{S}(\overline{m})\Rightarrow s=\mathrm{S}(\overline{m})\rangle}{\langle s=\mathrm{S}(t)\Rightarrow s=\mathrm{S}(\overline{m})\rangle}\ \text{tranzitivita a neesenciálny rez}}{\langle\Rightarrow s=\mathrm{S}(\overline{m})\rangle}\ \text{predpoklad a neesenciálny rez}$$

- $s=s_1+s_2$: Termy s_1 a s_2 sú uzavreté. Z indukčného predpokladu máme odvodenia sekventov $\langle\Rightarrow s_1=\overline{m}_1\rangle$ a $\langle\Rightarrow s_2=\overline{m}_2\rangle$, ktoré nevyužívajú indukciu a esenciálny rez. Za hľadaný numerál si zvolíme $\overline{m_1+m_2}$ a dokážeme sekvent $\langle\Rightarrow s=\overline{m_1+m_2}\rangle$. Pri tom sa využije, že m_1 a m_2 sú konkrétne prirodzené čísla, a teda sekvent $\langle\Rightarrow \overline{m}_1+\overline{m}_2=\overline{m_1+m_2}\rangle$ sa dá dokázať bez indukcie. Dané odvodenie tiež nevyužije esenciálny rez. Odvodenie sekventu $\langle\Rightarrow s=\overline{m_1+m_2}\rangle$ je na strane 73.

- $s=s_1\cdot s_2$: Termy s_1 a s_2 sú uzavreté. Z indukčného predpokladu máme odvodenia sekventov $\langle\Rightarrow s_1=\overline{m}_1\rangle$ a $\langle\Rightarrow s_2=\overline{m}_2\rangle$, ktoré nevyužívajú indukciu a esenciálny rez. Za hľadaný numerál si zvolíme $\overline{m_1\cdot m_2}$ a dokážeme sekvent $\langle\Rightarrow s=\overline{m_1\cdot m_2}\rangle$. Vieme, že sekvent $\langle\Rightarrow \overline{m}_1\cdot\overline{m}_2=\overline{m_1\cdot m_2}\rangle$ sa dá dokázať bez indukcie a esenciálnych rezov. Odvodenie sekventu $\langle\Rightarrow s=\overline{m_1\cdot m_2}\rangle$ je také isté, ako odvodenie sekventu $\langle\Rightarrow s=\overline{m_1+m_2}\rangle$, len namiesto + všade píšeme $\cdot$.

$$\begin{array}{c}
\overset{\overset{\text{bez indukcie a esenciálneho rezu}}{\bigtriangledown}}{\langle\Rightarrow s_1=\overline{m}_1\rangle}\langle s_1=\overline{m}_1, s_2=\overline{m}_2\Rightarrow s_1+s_2=\overline{m}_1+\overline{m}_2\rangle \\ \hline
\overset{\overset{\text{bez indukcie a esenciálneho rezu}}{\bigtriangledown}}{\langle\Rightarrow s_2=\overline{m}_2\rangle}\langle s_2=\overline{m}_2\Rightarrow s_1+s_2=\overline{m}_1+\overline{m}_2\rangle \\ \hline
\langle\Rightarrow s_1+s_2=\overline{m}_1+\overline{m}_2\rangle\langle s=s_1+s_2, s_1+s_2=\overline{m}_1+\overline{m}_2\Rightarrow s=\overline{m}_1+\overline{m}_2\rangle \\ \hline
\langle\Rightarrow s=s_1+s_2\rangle\langle s=s_1+s_2\Rightarrow s=\overline{m}_1+\overline{m}_2\rangle \\ \hline
\langle\Rightarrow s=\overline{m}_1+\overline{m}_2\rangle\langle s=\overline{m}_1+\overline{m}_2, \overline{m}_1+\overline{m}_2=\overline{m_1+m_2}\Rightarrow s=\overline{m_1+m_2}\rangle \\ \hline
\overset{\overset{\text{bez indukcie a esenciálneho rezu}}{\bigtriangledown}}{\langle\Rightarrow \overline{m}_1+\overline{m}_2=\overline{m_1+m_2}\rangle}\langle \overline{m}_1+\overline{m}_2=\overline{m_1+m_2}\Rightarrow s=\overline{m_1+m_2}\rangle \\ \hline
\langle\Rightarrow s=\overline{m_1+m_2}\rangle
\end{array}$$

V odvodení sa využili samé neesenciálne rezy a iniciálne sekventy pre rovnosť.

b) Dôkaz bude prebiehať indukciou podľa zložitosti formule $\mathcal{F}(x)$.

- Formula $\mathcal{F}(x)$ je atomická, tj. $\mathcal{R}(x)$. Chceme dokázať sekvent $\langle s=t,\mathcal{R}(s)\Rightarrow\mathcal{R}(t)\rangle$, čo máme priamo z iniciálneho sekventu pre rovnosť.

- Nech $\mathcal{F}(x)=(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(x)$. Z indukčného predpokladu vieme, že sekventy $\langle s=t,\mathcal{A}(s)\Rightarrow\mathcal{A}(t)\rangle$, $\langle s=t,\mathcal{B}(s)\Rightarrow\mathcal{B}(t)\rangle$ sa dajú dokázať v PA bez esenciálneho rezu a indukcie. Chceme dokázať sekvent $\langle s=t,(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(s)\Rightarrow(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(t)\rangle$:

$$\begin{array}{cl}
\overset{\overset{\text{bez indukcie a esenciálneho rezu}}{\bigtriangledown}}{\langle s=t,\mathcal{A}(s)\Rightarrow\mathcal{A}(t)\rangle}\quad \overset{\overset{\text{bez indukcie a esenciálneho rezu}}{\bigtriangledown}}{\langle s=t,\mathcal{B}(s)\Rightarrow\mathcal{B}(t)\rangle} & \\ \hline
\langle s=t,\mathcal{A}(s),\mathcal{B}(s)\Rightarrow\mathcal{A}(t)\&\mathcal{B}(t)\rangle & \text{oslabenia, \& right} \\ \hline
\langle s=t,\mathcal{A}(s)\&\mathcal{B}(s),\mathcal{B}(s)\Rightarrow(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(t)\rangle & \text{\& left} \\ \hline
\langle s=t,\mathcal{A}(s)\&\mathcal{B}(s)\Rightarrow(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(t)\rangle & \text{\& left, kontrakcia} \\ \hline
\langle s=t,(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(s)\Rightarrow(\mathcal{A}\&\mathcal{B})(t)\rangle &
\end{array}$$

- Nech $\mathcal{F}(y)=\forall x\mathcal{A}(x,y)$. Z indukčného predpokladu vieme, že sekvent $\langle s=t,\mathcal{A}(x,s)\Rightarrow\mathcal{A}(x,t)\rangle$ sa dá dokázať v PA bez esenciálneho rezu a indukcie. Chceme dokázať sekvent $\langle s=t,\forall x\mathcal{A}(x,s)\Rightarrow\forall x\mathcal{A}(x,t)\rangle$:

$$\begin{array}{cl}
\overset{\overset{\text{bez indukcie a esenciálneho rezu}}{\bigtriangledown}}{\langle s=t,\mathcal{A}(x,s)\Rightarrow\mathcal{A}(x,t)\rangle} & \\ \hline
\langle s=t,\forall x\mathcal{A}(x,s)\Rightarrow\mathcal{A}(x,t)\rangle & \forall\text{ left} \\ \hline
\langle s=t,\forall x\mathcal{A}(x,s)\Rightarrow\forall x\mathcal{A}(x,t)\rangle & \forall\text{ right}
\end{array}$$

Pravidlo $\forall$ right je pravidlo generalizácie. Premenná x nesmie mať voľné výskyty vo formulách $s = t$, $\forall x \mathcal{A}(x, s)$ a $\forall x \mathcal{A}(x, t)$ To isto nemá, pretože termy, s, t sú uzavreté. V ostatných je viazaná.

- Nech $\mathcal{F}(x) = \neg \mathcal{A}(x)$. Z indukčného predpokladu vieme, že sekvent $\langle s = t, \mathcal{A}(s) \Rightarrow \mathcal{A}(t) \rangle$ sa dá dokázať v PA bez esenciálneho rezu a indukcie. V tomto odvodení môžeme všade namiesto termu t písať term s a naopak, čím sa nám podarí dokázať sekvent $\langle t = s, \mathcal{A}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(s) \rangle$ bez esenciálneho rezu a indukcie. Keďže rovnosť je symetrická, tak i sekvent $\langle s = t, \mathcal{A}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(s) \rangle$. Keď na tento použijeme pravidlá $\neg$ right a $\neg$ left, tak dokážeme požadovaný sekvent $\langle s = t, \neg \mathcal{A}(s) \Rightarrow \neg \mathcal{A}(t) \rangle$. □

Definícia 5. *Odvodenie v PA je* jednoduché*, ak neobsahuje voľné premenné, má len matematické iniciálne sekventy, slabé štrukturálne pravidlá a neesenciálne rezy.*

Lemma 4. *Neexistuje jednoduché odvodenie sekventu* $\langle \Rightarrow \rangle$*.*

Dôkaz. Budeme postupovať sporom. Nech $\mathcal{P}$ je jednoduché odvodenie sekventu $\langle \Rightarrow \rangle$. Všetky formule v $\mathcal{P}$ majú tvar $s = t$, kde s, t sú uzavreté termy. Platí to, pretože matematické iniciálne sekventy sa skladajú len z atomických formulí. Termy s, t sú uzavreté z predpokladu, že $\mathcal{P}$ neobsahuje voľné premenné. Zloženú formulu v $\mathcal{P}$ nevyrobíme, lebo nemáme povolené logické odvodzovacie pravidlá. Oslabením ju vyrobiť nesmieme, lebo by sme ju museli rezať, ale to by bol nepovolený esenciálny rez.

O správnosti uzavretých atomických formulí tvaru $s = t$ vieme rozhodnúť. Ide len o štandardné prirodzené čísla a vyhodnotenie primitívne rekurzívnych funkcií $+$, $\cdot$, S. Definujme si takéto ohodnotenie: Sekvent v $\mathcal{P}$ dostane hodnotu TRUE, ak aspoň jedna formula v andecedente je nepravdivá alebo aspoň jedna formula v konzekvente je pravdivá. Inak sekvent dostane hodnotu FALSE. Všetky matematické iniciálne sekventy majú hodnotu TRUE. Slabé štrukturálne pravidlá a neesenciálne rezy prenášajú hodnotu TRUE na nižšie sekventy. Príklady:

- Kontrakcia: $\frac{\mathcal{A}, \mathcal{A}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{A}, \Gamma \Rightarrow \Delta}$. Ak je nejaká formula z Γ alebo formula $\mathcal{A}$ nepravdivá, tak dolný sekvent má skutočne hodnotu TRUE. Ak je celý andecedent dolného sekventu pravdivý, tak túto vlastnosť má i andecedent horného sekventu, tento má z predpokladu hodnotu TRUE a preto musí v Δ existovať pravdivá formula. To zaručí hodnotu TRUE aj pre dolný sekvent.

- Neesenciálny rez: $\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,s=t \quad s=t,\Theta\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Sigma}$. Ak v Γ alebo Θ existuje nepravdivá formula, tak dolný sekvent má hodnotu TRUE. Nech sú tam teda všetky formule pravdivé. Potom z prvého predpokladu dostávame, že v Δ existuje pravdivá formula alebo je pravdivá atomická formula $s = t$. Existencia pravdivej formule v Δ zaručuje hodnotu TRUE pre dolný sekvent. Ak je pravdivá formula $s = t$, tak sú pravdivé všetky formule v andecedente druhého predpokladu. On má hodnotu TRUE, a preto v Σ existuje pravdivá formula. To opäť dáva hodnotu TRUE pre dolný sekvent.

Z toho plynie, že všetky sekventy v $\mathcal{P}$ majú hodnotu TRUE. Sekvent $\langle\Rightarrow\rangle$ má očividne hodnotu FALSE. Preto jednoduché odvodenie $\mathcal{P}$ nemôže byť odvodením prázdneho sekventu. $\square$

Lemma 5. *Nech odvodenie $\mathcal{P}$ má tieto vlastnosti:*

1. *Odvodenie $\mathcal{P}$ nie je celý svoj finálny úsek.*
2. *Finálny úsek $\mathcal{P}$ neobsahuje logické pravidlá, indukciu, oslabenie.*
3. *Ak je vo finálnom úseku $\mathcal{P}$ iniciálny sekvent, tak tento obsahuje len atomické formule.*

Potom vo finálnom úseku $\mathcal{P}$ existuje vhodný rez. (Nezáleží na tom, aký je výsledný sekvent odvodenia $\mathcal{P}$.)

Dôkaz. Dôkaz bude prebiehať indukciou podľa počtu esenciálnych rezov vo finálnom úseku $\mathcal{P}$. (Vhodný rez musí byť esenciálny.)

Keďže odvodenie $\mathcal{P}$ nie je celý svoj finálny úsek, tak tvrdíme, že $\mathcal{P}$ obsahuje esenciálny rez: V $\mathcal{P}$ existuje sekvent, ktorý do finálneho úseku nepatrí, teda podľa definície sa pod týmto sekventom nachádza implicitné logické pravidlo. Vezmime si najnižšie implicitné logické pravidlo pod sekventom, ktorý nie je vo finálnom úseku. Keďže je to implicitné pravidlo, tak vstupná formula tohto pravidla má potomka $\mathcal{A}$, ktorý je vstupnou formulou rezu. Formula $\mathcal{A}$ je zložená, pretože je potomkom principálnej formule logického odvodzovacieho pravidla. Tento rez je teda esenciálny a vzhľadom na to, že sme si vybrali implicitné logické pravidlo, pod ktorým sa už iné takého nenachádza, je tento esenciálny rez celý vo finálnom úseku.

Vezmime si najnižší esenciálny rez z finálneho úseku odvodenia $\mathcal{P}$. Nech je to rez $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}:\quad \begin{array}{c} \mathcal{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vee\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathcal{D}\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{c}\vee\\ \mathcal{D}, \Theta \Rightarrow \Sigma\end{array}\right\}\mathcal{P}_2 \\ \hline \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Sigma \\ \wedge \end{array}$$

Ak je $\mathcal{I}$ vhodný rez, tak sme hotoví. Nech to teda nie je vhodný rez. Potom aspoň jedna zo vstupných formulí $\mathcal{D}$ nie je potomkom vstupnej formule z logického pravidla tvoriaceho hranicu. Nech je to napr. formula $\mathcal{D}$ zo sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathcal{D} \rangle$. Ukážeme si tri pozorovania:

(i) *Odvodenie $\mathcal{P}_1$ obsahuje pravidlo tvoriace hranicu v $\mathcal{P}$:* Uvažujme sporom. Nech $\mathcal{P}_1$ takéto pravidlo neobsahuje. Potom formula $\mathcal{D}$ musela vzniknúť vo finálnom úseku odvodenia $\mathcal{P}$. Nevznikla logickým odvodzovacím pravidlom, oslabením ani indukciou, pretože finálny úsek odvodenia $\mathcal{P}$ tieto pravidlá z predpokladu neobsahuje. Formula $\mathcal{D}$ bola teda súčasťou iniciálneho sekventu, ktoré sú z predpokladu zložené len z atomických formulí. Lenže formula $\mathcal{D}$ je vstupná formula esenciálneho rezu, a preto je zložená. To je spor.

(ii) *Ak pravidlo $\mathcal{J}$ nachádzajúce sa v $\mathcal{P}_1$ je hraničné pravidlo vzhľadom k $\mathcal{P}$, tak $\mathcal{J}$ je hraničné pravidlo aj vzhľadom k $\mathcal{P}_1$:* Nech $\mathcal{J}$ je hraničné pravidlo vzhľadom k $\mathcal{P}$. Je to implicitné logické odvodzovacie pravidlo (v $\mathcal{P}$). Potomok jeho vstupnej formule mizne v reze $\mathcal{K}$. Tento potomok nie je zvolená formula $\mathcal{D}$ zo sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathcal{D} \rangle$, pretože táto z predpokladu nie je potomok vstupnej formule hraničného pravidla. Rez $\mathcal{K}$ je esenciálny a nachádza sa nad rezom $\mathcal{I}$, pretože $\mathcal{I}$ bol zvolený ako najnižší esenciálny rez v $\mathcal{P}$.

Pravidlo $\mathcal{J}$ tvorí hranicu v $\mathcal{P}$, takže pod ním nie sú ďalšie implicitné logické odvodzovacie pravidlá. Ak v $\mathcal{P}$ pod $\mathcal{J}$ nie sú implicitné logické odvodzovacie pravidlá, tak v $\mathcal{P}_1$ pod pravidlom $\mathcal{J}$ tiež nie sú. Ak ukážeme, že $\mathcal{J}$ je vzhľadom k $\mathcal{P}_1$ implicitné logické pravidlo, tak budeme vedieť, že je aj v $\mathcal{P}_1$ hraničné.

Prečo by $\mathcal{J}$ v $\mathcal{P}_1$ nemuselo by implicitné? Lebo potomok jeho vstupnej formule by mohol miznúť v nejakom reze pod rezom $\mathcal{I}$, čo už nie je súčasťou $\mathcal{P}_1$. Takýto rez by musel byť esenciálny a vieme, že neexistuje, lebo $\mathcal{I}$ je najnižší esenciálny rez v $\mathcal{P}$.

Zhrňme si, čo vieme o pravidle $\mathcal{J}$. Je to implicitné logické odvodzovacie pravidlo v $\mathcal{P}_1$ a v $\mathcal{P}_1$ nie sú pod ním iné implicitné logické pravidlá. Pravidlo $\mathcal{J}$ je teda hraničné vzhľadom k $\mathcal{P}_1$.

(iii) *Odvodenie $\mathcal{P}_1$ nie je celý svoj finálny úsek a finálny úsek $\mathcal{P}_1$ je prienik odvodenia $\mathcal{P}_1$ s finálnym úsekom $\mathcal{P}$:* Finálny úsek $\mathcal{P}_1$ je prienik $\mathcal{P}_1$ s finálnym úsekom odvodenia $\mathcal{P}$, pretože majú rovnakú hranicu. Pre $\mathcal{P}_1$ tiež platí, že jeho finálny úsek neobsahuje logické odvodzovacie pravidlá, indukciu a oslabenie. Má iniciálne sekventy len z atomických formulí. Odvodenie $\mathcal{P}_1$ nie je celý svoj finálny úsek, lebo formula $\mathcal{D}$ musela vzniknúť nejakým logickým odvodzovacím pravidlom nad hranicou.

Odvodenie $\mathcal{P}_1$ má vo svojom finálnom úseku o jeden esenciálny rez menej ako $\mathcal{P}$ (nemá rez $\mathcal{I}$). Z indukčného predpokladu existuje vo finálnom úseku odvodenia $\mathcal{P}_1$ vhodný rez. Prechádzali by sme esenciálne rezy z finálneho úseku $\mathcal{P}_1$ zas od najnižšieho a vždy, keby sme zistili, že skúmaný rez nie je vhodný, dokázali by sme zopakovať predchádzajúcu úvahu. Esenciálnych rezov vo finálnom úseku ľubovoľného odvodenia je konečne mnoho, preto sa daná úvaha môže opakovať len konečnekrát. To znamená, že raz nájdeme vhodný rez. Tento je hľadaný vhodný rez aj vo finálnom úseku odvodenia $\mathcal{P}$.

□

3.7 Teória o ordinálnych číslach

V tomto dôkaze bezespornosti PA využil Gentzen ordinálne čísla z teórie množín. Usporiadal si ich do systémov, ktoré definoval rekurzívne, $\varrho \in \omega$:

$$\sigma_0 = \{0\}$$

$$\sigma_{\varrho+1} = \{0\} \bigcup \{\omega^{\alpha_1} + .. + \omega^{\alpha_n} \mid n \in \omega, \alpha_1 .. \alpha_n \in \sigma_\varrho,\ \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq .. \geq \alpha_n\}$$

Príklady:

- $\sigma_0 = \{0\}$
- $\sigma_1 = \{0,\ \omega^0,\ \omega^0 + \omega^0,\ \omega^0 + \omega^0 + \omega^0,\ ..\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ..\}$
  Sú to všetky prirodzené čísla, ich limitou je ω.
- $$\begin{aligned} \sigma_2 &= \{0,\ \omega^0,\ \omega^0 + \omega^0, .. \omega^{(\omega^0)},\ ..,\ \omega^{(\omega^0+\omega^0)},\ \omega^{(\omega^0+\omega^0)} + \omega^0,\ ..\} = \\ &= \{0,\ 1,\ 2, .., \omega^1, .., \omega^2,\ \omega^2 + 1, ..\} \end{aligned}$$
  Limitou čísel v systéme σ_2 je ω^ω.

- Systém σ_3 obsahuje všetky čísla pod $\omega^{(\omega^\omega)}$.
- Systém σ_4 obsahuje všetky čísla pod $\omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}$.
- . .

Limitou čísel vo všetkých týchto systémoch je ε_0. Číslo ε_0 je prvé α také, že platí: $\alpha = \omega^\alpha$. Ukážme si, že takéto číslo existuje. Vezmime si funkciu $\mathcal{F}$, že $\mathcal{F}(\alpha) = \omega^\alpha$.

Lemma 6. *Funkcia $\mathcal{F}(\alpha) = \omega^\alpha$ je rastúca a spojitá.*

Dôkaz. ***a)*** Rastúca: Chceme ukázať, že platí: $\alpha < \beta \to \mathcal{F}(\alpha) < \mathcal{F}(\beta)$. Vezmime si čísla α, β, že $\alpha < \beta$. Porovnajme funkčné hodnoty ω^α, ω^β. Vieme, že mocnenie je ostro rastúce v exponente: $\beta < \gamma \to \alpha^\beta < \alpha^\gamma$; $\beta, \gamma \neq 0$; $\alpha > 1$.

My máme ukázať: $\alpha < \beta \to \omega^\alpha < \omega^\beta$. Základ mocniny je ω a spĺňa, že je ostro väčšia ako 1. O exponentoch α, β obecne nevieme, že sa nerovnajú nule, ale keby $\alpha = 0$, tak β je z predpokladu ostro väčšia a nerovnosť $\omega^\alpha < \omega^\beta$ opäť vynde.

b) Spojitá: Pre každé limitné ordinálne číslo λ chceme ukázať, že platí: $\mathcal{F}(\lambda) = \sup\{\mathcal{F}(\alpha) |\ \alpha < \lambda\}$, tj. keď čísla α konvergujú k číslu λ, tak ich obrazy konvergujú k obrazu pre λ. V našom konkrétnom prípade chceme dostať:

$$\omega^\lambda = \sup\{\omega^\alpha |\ \alpha < \lambda\}$$

Dostávame to priamo z definície mocnenia limitných ordinálov. □

Lemma o ordináloch 1. *Ak je $\mathcal{F}$ ľubovoľná rastúca ordinálna funkcia, tak pre každé β platí:*

$$\beta \leq \mathcal{F}(\beta)$$

Dôkaz. Nech je β najmenší ordinál, že $\mathcal{F}(\beta) < \beta$ a $\forall\gamma(\gamma < \beta \to \gamma \leq \mathcal{F}(\gamma))$. Zvoľme si za γ číslo $\mathcal{F}(\beta)$. Potom:

$$\mathcal{F}(\gamma) \geq \gamma = \mathcal{F}(\beta) < \beta$$

Dostávame $\gamma < \beta$ a $\mathcal{F}(\beta) \leq \mathcal{F}(\gamma)$, čo je spor s predokladom, že funkcia $\mathcal{F}$ je rastúca. □

Lemma o ordináloch 2. *Nech* $\mathcal{X} \subseteq On$. *Potom* $\bigcup \mathcal{X} \in On$ *a je to suprémum množiny* $\mathcal{X}$.

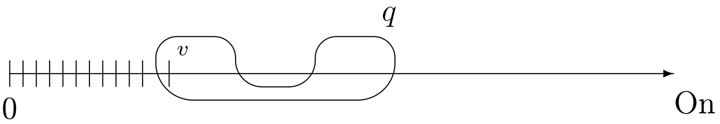
Dôkaz. ***a)*** Ukážme najprv $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{On} \to \bigcup \mathcal{X} \in \mathrm{On}$. Ordinálne čísla majú tri vlastnosti, vymenujme ich na príklade $\bigcup \mathcal{X}$:

- Sú tranzitívne: $u \in \bigcup \mathcal{X} \to u \subseteq \bigcup \mathcal{X}$.
- Sú „trichotomické“: $\forall u, v \in \bigcup \mathcal{X} : u \in v \bigvee\ v \in u \bigvee\ u = v$.
- Sú „fundované“: $\emptyset \neq q \subseteq \bigcup \mathcal{X} \to \exists v \in q\ (v \cap q = \emptyset)$. Číslo v je najmenšie ordinálne číslo v podmnožine q.

1. Chceme:
$$z \in u \in \bigcup \mathcal{X} \to z \in \bigcup \mathcal{X}$$
Uvažujme: $u \in \bigcup \mathcal{X}$, potom $\exists v \in \mathcal{X} \subseteq \mathrm{On}$, že $u \in v \in \mathrm{On}$. Číslo v je ordinálne, môžme využiť, že je tranzitívne:
$z \in u \in v \in \mathrm{On} \to z \in v \in \mathcal{X}$, preto dostávame $z \in \bigcup \mathcal{X}$.

2. Chceme:
$$\forall u, v \in \bigcup \mathcal{X} : u \in v \bigvee\ v \in u \bigvee\ u = v$$
Zvoľme ľubovoľné $u, v \in \bigcup \mathcal{X}$. Vieme, že existujú prvky z_1, z_2 také, že $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$ a $u \in z_1 \in \mathrm{On}$ a $v \in z_2 \in \mathrm{On}$. Ľubovoľné dve ordinálne čísla sú zrovnateľné, nech napr. $z_1 \in z_2$. Potom z tranzitivity čísla z_2 máme, že $u, v \in z_2$. Keďže z_2 je ordinálne číslo, tak môžme využiť, že je „trichotomické“: $u \in v \bigvee v \in u \bigvee u = v$.

3. Chceme:
$$\emptyset \neq q \subseteq \bigcup \mathcal{X} \to \exists v \in q\ (v \cap q = \emptyset)$$
Zvoľme q, neprázdnu podmnožinu $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \mathrm{On}$. Potom i $q \subseteq \mathrm{On}$. Neprázdna podmnožina ordinálnych čísel má najmenší prvok, nech je to prvok $v \in q$:



Keby existovalo z, že $z \in v$ a $z \in q$, tak z by bol prvok z q, ktorý je menší, ako najmenší prvok z q. To je spor, preto platí $v \cap q = \emptyset$.

b) Potrebujeme ešte ukázať, že $\bigcup \mathcal{X} = \sup \mathcal{X}$. Suprémum množiny $\mathcal{X}$ je také číslo x, že všetky prvky množiny $\mathcal{X}$ sú pod ním, prípadne sa mu rovnajú (x je majoranta množiny $\mathcal{X}$) a je to najmenšie číslo s touto vlastnosťou:

- $\forall a \in \mathcal{X}\ (a\underline{\in}x)$

Keďže ľubovoľné dve ordinálne čísla sú navzájom zrovnateľné, stačí nám druhú podmienku zapísať v tvare:

- $\forall y\ (y \in x \rightarrow \exists a \in \mathcal{X}\ (y \in a))$

1. Chceme ukázať, že $\bigcup \mathcal{X}$ je majoranta množiny $\mathcal{X}$. Zvoľme si ľubovoľné $\alpha \in \mathcal{X}$, chceme ukázať $\alpha\underline{\in}\bigcup \mathcal{X}$:

$$\alpha \in \mathcal{X} \rightarrow \alpha \subseteq \bigcup \mathcal{X} \rightarrow \begin{cases} 1.)\ \alpha = \bigcup \mathcal{X}, \text{ číslo } \alpha \text{ je najväčší prvok v } \mathcal{X} \\ 2.)\ \alpha \subset \bigcup \mathcal{X}, \text{ platí: } (\alpha \subset \bigcup \mathcal{X}\ \&\ \alpha \text{ tranzitívne}) \equiv \\ \equiv\ (\alpha \in \bigcup \mathcal{X}) \end{cases}$$

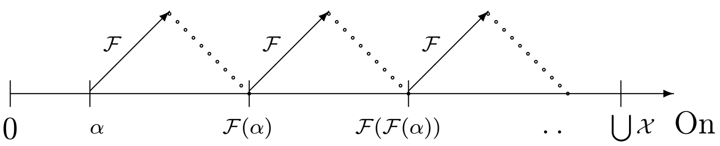
2. Chceme ukázať, že $\bigcup \mathcal{X}$ je najmenšia majoranta množiny $\mathcal{X}$. Vezmime si ľubovoľné $y \in \bigcup \mathcal{X}$. Hľadáme také $\alpha \in \mathcal{X}$, že $y \in \alpha$:

$$y \in \bigcup \mathcal{X} \rightarrow \exists v \in \mathcal{X}\ (y \in v)$$

Za hľadané α vezmeme toto v. □

Veta 2. *Nech $\mathcal{F}$ je ľubovoľná spojitá a rastúca funkcia definovaná na On. Potom ku každému ordinálnemu číslu α existuje ordinálne číslo β, $\alpha \leq \beta$, $\mathcal{F}(\beta) = \beta$. Tj. funkcia $\mathcal{F}$ má pevný bod.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné $\alpha \in$ On a vytvorme takúto postupnosť:



$$a_0 = \alpha,\ a_1 = \mathcal{F}(\alpha),\ a_2 = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\alpha))\ ..\ a_{n+1} = \mathcal{F}(a_n), ..$$

Vytvorme z nej množinu ordinálnych čísel $\mathcal{X} = \{a_0,\ a_1,\ a_2, ..\}$.

Podľa Lemmy o ordináloch 1 platí:

$$\alpha \leq \mathcal{F}(\alpha) \leq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\alpha)) \leq \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\alpha))) \leq ..$$

Podľa Lemmy o ordináloch 2 platí:

$$\bigcup \mathcal{X} = \sup\{a_0,\ a_1,\ a_2, ..\}$$

Keby ordinálne číslo $\bigcup\mathcal{X}$ nebolo limitné, tak má predchodcu β, že $\beta \in \bigcup\mathcal{X}$, $\beta + 1 = \bigcup\mathcal{X}$. Číslo β by teda bol najväčší prvok v $\bigcup\mathcal{X}$. Tiež by existovalo $\alpha \in \mathcal{X}$, že $\beta \in \alpha \in \mathcal{X}$. Máme teda, že $\beta \in \alpha$ a $\beta \in \bigcup\mathcal{X}$, kde je najväčší. Z toho vyplýva $\bigcup\mathcal{X} \underline{\in} \alpha \in \mathcal{X}$. Prvok α patriaci do $\mathcal{X}$ by sa buď rovnal suprému množiny $\mathcal{X}$, alebo by ho preskočil. Preskočiť ho nemôže. Môže sa mu rovnať? Na α môžeme aplikovať funkciu $\mathcal{F}$, jej hodnota $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{X}$ a podľa Lemmy o ordináloch 1 platí: $\alpha \leq \mathcal{F}(\alpha)$. Preskúmajme obe možnosti:

- Ak $\alpha = \mathcal{F}(\alpha)$, tak sme našli pevný bod a končíme.
- Ak $\alpha < \mathcal{F}(\alpha)$, tak sa α nemôže rovnať množine $\bigcup\mathcal{X} = \sup\mathcal{X}$. Keby sa rovnala, tak jej funkčná hodnota $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{X}$ by bola väčšia ako suprémum množiny, do ktorej náleží. Dostávame spor s $\bigcup\mathcal{X} \underline{\in} \alpha$. V tomto prípade musí byť $\bigcup\mathcal{X}$ limitné ordinálne číslo.

Vyjadrime funkčnú hodnotu cez $\mathcal{F}$ v bode $\bigcup\mathcal{X}$. Funkcia $\mathcal{F}$ je spojitá, číslo $\bigcup\mathcal{X}$ je limitný ordinál, platí teda $\mathcal{F}(\bigcup\mathcal{X}) = \sup\{\mathcal{F}(\alpha)|\ \alpha \in \bigcup\mathcal{X}\}$. Množiny $\mathcal{X} = \{\alpha,\ \mathcal{F}(\alpha),\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(\alpha)), ..\}$ a $\{\mathcal{F}(\alpha)|\ \alpha \in \bigcup\mathcal{X}\}$ majú rovnaké suprémum, pretože sa líšia len v prvom prvku a v tom, že druhá obsahuje aj čísla medzi $\mathcal{F}(a_n)$ a $\mathcal{F}(a_{n+1})$. Preto platí:

$$\sup\mathcal{X} = \bigcup\mathcal{X} = \mathcal{F}(\bigcup\mathcal{X})$$

Našli sme pevný bod funkcie $\mathcal{F}$. □

Vráťme sa späť k funkcii $\mathcal{F}(\alpha) = \omega^\alpha$. Je rastúca a spojitá, takže podľa práve dokázanej vety má pevný bod. Najmenší z nich je ε_0: $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$. Číslo ε_0 je (ako tiež vidieť z dôkazu vety) suprémom postupnosti $\{1,\ \omega,\ \omega^\omega,\ \omega^{(\omega^\omega)}, ..\}$ (za prvotné α bolo zvolené číslo 1).

Veta o Cantorovom rozvoji. *Každé ordinálne číslo $\beta \neq 0$ sa dá napísať v tvare*

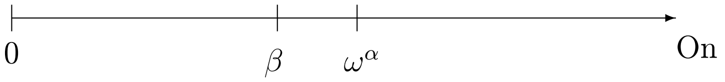
$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \omega^{\delta_i} \cdot v_i, \qquad \boxed{\begin{array}{l} n,v_i \neq 0 \quad n,v_i \in \omega \\ \delta_1 > \delta_2 > .. > \delta_n \end{array}}$$

čo je to isté, ako

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \omega^{\delta_i} \qquad \boxed{\begin{array}{l} m \neq 0 \qquad m \in \omega \\ \delta_1 \geq \delta_2 \geq .. \geq \delta_m \end{array}}$$

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou podľa veľkosti čísla β.

Nech $\beta = 1$, potom $\beta = \omega^0$. Vyslovme indukčný predpoklad: Nech pre $\beta^{'} < \beta$ existuje Cantorov rozvoj. Chceme ukázať, že Cantorov rozvoj existuje i pre číslo β. Zvoľme si α také, že ω^α je najmenšie číslo tohto tvaru, ktoré prelezie číslo β, $\beta < \omega^\alpha$:



Funkcia $\mathcal{F}(\alpha) = \omega^\alpha$ je rastúca, preto sa takéto číslo nájde. Ďalej je spojitá. Keby α bolo limitné číslo, tak $\omega^\alpha = \sup\{\omega^\gamma | \ \gamma < \alpha\}$. Preto by nad β existoval nejaký prvok ω^γ, $\gamma < \alpha$. To by bol spor s tým, že ω^α je z predpokladu najmenšie číslo tohto tvaru, ktoré preliezlo β. Z toho plynie, že α je izolované. Má teda zmysel uvažovať $\alpha - 1$. Platí, že $\omega^{\alpha-1} < \beta$, pretože najmenšie číslo tohto tvaru, ktoré preliezlo β je ω^α. (Keby $\beta = \omega^{\alpha-1}$, tak sme našli požadovaný rozvoj.)

Vieme, že ordinály sa dajú deliť so zvyškom:

$$\omega^{\alpha-1} < \beta \to \exists! \gamma \exists! \delta (\beta = \omega^{\alpha-1} \cdot \gamma + \delta \ \& \ \delta < \omega^{\alpha-1})$$

Ukážme, že γ je prirodzené číslo: Budeme postupovať sporom. Nech $\omega \underline{\in} \gamma$. Potom z predchádzajúcej rovnosti dostaneme:

$$\beta \geq \omega^{\alpha-1} \cdot \omega + \delta = \omega^{(\alpha-1)+1} + \delta = \omega^\alpha + \delta$$

Dostávame, že $\beta \geq \omega^\alpha$, čo je spor s tým, že ω^α bolo zvolené tak, aby číslo β preliezlo.

Sme teda schopní zapísať β v tomto tvare:

$$\beta = \omega^{\alpha-1} \cdot v + \delta$$

$v \in \omega$
$\delta < \omega^{\alpha-1} < \beta$

Vidíme, že $\delta < \beta$, a preto môžeme využiť indukčný predpokad: Číslo δ sa dá napísať v Cantorovom rozvoji. Platí, že najmenšie číslo tvaru ω^γ, ktoré prelezie δ je menšie prípadne rovné $\omega^{\alpha-1}$, čo je ostro menšie ako číslo, ktoré preliezlo β. Preto bude prvý exponent v Cantorovom rozvoji pre δ ostro menší ako prvý exponent v Cantorovom rozvoji pre β. V zápise β môžeme δ týmto rozvojom nahradiť a získame hľadaný Cantorov rozvoj pre číslo β. □

Na ordinálnych číslach zapísaných v Cantorovom rozvoji definujme *prirodzenú sumu*:

$$\alpha\sharp\beta = (\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + ..+\omega^{a_n})\sharp(\omega^{b_1} + \omega^{b_2} + ..+\omega^{b_m}) = \omega^{c_1} + ..+\omega^{c_{n+m}}$$

kde $\{c_1..c_{n+m}\} = \{a_1..a_n, b_1..b_m\}$ a súčasne platí $c_1 \geq c_2 \geq .. \geq c_{n+m}$.

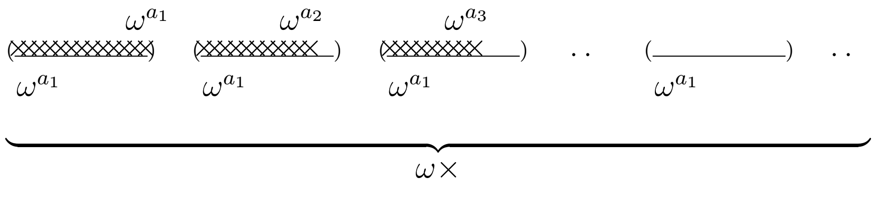
Ako budeme čísla v Cantorovom rozvoji *porovnávať*:

$$\alpha < \beta \equiv \text{ prvý exponent zľava, na ktorom sa } \alpha, \beta \text{ líšia je väčší u čísla } \beta$$

Príklad: Naozaj je táto definícia usporiadania korektná?

Rozoberme prípad: $\omega^{a_1} + ..+\omega^{a_n} < \omega^{a_1+1}$. Platí nasledujúca lemma: $\beta < \gamma \rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$, kde $\alpha > 1$, $\beta, \gamma \neq 0$. Podľa našej definície by malo byť druhé číslo väčšie. Podľa lemmy síce platí, že $\omega^{a_1} < \omega^{a_1+1}$, ale ostane nerovnosť zachovaná aj keď k prvému číslu pripočítame „tak veľa veľkých čísel“?

$$\omega^{a_1+1} = \omega^{a_1} \cdot \omega = \omega \times \omega^{a_1} = \text{ vezmi } \omega^{a_1} \text{ a polož ho } \omega\text{-krát za sebou:}$$



Sčítancov v Cantorovom rozvoji prvého čísla je len konečne mnoho a zmenšujú sa. Každý z nich sa zmestí do čísla ω^{a_1}. Je zrejmé, že nerovnosť platí.

Prirodzená suma je *striktne monotónna* vo oboch argumentoch:

$$\beta < \gamma \rightarrow (\alpha\sharp\beta) < (\alpha\sharp\gamma)$$

$$\beta < \gamma \rightarrow (\beta\sharp\alpha) < (\gamma\sharp\alpha)$$

Je to zrejmé z definície prirodzenej sumy a porovnávania ordinálnych čísel v Cantorovom rozvoji.

3.8 Priebeh dôkazu bezespornosti PA

Chceme ukázať, že v PA neexistuje odvodenie sporného sekventu $\langle \Rightarrow \rangle$. Budeme postupovať takto:

- Definujeme, ako z každého odvodenia sporu vyrobiť jednoduchšie odvodenie s tým istým výsledným sekventom. Zo starého k novému odvodeniu sa dostaneme pomocou *redukčných krokov.* Gentzen ponúka takéto vysvetlenie toho, že by sa to malo dať realizovať: Sporný, čiže prázdny sekvent, je veľmi jednoduchý. V celom odvodení sa musí niekde nachádzať formula s maximálnou zložitosťou (= s najvyšším stupňom). Museli sme ju počas odvodenia nejakým spôsobom „poskladať“. Aby sme sa na konci dostali k prázdnemu sekventu, musíme ju následne „rozobrať“. Možno sa celá táto formula dá preskočiť, keďže ju treba najprv zaviesť a potom odstrániť, možno sa dá skočiť z predpokladov, ktoré jej predchádzali rovno na závery z nej odvodené. Tým by sa odvodenie zjednodušilo.

- Každému odvodeniu bude priradené ordinálne číslo *menšie než ε_0 zapísané v Cantorovom rozvoji.* Ukáže sa, že každý redukčný krok vyrobí odvodenie, ktorého ordinálne číslo sa oproti starému nezväčší.

- Využijeme skutočnosť, že ordinálne čísla sú dobre usporiadané. Preto sa z nich nedá vytvoriť nekonečná klesajúca postupnosť. Redukčné kroky nás raz dovedú k odvodeniu, ktorému bude priradené prirodzené číslo. Ukážeme, že takéto odvodenie je jednoduché. Vieme, že jednoduché odvodenie sporu neexistuje.

Definícia 6. Ordinál priradený sekventu $\mathcal{S}$ *v odvodení* $\mathcal{P}$ *značíme* $o(\mathcal{S}, \mathcal{P})$. *Ak je jasné, o aké odvodenie sa jedná, tak len* $o(\mathcal{S})$. Ordinál celého odvodenia *je ordinál jeho posledného sekventu, značíme* $o(\mathcal{P})$.

Exponenty budeme zapisovať týmto spôsobom:

$$\omega_n(\alpha) = \underbrace{\omega^{(\omega^{\cdot^{\cdot^{(\omega^{\alpha})}}})}}_{n \text{ výskytov } \omega}$$

3.9 Algoritmus na priradenie ordinálov odvodeniam

Ordinálne čísla budeme sekventom (a následne odvodeniam) priraďovať podľa tohto postupu:

1. Iniciálny sekvent dostane číslo 1.

2. Ak je $\mathcal{S}$ dolný sekvent slabého štrukturálneho pravidla, tak $o(\mathcal{S})$ je to isté číslo ako ordinál horného sekventu.

3. Ak je $\mathcal{S}$ dolný sekvent logických odvodzovacích pravidiel & left, $\bigvee$ right, $\rightarrow$ right, $\neg$ right, $\neg$ left alebo pravidla s kvantifikátorom (= tých pravidiel, ktoré majú jednu premisu) a horný sekvent má ordinál α, tak $o(\mathcal{S}) = \alpha + 1$.

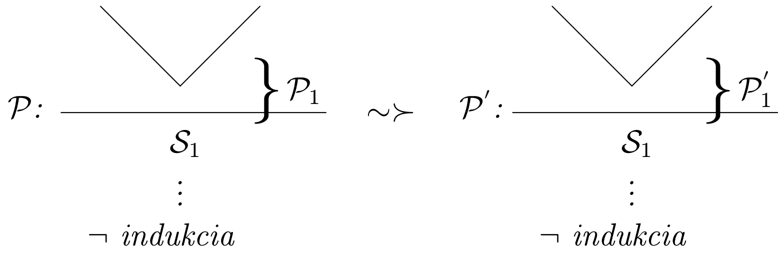
4. Ak je $\mathcal{S}$ dolný sekvent logických odvodzovacích pravidiel & right, $\bigvee$ left, $\rightarrow$ left (= tých pravidiel, ktoré majú dve premisy) a horné sekventy majú ordinály α, β, tak $o(\mathcal{S}) = \alpha\sharp\beta$.

5. Ak je $\mathcal{S}$ dolný sekvent rezu a jeho horné sekventy majú ordinály α, β, tak $o(\mathcal{S}) = \omega_{k-l}(\alpha\sharp\beta)$, kde k je výška horných sekventov a l je výška sekventu $\mathcal{S}$.

6. Ak je $\mathcal{S}$ dolný sekvent indukcie a jeho horný sekvent má ordinál α, tak $o(\mathcal{S}) = \omega_{k-l+1}(a_1 + 1)$, kde k je výška horného sekventu, l je výška sekventu $\mathcal{S}$, $\alpha = \omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \ldotp\ldotp + \omega^{a_n}$, $a_1 \geq a_2 \geq \ldotp\ldotp \geq a_n$.

7. Ordinál výsledného sekventu v odvodení je ordinál celého odvodenia.

Lemma 7. *Nech $\mathcal{P}$ je odvodenie obsahujúce sekvent $\mathcal{S}_1$. Nech pod sekventom $\mathcal{S}_1$ nie je indukcia. Nech $\mathcal{P}_1$ je pododvodenie odvodenia $\mathcal{P}$, ktoré končí sekventom $\mathcal{S}_1$. Nech $\mathcal{P}_1'$ je iné odvodenie sekventu $\mathcal{S}_1$. Odvodenie $\mathcal{P}'$ vznikne z $\mathcal{P}$, keď $\mathcal{P}_1$ nahradíme odvodením $\mathcal{P}_1'$:*



Potom platí:

$$o(\mathcal{S}_1, \mathcal{P}') < o(\mathcal{S}_1, \mathcal{P}) \rightarrow o(\mathcal{P}') < o(\mathcal{P})$$

Tj. zmenšenie ordinálneho čísla v strede odvodenia sa propaguje cez celé odvodenie nadol.

Dôkaz. Nech platí $o(\mathcal{S}_1, \mathcal{P}') < o(\mathcal{S}_1, \mathcal{P})$. Vezmime si vlákno v $\mathcal{P}$ idúce cez sekvent $\mathcal{S}_1$. Pre každý sekvent $\mathcal{T}$ pod sekventom $\mathcal{S}_1$ v tomto vlákne ukážeme: Ak $\mathcal{T}'$ je sekvent v $\mathcal{P}'$ korešpondujúci so sekventom $\mathcal{T}$ v $\mathcal{P}$, tak

$$o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})$$

Pre sekvent $\mathcal{T} = \mathcal{S}_1$, ktorému v $\mathcal{P}'$ korešponduje sekvent $\mathcal{T}' = \mathcal{S}_1$ to platí z predpokladu. Preskúmajme, či to zachovávajú odvodzovacie pravidlá: slabé štrukturálne pravidlá, logické odvodzovacie pravidlá, rez.

1.) *Slabé štrukturálne pravidlá:* Nech $\mathcal{T}$ je horný sekvent slabého štrukturálneho pravidla v $\mathcal{P}$. Nech $\mathcal{T}'$ mu korešponduje v $\mathcal{P}'$, nech $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})$:

$$\mathcal{P} : \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} \qquad\qquad \mathcal{P}' : \frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}_1'}$$

Chceme ukázať $o(\mathcal{T}_1', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}_1, \mathcal{P})$. To máme, pretože ordinálne čísla sa pri slabých štrukturálnych pravidlách prenášajú z horného sekventu na dolný nezmenené.

2.) *Logické pravidlá s jednou premisou:* Nech $\mathcal{T}$ je horný sekvent logického pravidla v $\mathcal{P}$. Nech $\mathcal{T}'$ mu korešponduje v $\mathcal{P}'$, nech $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})$:

$$\mathcal{P} : \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} \qquad\qquad \mathcal{P}' : \frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}_1'}$$

Chceme ukázať $o(\mathcal{T}_1', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}_1, \mathcal{P})$. Teda vlastne chceme ukázať $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}')+1 < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})+1$, čo máme z predpokladu a z definície porovnávania ordinálnych čísel v Cantorovom rozvoji.

3.) *Logické pravidlá s dvoma premisami:*

$$\mathcal{P} : \frac{\mathcal{T} \quad \mathcal{R}}{\mathcal{T}_1} \qquad\qquad \mathcal{P}' : \frac{\mathcal{T}' \quad \mathcal{R}'}{\mathcal{T}_1'}$$

Nech zvolené vlákno, ktoré ide cez sekvent $\mathcal{S}_1$, prechádza sekventami $\mathcal{T}'$ resp. $\mathcal{T}$. Z predpokladu máme $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ a $o(\mathcal{R}', \mathcal{P}') = o(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, pretože odvodenie sekventu $\mathcal{R}$ sme nemenili. Chceme ukázať $o(\mathcal{T}_1', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}_1, \mathcal{P})$, teda vlastne $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') \sharp o(\mathcal{R}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \sharp o(\mathcal{R}, \mathcal{P})$. To dostávame z predpokladov a z toho, že prirodzená suma je striktne monotónna v každom argumente.

4.) *Rez:*

$$\mathcal{P} : \frac{\mathcal{T} \quad \mathcal{R}}{\mathcal{T}_1} \qquad\qquad \mathcal{P}' : \frac{\mathcal{T}' \quad \mathcal{R}'}{\mathcal{T}_1'}$$

Nech zvolené vlákno, ktoré ide cez sekvent $\mathcal{S}_1$, prechádza sekventami $\mathcal{T}'$ resp. $\mathcal{T}$. Z predpokladu máme $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ a $o(\mathcal{R}', \mathcal{P}') = o(\mathcal{R}, \mathcal{P})$. Chceme ukázať $o(\mathcal{T}_1', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}_1, \mathcal{P})$. Preskúmajme výšky sekventov $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_1'$:

$$h(\mathcal{T}) = h(\mathcal{R}) = k = h(\mathcal{T}') = h(\mathcal{R}')$$

$$h(\mathcal{T}_1) = l = h(\mathcal{T}_1')$$

Výška sekventu závisí od maximálneho stupňa rezov, ktoré sú pod daným sekventom. Keďže sú odvodenia $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ nadol od sekventu $\mathcal{S}_1$ zhodné, tak sekventy v tejto časti $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$, ktoré si navzájom zodpovedajú, majú výšky rovnaké. Vieme:

$$o(\mathcal{T}_1', \mathcal{P}') = \omega_{k-l}(o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') \sharp o(\mathcal{R}', \mathcal{P}'))$$

$$o(\mathcal{T}_1, \mathcal{P}) = \omega_{k-l}(o(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \sharp o(\mathcal{R}, \mathcal{P}))$$

Keď vyndeme z predpokladu, dostaneme:

$$o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \ \rightarrow \ o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') \sharp o(\mathcal{R}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \sharp o(\mathcal{R}, \mathcal{P}) \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ \omega_{k-l}(o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') \sharp o(\mathcal{R}', \mathcal{P}')) < \omega_{k-l}(o(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \sharp o(\mathcal{R}, \mathcal{P}))$$

Druhá nerovnosť plynie zo skutočnosti, že prirodzená suma je striktne monotónna vo všetkých argumentoch. Tretia nerovnosť plynie z toho, že mocnenie je ostro rastúce v exponente. □

Zamyslime sa ešte nad tým, prečo pravidlo indukcie nezachováva toto zmenšenie:

$$\mathcal{P} : \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} \qquad\qquad \mathcal{P}' : \frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}_1'}$$

Nech $o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') = \omega^{a_1}$, $o(\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \omega^{a_1} + \omega^{a_2}$. Vidíme, že platí:

$$o(\mathcal{T}', \mathcal{P}') < o(\mathcal{T}, \mathcal{P})$$

Podľa pravidla pre prideľovanie ordinálnych čísel dolným sekventom indukcie nám vynde, že $o(\mathcal{T}_1', \mathcal{P}') = o(\mathcal{T}_1, \mathcal{P})$. Navzájom si zodpovedajúce sekventy v odvodeniach $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ (pod sekventom $\mathcal{S}_1$) majú totiž rovnaké výšky a ako exponent čísla dolného sekventu sa využije prvý exponent čísla horného sekventu. Tieto exponenty sú rovnaké, hoci čísla horných sekventov sú navzájom rôzne.

3.10 Redukcie

Vezmime si odvodenie sporu v PA, tj. sekventu $\langle\Rightarrow\rangle$. Budeme robiť nasledujúce kroky zaradom tak, že ďalej sa posunieme, len keď sa aktuálny krok už nedá vykonať. Každému odvodeniu vieme priradiť ordinálne číslo. Súčasne budeme ukazovať, že ordinálne číslo upraveného (redukovaného) odvodenia nie je väčšie, než číslo odvodenia pôvodného. Po kroku 5 sa vrátime na krok 1 atď.

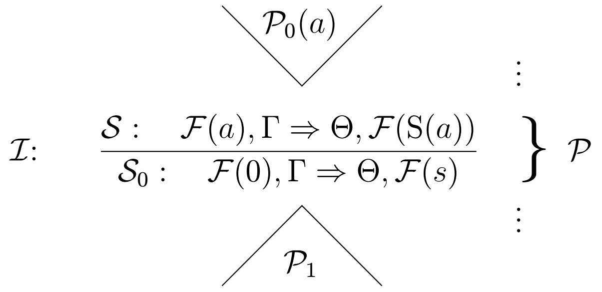
3.11 Krok 1 (odstránenie voľných premenných)

Všetky voľné premenné, ktoré sa v odvodení nachádzajú a nie sú to eigenvariable, nahraďme konštantou 0. Odvodenie prázdneho sekventu sa tak nepokazí: Nech sú v odvodení ľubovoľné formule, do konca odvodenia musia zmiznúť rezom. Opakujme, až kým všetky voľné premenné neodstránime. Ordinálne číslo odvodenia sa oproti pôvodnému s voľnými premennými nezmení.

Z finálneho úseku tak zmiznú všetky voľné premenné okrem eigenvariable prípadnej indukcie. Eigenvariable z generalizácií tam nie sú, pretože vo finálnom úseku odvodenia sporu sa nenachádzajú logické odvodzovacie pravidlá.

3.12 Krok 2 (odstránenie indukcie z finálneho úseku)

Vezmime si také využitie pravidla indukcie z finálneho úseku, že pod ním už žiadna iná indukcia nie je:

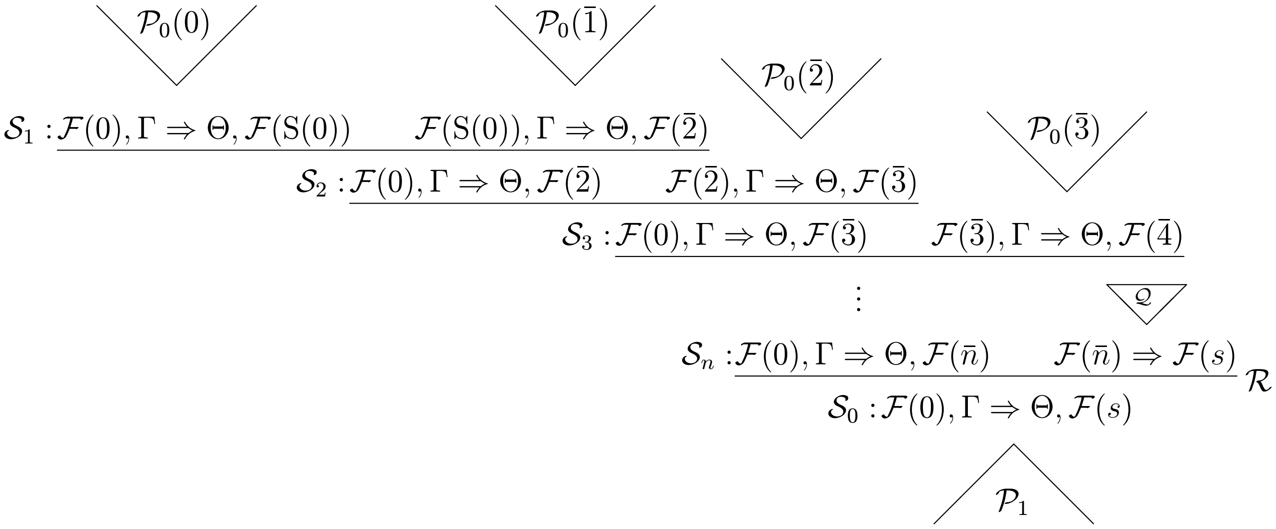


Odvodenie $\mathcal{P}_0(a)$ je pododvodenie odvodenia $\mathcal{P}$, premenná a je v ňom eigenvariable. Term s je uzavretý, lebo pod $\mathcal{I}$ v $\mathcal{P}$ nie je indukcia ($\mathcal{I}$ je najnižšia) ani generalizácia. V terme s teda nie sú žiadne eigenvariable a všetky ostatné voľné premenné z finálneho úseku boli v Kroku 1 nahradené konštantou 0.

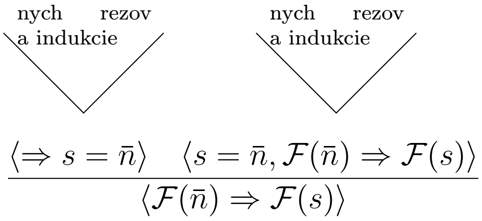
Nech:

$$\begin{aligned}
h(\mathcal{S},\mathcal{P}) &= l\\
h(\mathcal{S}_0,\mathcal{P}) &= k\\
o(\mathcal{S},\mathcal{P}) &= \omega^{\mu_1}+\omega^{\mu_2}+..+\omega^{\mu_z}=\mu \quad (\mu_1\geq..\geq\mu_z)\\
o(\mathcal{S}_0,\mathcal{P}) &= \omega_{l-k+1}(\mu_1+1)
\end{aligned}$$

Odvodenie $\mathcal{P}$ po redukcii bude odvodenie $\mathcal{P}'$, ktoré vyzerá nasledovne. Značenie $\mathcal{P}_0(t)$ znamená odvodenie $\mathcal{P}_0(a)$, kde premenná a bola nahradená termom t.



Odvodenie $\mathcal{Q}$ vzniklo nasledovne: Keďže s je uzavretý term, tak podľa Lemmy 3 vieme, že existuje prirozdené číslo n také, že bez esenciálnych rezov a indukcie sa dá odvodiť sekvent $\langle\Rightarrow s=\bar{n}\rangle$. Ďalej vieme, že sekvent $\langle s=\bar{n},\mathcal{F}(\bar{n})\Rightarrow\mathcal{F}(s)\rangle$ je tiež dokazateľný bez esenciálnych rezov a indukcie. Potom $\mathcal{Q}$ vyzerá takto:



Zistime najprv *výšky* všetkých sekventov v odvodení $\mathcal{P}'$. Hodnota veličiny $h(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}') = k$, pretože pod $\mathcal{S}_0$ v $\mathcal{P}'$ je pododvodenie $\mathcal{P}_1$ také isté ako v odvodení $\mathcal{P}$. Výšky oboch horných sekventov v každom reze sú rovnaké, stačí nám teda zistiť výšky sekventov $\mathcal{S}_1, .. \mathcal{S}_n$. Predpoklad $h(\mathcal{S}, \mathcal{P}) = l$ nám dáva dve možnosti, ktoré musíme zvážiť:

1. V $\mathcal{P}_1$ je rez stupňa l, čo je ostro väčšie ako stupeň formule $\mathcal{F}(a)$: Všetky novovzniknuté rezy v $\mathcal{P}'$ majú stupeň $\mathcal{F}(a)$ a v $\mathcal{P}_1$ je rez so stupňom ostro väčším. Z toho plynie, že $h(\mathcal{S}_1, \mathcal{P}') = .. = h(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}') = l$.
2. Stupeň formule $\mathcal{F}(a)$ je l a v $\mathcal{P}_1$ nie je rez s väčším stupňom: Pod každým sekventom $\mathcal{S}_1$ až $\mathcal{S}_n$ v $\mathcal{P}'$ je rez $\mathcal{R}$ stupňa l (ako má formula $\mathcal{F}(a)$) a v $\mathcal{P}_1$ nie je rez väčšieho stupňa. Keďže stupne nových rezov nie sú tiež väčšie ako l, tak platí $h(\mathcal{S}_1, \mathcal{P}') = .. = h(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}') = l$.

Zistili sme, že:

$$h(\mathcal{S}_1, \mathcal{P}') = h(\mathcal{S}_2, \mathcal{P}') = .. = h(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}') = l$$

Vyrátajme teraz *ordinály* sekventov v $\mathcal{P}'$: Pre sekventy $\langle \mathcal{F}(\bar{\imath}), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(\mathrm{S}(\bar{\imath})) \rangle$ kde $i = 0..n-1$ platí, že ich ordinál je μ, pretože tieto sekventy majú takú istú výšku ako je $h(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ a nad nimi je v podstate také isté odvodenie ako $\mathcal{P}_0(a)$.

Ordinál sekventu $\langle \mathcal{F}(\bar{n}) \Rightarrow \mathcal{F}(s) \rangle$ je $q < \omega$. Tento sekvent je totiž dokázaný odvodením $\mathcal{Q}$ bez esenciálnych rezov a indukcie. Prípadné rezy v $\mathcal{Q}$ sú také, kde vstupná formula je atomická, a teda jej stupeň je 0. Výšky všetkých sekventov v $\mathcal{Q}$ sú l (sekvent $\langle \mathcal{F}(\bar{n}) \Rightarrow \mathcal{F}(s) \rangle$ má výšku l), takže ordinálne čísla dolných sekventov rezov v $\mathcal{Q}$ budú typu $\omega_{l-l}(\alpha \sharp \beta)$, kde $\alpha, \beta < \omega$. Preto číslo q takisto nikdy neprelezie ω.

Ďalej z definície platí:

$$\begin{array}{rcl}
o(\mathcal{S}_2, \mathcal{P}') & = & \omega_{l-l}(\mu \sharp \mu) \\
o(\mathcal{S}_3, \mathcal{P}') & = & \omega_{l-l}(\mu \sharp \mu \sharp \mu) \\
o(\mathcal{S}_4, \mathcal{P}') & = & \omega_{l-l}(\mu \sharp \mu \sharp \mu \sharp \mu) \\
 & \vdots & \\
o(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}') & = & \omega_{l-l}(\underbrace{\mu \sharp \mu .. \mu \sharp \mu}_{n\times})
\end{array}$$

Z toho vyplýva ordinálne číslo pre $\mathcal{S}_0$:

$$o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}') = \omega_{l-k}(\underbrace{\mu\sharp\mu..\mu\sharp\mu}_{n\times}\sharp q)$$

Porovnajme čísla:

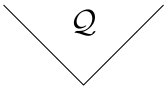
$$\begin{aligned} o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}) &= \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1) \\ o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}') &= \omega_{l-k}(\underbrace{\mu\sharp\mu..\mu\sharp\mu}_{n\times}\sharp q) \end{aligned}$$

Ktoré z nich má väčší exponent? Číslo $o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P})$ má exponent ω^{μ_1+1}, číslo $o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}')$ má exponent $(\underbrace{\mu\sharp\mu..\mu\sharp\mu}_{n\times}\sharp q)$, čo je $((\omega^{\mu_1}+..+\omega^{\mu_z})\sharp..\sharp(\omega^{\mu_1}+..+\omega^{\mu_z})\sharp q)$. Platí $\mu_1 + 1 > \mu_1$, preto dostávame:

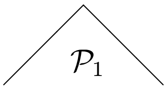
$$o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}) > o(\mathcal{S}_0, \mathcal{P}')$$

V pododvodení $\mathcal{P}_1$ sa z predpokladu nevyskytuje indukcia. Podľa Lemmy 7 sa zmenšenie ordinálneho čísla propaguje až k výslednému sekventu celého odvodenia $\mathcal{P}$.

Zamyslime sa ešte nad prípadom, keď term s má hodnotu 0. Potom dostaneme:



$$\mathcal{P}' : \quad \frac{\mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(0) \quad \mathcal{F}(0) \Rightarrow \mathcal{F}(s)}{\mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(s)}$$



Platí:

$$\begin{aligned} o(\langle \mathcal{F}(0) \Rightarrow \mathcal{F}(s) \rangle, \mathcal{P}') &= q < \omega \\ o(\langle \mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(0) \rangle, \mathcal{P}') &= 1 \\ h(\langle \mathcal{F}(0) \Rightarrow \mathcal{F}(s) \rangle, \mathcal{P}') &= l \\ h(\langle \mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(0) \rangle, \mathcal{P}') &= l \\ h(\langle \mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(s) \rangle, \mathcal{P}') &= k \end{aligned}$$

Zaujímame sa o ordinálne číslo sekventu $\langle \mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(s) \rangle$ v $\mathcal{P}'$:

$$o(\langle \mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(s) \rangle, \mathcal{P}') = \omega_{l-k}(q+1),$$

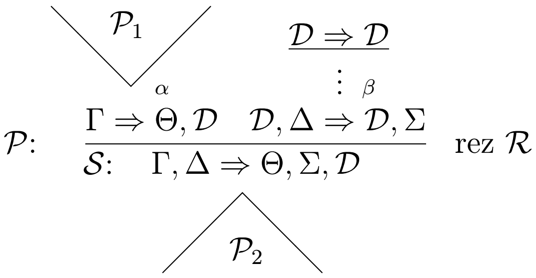
čo je ostro menšie ako $o(\langle \mathcal{F}(0), \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{F}(s) \rangle, \mathcal{P}) = \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1)$, pretože porovnanie exponentov dá: $(q+1) < \omega^{\mu_1+1}$.

3.13 Krok 3 (odstránenie log. inic. sekventov z finálneho úseku)

Odstráňme logické iniciálne sekventy z finálneho úseku, teda sekventy typu $\langle \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \rangle$.

Situácia, v ktorej sa nachádzame vyzerá takto: Máme odvodenie sporu. Vo finálnom úseku nie sú voľné premenné, pretože sme ich odstránili v Kroku 1 a eigenvariable indukcie tam tiež nie sú vďaka Kroku 2. Finálny úsek obsahuje len ľubovoľné iniciálne sekventy a štrukturálne pravidlá, jeho najvyššie sekventy sú najvyššie sekventy celého odvodenia alebo dolné sekventy logických odvodzovacích pravidiel.

Vezmime si použitie logického iniciálneho sekventu vo finálnom úseku:

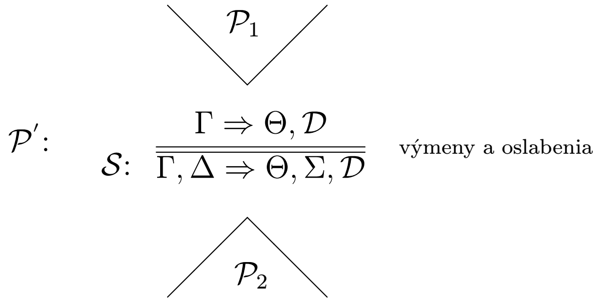


Rez $\mathcal{R}$ musí existovať, pretože výsledný sekvent je $\langle \Rightarrow \rangle$, a teda do konca musia všetky formule zmiznúť. Jediná možnosť, ako formule nechať zmiznúť, je použiť rez. Z tohto istého dôvodu obsahuje pododvodenie $\mathcal{P}_2$ ďalší rez, ktorého vstupná formula je opäť $\mathcal{D}$.

Nech:

$$\begin{aligned} h(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}) &= l \\ h(\langle \mathcal{D}, \Delta \Rightarrow \mathcal{D}, \Sigma \rangle, \mathcal{P}) &= l \\ o(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}) &= \alpha \\ o(\langle \mathcal{D}, \Delta \Rightarrow \mathcal{D}, \Sigma \rangle, \mathcal{P}) &= \beta \end{aligned}$$

Podoba tejto časti odvodenia po odstránení logického iniciálneho sekventu:



$$\mathcal{P}': \qquad \mathcal{S}\colon \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Sigma, \mathcal{D}} \; \text{výmeny a oslabenia}$$

Celá pravá časť pododvodenia zmizla. Aké sú výšky sekventov $\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle$ a sekventu $\mathcal{S}$ v odvodení $\mathcal{P}'$? Uvedomme si najprv, že oba sekventy majú rovnakú výšku danú stupňom prípadného rezu z pododvodenia $\mathcal{P}_2$, pretože pravidlá, pomocou ktorých sme sa od sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle$ dostali k $\mathcal{S}$, sú len slabé štrukturálne pravidlá a výšku neovplyvňujú.

Vychádzame z predpokladu, že $h(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}) = l$. Mohli nastať tieto dve možnosti:

- V pododvodení $\mathcal{P}_2$ sa vyskytuje rez, ktorého stupeň je ostro väčší ako stupeň formule $\mathcal{D}$. Vezmime si takýto rez z $\mathcal{P}_2$ s najväčším stupňom. Potom jeho stupeň je l a platí:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{S}, \mathcal{P}) &= l \\ h(\mathcal{S}, \mathcal{P}') &= l \\ h(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}') &= l \end{aligned}$$

- Číslo l je stupeň formule $\mathcal{D}$, čo znamená, že v pododvodení $\mathcal{P}_2$ nie je rez s ostro väčším stupňom. Vieme ale, že rez so stupňom práve $\mathcal{D}$ je v $\mathcal{P}_2$ aspoň jeden, pretože pred koncom odvodenia je potrebné rezať aj druhý výskyt formule $\mathcal{D}$. Z toho plynie:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{S}, \mathcal{P}) &= l \\ h(\mathcal{S}, \mathcal{P}') &= l \\ h(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}') &= l \end{aligned}$$

Odhady výšok nám umožňujú vyrátať ordinálne čísla sekventu $\mathcal{S}$ v $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$:

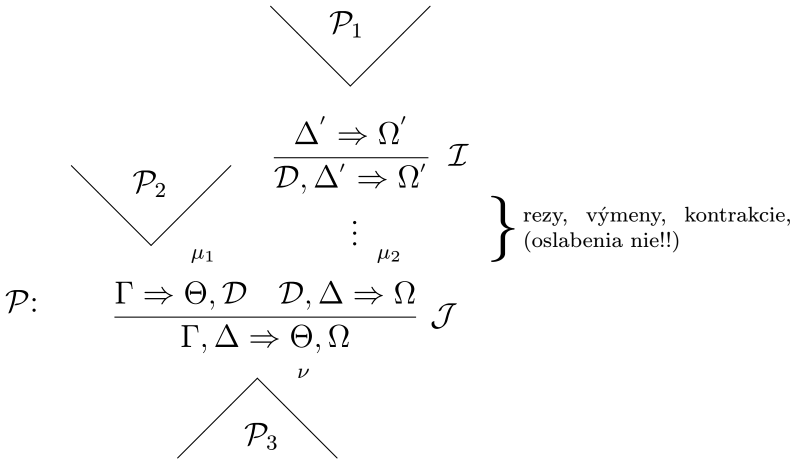
$$\begin{aligned} o(\mathcal{S}, \mathcal{P}) &= \omega_{l-l}(\alpha \sharp \beta) \\ o(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}) &= o(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{D} \rangle, \mathcal{P}') = o(\mathcal{S}, \mathcal{P}') = \alpha \end{aligned}$$

Porovnajme obe čísla $o(\mathcal{S},\mathcal{P})$ a $o(\mathcal{S},\mathcal{P}')$. Je zrejmé, že $\alpha < (\alpha\sharp\beta)$, preto platí $o(\mathcal{S},\mathcal{P}') < o(\mathcal{S},\mathcal{P})$. V pododvodení $\mathcal{P}_2$ sa podľa Kroku 2 nevyskytuje indukcia, preto sa podľa Lemmy 7 zmenšenie ordinálneho čísla v strede odvodenia propaguje až k výslednému sekventu. Platí: $o(\mathcal{P}') < o(\mathcal{P})$.

3.14 Krok 4 (odstránenie pravidla oslabenia z finálneho úseku)

Aktuálny stav nášho odvodenia po troch redukčných krokoch je: Máme odvodenie sporu, ktorého finálny úsek je bez indukcie a bez voľných premenných (ľubovoľného druhu). Ďalej je bez logických iniciálnych sekventov. Sú tam len rezy, slabé štrukturálne pravidlá a matematické inic. sekventy. V tomto kroku je naším cieľom odstrániť z finálneho úseku pravidlo oslabenia: $\frac{\Gamma\Rightarrow\Theta}{\mathcal{D},\Gamma\Rightarrow\Theta}$ resp. $\frac{\Gamma\Rightarrow\Theta}{\Gamma\Rightarrow\Theta,\mathcal{D}}$.

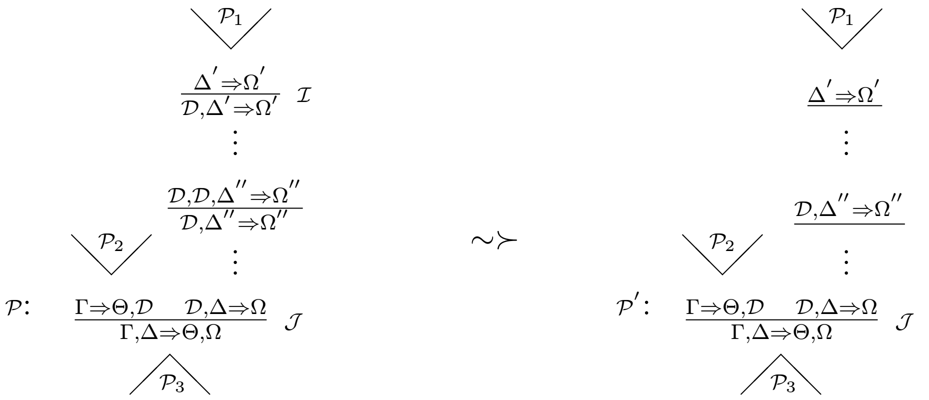
Zvoľme si použitie pravidla oslabenia vo finálnom úseku také, že pod ním sa pravidlo oslabenia už nepoužíva. Toto pravidlo oslabenia nazvyme $\mathcal{I}$:



Rez $\mathcal{J}$ musí existovať, pretože výsledný sekvent je prázdny. Nech platí:

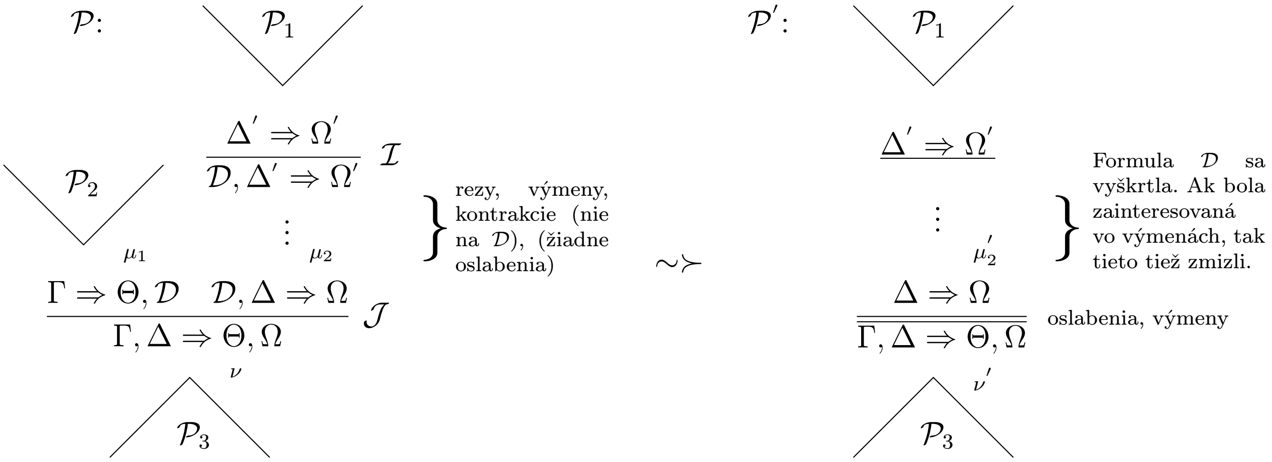
$$\begin{array}{lcl}
h(\langle\mathcal{D},\Delta\Rightarrow\Omega\rangle,\mathcal{P}) & = & k \\
h(\langle\Gamma\Rightarrow\Theta,\mathcal{D}\rangle,\mathcal{P}) & = & k \\
h(\langle\Gamma,\Delta\Rightarrow\Theta,\Omega\rangle,\mathcal{P}) & = & l \\
o(\langle\Gamma\Rightarrow\Theta,\mathcal{D}\rangle,\mathcal{P}) & = & \mu_1 \\
o(\langle\mathcal{D},\Delta\Rightarrow\Omega\rangle,\mathcal{P}) & = & \mu_2 \\
o(\langle\Gamma,\Delta\Rightarrow\Theta,\Omega\rangle,\mathcal{P}) & = & \nu
\end{array}$$

Rozlíšime dva prípady:
1.) Z $\mathcal{I}$ do $\mathcal{J}$ sa *ide cez kontrakciu uplatnenú na* $\mathcal{D}$. Vezmime najnižšiu kontrakciu uplatnenú na $\mathcal{D}$ v tejto časti:



Odvodenie $\mathcal{P}$ sa redukuje na odvodenie $\mathcal{P}'$ ako je nakreslené na obrázku. Z pravej vetvy sme škrtli formulu $\mathcal{D}$, ktorá v odvodení $\mathcal{P}$ vznikla oslabením $\mathcal{I}$. (Načo $\mathcal{D}$ zavádzať, keď sa o pár sekventov nižšie bude škrtať.) Rez $\mathcal{J}$ ostal nezmenený, preto platí: $o(\mathcal{P}) = o(\mathcal{P}')$.

2.) Z $\mathcal{I}$ do $\mathcal{J}$ sa *nejde cez kontrakciu uplatnenú na* $\mathcal{D}$. Potom odvodenie $\mathcal{P}$ transformujeme na odvodenie $\mathcal{P}'$ takto:



Rez $\mathcal{J}$ z odvodenia $\mathcal{P}'$ zmizol, nie je čo rezať. Podozrivo vyzerá pridanie oslabení. V tomto kroku ich predsa chceme odstrániť a vidíme, že odstránenie jedného oslabenia mohlo viesť k vzniku viacerých nových. To nám ale nevadí.

Novopridané oslabenia „simulujú“ zmiznutý rez $\mathcal{J}$ a počet rezov od odstraňovaného oslabenia po výsledný sekvent odvodenia sa postupne znižuje.

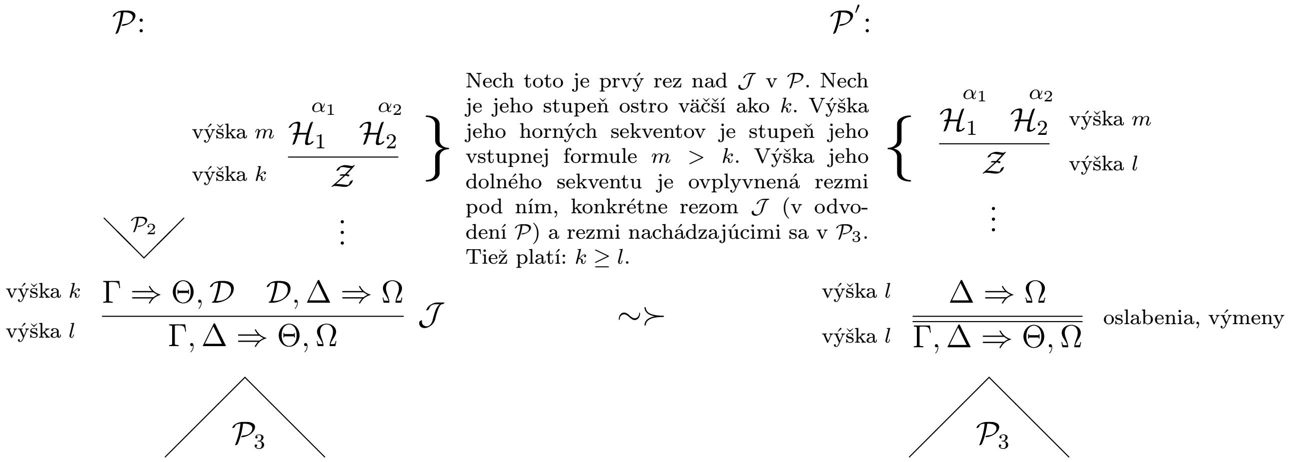
Platí:

$$\begin{aligned}
h(\langle \Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Omega \rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l \\
h(\langle \Delta \Rightarrow \Omega \rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l \\
o(\langle \Delta \Rightarrow \Omega \rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \mu_2^{'} \\
o(\langle \Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Omega \rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \nu^{'}
\end{aligned}$$

Prvá rovnosť platí, pretože pod sekventom $\langle \Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Omega \rangle$ v odvodení $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}^{'}$ je pododvodenie $\mathcal{P}_3$ (stále také isté). Druhá rovnosť platí, pretože oslabenia a výmeny výšku neovplyvňujú.

Vidíme, že v odvodení $\mathcal{P}^{'}$ chýba v porovnaní s odvodením $\mathcal{P}$ najmenej jeden rez. To mohlo znížiť výšky sekventov v $\mathcal{P}^{'}$, ktoré sa v $\mathcal{P}$ nachádzali nad týmto rezom. Tým sa ale mohli zvýšiť ordinálne čísla niektorých sekventov v $\mathcal{P}^{'}$ (v porovnaní so sekventami, ktoré im zodpovedajú v $\mathcal{P}$).

Pozrime si tento príklad:



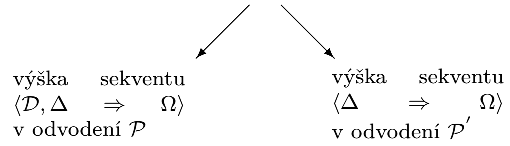
Nech toto je prvý rez nad $\mathcal{J}$ v $\mathcal{P}$. Nech je jeho stupeň ostro väčší ako k. Výška jeho horných sekventov je stupeň jeho vstupnej formule $m > k$. Výška jeho dolného sekventu je ovplyvnená rezmi pod ním, konkrétne rezom $\mathcal{J}$ (v odvodení $\mathcal{P}$) a rezmi nachádzajúcimi sa v $\mathcal{P}_3$. Tiež platí: $k \geq l$.

Platí: $o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}) = o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}^{'}) = \alpha_1$ a $o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}) = o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}^{'}) = \alpha_2$, pretože v oboch odvodeniach sú nad zodpovedajúcimi si sekventami rovnaké pododvodenia a aj ich výšky sa zhodujú. Potom dostávame:

$$\begin{aligned}
o(\mathcal{Z}, \mathcal{P}) &= \omega_{m-k}(\alpha_1 \sharp \alpha_2) \\
o(\mathcal{Z}, \mathcal{P}^{'}) &= \omega_{m-l}(\alpha_1 \sharp \alpha_2)
\end{aligned}$$

Pričom platí, že $k \geq l$, preto $(m-k) \leq (m-l)$. Teda, $o(\mathcal{Z},\mathcal{P}) \leq o(\mathcal{Z},\mathcal{P}^{'})$. To by znamenalo, že ordinálne číslo sekventu $\mathcal{Z}$ sa po redukcii zväčšilo, do exponetu mu pribudlo $(k-l)$ „omég“. Zatiaľ to nevyzerá priaznivo. Pointa redukcie je v tom, že v odvodení $\mathcal{P}^{'}$ napokon rez $\mathcal{J}$ nevykonáme a tým sa spomínaných $(k-l)$ „omég“ v exponente „ušetrí“. Ordinálne čísla sekventov v $\mathcal{P}^{'}$ nad zmiznutým rezom síce môžu narásť, ale „nie oveľa“. Indukciou podľa dĺžky odvodenia sekventu $\langle\Delta \Rightarrow \Omega\rangle$ resp. $\langle\mathcal{D},\Delta \Rightarrow \Omega\rangle$ dokážeme (na str. 97):

$$o(\langle\Delta \Rightarrow \Omega\rangle,\mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k-l}(o(\langle\mathcal{D},\Delta \Rightarrow \Omega\rangle,\mathcal{P}))$$



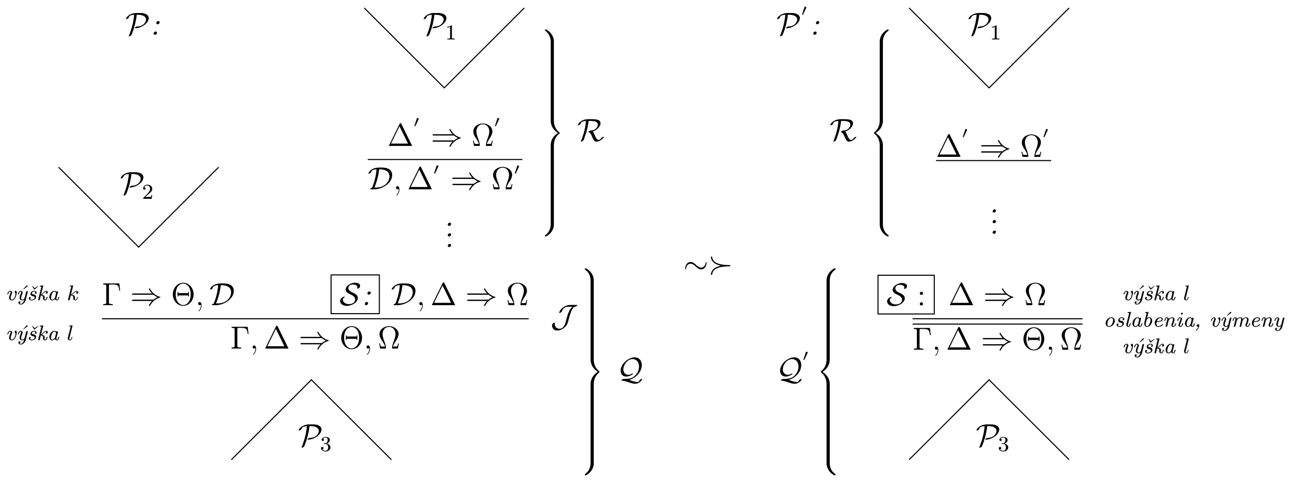
Predstavme si teraz, že to už je dokázané. Potom máme: $\omega_{k-l}(\mu_2) \geq \mu_2^{'}$. Ordinále čísla, ktoré chceme porovnať sú ν a $\nu^{'}$:

$$\nu = \omega_{k-l}(\mu_1 \sharp \mu_2) > \omega_{k-l}(\mu_2) \geq \mu_2^{'} = \nu^{'}$$

Dostali sme $\nu > \nu^{'}$ a podľa Lemmy 7 platí $o(\mathcal{P}) > o(\mathcal{P}^{'})$.

Lemma ku kroku 4. *Nech odvodenie $\mathcal{R}$ sekventu $\mathcal{S}$ je pododvodením odvodenia $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}^{'}$. Nech odvodenie $\mathcal{P}$ pod sekventom $\mathcal{S}$ pokračuje ako $\mathcal{Q}$ a odvodenie $\mathcal{P}^{'}$ pod sekventom $\mathcal{S}$ pokračuje ako $\mathcal{Q}^{'}$, kde v $\mathcal{Q}^{'}$ chýba oproti $\mathcal{Q}$ jeden rez a potom už sú rovnaké. Nech $h(\mathcal{S},\mathcal{P}) = k$, $h(\mathcal{S},\mathcal{P}^{'}) = l$, $l \leq k$. Potom $o(\mathcal{S},\mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k-l}(o(\mathcal{S},\mathcal{P}))$.*

Obrázok:



Dôkaz. Odvodenia $\mathcal{R}$ v $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ nie sú identické. V $\mathcal{P}'$ bolo škrtané $\mathcal{D}$ a možno nejaké výmeny. Pre našu potrebu môžeme $\mathcal{R}$ v $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ považovať za rovnaké, pretože odlišnosti medzi nimi neovplyvnili výšku sekventov ani ordinálne čísla (to ovplyvnili odlišnosti medzi $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}'$). Preto sme sekventy $\langle \mathcal{D}, \Delta \Rightarrow \Omega \rangle$ a $\langle \Delta \Rightarrow \Omega \rangle$ pomenovali zhodne $\mathcal{S}$ a nezáleží na tom, či bude dôkaz prebiehať indukciou podľa dĺžky odvodenia sekventu $\mathcal{S}$ v $\mathcal{P}$ alebo $\mathcal{P}'$.

Budeme rozoberať prípady, akým pravidlom mohol byť sekvent $\mathcal{S}$ odvodený. Musíme zvážiť i logické pravidlá a indukciu. Týmito síce priamo sekvent $\mathcal{S}$ odvodený nemohol byť, keďže sa nachádza vo finálnom úseku (kde sa log. pravidlá a indukcia nevyskytujú), ale je možné, že odvodenie sekventu $\mathcal{S}$ sa tiahne aj nad finálny úsek.

1.) Nech $\mathcal{S}$ je *iniciálny sekvent*: Chceme $1 \le \omega_{k_1-k_2}(1)$, kde $h(\mathcal{S}, \mathcal{P}) = k_1$, $h(\mathcal{S}, \mathcal{P}') = k_2$, $k_1 \ge k_2$ (škrtnutím rezu $\mathcal{J}$ výška ostala alebo sa zmenšila). Požadovaná nerovnosť evidentne platí.

2.) Nech $\mathcal{S}$ je *dolný sekvent slabého štrukturálneho pravidla*:

$$\mathcal{P}: \quad \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l}\text{výška } k_1\\ \text{výška } k_1\end{array} \qquad \mathcal{P}': \quad \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l}\text{výška } k_2\\ \text{výška } k_2\end{array}$$

kde $k_1 \ge k_2$ kvôli škrtnutému rezu $\mathcal{J}$. Z indukčného predpokladu vieme: $o(\mathcal{H}, \mathcal{P}') \le \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}, \mathcal{P}))$. Chceme ukázať: $o(\mathcal{S}, \mathcal{P}') \le \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{S}, \mathcal{P}))$. To máme priamo z indukčného predpokladu, pretože použitie slabých štrukturálnych pravidiel ordinálne číslo zachováva nezmenené.

3.) Nech $\mathcal{S}$ je *dolný sekvent logického pravidla s jednou premisou*:

$$\mathcal{P}: \quad \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l}\text{výška } k_1\\ \text{výška } k_1\end{array} \qquad \mathcal{P}': \quad \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l}\text{výška } k_2\\ \text{výška } k_2\end{array}$$

kde $k_1 \ge k_2$. Z indukčného predpokladu vieme: $o(\mathcal{H}, \mathcal{P}') \le \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}, \mathcal{P}))$. Chceme ukázať: $o(\mathcal{H}, \mathcal{P}') + 1 \le \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}, \mathcal{P}) + 1)$. To nie je ťažké:

$$o(\mathcal{H}, \mathcal{P}') + 1 \overset{\text{IP}}{\le} \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}, \mathcal{P})) + 1 \le \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}, \mathcal{P}) + 1)$$

4.) Nech $\mathcal{S}$ je *dolný sekvent logického pravidla s dvoma premisami*:

$$\mathcal{P}: \quad \frac{\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{H}_2}{\mathcal{S}} \begin{array}{l}\text{výška } k_1\\ \text{výška } k_1\end{array} \qquad \mathcal{P}': \quad \frac{\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{H}_2}{\mathcal{S}} \begin{array}{l}\text{výška } k_2\\ \text{výška } k_2\end{array}$$

kde $k_1 \geq k_2$. Z indukčného predpokladu vieme: $o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}))$ a $o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}))$. Chceme ukázať:

$$o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}^{'}) \sharp o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}) \sharp o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}))$$

Platí:

$$o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}^{'}) \sharp o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}^{'}) \overset{\text{IP}}{\leq} \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P})) \sharp \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P})) \leq \omega_{k_1-k_2}(o(\mathcal{H}_1, \mathcal{P}) \sharp o(\mathcal{H}_2, \mathcal{P}))$$

5.) Nech $\mathcal{S}$ je *dolný sekvent rezu*:

$$\mathcal{P}: \quad \frac{\overset{\alpha_1}{\mathcal{H}_1} \quad \overset{\alpha_2}{\mathcal{H}_2}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l} \text{výška } k_1 \\ \text{výška } k_2 \end{array} \qquad\qquad \mathcal{P}^{'}: \quad \frac{\overset{\beta_1}{\mathcal{H}_1} \quad \overset{\beta_2}{\mathcal{H}_2}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l} \text{výška } l_1 \\ \text{výška } l_2 \end{array}$$

kde $k_1 \geq k_2$, $l_1 \geq l_2$ (pretože tak to vždy platí pre výšky), $k_2 \geq l_2$, $k_1 \geq l_1$ (pretože v $\mathcal{P}$ pod $\mathcal{S}$ je rez, ktorý v $\mathcal{P}^{'}$ nie je). Z indukčného predpokladu vieme: $\beta_1 \leq \omega_{k_1-l_1}(\alpha_1)$ a $\beta_2 \leq \omega_{k_1-l_1}(\alpha_2)$.

Chceme:

$$o(\mathcal{S}, \mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k_2-l_2}(o(\mathcal{S}, \mathcal{P}))$$

$$\omega_{l_1-l_2}(\beta_1 \sharp \beta_2) \leq \omega_{k_2-l_2}(\omega_{k_1-k_2}(\alpha_1 \sharp \alpha_2))$$

Platí:

$$\omega_{l_1-l_2}(\beta_1 \sharp \beta_2) \overset{\text{IP}}{\leq} \omega_{l_1-l_2}(\omega_{k_1-l_1}(\alpha_1 \sharp \alpha_2)) = \omega_{k_1-l_2}(\alpha_1 \sharp \alpha_2) = \omega_{k_2-l_2}(\omega_{k_1-k_2}(\alpha_1 \sharp \alpha_2))$$

$$\downarrow$$

$$\left. \begin{array}{lll} \beta_1 & \leq & \omega_{k_1-l_1}(\alpha_1) \\ \beta_2 & \leq & \omega_{k_1-l_1}(\alpha_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_1 \sharp \beta_2 \leq \omega_{k_1-l_1}(\alpha_1) \sharp \omega_{k_1-l_1}(\alpha_2) \leq \omega_{k_1-l_1}(\alpha_1 \sharp \alpha_2)$$

6.) Nech $\mathcal{S}$ je *dolný sekvent indukcie*:

$$\mathcal{P}: \quad \frac{\overset{\alpha}{\mathcal{H}}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l} \text{výška } k_1 \\ \text{výška } k_2 \end{array} \qquad\qquad \mathcal{P}^{'}: \quad \frac{\overset{\beta}{\mathcal{H}}}{\mathcal{S}} \begin{array}{l} \text{výška } l_1 \\ \text{výška } l_2 \end{array}$$

kde $k_1 \geq k_2$, $l_1 \geq l_2$ (pretože tak to vždy platí pre výšky), $k_2 \geq l_2$, $k_1 \geq l_1$ (pretože v $\mathcal{P}$ pod $\mathcal{S}$ je rez, ktorý v $\mathcal{P}^{'}$ nie je). Z indukčného predpokladu vieme: $\beta \leq \omega_{k_1-l_1}(\alpha)$. Nech platí:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \omega^{a_1} + \omega^{a_2} + .. + \omega^{a_n} \\ \beta & = & \omega^{b_1} + \omega^{b_2} + .. + \omega^{b_m} \end{array}$$

Chceme ukázať:

$$o(\mathcal{S},\mathcal{P}^{'}) \leq \omega_{k_2-l_2}(o(\mathcal{S},\mathcal{P}))$$

$$\omega_{l_1-l_2+1}(b_1+1) \leq \omega_{k_2-l_2}(\omega_{k_1-k_2+1}(a_1+1))$$

Upravme pravú a ľavú stranu nerovnosti, ktorú chceme ukázať:

$$\begin{aligned} \omega_{l_1-l_2+1}(b_1+1) &= \omega_{l_1-l_2}(\omega^{b_1+1}) \\ \omega_{k_2-l_2}(\omega_{k_1-k_2+1}(a_1+1)) &= \omega_{k_2-l_2}(\omega_{k_1-k_2}(\omega^{a_1+1})) = \omega_{k_1-l_2}(\omega^{a_1+1}) \end{aligned}$$

Z toho nám vyšlo, že nám stačí ukázať:

$$\omega_{l_1-l_2}(\omega^{b_1+1}) \leq \omega_{k_1-l_2}(\omega^{a_1+1})$$

Predpokladajme najprv, že $k_1 > l_1$, počítajme:

$$\beta \overset{\text{IP}}{\leq} \omega_{k_1-l_1}(\alpha) \rightsquigarrow b_1 \leq \omega_{k_1-l_1-1}(\alpha) \rightsquigarrow b_1+1 \leq \omega_{k_1-l_1-1}(\alpha)+1 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \underline{\omega^{b_1+1} \leq \omega(\omega_{k_1-l_1-1}(\alpha)+1)}$$

Druhá nerovnosť platí, pretože prvý exponent, na ktorom sa β, $\omega_{k_1-l_1}(\alpha)$ líšia je v β menší. Číslo $\omega_{k_1-l_1}(\alpha)$ má len jediný sčítanec v Cantorovom rozvoji, takže sa líšia hneď na prvom exponente.

Pokračujme:

$$\omega^{\alpha_1} < \omega^{a_1+1} \rightsquigarrow \alpha < \omega^{a_1+1} \rightsquigarrow \omega_{k_1-l_1-1}(\alpha) < \omega_{k_1-l_1-1}(\omega^{a_1+1}) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \omega_{k_1-l_1-1}(\alpha)+1 \leq \omega_{k_1-l_1-1}(\omega^{a_1+1}) \rightsquigarrow \underline{\omega(\omega_{k_1-l_1-1}(\alpha)+1) \leq \omega_{k_1-l_1}(\omega^{a_1+1})}$$

Keď na podčiarknuté nerovnosti použijeme tranzitivitu, dostaneme nerovnosť $\omega^{b_1+1} \leq \omega_{k_1-l_1}(\omega^{a_1+1})$. Členy tejto nerovnosti použijeme ako exponenty čísla $\omega_{l_1-l_2}(1)$ a dostaneme požadovaný výsledok:

$$\omega^{b_1+1} \leq \omega_{k_1-l_1}(\omega^{a_1+1}) \rightsquigarrow \omega_{l_1-l_2}(\omega^{b_1+1}) \leq \omega_{l_1-l_2}(\omega_{k_1-l_1}(\omega^{a_1+1})) = \omega_{k_1-l_2}(\omega^{a_1+1})$$

Uvážme ešte situáciu, keď $k_1 = l_1$:

V tomto prípade máme $\alpha = \beta$, pretože nad sekventom $\mathcal{H}$ v odvodení $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}^{'}$ sa nachádza rovnaké pododvodenie a ich výšky sa zhodujú. Keď vezmeme do úvahy tieto predpoklady, tak nám stačí ukázať $\omega_{l_1-l_2}(\omega^{a_1+1}) \leq \omega_{l_1-l_2}(\omega^{a_1+1})$. To zrejme platí. $\square$

3.15 Krok 5 (využitie vhodného rezu z finálneho úseku)

Po vykonaní predchádzajúcich krokov sme dostali odvodenie sporu s nasledujúcimi vlastnosťami: Finálny úsek odvodenia neobsahuje indukciu (Krok 2) ani voľné premenné (Krok 1 a 2 kvôli eigenvariable), je bez logických iniciálnych sekventov (Krok 3) a bez oslabení (Krok 4). Vo finálnom úseku je len rez, kontrakcia, výmena, matematické iniciálne sekventy, na konci je sekvent $\langle \Rightarrow \rangle$ a v hranici sú implicitné logické pravidlá.

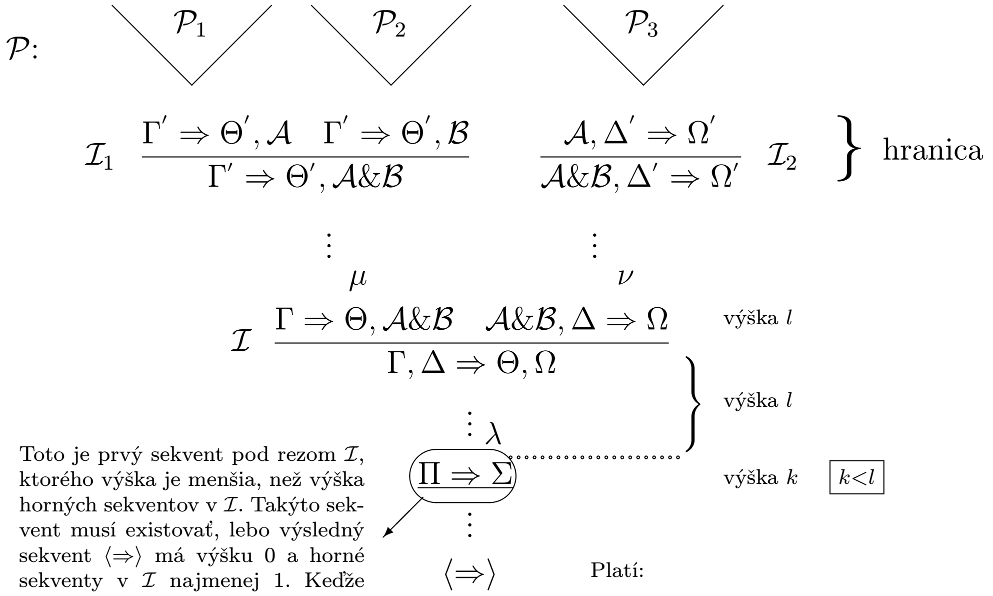
Predstavme si, že celé odvodenie tvorí svoj vlastný finálny úsek. O takomto odvodení platí:

- Celé odvodenie neobsahuje voľné premenné, a to ani eigenvariable, lebo indukciu nemá z Kroku 2 a generalizácie ako logické odvodzovacie pravidlá nie sú vo finálnom úseku odvodenia sporu povolené.
- Celé odvodenie má len matematické iniciálne sekventy.
- Odvodenie obsahuje slabé štrukturálne pravidlá, z toho oslabenie tiež nie.
- Ak sú v odvodení rezy, tak neesenciálne: Matematické inic. sekventy sa skladajú zo samých atomických formulí. Vo finálnom úseku nie sú pravidlá pre spojky ani oslabenie, preto zložené formule nevyrobíme.

Ak toto odvodenie porovnáme s definíciou jednoduchého odvodenia, ktoré je na strane 74, zistíme, že má vlastnosti požadované v definícii. Podľa Lemmy 4 neexistuje jednoduché odvodenie prázdneho sekventu. Z toho plynie, že naše zvolené odvodenie sporu nie je celý svoj finálny úsek, takže finálny úsek v ňom má hranicu tvorenú implicitnými logickými pravidlami. Môžeme sa pýtať, či jeho finálny úsek obsahuje vhodný rez (vstupné formule vhodného rezu majú vo svojej línii predka, ktorý je vstupnou formulou logického pravidla z hranice).

Odpoveď nájdeme pomocou Lemmy 5: Odvodenie, s ktorým pracujeme spĺňa jej predpoklady. Nie je celý svoj finálny úsek. Jeho finálny úsek neobsahuje logické pravidlá, indukciu a oslabenie. Iniciálne sekventy vo finálnom úseku sú len z atomických formulí, pretože matematické iniciálne sekventy tak boli zvolené. Potom v jeho finálnom úseku existuje vhodný rez.

Vezmime si najnižší vhodný rez $\mathcal{I}$ vo finálnom úseku. Nech je jeho vstupná formula tvaru napr. $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$:



Toto je prvý sekvent pod rezom $\mathcal{I}$, ktorého výška je menšia, než výška horných sekventov v $\mathcal{I}$. Takýto sekvent musí existovať, lebo výsledný sekvent $\langle\Rightarrow\rangle$ má výšku 0 a horné sekventy v $\mathcal{I}$ najmenej 1. Keďže jeho výška je ostro menšia, musí to byť dolný sekvent nejakého rezu $\mathcal{J}$, lebo indukcia vo finálnom úseku nie je. Môže sa stať, že $\langle\Pi \Rightarrow \Sigma\rangle = \langle\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Omega\rangle$.

Platí:

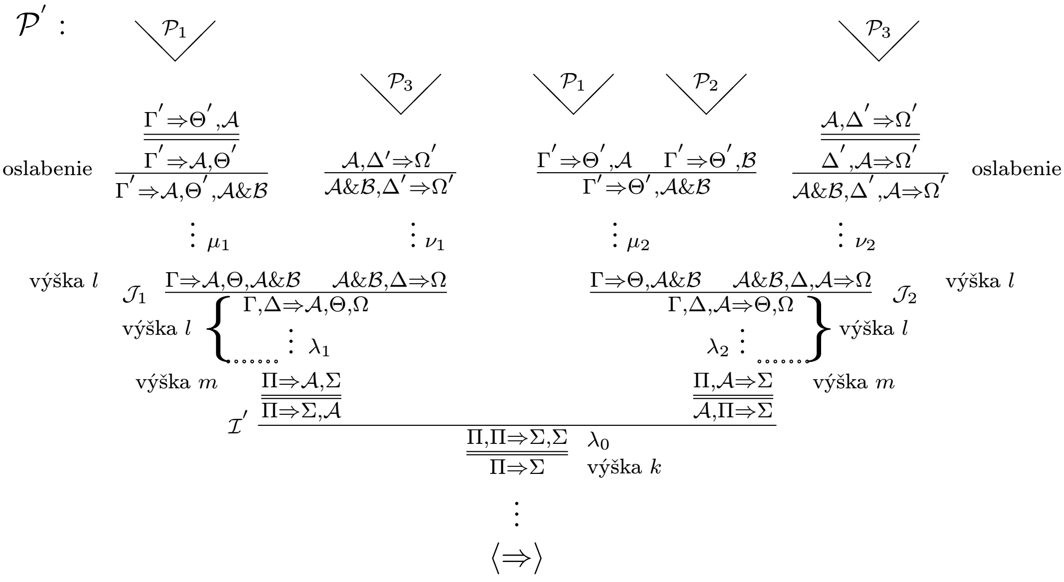
$h(\langle\Gamma\Rightarrow\Theta,\mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle,\mathcal{P})=l$ $\quad o(\langle\Gamma\Rightarrow\Theta,\mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle,\mathcal{P})=\mu$

$h(\langle\mathcal{A}\&\mathcal{B},\Delta\Rightarrow\Omega\rangle,\mathcal{P})=l$ $\quad o(\langle\mathcal{A}\&\mathcal{B},\Delta\Rightarrow\Omega\rangle,\mathcal{P})=\nu$

$h(\langle\Gamma,\Delta\Rightarrow\Theta,\Omega\rangle,\mathcal{P})=l$ $\quad o(\langle\Pi\Rightarrow\Sigma\rangle,\mathcal{P})=\lambda$

$h(\langle\Pi\Rightarrow\Sigma\rangle,\mathcal{P})=k$

Uvedené odvodenie $\mathcal{P}$ sa redukuje na odvodenie $\mathcal{P}'$:



Platí:

$$\begin{aligned}
h(\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l\\
h(\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Omega\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l\\
h(\langle \Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l\\
h(\langle \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta, \mathcal{A} \Rightarrow \Omega\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l\\
h(\langle \Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \Omega\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l\\
h(\langle \Gamma, \Delta, \mathcal{A} \Rightarrow \Theta, \Omega\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= l
\end{aligned}$$

pretože výška vymenovaných sekventov v $\mathcal{P}$ je práve l. Pod nimi síce vznikol nový rez $\mathcal{I}^{'}$, ale s menším stupňom ako ich vstupná formula $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$. Žiadny rez pod nimi sa neškrtol.

Ďalej platí:

$h(\langle \Pi \Rightarrow \Sigma\rangle, \mathcal{P}^{'}) = k,$ pretože pod týmto sekventom v $\mathcal{P}^{'}$ to pokračuje ako pôvodné odvodenie $\mathcal{P}$.

Ešte platí:

$$\left.\begin{aligned}
h(\langle \Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= m\\
h(\langle \Pi, \mathcal{A} \Rightarrow \Sigma\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= m
\end{aligned}\right\}\text{v } \mathcal{P}^{'} \text{ vznikla nová „medzivýška“}$$

Porovnajme vzťahy výšok k, l, m: $\boxed{k \leq m < l}$

Toto plynie z definície priraďovania výšok sekventom.

Platí: $m = \max\{k, \text{stupeň}(\mathcal{A})\}$. Keby $m = k$, tak $m < l$, pretože $k < l$. Keby $m = \text{stupeň}(\mathcal{A})$, tak $m < l$, pretože l je aspoň stupeň formule $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$.

Sekventy $\langle \Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma\rangle$, $\langle \Pi, \mathcal{A} \Rightarrow \Sigma\rangle$ sú prvé pod $\mathcal{J}_1$ resp. $\mathcal{J}_2$, ktorých výška je ostro menšia než l. Možno platí: $\langle \Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \Omega\rangle = \langle \Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma\rangle$, $\langle \Gamma, \Delta, \mathcal{A} \Rightarrow \Theta, \Omega\rangle = \langle \Pi, \mathcal{A} \Rightarrow \Sigma\rangle$.

Platí:

$$\begin{aligned}
o(\langle\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \mu_1 \\
o(\langle\mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Omega\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \nu_1 \\
o(\langle\Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B}\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \mu_2 \\
o(\langle\mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta, \mathcal{A} \Rightarrow \Omega\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \nu_2 \\
o(\langle\Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \lambda_1 \\
o(\langle\Pi, \mathcal{A} \Rightarrow \Sigma\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \lambda_2 \\
o(\langle\Pi \Rightarrow \Sigma\rangle, \mathcal{P}^{'}) &= \lambda_0
\end{aligned}$$

Keďže sme v odvodení $\mathcal{P}^{'}$ v porovnaní s odvodením $\mathcal{P}$ odstránili dve logické odvodzovacie pravidlá z hranice a nahradili ich oslabením, tak dostávame:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &< \mu \\
\nu_2 &< \nu \\
\mu_2 &= \mu \\
\nu_1 &= \nu
\end{aligned}$$

Zaveďme si značenie:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \omega_{l-m}(\alpha_1^{'}\sharp\alpha_2^{'}) \\
\lambda_2 &= \omega_{l-m}(\alpha_3^{'}\sharp\alpha_4^{'}) \\
\lambda_0 &= \omega_{m-k}(\lambda_1\sharp\lambda_2) \\
\lambda &= \omega_{l-k}(\kappa)
\end{aligned}$$

Chceme porovnať ordinálne čísla λ a λ_0. Želaný výsledok je, aby vyšlo $\lambda_0 < \lambda$, čiže $\omega_{m-k}(\lambda_1\sharp\lambda_2) < \omega_{(l-m)+(m-k)}(\kappa)$. Na to stačí ukázať $\lambda_1\sharp\lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$, platí $(l-m) > 0$. Keď ukážeme $\lambda_1 < \omega_{l-m}(\kappa)$ a súčasne $\lambda_2 < \omega_{l-m}(\kappa)$, tak potom z definície prirodzenej sumy dostaneme požadovaný záver. Problém dokázania nerovnosti $\lambda_0 < \lambda$ sme previedli na problém ukázania dvoch nerovností, a to $\omega_{l-m}(\alpha_1^{'}\sharp\alpha_2^{'}) < \omega_{l-m}(\kappa)$ a $\omega_{l-m}(\alpha_3^{'}\sharp\alpha_4^{'}) < \omega_{l-m}(\kappa)$. Z definície porovnávanie ordinálnych čísel v Cantorovom rozvoji vieme, že nám teda stačí ukázať:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{'}\sharp\alpha_2^{'} &< \kappa \\
\alpha_3^{'}\sharp\alpha_4^{'} &< \kappa
\end{aligned}$$

Ukážeme len prvú nerovnosť, druhá sa dá ukázať analogicky.

1.) Nech situácia vyzerá nasledovne:

$$\mathcal{P}: \quad \begin{array}{lc} & \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ {\scriptstyle \mu} & {\scriptstyle \nu} \end{array} \\ \text{výška } l & \mathcal{I}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B} \quad \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Omega}{\underbrace{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Omega}_{\substack{\| \\ \Pi\Rightarrow\Sigma}}} \\ \text{výška } k & \\ & \vdots\ {\scriptstyle \lambda} \end{array} \qquad \mathcal{P}': \quad \begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ {\scriptstyle \mu_1} & {\scriptstyle \nu_1} \end{array} & \\ \mathcal{J}_1\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B} \quad \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Omega}{\underbrace{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \Omega}_{\substack{\| \\ \Pi\Rightarrow\mathcal{A},\Sigma}}} & \begin{array}{l} \text{výška } l \\ \text{výška } m \end{array} \\ \vdots\ {\scriptstyle \lambda_1} & \end{array}$$

Potom:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{'} &= \mu_1 < \mu \\ \alpha_2^{'} &= \nu_1 = \nu \\ \kappa &= \mu \sharp \nu \end{aligned}$$

Chceme dostať $\alpha_1^{'} \sharp \alpha_2^{'} < \kappa$, teda vlastne $\mu_1 \sharp \nu < \mu \sharp \nu$, čo platí, pretože prirodzená suma je striktne monotónna vo všetkých argumentoch.

2.) Nech sekvent $\langle \Pi \Rightarrow \Sigma \rangle$ resp. sekvent $\langle \Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma \rangle$ nebol odvodený priamo rezom $\mathcal{I}$ resp. $\mathcal{J}_1$ (musel byť odvodený iným rezom, pretože má ostro menšiu výšku ako horné sekventy rezu $\mathcal{I}$ resp. $\mathcal{J}_1$). Potom situácia vyzerá nasledovne:

$$\mathcal{P}: \quad \begin{array}{lc} & \vdots\ {\scriptstyle \alpha_1} \quad \vdots\ {\scriptstyle \alpha_2} \\ \text{výška } l & \mathcal{S}_1 \quad \mathcal{S}_2 \\ \text{výška } k & \overline{\Pi \Rightarrow \Sigma} \\ & \vdots\ {\scriptstyle \lambda} \end{array} \qquad \mathcal{P}': \quad \begin{array}{cl} \vdots\ {\scriptstyle \alpha_1^{'}} \quad \vdots\ {\scriptstyle \alpha_2^{'}} & \\ \mathcal{S}_1^{'} \quad \mathcal{S}_2^{'} & \text{výška } l \\ \overline{\Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma} & \text{výška } m \\ \vdots\ {\scriptstyle \lambda_1} & \end{array}$$

Potom $\kappa = \alpha_1 \sharp \alpha_2$. Chceme ukázať $\alpha_1^{'} \sharp \alpha_2^{'} < \alpha_1 \sharp \alpha_2$. Čo môžeme povedať o číslach α_1, α_2, $\alpha_1^{'}$, $\alpha_2^{'}$?

Vezmime si vlákno (zakrúžkované sekventy) idúce cez $\mathcal{S}_1'$ také, že prechádza sekventom $\langle \Gamma \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B} \rangle$ (z rezu $\mathcal{J}_1$), ktorý má ordinálne číslo μ_1:

$$
\begin{array}{llcl}
\mathcal{P}': & & \vdots\,\mu_1 \qquad\qquad\qquad \vdots\,\nu_1 & \\
& \mathcal{J}_1 & \dfrac{\boxed{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B}} \quad \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Omega}{\boxed{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathcal{A}, \Theta, \Omega}} & \text{výška } l \\
& & \boxed{\vdots} & \\
& & \alpha_1' \qquad\quad \alpha_2' & \\
& & \boxed{\mathcal{S}_1'} \quad \mathcal{S}_2' & \text{výška } l \\
& & \overline{\boxed{\Pi \Rightarrow \mathcal{A}, \Sigma}} & \text{výška } m \\
& & \vdots\,\lambda_1 &
\end{array}
$$

V odvodení $\mathcal{P}$ tomuto úseku zodpovedá:

$$
\begin{array}{llcl}
\mathcal{P}: & & \vdots\,\mu \qquad\qquad\qquad \vdots\,\nu & \\
& \mathcal{I} & \dfrac{\boxed{\Gamma \Rightarrow \Theta, \mathcal{A}\&\mathcal{B}} \quad \mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Omega}{\boxed{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Omega}} & \text{výška } l \\
& & \boxed{\vdots} & \\
& & \alpha_1 \qquad\quad \alpha_2 & \\
& & \boxed{\mathcal{S}_1} \quad \mathcal{S}_2 & \text{výška } l \\
& & \overline{\boxed{\Pi \Rightarrow \Sigma}} & \text{výška } k \\
& & \vdots\,\lambda &
\end{array}
$$

Využijeme Lemmu 7. Vieme, že $\mu_1 < \mu$, pododvodenia sekventu $\mathcal{S}_1$ resp. $\mathcal{S}_1'$ sú v podstate zhodné, až na to, že v $\mathcal{P}'$ so sebou vlečieme $\mathcal{A}$ ako vedľajšiu formulu. Výšky sekventov si zodpovedajúcich sú tiež zhodné. Dostávame $\alpha_1' < \alpha_1$. Ďalej platí $\alpha_2 = \alpha_2'$. Keďže prirodzená suma je striktne monotónna vo všetkých argumentoch, dostali sme $\alpha_1' \sharp \alpha_2' < \alpha_1 \sharp \alpha_2$.

Ukázali sme $\lambda_0 < \lambda$. Podľa Lemmy 7 vidíme, že ordinálne číslo redukovaného odvodenia kleslo. Tým je rozbor redukčných krokov kompletný.

Pomocou redukcií budú ordinálne čísla odvodenia klesať. Ordinálne čísla sú dobre usporiadané, takže neexistuje ich nekonečná klesajúca postupnosť. Raz sa musíme dostať k odvodeniu, ktorého ordinál je prirodzené číslo. Odvodenie, ktorého ordinál je prirodzené číslo neobsahuje indukciu ani esenciálne rezy (keby tam boli, tak pri priraďovaní ordinálnych čísel sekventom by sa vždy objavila ω). Čo teda toto odvodenie obsahuje? Vymenujme, aké možnosti ostali (budeme z nich postupne vyraďovať):

- logické odvodzovacie pravidlá
- logické iniciálne sekventy
- matematické iniciálne sekventy
- neesenciálne rezy
- slabé štrukturálne pravidlá

Vieme, že je to odvodenie sekventu $\langle\Rightarrow\rangle$. Všetky formule musia do konca zmiznúť rezom (inak sa nedá) a rezy, ktoré sa tam vyskytujú „režú“ len atomické formule. Z toho plynie, že odvodenie neobsahuje logické odvodzovacie pravidlá. Potom je jasné, že pod žiadnym sekventom nie sú implicitné logické pravidlá, keďže tam nie sú vôbec. Celé odvodenie tvorí svoj vlastný finálny úsek. Z redukčných krokov vieme, že nemá voľné premenné, a to ani eigenvariable, pretože neobsahuje indukciu ani generalizáciu. Má len matematické iniciálne sekventy. Sú tam len slabé štrukturálne pravidlá a neesenciálne rezy. Takéto odvodenie je jednoduché (def. str. 74) a jednoduché odvodenie sporu neexistuje. Preto je PA bezesporná.

4 Komentár k dôkazom

4.1 Kalkul

V dôkaze z roku 1936 používa Gentzen kalkul prirodzenej dedukcie. Tento obsahuje pravidlá pre zavedenie a odstránenie logických spojok. Kalkul $\mathcal{LK}$ v dôkaze z roku 1938 obsahuje pravidlá len pre „vytvorenie“ spojky a platí v ňom subformula property. Zavedeniu spojky z kalkulu prirodzenej dedukcie zodpovedajú pravidlá „right“, odstráneniu spojky naopak pravidlá „left“ v kombinácii s rezom v tomto zmysle:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}\&\mathcal{B} \qquad \dfrac{\mathcal{A}, \Delta \Rightarrow \Theta}{\mathcal{A}\&\mathcal{B}, \Delta \Rightarrow \Theta}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta}$$

Ešte lepšie sa to dá ilustrovať na príklade vhodného rezu z finálneho úseku. Vstupné formle takéhoto rezu majú vo svojej línii predka, ktorý je vstupnou formulou implicitného logického pravidla z hranice. Jedno toto implicitné logické pravidlo musí byť typu „right“. Ním sa spojka zavádza. Druhé logické pravidlo je typu „left“. Zodpovedá miestu, kde sa daná spojka odstraňuje. Vhodný rez predstavuje formálne spojenie miest zavedenia a odstránenia spojky a jej skutočné „zmiznutie“.

Kalkul $\mathcal{LK}$ umožňuje oprostiť sa od „prirodzenej postupnosti sekventov“ v odvodení. Namiesto toho sú sekventy usporiadané „umelo“ tak, aby sa jednoduchšie formule vyskytli skôr ako zložitejšie (čo do počtu spojok). To uľahčuje zisťovať mieru komplikovanosti odvodenia. Ďalšiu výhodu kalkulu $\mathcal{LK}$ pri teoretických skúmaniach vidí Gentzen v tom, že pravidlá pre spojky sú symetrické. Ani pravidlá pre negáciu, na rozdiel od kalkulu prirodzenej dedukcie, netvoria výnimku. V $\mathcal{LK}$ sú matematické iniciálne sekventy definované tak, aby boli zložené len z atomických formulí. Táto vlastnosť hrá pri dôkaze dôležitú úlohu, a pritom je možné dokázať v tomto kalkule všetky matematické iniciálne sekventy v starom zmysle (tj. z kalkulu pre PA v dôkaze z roku 1936).

4.2 Myšlienka dôkazu

Odhliadnuc od toho, ze použitie kalkulu prirodzenej dedukcie a novodefinovaných ordinálnych čísel spôsobuje technické komplikácie, sú oba dôkazy založené na rovnakej myšlienke, a to, že v Peanovej aritmetike sa dajú odvodiť len „pravdivé“ sekventy.

V dôkaze z roku 1936 je to modelované možnosťou volieb pri redukcii sekventov, napr. keď niečo platí pre všetkých, tak to platí pre ľubovoľný numerál a my si môžeme zvoliť, aký sa hodí. Pri redukovaní zadnej formule je to jednoznačné: z „pravdivého“ sekventu získami redukciou „pravdivý“ sekvent. Pri redukovaní prednej formule treba byť opatrnejší, ale vždy existuje taká možnosť voľby, ktorá „pravdivosť“ sekventu zachová. Prvotné voľby sú dané pri redukciách iniciálnych sekventov a tieto voľby sa propagujú nadol. Z tohto pohľadu je tvar matematických iniciálnych sekventov výhodný: sekvent obsahuje len zadnú formulu, ktorá má všetky premenné viazané všeobecným kvantifikátorom (ľubovoľná voľba je správna).

V odvodení teda vyndeme z „pravdivých“ iniciálnych sekventov, odvodzovacie pravidlá „pravdivosť“ zachovávajú, preto by mali byť všetky sekventy, ktoré je možné odvodiť, tiež „pravdivé“. Aby sme sa o tom mohli naozaj presvedčiť (dokázali to vypočítať), musíme ich redukovať na cieľovú formu, ktorá nám priamy výpočet umožňuje. Redukcie sú definované tak, aby „pravdivosť“ resp. „nepravdivosť“ zachovávali, preto sa môžeme spoľahnuť na to, že (ne)možnosť redukcie sekventu na cieľovú formu má výpovednú hodnotu o jeho „pravdivosti“.

V dôkaze z roku 1938 je „pravdivosť“ odvoditeľných sekventov zachytená v pojme jednoduché odvodenie. Tu, na rozdiel od dôkazu z roku 1936, kde hlavnú rolu hrá pojem redukcia na sekvente a pojdem redukcia na odvodení je len jeho rozšírením, naozaj redukuje odvodenie. A to tak, aby sme došli k jednoduchému odvodeniu a videli, že odvodenie sporu neexistuje. V dôkaze z roku 1936 dokázal Gentzen redukovateľnosť ľubovoľného sekventu, ktorý sa dá odvodiť v PA. V dôkaze z roku 1938 sa zameriava už len na dôkaz bezespornosti.

Odstraňovanie logických iniciálnych sekventov a pravidla oslabenia z finálneho úseku v dôkaze z roku 1938 chápe Gentzen ako prípravný krok pred „redukciou spojok“. Oslabenie totiž spôsobí vetvenie v línii (keď ideme zdola nahor) a zväčší tak počet miest, kde sa daná spojka „zavádza“. Logické iniciálne sekventy sa vo finálnom úseku dajú využiť jedine ako horné sekventy v reze. Je jasné, že sekvent odvodený takýmto rezom je zhodný s druhou premisou rezu. Takže sú tam vlastne zbytočne.

Spôsob priraďovania ordinálnych čísel sekventom v dôkaze z roku 1938, ktorý je popísaný v práci, je v zásade rovnaký ako ho navrhol Gentzen, ale jeho popis je iný. Gentzen to trochu skomplikoval tým, že čísla priraďoval sekventom aj odvodzovacím čiaram, ktoré sekventy delia. Krok, v ktorom sa priradilo číslo čiare sa dá preskočiť a dá sa prejsť rovno na priradenie čísla sekventu. Čísla sekventov budú v oboch prípradoch rovnaké a v druhom prípade bude algoritmus prehľadnejší. Tiež nič nestratíme, pretože sa zaujímame len o čísla sekventov a napokon číslo celého odvodenia.

Literatúra

[Gen36] Gerhard Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112:493–565, 1936.

[Gen38] Gerhard Gentzen. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 4:19–44, 1938.

[Gol05] Rebecca Goldstein. *Neúplnosť*. Argo–Dokořán, Praha, 2005.

[MT01] Eckart Menzler-Trott. *Gentzens Problem: Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*. Birkhäuser Verlag, 2001.

[Tak75] Gaisi Takeuti. *Proof theory*. North-Holland, Amsterdam, 1975.