

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Věra Davidová

Oceňování kreditních derivátů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2010

Chtěla bych na tomto místě velmi poděkovat vedoucímu mé diplomové práce RNDr. Jiřímu Witzanymu, Ph.D. nejen za jeho ochotu a trpělivost při hledání odpovědí na mé otázky, ale také za poskytnutí cenných informací a studijních materiálů. Dále bych ráda poděkovala Anně Dvořákové, Ph.D. a RNDr. Petru Myškovi za všechny velmi užitečné rady. Můj dík patří v neposlední řadě mé rodině za podporu při studiu a tvorbě této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 6. srpna 2010

Věra Davidová

Obsah

Úvod	5
1 Základní typy a struktura trhu kreditních derivátů	6
1.1 Pojem kreditních derivátů	6
1.2 Základní typy kreditních derivátů	7
1.3 Situace na trhu kreditních derivátů	13
2 Teoretické podklady pro oceňování kreditních derivátů	17
2.1 Charakteristiky defaultu	17
2.2 Míra výtěžnosti	19
2.3 Rizikově neutrální pravděpodobnosti defaultu	20
2.4 Modelování plovoucí sazby	23
2.5 Kopula funkce	23
3 Empirická studie: oceňování CLO	26
3.1 Popis struktury CLO a postupu jeho ocenění	26
3.1.1 Základní charakteristika CLO	26
3.1.2 Podkladové portfolio CLO	27
3.1.3 Modelování dob do defaultu	30
3.1.4 Peněžní toky plynoucí z portfolia	31
3.1.5 Struktura tranší	32
3.1.6 Finanční vodopád	33
3.2 Úskalí oceňování CLO	34
3.2.1 Nedostatek transparentních informací	34
3.2.2 Přijetí zjednodušujících předpokladů	34
3.2.3 Úskalí z pohledu interpretace výsledků	35
3.3 Výstupy simulací	36
3.3.1 Změna kopula funkce	39
3.3.2 Změna korelační struktury	39
3.3.3 Změna míry výtěžnosti	45
3.3.4 Porovnání ocenění s tržní cenou	46
Závěr	47
Literatura	48

Název práce: Oceňování kreditních derivátů

Autor: Bc. Věra Davidová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

e-mail vedoucího: jiri.witzany@vse.cz

Abstrakt: Kreditní deriváty jsou po teoretické i praktické stránce velmi zajímavým finančním instrumentem. Jejich oceňování se stalo v období finanční krize od roku 2007 často diskutovaným tématem. První část této práce je věnována základním typům kreditních derivátů, a to především popisu jejich charakteru, a informaci o historickém vývoji i aktuální situaci na trhu kreditních derivátů. Primárně je však tato práce zaměřena na oceňování složitějších kreditních derivátů, a to konkrétně dluhových cenných papírů zajištěných aktivy (CDO), kdy je zapotřebí modelovat korelaci mezi aktivy podkladového portfolia např. pomocí kopula funkcí. Podrobněji se práce zabývá mechanismem přerozdělení finančních prostředků získaných z podkladového portfolia do dluhových tranší CDO, který se označuje termínem finanční vodopád. Cílem této práce je určit cenu derivátu simulačními metodami a prozkoumat dopad volby korelační struktury uvnitř portfolia, míry výtěžnosti aktiv a dalších parametrů ocenění. Toto ocenění probíhá na reálných datech o obchodovaném derivátu, takže je možné srovnání s jeho tržní cenou.

Klíčová slova: kreditní deriváty, kopula funkce, pravděpodobnost selhání, finanční vodopád

Title: Valuation of Credit Derivatives

Author: Bc. Věra Davidová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: jiri.witzany@vse.cz

Abstract: Credit derivatives are very interesting financial instrument both theoretically and practically. Their valuation has become an often discussed topic during the financial crisis since 2007. First part of this work is dedicated to standard types of credit derivatives, mainly to description of their character and to information about the historical development and also about the actual situation on the credit derivative market. However, this work is primarily focused on valuation of more complicated credit derivatives, namely Collateralized Debt Obligation (CDO), where modeling of correlation between underlying assets is required e.g. by copula functions. Then it deals with the mechanism of allocation of cash flow from underlying portfolio to CDO debt tranches, which is called financial waterfall. The goal of this work is to estimate price of a derivative by simulation methods and to examine an impact of changes in correlation structure inside portfolio, in recovery rates of assets and in other parameters of valuation. This valuation runs on real data about traded derivative, so it can be compared to its market value.

Keywords: credit derivatives, copula function, default probability, financial waterfall

Úvod

Kreditní deriváty se v dnešní době netěší velké oblibě, jako tomu bylo v období před začátkem finanční krize, tedy před rokem 2007. Naopak jsou předmětem časté kritiky, která u odborné veřejnosti pramení z jejich nedostatečné transparentnosti. Není však výjimkou setkat se i s názorem, že obchodování s kreditním rizikem je samo o sobě nepřijatelné. Obecný přístup k těmto derivátům je z matematického hlediska zcela jistě odlišný od pohledu ekonomického. Motivací je tedy propojit tyto dva úhly pohledu.

Jedním z cílů této práce je prozkoumat úskalí oceňování kreditních derivátů s reálně dostupnými informacemi a zaměřit se na obecně přijímané předpoklady. Některé z kreditních derivátů mají totiž tak složitou strukturu, že jejich ocenění je velmi náročné a pro investora s nedostatečnými znalostmi daného produktu tudíž značně nebezpečné. Ztráty, které může investor v souvislosti s těmito cennými papíry utrpět, mohou být obrovské, což se potvrdilo s příchodem finanční krize. Proto je nutné zaměřit se na kreditní deriváty hlouběji jako na značně komplikované instrumenty, které pro potřeby ocenění vyžadují matematickými výpočty podložené údaje.

V praktické části této práce se budeme zabývat oceněním existujícího derivátu, jehož hodnota v období finanční krize velmi klesla. Naším cílem tedy bude pomocí simulační metody Monte Carlo a za použití vhodných předpokladů tento derivát ocenit a porovnat jeho cenu s tržní kotací. Co se týče samotné struktury práce, v její první kapitole popíšeme základní typy kreditních derivátů a podíváme se na aktuální situaci na trhu kreditních derivátů spolu s historickým vývojem jejich obchodovaných objemů. Podrobněji se zde zaměříme na dluhové cenné papíry zajištěné aktivy, které budou pro praktickou část oceňování stěžejní. V druhé kapitole pak popíšeme teorii potřebnou k oceňování kreditních derivátů, a to zvláště těch, jejichž hodnota závisí na více podkladových aktivech a je tedy nutné uvažovat jejich vzájemnou korelaci. Třetí a zároveň poslední kapitola je praktickou částí této práce. Provedeme zde ocenění konkrétního derivátu a budeme se zabývat jeho citlivostí na změnu různých parametrů, jako je např. již zmiňovaná korelace uvnitř podkladového portfolia.

Vzhledem k tomu, že mnoho termínů týkajících se kreditních derivátů pochází z anglického jazyka a nemá přesně definovaný svůj český ekvivalent, budeme uvádět tradičně užívané české překlady spolu s anglickými termíny v závorkách. Celá řada těchto výrazů však bývá aktivně používána spíše v anglické resp. mezinárodní verzi, jako je např. termín *default*, který se do českého jazyka překládá jako *selhání*.

Kapitola 1

Základní typy a struktura trhu kreditních derivátů

Tato kapitola zahrnuje základní definici a charakteristiku jednotlivých kreditních derivátů i obecnější informace týkající se vývoje na trhu kreditních derivátů před i v období finanční krize trvající od roku 2007.

1.1 Pojem kreditních derivátů

Finanční derivát je instrument, jehož hodnota závisí určitým způsobem na hodnotě jednoho či více podkladových aktiv. U kreditních derivátů je tímto závislostním faktorem kreditní riziko emitentů podkladových aktiv (*reference entity*). Cena tohoto typu derivátu tedy závisí na tom, zda v určitém období nastane tzv. kreditní událost neboli přesně definovaná událost, která má vliv na kreditní riziko podkladového aktiva. V takovém případě pak hovoříme o selhání aktiva neboli o tzv. *defaultu*.

Kreditní událostí může být (lze nalézt např. v Schönbacher [6]):

- bankrot,
- selhání plateb u jednoho či více aktiv,
- zesplatnění jednoho či více aktiv,
- moratorium, tj. dohoda o odkladu splnění závazků,
- restrukturalizace závazků,
- pokles ratingu emitenta pod určitou hodnotu,
- změna kreditního rozpětí.

Kreditní deriváty primárně slouží k zajištění, převodu a řízení kreditního rizika, ale jsou také známy jako nástroje sloužící ke spekulativním obchodům na trhu. Svým charakterem totiž investorům umožňují spekulovat na vývoj kreditního rizika dané entity a takto v případě správného

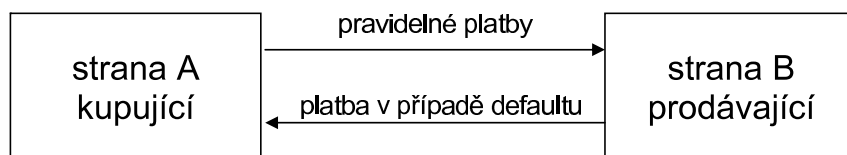
úsudku docílit značných zisků. Ovšem v případě, že se investoři ve svých předpokladech zmýlí, mohou utrpět také vysoké ztráty. Vzhledem k tomu, že investor kupující kreditní derivát nemusí vlastnit podkladové aktivum, ze kterého kreditní riziko plyne, nemůžeme je přirovnávat k pojištění proti ztrátě na tomto aktivu. Navíc prodávající strana nemusí být regulovanou jednotkou, narozdíl od pojišťoven, které musí mít k této činnosti povolení.

1.2 Základní typy kreditních derivátů

Existuje celá řada typů kreditních derivátů podle formy závislosti na kreditním riziku podkladového aktiva. My si uvedeme pouze ty nejrozšířenější, neboť obecně mohou mít tyto deriváty i velmi specifický charakter. Vycházet budeme především z Hull [3], Schönbucher [6] a Witzany [7].

1.2.1 Credit Default Swap

Credit Default Swap (CDS) je kontrakt uzavřený mezi dvěma stranami, kdy strana A, kupující ochranu před defaultem podkladového aktiva, platí straně B, prodávající, pravidelné platby po smluvenou dobu, nebo dokud nedojde k defaultu podkladového aktiva. Strana B pak v případě, že u podkladového aktiva default ve smluvené době nastane, vyplatí straně A kontraktem určenou částku. Podkladovým aktivem bývá nejčastěji úvěr nebo dluhopis. Obrázek 1.1 znázorňuje základní princip transakce.



Obrázek 1.1: Typická struktura CDS

K vypořádání CDS v případě, že nastane default, může dojít dvěma způsoby:

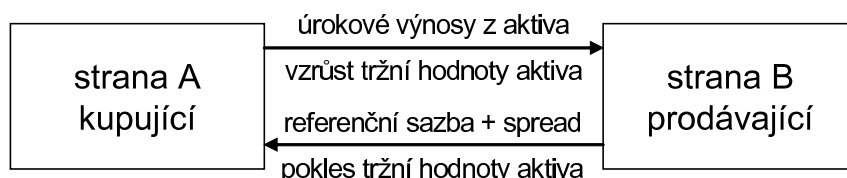
- fyzické vypořádání (*physical settlement*) - strana A kupující ochranu doručí podkladové aktivum prodávajícímu B a dostane od něj vyplacenu nominální hodnotu
- hotovostní vypořádání (*cash settlement*) - prodávající B zaplatí kupujícímu A rozdíl mezi nominální hodnotou a aktuální tržní cenou podkladového aktiva.

CDS spread, neboli cena CDS, je roční výše pravidelné platby vyjádřená v procentech (resp. v basis points) z nominální hodnoty. Např. pokud nominální hodnota CDS je 10 mil. USD a hodnota CDS spreadu je 50 basis points, pak strana A bude platit straně B 50 000 USD ročně po dobu trvání kontraktu nebo dokud nenastane default. Pokud bychom uvažovali tržní cenu 25%, při hotovostním vypořádání by strana B zaplatila v případě defaultu částku 7,5 mil. USD.

Kromě výše popsaného derivátu CDS existují také tzv. Basket CDS, které jsou postaveny na stejném principu, ale narozdíl od jednoduché verze je podkladovým instrumentem portfolio více aktiv. Z hlediska ocenění jsou však tyto deriváty mnohem komplikovanější, neboť se rozsah selhání aktiv odvíjí od jejich vzájemné korelace.

1.2.2 Total Return Swap

Kontrakt typu Total Return Swap (TRS) umožňuje investorovi převést nejistý výnos z rizikového aktiva na téměř bezrizikovou investici do stejné nominální hodnoty s plovoucí referenční sazbou. Výraz *total return*, neboli celková návratnost aktiva, značí nejen úrokové výnosy, ale také změny v tržní hodnotě aktiva. Kupující TRS, strana A, tedy platí druhé straně B, prodávající TRS, celkovou návratnost aktiva a dostává od ní na oplátku referenční sazbu, např. EU-RIBOR, navýšenou o smluvený spread tak, jak je uvedeno na obrázku 1.2. V případě selhání podkladového aktiva dojde zpravidla k vypořádání swapu, tj. strana B zaplatí straně A rozdíl mezi počáteční hodnotou aktiva a aktuální tržní cenou spolu s naběhlým úrokem referenční sazby a spreadu.



Obrázek 1.2: Typická struktura TRS

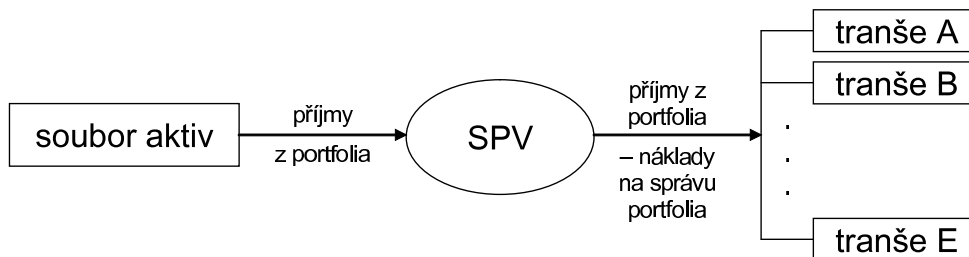
1.2.3 Credit Spread Option

Opce na kreditní spread obvykle umožňují investorovi získat ochranu před změnou kreditního spreadu nebo před selháním podkladového aktiva, popř. před obojím. Typicky se využívají v případě, kdy investor ví, že v budoucnu bude chtít koupit CDS a obává se vzrůstu jeho ceny. Rozhodne se tedy pro koupi call opce na kreditní spread, tj. bude mít právo koupit v budoucnu CDS za pevnou realizační cenu. Obecně lze opce aplikovat na nákup či prodej jakéhokoli kreditního derivátu.

1.2.4 Collateralized Debt Obligation

Collateralized Debt Obligation (CDO), neboli dluhové cenné papíry zajištěné aktivy, jsou významnou součástí širší třídy Asset Backed Securities (ABS), kterou obvykle překládáme jako cenné papíry zajištěné aktivy. Obecně je myšlenkou ABS shromáždění aktiv do portfolia za účelem přeměny jejich nelikvidní podoby na obchodovatelné cenné papíry, což se nazývá procesem sekuritizace. ABS vydává společnost zřízená přímo za tímto účelem, tzv. Special Purpose Vehicle (SPV). Tato společnost shromáždí do portfolia aktiva, u kterých je určité riziko nesplacení. Většinou jde o půjčky, dluhopisy nebo CDS s ne příliš vysokým ratingem. SPV pak využije příjmy, které toto portfolio generuje, k rozdělení do tzv. dluhových tranší. Ty jsou pak dále prodávány investorům podle jejich potřeb, tj. pro investora s averzí k riziku je nejvyšší tranše

nejvhodnější, neboť poskytuje v porovnání s ostatními tranšemi sice malý výnos, ale riziko je u ní nejnižší. Naopak pro investora, který vyhledává vyšší výnosy za cenu vyšší rizikovosti, je ideální nejnižší tranše, tzv. equity. Na obrázku 1.3 je znázorněn základní princip ABS.



Obrázek 1.3: Typická struktura ABS

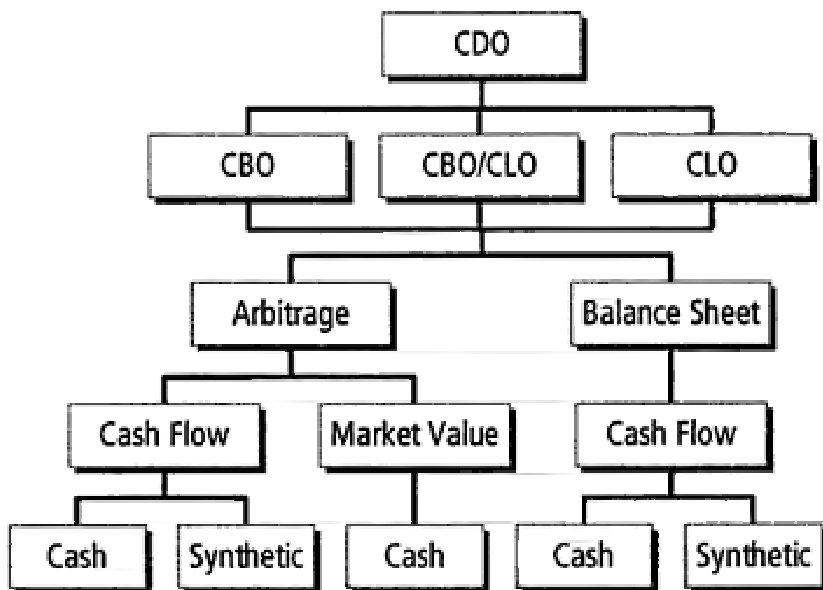
ABS jsou svou strukturou velmi zajímavé, nejen co se týče samotné myšlenky této sekuritizace aktiv, ale také z pohledu oceňování. Proto se jimi, resp. jejich užší třídou CDO, budeme blíže zabývat jak nyní po teoretické stránce, tak také v praktické rovině ve třetí kapitole této práce. Pro potřeby základního dělení CDO a podrobnějšího vysvětlení jejich schématu budeme vycházet ze Schmid [5].

Základní dělení CDO

Podle typu podkladového portfolia rozlišujeme Collateralized Bond Obligation (CBO) pro dluhopisy a Collateralized Loan Obligation (CLO) pro úvěry, popř. Collateralized Mortgage Obligation (CMO) pro hypotéky, a jiné. Z pohledu účelu transakce pak CDO dělíme na arbitrážní (*arbitrage*) a rozvahové (*balance sheet*), přičemž u arbitrážních CDO je podkladové portfolio (*collateral pool*) aktivně řízeno, aby bylo dosaženo co největšího rozdílu mezi výnosy z portfolia a náklady na financování tranší. Rozvahová CDO jsou založena na principu odprodeje nelikvidních aktiv, tj. úvěrů a dluhopisů, z rozvahy, čímž nejen dojde ke zvýšení likvidity, ale je zde i možnost vyšších výnosů. V takovémto případě není portfolio aktivně řízeno.

Prostředky, které jsou zapotřebí k financování dluhových tranší, lze z portfolia získat dvojitým způsobem. Jedním je přístup financování úrokových výnosů a nominálů tranší pomocí peněžních toků (*cash flow*) z portfolia. Druhým způsobem je financování založené na tržní hodnotě (*market value*) podkladových aktiv, přičemž správce portfolia (*collateral manager*) musí zajistit, aby aktivním řízením portfolia dosáhl tržní hodnoty postačující k plnění závazků vůči tranším.

Jako u jiných cenných papírů rozlišujeme CDO hotovostní (*cash*) a syntetické (*synthetic*), přičemž u hotovostních CDO jsou podkladová aktiva přímo odkoupena SPV a u syntetických CDO plní SPV pouze roli správce portfolia. Vyše popsané členění je přehledně znázorněno na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Základní dělení CDO transakcí (Zdroj: Schmid [5])

Časová rovina

Společnost SPV začíná prodávat jednotlivé tranše ještě dříve, než jsou definitivně vybrána aktiva do podkladového portfolia. Případným investorům tedy podává pouze informaci o charakteru budoucího portfolia, tj. jaké bude složení portfolia z hlediska ratingů, průmyslových oblastí, typu emitenta resp. dlužníka, apod. spolu s číselnými charakteristikami založenými na principu váženého průměru podle výše jistiny jednotlivých aktiv. Tato fáze CDO, kdy SPV dotváří podobu budoucího portfolia, se nazývá *ramp up period* a trvá zpravidla po dobu jednoho roku.

Po uběhnutí této doby nastává tzv. *reinvestment period* neboli reinvestiční období, kdy správce portfolia aktivně řídí. Narozdíl od předcházejícího období však může měnit obsah portfolia jen v omezené míře. Prostředky získané ze splacených aktiv se investují do nákupu nových aktiv podobného charakteru. Pokud v tomto období dojde k selhání aktiva, nastane také jeho nahrazení.

Posledním obdobím života CDO je tzv. *repayment period*, kdy již portfolio není aktivně řízeno a dochází k postupnému snižování jeho hodnoty. Zároveň již nedochází k reinvestici získaných prostředků, ale k jejich uložení na rezervní účet, aby mohly být později využity ke splácení jistiny jednotlivých tranší.

Podkladové portfolio

Pro popis charakteristiky podkladového portfolio se zpravidla používají již zmíněné údaje vážené nominálními hodnotami (*outstanding balance*) jednotlivých aktiv. Pokud N_i značí nominální hodnotu i -tého aktiva a N celkovou nominální hodnotu celého portfolio, lze jednotlivé charakteristiky zapsat jako:

- *Weighted Average Maturity* - vážený průměr doby do splatnosti v letech

$$\text{WAM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \text{maturity}_i \cdot N_i \quad (1.1)$$

- *Weighted Average Spread* - vážený průměr spreadů

$$\text{WAS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \text{spread}_i \cdot N_i \quad (1.2)$$

- *Weighted Average Rating Factor* - vážený průměr ratingových faktorů

$$\text{WARF} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \text{RF}_i \cdot N_i \quad (1.3)$$

Ratingový faktor je publikován ratingovými agenturami pro jednotlivé ratingy a jde o desetileté pravděpodobnosti selhání vynásobené 10000. Tabulka 1.1 obsahuje ratingové faktory publikované agenturou Moody's.

Tabulka 1.1: Ratingové faktory podle agentury Moody's

Aaa	1	Baa1	260	B2	2720
Aa1	10	Baa2	360	B3	3490
Aa2	20	Baa3	610	Caa1	4770
Aa3	40	Ba1	940	Caa2	6500
A1	70	Ba2	1350	Caa3	8070
A2	120	Ba3	1766	Ca	10000
A3	180	B1	2220	C	10000

Struktura tranší

Jednotlivé dluhové tranše bývají zpravidla označovány písmeny (A pro nejvyšší tranši, E jako equity pro tranši nejnižší). Vyplácený kupón může být fixní nebo plovoucí, tedy vázaný na nějakou referenční sazbu navýšenou o spread. Výše kupónu se s rostoucí mírou seniority tranše snižuje, tj. nejvyšší kupón je stanoven pro equity tranši a naopak tranše A má kupón minimální.

Co se týče nominální hodnoty jednotlivých tranší, je tranše A největší, přičemž zpravidla zaujímá přibližně 75% celkové hodnoty CDO. Zbýlých 25% pak připadá na tranše B až E.

K dodržení principu seniority, tj. zajištění podřízenosti nižších tranší tranším vyšším, slouží tzv. testy pokrytí. Pro jednotlivé tranše se test považuje za splněný, pokud vypočtená hodnota nepřekročí předem definovanou hodnotu, která se označuje anglickým termínem *trigger value*. V případě, že je tato hodnota překročena, dochází k postupnému splácení tranší podle seniority, tj. od nejvyšší tranše po nejnižší, tak, aby test byl splněn. Pokud není k dispozici takové množství prostředků, aby se dosáhlo splnění testů, použije se k tomuto postupnému splácení maximální dostupná částka.

Testy pokrytí rozlišujeme dva, a to IC test (*interest coverage test*) a OC test (*overcollateralization test*). IC test dává informaci o tom, zda jsou úrokové výnosy z portfolia dostatečné pro výplatu kupónů jednotlivým tranším. Účelem OC testu pak je určení poměru aktuální nominální hodnoty portfolia k nominální hodnotě vydaných tranší. Testy můžeme zapsat jako

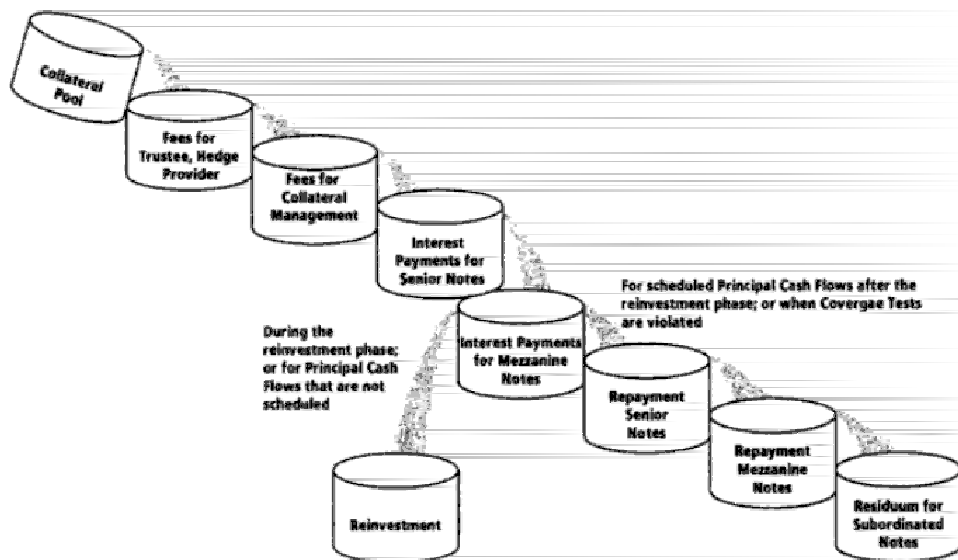
$$IC_j = \frac{i_{pf}}{\sum_{k=A}^j i_k} \geq IC_{trigger_j} \quad \text{a} \quad OC_j = \frac{N_{pf}}{\sum_{k=A}^j N_k} \geq OC_{trigger_j}, \quad (1.4)$$

kde $j, k = A, \dots, E$ je pořadí tranše, i_{pf} značí úrokové výnosy z portfolia za poslední úrokové období, N_{pf} je aktuální nominální hodnota portfolia, tj. součet jistin všech aktiv, které se v daném čase v portfoliu nacházejí, i_k je kupón splatný ve prospěch k -té tranše a N_k je aktuální nominální hodnota k -té tranše. Hodnoty $IC_{trigger}$ a $OC_{trigger}$ se volí větší než 100%.

Finanční vodopád

Ke každému CDO je vydán rozsáhlý právní dokument, který zachycuje přesné informace o tom, jak probíhá přeměrování prostředků získaných z podkladového portfolia jednotlivým tranším. Pro toto schéma se používá označení finanční vodopád (*financial waterfall*) a je definováno jak pro úrokové, tak pro jistinné výnosy z portfolia.

Vodopád zahrnuje i informaci o testech pokrytí a utváří tak míru seniority jednotlivých tranší jak při vyplácení kupónu, tak při řádném splácení jistiny i předčasném splácení jistiny v případě, že selhání aktiv portfolia zapříčiní nedostatek finančních prostředků k přerozdělení. Je tedy zaručena podřízenost nižších tranší vůči vyšším tranším. Obrázek 1.5 zachycuje příklad zjednodušeného schématu finančního vodopádu pro jistinné výnosy.



Obrázek 1.5: Finanční vodopád pro jistinné výnosy (Zdroj: Schmid [5])

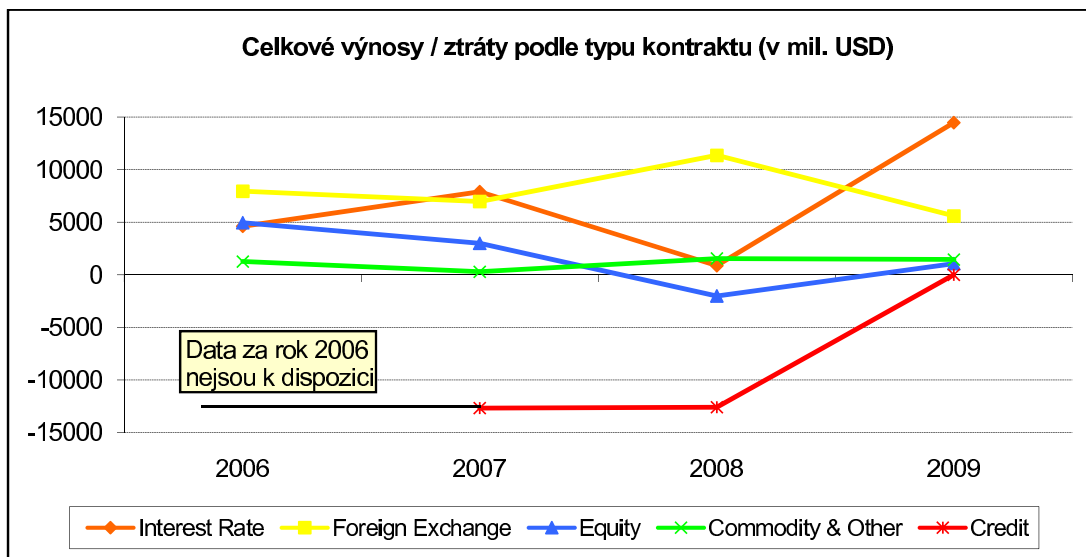
1.3 Situace na trhu kreditních derivátů

V souvislosti s finanční krizí, která sužuje finanční trhy od roku 2007, diskutuje odborná veřejnost o nedostatečné regulaci obchodů s kreditními deriváty, neboť ty jsou považovány za jednu z příčin velkého rozsahu krize. Zjednodušeně řečeno, kreditní deriváty umocnily ztráty vzniklé především na hypotékách poskytnutých rizikovým klientům.

Kreditní deriváty jsou většinou obchodovány mimo burzovní trh, tedy jde o tzv. OTC (*over-the-counter*) deriváty. Zvýšení transparentnosti CDS bylo částečně dosaženo v listopadu roku 2008, kdy společnost The Depository Trust & Clearing Corporation [8] začala zveřejňovat v týdenní frekvenci souhrnné informace o těchto transakcích. V průběhu roku 2009 se CDS začaly vypořádávat centrálně ve dvou zúčtovacích bankách (*clearing house*) IntercontinentalExchange [16], a to v ICE Clear U.S. pro americký trh a v ICE Clear Europe pro trh evropský. Co se týče dalšího zvýšení transparentnosti CDS transakcí, společnost International Swap and Derivative Association [10] se od roku 2009 zabývá jejich standardizací jak v oblasti zveřejňování informací, tak i ve stanovení parametrů CDS jako je např. standardizace kupónů a podmínky uzavírání a vypořádání kontraktů.

CDO jsou stejně jako i jiné deriváty typu ABS na amerických trzích regulovány státní organizací U.S. Securities and Exchange Commission. V dubnu roku 2010 vydala tato organizace dokument "Proposed Rule: Asset-Backed Securities" [14], kde komentuje důsledky nedostatečné regulace ABS v souvislosti s finanční krizí a navrhuje pravidla upravující jejich obchodování tak, aby bylo dostatečně transparentní.

Graf 1.6 zachycuje výnosy resp. ztráty regulovaných amerických finančních institucí z obchodování s finančními instrumenty včetně derivátových transakcí. Detailněji se pak můžeme zaměřit na vývoj výnosů resp. ztrát z obchodování s instrumenty vázanými na kreditní riziko po jednotlivých čtvrtletích v letech 2007 - 2009. Z grafu 1.7 je patrné, že největší ztráty utrpěly americké banky ve dvou vlnách na konci let 2007 (11 780 mil. USD) a 2008 (8 958 mil. USD). Od poloviny roku 2009 došlo ke zlepšení situace, ovšem k poslednímu čtvrtletí byly evidovány v porovnání s výší předchozích ztrát pouze nepatrné výnosy ve výši 27 mil. USD.

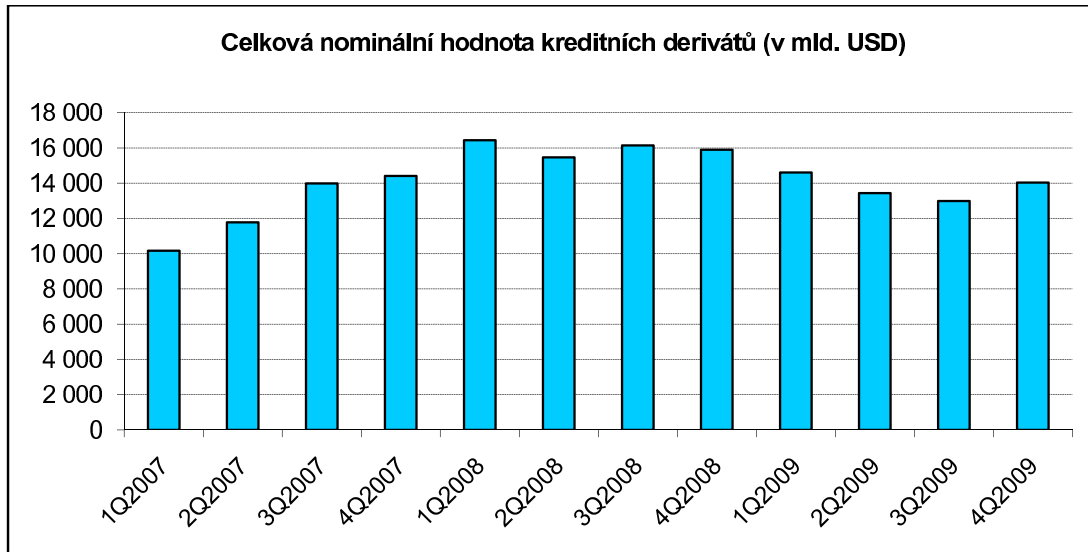


Obrázek 1.6: Zdroj: OCC's Quarterly Report on Bank Trading and Derivatives Activities [12]

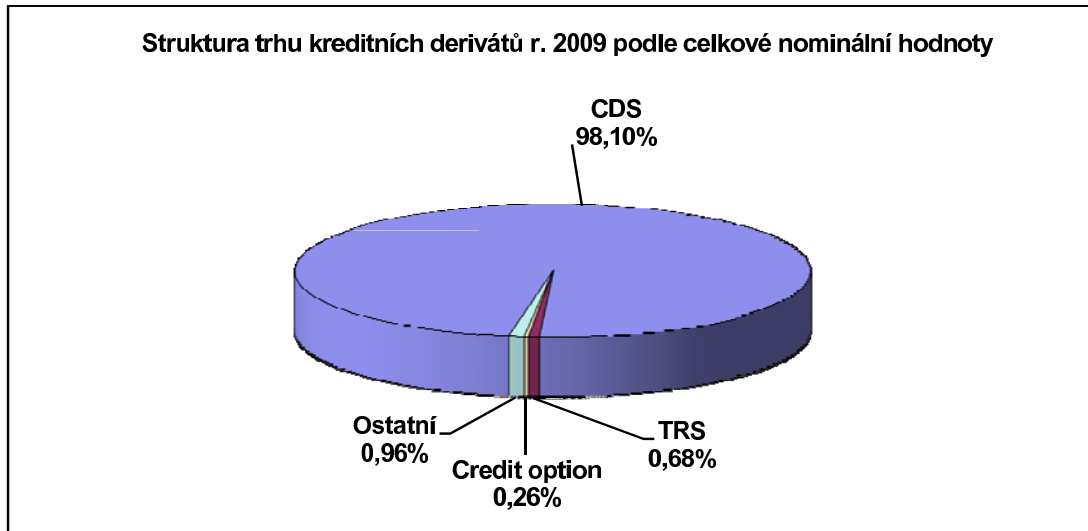


Obrázek 1.7: Zdroj: OCC's Quarterly Report on Bank Trading and Derivatives Activities [12]

Graf 1.8 zachycuje informaci o celkovém objemu kreditních derivátů držených americkými bankami v letech 2007 - 2009. Ke konci roku 2009 jde o 14 036 mld. USD. Z grafu 1.9 vidíme, že největší podíl na trhu, co se týče nominální hodnoty obchodovaných kreditních derivátů, mají CDS a to 98,1%, přičemž se jedná o údaje ke konci roku 2009, ale od roku 2007 jde o stabilní procento, které CDS na trhu zaujímají. TRS, kreditní opce, CDO a jiné kreditní deriváty tvoří pak zbylá necelá 2% trhu.

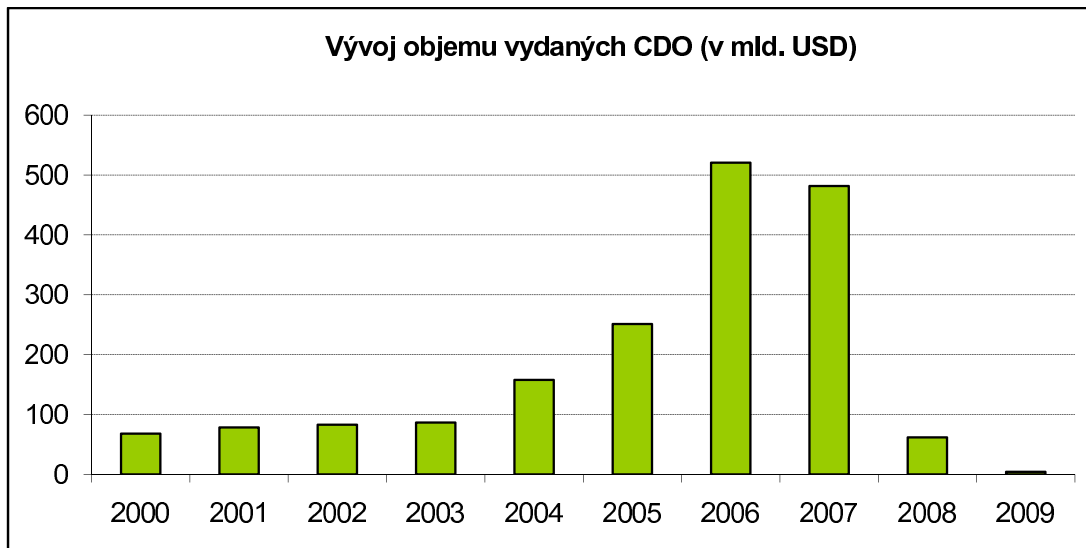


Obrázek 1.8: Zdroj: OCC's Quarterly Report on Bank Trading and Derivatives Activities [12]



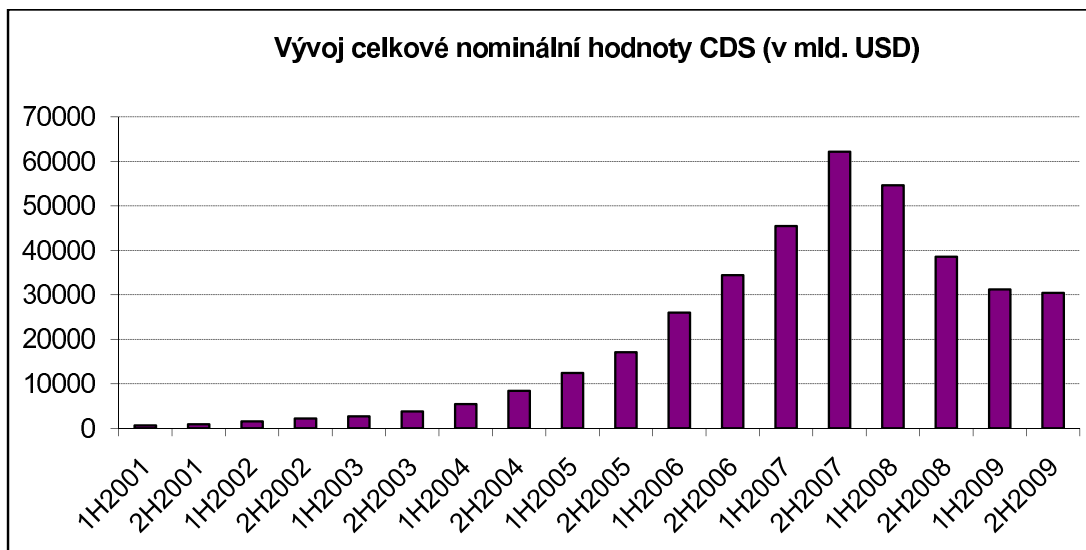
Obrázek 1.9: Zdroj: OCC's Quarterly Report on Bank Trading and Derivatives Activities [12]

Následující graf 1.10 zachycuje roční údaje o objemu vydaných CDO. Vidíme, že v letech 2006 a 2007 se nominální hodnota vydaných CDO pohybovala okolo 500 mld. USD, ale následkem krize poté rapidně klesla na pouhých 4,3 mld. USD v roce 2009.



Obrázek 1.10: Zdroj: Securities Industry and Financial Market Association [15]

Informace o trhu CDS poskytuje v půlročních intervalech od roku 2001 International Swap and Derivative Association. Na vývoji celkové nominální hodnoty obchodovaných CDS znázorněném v grafu 1.11 je stejně jako u objemu vydaných CDO patrný vliv finanční krize. Od roku 2001 oblíbenost CDS pomalu vzrůstala, přičemž vrcholu dosáhla v roce 2007. Ke konci roku 2009 celkový objem CDS činil 30 428 mld. USD.



Obrázek 1.11: Zdroj: International Swap and Derivative Association [10]

Kapitola 2

Teoretické podklady pro oceňování kreditních derivátů

V této kapitole se budeme věnovat teorii potřebné k oceňování kreditních derivátů. Nejprve se zaměříme na definice pojmů týkajících se selhání aktiva, přičemž budeme vycházet ze základů teorie spolehlivosti, a poté na tzv. kopula funkce, které nám budou sloužit k modelování korelační struktury.

2.1 Charakteristiky defaultu

Definujme nyní jednotlivé pojmy teorie spolehlivosti, se kterými budeme dále pracovat. Využijeme je k popsání charakteristik týkajících se selhání aktiva, neboli defaultu. Vzhledem k mezinárodním konvencím budeme pro tyto potřeby používat právě tento anglický výraz pro selhání aktiva.

Definice 2.1.1 (Doba do defaultu) *Nechť T je nezáporná náhodná veličina s absolutně spojitou distribuční funkcí $F(t) = P(T \leq t)$, $F(0) = 0$, $F(+\infty) = 1$ a hustotou $f(t) = F'(t)$, kde $t \geq 0$. Uvažujme počáteční okamžik $t = 0$ a čas $t = T$, kdy dojde k defaultu aktiva. Potom T budeme nazývat dobou do defaultu (time to failure, survival time) a funkci $S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$, $S(0) = 1$, $S(+\infty) = 0$ funkcí přežití (survival function, reliability function).*

Definice 2.1.2 (Intenzita defaultu) *Nechť T je doba do defaultu s distribuční funkcí F , hustotou f a funkcí přežití S . Potom funkci $h(t) = f(t) / S(t)$ pro všechna $t \geq 0$ tak, že $S(t) > 0$ nazýváme intenzitou defaultu (hazard rate, failure rate).*

Neboť $f(t) = -S'(t)$, platí, že

$$h(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d \log S(t)}{dt} = -\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt}. \quad (2.1)$$

Takto definovanou intenzitu defaultu můžeme interpretovat následovně: pro $t > 0$ a $\Delta t > 0$

$$P(v [t, t + \Delta t) \text{ nastane default} \mid \text{do času } t \text{ default nenastal}) = P(t \leq T < t + \Delta t \mid T > t) =$$

$$= \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \wedge T > t)}{P(T > t)} = \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{S(t)} =$$

$$= \frac{\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \Delta t}{S(t)} \cong \frac{f(t)}{S(t)} \Delta t = h(t) \Delta t \quad (2.2)$$

Následující větou ukážeme, že pravděpodobnostní chování doby do defaultu je plně popsáno nejen distribuční funkcí, hustotou a funkcí přežití, ale také intenzitou defaultu.

Věta 2.1.1 *Necht' T je doba do defaultu s distribuční funkcí F , hustotou f , funkcí přežití S a*

$$\text{intenzitou defaultu } h. \text{ Potom } S(t) = e^{-\int_0^t h(s) ds} \text{ a } f(t) = h(t) e^{-\int_0^t h(s) ds}.$$

Důkaz

Poslední zápis intenzity h v rovnici 2.1 vyjadřuje diferenciální rovnici pro neznámou funkci S . Platí tedy, že

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = -h(t) dt, \quad \log S(t) = c_1 - \int_0^t h(s) ds \quad \text{a} \quad S(t) = c_2 \cdot e^{-\int_0^t h(s) ds}, \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $S(0) = 1$ je $c_2 = 1$ a dostáváme první část tvrzení. Druhou část tvrzení pak dává vztah $f(t) = h(t) S(t)$.

Dále si pro zjednodušení zápisu definujeme značení používané v aktuárských vědách aplikované na pravděpodobnost, že nastane default v určitém období.

Definice 2.1.3 *Necht' T je doba do defaultu. Potom pro $t \geq 0$ a $x > 0$ definujeme ${}_t p_x = P(T > x + t \mid T > x)$ a ${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = P(T \leq x + t \mid T > x)$, přičemž pro $t = 1$ značíme ${}_1 p_x = p_x$ a ${}_1 q_x = q_x$.*

Takto definované ${}_t q_x$ interpretujeme tak, že jde o víceleté pravděpodobnosti defaultu, tj. pravděpodobnosti, že default nastane do t let od času x , pokud do času x nenastal. Jednoleté pravděpodobnosti defaultu q_x jsou pak pravděpodobnosti, že u aktiva nastane default v průběhu roku x , za podmínky, že před začátkem tohoto roku k defaultu nedošlo. Posloupnost těchto pravděpodobností $\{q_x\}_{x \in \mathbb{N}_0}$ pak tvoří tzv. kreditní křivku (*credit curve*). Tyto pravděpodobnosti můžeme vyjádřit pomocí intenzity defaultu podle věty 2.1.1 jako

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t h(x+s) ds} \quad \text{a} \quad {}_t q_x = 1 - e^{-\int_0^t h(x+s) ds}. \quad (2.3)$$

Ratingové agentury jako např. společnost Moody's poskytují pro jednotlivé ratingy vypočítané víceleté pravděpodobnosti defaultu. My však budeme využívat rizikově neutrální pravděpodobnosti, jejichž určení si ukážeme v podkapitole 2.3. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že intenzita defaultu je po částech konstantní, tj. konstantní v jednotlivých letech.

K určení intenzity v každém intervalu délky 1 využijeme jednoleté pravděpodobnosti defaultu, které získáme ze vzorce

$${}_{t+1}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x \cdot q_{x+t}. \quad (2.4)$$

Toto můžeme slovně interpretovat tak, že default aktiva do $(t + 1)$. roku od času x může nastat dvěma různými způsoby. Buď default nastane již před časem $x + t$ nebo default před časem $x + t$ nenastane a dojde k němu až v průběhu následujícího roku, tj. před začátkem roku $x + t + 1$. Z rovnice 2.4 tedy můžeme vyjádřit jednoleté pravděpodobnosti defaultu jako

$$q_{x+t} = \frac{{}_{t+1}q_x - {}_tq_x}{1 - {}_tq_x}. \quad (2.5)$$

V i -tém roce, tedy v i -tém intervalu tvaru $[t, t + 1)$, pro konstantní intenzitu $h(t) = h_i$ bude platit $q_i = 1 - e^{-h_i}$, kde značením q_i máme na mysli jednoletou pravděpodobnost defaultu v i -tém roce. Intenzity h_i pak spočteme v každém i -tém roce jako

$$h_i = -\log(1 - q_i) \quad \text{pro všechna } i = 0, 1, \dots, i_{max}, \quad (2.6)$$

kde i_{max} značí maximální čas, pro který jsou dostupná data o pravděpodobnostech defaultu.

2.2 Míra výtěžnosti

Míra výtěžnosti (*recovery rate*) se udává v procentech a vyjadřuje, jakou část nominální hodnoty aktiva lze "vytěžit" v případě jeho defaultu. Předpokládáme tedy, že při selhání aktiva investor utrpí určitou ztrátu, ale nemusí jít o celou hodnotu investice. Existují odhady ratingových agentur pro míru výtěžnosti jednotlivých ratingů ve spojení s určitými charakteristikami emitenta aktiva. Ty se však pro modelování peněžních toků plynoucích z investice vzhledem ke značné obecnosti zpravidla nepoužívají.

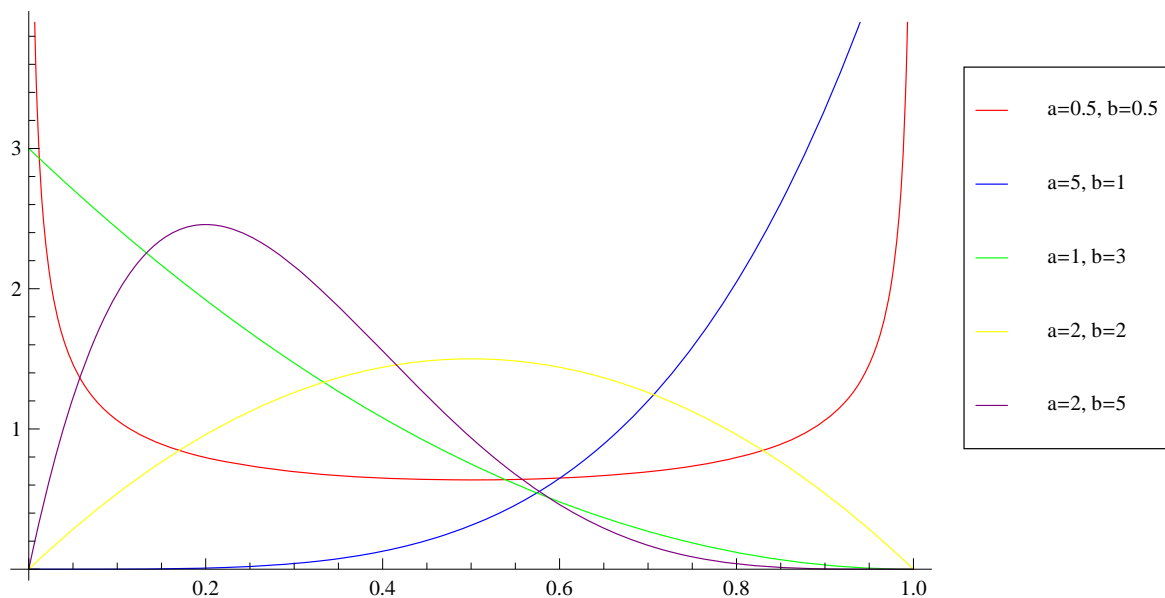
Pro účely modelování míry výtěžnosti R , kterou budeme považovat za náhodnou veličinu, se nejčastěji používá Beta rozdělení. To nabývá hodnot z intervalu $[0,1]$ a jeho výhodou je, že je velmi flexibilní vzhledem k možné volbě parametrů. Pokud tedy $R \sim B(a, b)$, jde o rozdělení s hustotou tvaru

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad (2.7)$$

kde $\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt$ je Gamma funkce a $a, b > 0$ jsou parametry. Střední hodnotu a rozptyl lze pak zapsat jako

$$\mu_R = \mathbb{E}[R] = \frac{a}{a+b} \quad \text{a} \quad \sigma_R^2 = \mathbb{V}[R] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \quad (2.8)$$

Následující graf 2.1 zachycuje možné tvary hustoty Beta rozdělení pro různé volby parametrů a a b . Vidíme, že se jednotlivé průběhy od sebe velmi liší.



Obrázek 2.1: Hustota Beta rozdělení

2.3 Rizikově neutrální pravděpodobnosti defaultu

V rizikově neutrálním světě je očekávanou výnosností všech finančních aktiv bezriziková úroková míra, neboť zde jsou investoři indiferentní k riziku, a tedy nevyžadují vyšší výnosnost aktiv při vyšším riziku. Pokud jsou pravděpodobnosti možného vývoje ceny aktiva takové, že současná hodnota aktiva je rovna očekávané hodnotě budoucích plateb plynoucích z investice do aktiva diskontovaných bezrizikovou úrokovou mírou, pohybujeme se v rizikově neutrálním světě a tyto pravděpodobnosti tedy označujeme za rizikově neutrální. Cena cenného papíru určená na základě tohoto rizikově neutrálního principu je rovněž tržní cenou v reálném světě za idealizovaných podmínek při neexistenci arbitráže, což je blíže popsáno např. v Hull [3], kde také nalezneme podrobné vysvětlení celé problematiky rizikově neutrálního oceňování. Zaměříme se nyní na výpočet rizikově neutrálních pravděpodobností defaultu z vypořádaných víceletých pravděpodobností poskytovaných ratingovými agenturami. Vycházet budeme z Witzany [7].

Označme si EDF_T (*expected default frequency*) pravděpodobnost defaultu aktiva A v časovém horizontu T let stanovenou ratingovou agenturou. Rizikově neutrální T -letou pravděpodobnost defaultu pak budeme značit Q_T .

V reálném světě předpokládáme vývoj aktiva podle stochastické diferenciální rovnice tvaru

$$dA = \mu A dt + \sigma A dW_t, \quad (2.9)$$

kde W_t je Wienerův proces a $\mu, \sigma > 0$. V rizikově neutrálním světě je pak vývoj ceny aktiva \bar{A} dán rovnicí

$$d\bar{A} = r\bar{A} dt + \sigma\bar{A} dW_t, \quad (2.10)$$

kde $r < \mu$ je bezriziková úroková míra.

Definujme kreditní událost jako pokles hodnoty aktiva pod určitou pevnou hodnotu K_T . Potom $\text{EDF}_T = P(A(T) < K_T)$ a $Q_T = P(\bar{A}(T) < K_T)$, přičemž pro dodržení principu rizikově neutrálního oceňování počáteční hodnota $\bar{A}(0) = A(0) = A_0$. Při užití Black-Scholesovy formule pak platí, že

$$\text{EDF}_T = N(-d_2), \quad d_2 = \frac{\log \frac{A_0}{K_T} + \frac{\mu - \sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad (2.11)$$

$$\text{EDF}_T = N(-\bar{d}_2), \quad \bar{d}_2 = \frac{\log \frac{A_0}{K_T} + \frac{r - \sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}}. \quad (2.12)$$

Platí, že $d_2 = \bar{d}_2 - \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{T}$ a můžeme tedy Q_T vyjádřit jako

$$Q_T = N\left(N^{-1}(\text{EDF}_T) + \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{T}\right). \quad (2.13)$$

Vypočítané pravděpodobnosti EDF_T zjistíme jednoduše z tabulek poskytovaných např. společností Moody's. Zbývá ještě dourčit parametry v rovnici 2.13. Podle CAPM (Capital Asset Pricing Model)

$$\mu - r = \beta\pi, \quad \text{kde} \quad \beta = \rho \frac{\sigma}{\sigma_M} \quad \text{a} \quad \pi = \mu_M - r, \quad (2.14)$$

μ_M, σ_M jsou parametry tržního portfolia a ρ je korelace aktiva A s trhem. Trh může být pro tyto účely reprezentován vývojem známého akciového indexu, např. S&P 500. Pomocí Sharpeova poměru $U = \pi/\sigma_M$ pak můžeme Q_T určit jako

$$Q_T = N\left(N^{-1}(\text{EDF}_T) + \rho U \sqrt{T}\right), \quad (2.15)$$

kde oba parametry ρ a U získáme z tržních dat. Pro jednotlivé časové horizonty a jednotlivé ratingy jsme tedy schopni stanovit tyto jednoleté rizikově neutrální pravděpodobnosti.

Princip ocenění jednoduchého kreditního derivátu

Rizikově neutrální ocenění jednoduchého kreditního derivátu si ukážeme na CDS. K výpočtu CDS spreadu použijeme předpoklady a značení uvedené v Hull [3], kde pro zjednodušenou formulaci výpočtu uvažujeme:

- nominální hodnotu CDS 1 jednotku měny, splatnost T (v letech)
- nezávislost událostí defaultu, úrokových měr a míry výtěžnosti
- default může nastat jen v časech t_1, \dots, t_n
- v případě defaultu požadujeme nominální hodnotu + alikvotní úrok
- $q_i \dots$ jednoletá rizikově neutrální pravděpodobnost defaultu v čase t_i
- $R \dots$ očekávaná míra výtěžnosti

- $u(t)$... současná hodnota plateb 1 jednotky měny ročně od času 0 do času t
- $e(t)$... současná hodnota platby v čase t ve výši $t - \bar{t}$, kde \bar{t} je čas platby bezprostředně před časem t (v letech)
- $v(t)$... diskontní faktor – současná hodnota 1 jednotky měny obdržené v čase t
- s ... roční výše plateb kupujícího CDS (spread)
- $A(t)$... alikvotní úrok v čase t jako procento z nominální hodnoty

Pravděpodobnost, že default nenastane do času T pak bude $\pi = 1 - \sum_{i=1}^n q_i$. Pokud by nastal default v čase t_i , zaplatí prodávající CDS celkově $1 - [1 + A(t_i)] R = 1 - R - A(t_i) R$.

Můžeme spočítat současnou hodnotu pravidelných plateb, které platí kupující CDS jako

$$s \sum_{i=1}^n [u(t_i) + e(t_i)] q_i + su(T) \pi \quad (2.16)$$

a současnou hodnotu plateb, které platí prodávající CDS v případě defaultu jako

$$\sum_{i=1}^n [1 - R - A(t_i) R] q_i v(t_i). \quad (2.17)$$

Potom celková současná hodnota investice z pohledu kupujícího CDS bude

$$PV(\text{CDS}) = \sum_{i=1}^n [1 - R - A(t_i) R] q_i v(t_i) - s \sum_{i=1}^n [u(t_i) + e(t_i)] q_i + su(T) \pi. \quad (2.18)$$

Aby byl dodržen princip rizikově neutrálního oceňování, musí být hodnota CDS spreadu taková, aby $PV(\text{CDS}) = 0$, tj.

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n [1 - R - A(t_i) R] q_i v(t_i)}{\sum_{i=1}^n [u(t_i) + e(t_i)] q_i + u(T) \pi}, \quad (2.19)$$

čímž je tedy určena také tržní cena CDS. Pokud budeme uvažovat možnost defaultu v jakémkoli čase t a $q(t)$ bude hustota pravděpodobnosti defaultu v čase t , určíme CDS spread s jako

$$s = \frac{\int_0^T [1 - R - A(t) R] q(t) v(t) dt}{\int_0^T [u(t) + e(t)] q(t) dt + u(T) \pi}. \quad (2.20)$$

2.4 Modelování plovoucí sazby

Vzhledem k tomu, že k tržnímu ocenění využíváme rizikově neutrálního principu, je zapotřebí určit z dat bezrizikovou úrokovou křivku. K tomu můžeme využít např. kotované sazby EURIBORu a eurového Interest Rate Swapu (IRS) k datu, ke kterému chceme ocenění provést. Z těchto dat sestrojíme spotovou křivku následovně. Pro splatnosti do 1 roku přepočteme EURIBOR na sazbu při spojitém úročení, tj.

$$e^{r \frac{d}{365}} = 1 + s_E \frac{d}{360} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{365}{d} \log\left(1 + r_E \frac{d}{360}\right),$$

kde d je splatnost ve dnech, s_E značí sazbu EURIBOR a r je námi požadovaná bezriziková úroková sazba při spojitém úročení. Na přepočet ze sazeb IRS pro splatnosti nad 1 rok použijeme tzv. metodu bootstrappingu. Označme si $s(t)$ t -letou swapovou sazbu a $r(t)$ bezrizikovou sazbu v t letech. Víme, že $r(1) = \log(1 + s(1))$. Potom $r(2)$ spočteme tak, že

$$e^{-r(1)s(2)} + e^{-2r(2)}(1 + s(2)) = 1 \quad \Rightarrow \quad r(2) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1 - e^{-r(1)s(2)}}{1 + s(2)}\right).$$

Obecně v k -tém roce bude pro $r(k)$ platit, že

$$s(k) \sum_{j=1}^{k-1} e^{-jr(j)} + e^{-kr(k)}(1 + s(k)) = 1 \quad \Rightarrow \quad r(k) = -\frac{1}{k} \log\left(\frac{1 - s(k) \sum_{j=1}^{k-1} e^{-jr(j)}}{1 + s(k)}\right).$$

Z takto spočtených sazeb vytvoříme lineární interpolací spotovou křivku. Plovoucí sazbu budeme modelovat sazbou forwardovou a zbývá tedy poslední krok, určit tyto sazby ze spotové křivky. Forwardovou sazbu mezi časy t_1 a t_2 spočteme jako

$$f(t_1, t_2) = \frac{s(t_2)t_2 - s(t_1)t_1}{t_2 - t_1} \quad \text{pro } t_2 > t_1 \geq 0. \quad (2.21)$$

2.5 Kopula funkce

Pro modelování závislostí uvnitř portfolia aktiv lze využít tzv. kopula funkce, které umožňují ze známého marginálního pravděpodobnostního rozdělení určit rozdělení sdružené. Tuto problematiku lze nalézt např. v Schönbucher [6] a Schmid [5].

Definice 2.5.1 (Kopula funkce) *Necht' náhodné veličiny U_i , $i = 1, \dots, m$ mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$ a $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ je jejich sdruženou distribuční funkcí tak, že $C(u_1, \dots, u_m) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_m \leq u_m)$. Necht' dále platí, že*

- $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m) = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, m$
- $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ pro všechna $i = 1, \dots, m$

- pro všechna $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in [0, 1]^m, \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_m=1}^2 (-1)^{i_1, \dots, i_m} C(v_{i_1}, \dots, v_{i_m}) \geq 0, \text{ kde } v_{j_1} = a_j, v_{j_2} = b_j, j = 1, \dots, m.$$

Potom funkci C nazýváme kopula funkcí (copula function).

Věta 2.5.1 (Sklarova věta) Necht' (X_1, \dots, X_m) je náhodný vektor s m -rozměrnou sdruženou distribuční funkcí F a se spojitými marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_m . Potom existuje právě jedna kopula funkce C tak, že $F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m))$ pro všechna $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$.

Je-li C m -rozměrná kopula funkce a náhodný vektor (X_1, \dots, X_m) má spojitě marginální distribuční funkce F_1, \dots, F_m , potom $F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m))$ pro všechna $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X_1, \dots, X_m) .

Vyjádření této věty inverzní metodou, tj. $C(x_1, \dots, x_m) = F(F_1^{-1}(x_1), \dots, F_m^{-1}(x_m))$ využijeme také při modelování doby do defaultu v portfoliu, ve kterém jsou defaulty aktiv vzájemně závislé. Pokud budeme znát marginální distribuční funkce dob do defaultu jednotlivých aktiv portfolia a budeme předpokládat, že existuje jejich vzájemná korelace, můžeme díky kopula funkci určit doby do defaultu tak, aby odrážely právě tuto korelační strukturu.

Typy kopula funkcí

• Základní kopuly

- nezávislá kopula $C_I(u_1, \dots, u_m) = u_1 \cdot \dots \cdot u_m$ - pro nezávislé náhodné veličiny
- horní Fréchetova mez $C_U(u_1, \dots, u_m) = \min(u_1, \dots, u_m)$
- dolní Fréchetova mez $C_L(u_1, \dots, u_m) = \max(1 - m + \sum_{j=1}^m u_j, 0)$

• Archimédovské kopuly

- jedná se o kopula funkce tvaru $C_A(u_1, \dots, u_m) = \varphi^{[-1]}(\sum_{j=1}^m \varphi(u_j))$,
kde $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ je spojitá klesající konvexní funkce, $\varphi(1) = 0$,

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

- mezi tento typ kopul patří také nezávislá kopula C_I a dolní Fréchetova mez C_L
- dalšími příklady archimédovských kopul jsou např.
Claytonova kopula s $\varphi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$, pro $0 < \alpha < \infty$,
Gumbelova kopula s $\varphi(t) = (-\log t)^\alpha$, pro $1 \leq \alpha < \infty$,
Frankova kopula s $\varphi(t) = -\log \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$, pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aj.

- **Eliptické kopuly**

- gaussovská kopula $C_\rho(u_1, \dots, u_m) = \Phi_\rho^m(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_m))$, kde Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení a Φ_ρ^m je distribuční funkce m -rozměrného normálního rozdělení s korelační maticí $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1}^m$
- Studentova T-kopula $C_{\nu,\rho}(u_1, \dots, u_m) = t_{\nu,\rho}^m(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_m))$, kde t_ν je distribuční funkce standardního T-rozdělení o ν stupních volnosti a $t_{\nu,\rho}^m$ je distribuční funkce m -rozměrného T-rozdělení o ν stupních volnosti s korelační maticí $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1}^m$

Využití kopula funkcí k modelování událostí defaultu

Uvažujme portfolio složené z m aktiv. Necht' doba do defaultu i -tého aktiva je náhodná veličina T_i a F_i je její distribuční funkce pro všechna $i = 1, \dots, m$. Jak určit distribuční funkci doby do defaultu aktiva s daným ratingem jsme si v této kapitole již ukázali. Předpokládáme tedy, že tyto marginální distribuční funkce jsme schopni zkonstruovat.

Korelace událostí defaultu uvnitř portfolia definujeme korelační maticí $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1}^m$. S pomocí m -rozměrné gaussovské kopuly a aplikací Sklarovy věty jsme schopni stanovit sdruženou distribuční funkci dob do defaultu jako

$$F(t_1, \dots, t_m) = \Phi_\rho^m(\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_m(t_m))). \quad (2.22)$$

Definujme náhodné veličiny X_1, \dots, X_m takové, že $X_i = \Phi^{-1}(F_i(t_i))$, $i = 1, \dots, m$. Pokud tedy vygenerujeme náhodný vektor (X_1, \dots, X_m) z m -rozměrného normálního rozdělení s korelační maticí ρ a spočteme hodnoty $\Phi(X_i)$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, získáme námi korelované doby do defaultu tak, že platí

$$\Phi(X_i) = F_i(T_i) \quad \text{neboli, že} \quad T_i = F_i^{-1}(\Phi(X_i)) \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

Kapitola 3

Empirická studie: oceňování CLO

Jak již bylo v této práci zmíněno, ABS obecně jsou z pohledu oceňování velmi zajímavými deriváty. Zpravidla se k tomuto ocenění využívají simulační metody založené na generování korelovaných dob do defaultu uvnitř podkladového portfolia. Na celou tuto problematiku se zaměříme z praktické stránky, neboť ta je klíčová pro dnešní finanční trhy. Konkrétně se budeme věnovat podtypu CDO, a to CLO, kdy jsou podkladovými aktivy úvěry.

Pomocí simulačních metod oceníme existující CLO, porovnáme výsledky při různě volených parametrech modelu a jeho cenu také srovnáme s jeho tržní kotací. Vzhledem k povinnosti zachovávat mlčenlivost nebudeme uvádět název investora, SPV, derivátu ani jména společností figurujících v podkladovém portfoliu, neboť dokumenty týkající se tohoto typu derivátů nejsou obecně dostupné třetím stranám. Dívejme se na ocenění z pohledu investora, který chce mít představu o aktuální ceně CLO, které vlastní, a kterého zajímá, zda je v souladu s cenou kotovanou na trhu.

3.1 Popis struktury CLO a postupu jeho ocenění

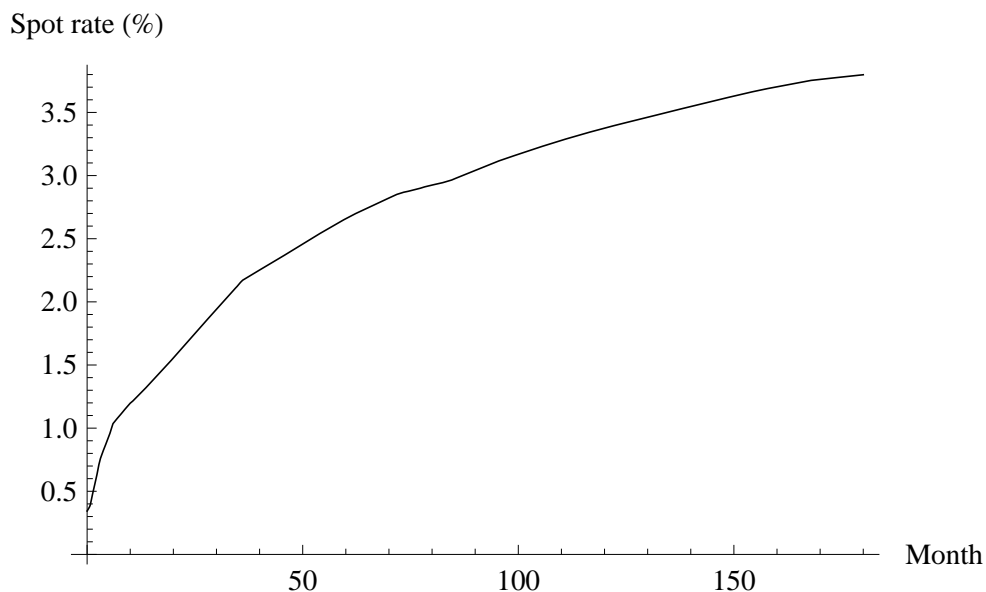
Nejprve v této části předestřeme všechny potřebné informace o oceňovaném CLO a popíšeme konkrétní postup ocenění pro tento konkrétní derivát. Využijeme k tomu teorii popsanou v druhé kapitole spolu s postupy specifickými pro dané CLO, které uvedeme v této kapitole.

3.1.1 Základní charakteristika CLO

Investice do CLO proběhla v roce 2004, přičemž po 12-ti měsíčním náběhovém období (*ramp up period*) a 5-ti letém reinvestičním období, během něhož byl tento kreditní derivát stejně jako jiné zasažen finanční krizí, je nyní CLO ve fázi splácení jednotlivých dluhových tranší. Zúčtování, resp. výplata kupónů investorům do tranší, probíhá v půlročních intervalech. Budeme tedy pro zjednodušení oceňovat k jednomu z těchto dvou termínů v roce, a to k 13. říjnu 2009. Bezrizikové úrokové sazby k tomuto datu určíme z kotací EURIBORu a IRS obsažených v tabulce 3.1 podle postupu popsaného v podkapitole 2.4. Z výsledné spotové křivky zachycené v grafu 3.1 pak budeme určovat forwardové sazby podle vzorce 2.21 a modelovat jimi sazbu plovoucí.

Tabulka 3.1: Sazby k 13. říjnu 2009, Zdroj: Patria [13]

	SW	2W	3W	1M	2M	3M	4M	5M	6M	7M	8M	9M	10M	11M	1Y
EURIBOR v %	0,35	0,37	0,39	0,43	0,58	0,74	0,84	0,92	1,02	1,07	1,11	1,15	1,19	1,22	1,25
	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	11Y	12Y	13Y	14Y	15Y
IRS v %	1,26	1,72	2,18	2,43	2,67	2,85	2,95	3,11	3,24	3,35	3,44	3,53	3,61	3,68	3,72



Obrázek 3.1: Spotová křivka k 13. říjnu 2009

3.1.2 Podkladové portfolio CLO

Vážené průměry jsou, jak již bylo řečeno, stěžejními ukazateli při popisu podkladového portfolia. V tabulce 3.2 jsou zahrnuty vybrané údaje o podkladovém portfoliu CLO, které oceňujeme, včetně těchto charakteristik.

Tabulka 3.2: Základní číselné údaje o portfoliu

Počet aktiv	264	WAM	5,3 let
Počet společností	88	WAS	2,8%
Celková hodnota portfolia	306 mil. EUR	WARF	2483

Setkáváme se však s případem, kdy sice známe celkový WARF, ale konkrétní rating známe jen u části aktiv portfolia. Investor zná v našem podkladovém portfoliu rating u přibližně třetiny aktiv, zbylá aktiva mají tzv. shadow rating, tedy nezveřejněný rating, který je pro modelování

peněžních toků plynoucích z portfolia zapotřebí dodatečně určit tak, aby byla dodržena známá hodnota WARF. K tomuto dopočtení lze využít závislosti mezi spready, které známe u všech aktiv portfolia, a ratingovými faktory. Zvolíme metodu lineární regrese a následně upravíme koeficienty tak, aby bylo dosaženo požadovaného WARF.

Označme m počet aktiv v portfoliu, $n \leq m$ počet společností, z nichž u n_z známe ratingový faktor. Seřadme si společnosti tak, že u $1, \dots, n_z$ je ratingový faktor známý a u n_{z+1}, \dots, n jej neznáme. Necht' $X = (X_1, \dots, X_{n_z})$ jsou průměrné spready aktiv společností $1, \dots, n_z$ a $Y_z = (Y_1, \dots, Y_{n_z})$ jsou jejich ratingové faktory. Potom můžeme určit koeficienty a a b tak, že $Y = aX + b$. WARF aktiv $1, \dots, n_z$ označíme WARF_z , cílený WARF pak budeme značit WARF_c .

Nyní pro zbylé spready $\bar{X} = (X_{n_{z+1}}, \dots, X_n)$ pomocí těchto koeficientů dopočítáme hodnoty ratingových faktorů $\bar{Y} = (Y_{n_{z+1}}, \dots, Y_n)$, ale je zapotřebí nejprve zjistit, jak změnit hodnotu konstanty b tak, abychom dosáhli WARF_c . Novou konstantu c určíme tak, že

$$c = b + (\text{WARF}_c - \text{WARF}_z) \frac{N}{\sum_{i=n_{z+1}}^n N_i}, \quad (3.1)$$

neboť pro c musí platit

$$\begin{aligned} (\text{WARF}_c - \text{WARF}_z) + \frac{1}{N} \sum_{i=n_{z+1}}^n N_i (aX_i + b) &= \frac{1}{N} \sum_{i=n_{z+1}}^n N_i (aX_i + c) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow (\text{WARF}_c - \text{WARF}_z) + b \frac{1}{N} \sum_{i=n_{z+1}}^n N_i &= c \frac{1}{N} \sum_{i=n_{z+1}}^n N_i. \end{aligned}$$

Pokud aplikujeme výše zmíněný postup na naše podkladové portfolio, získáme tak ratingové faktory jednotlivých aktiv s shadow ratingem a podle tabulek Moody's určíme příslušný rating. Vzhledem k tomu, že se spready aktiv pohybují v relativně malém rozpětí hodnot, i námi dopočtené ratingy budou ne příliš blízko ke krajním ratingům portfolia. Počet aktiv se shadow ratingem je v tomto portfoliu 176, tj. známe rating jen u 88 aktiv. Nejhorší rating v portfoliu je Caa2, nejlepší Ba1. Díky dogenerování ratingů lineární regrese je nejčastějším ratingem B2.

Složení portfolia z hlediska oboru činnosti firem a jejich země původu užijeme pro potřeby korelační struktury mezi jednotlivými podkladovými aktivy. Vzhledem k tomu, že společnosti jsou v drtivé většině evropského původu, klíčové pro korelaci budou oblasti působení. Největší část nominální hodnoty tvoří segment Zdravotnictví, vzdělávání a péče o děti, nejméně je zastoupen segment Smíšeného zboží.

Často se také k vyjádření různorodého složení aktiv v portfoliu používá tzv. index rozmanitosti (*diversity score*). Pro naše CLO s 88 společnostmi a 264 aktivy je tento index 39 a to znamená, že lze naše portfolio, ve kterém jsou aktiva odlišná z pohledu nominální hodnoty i ratingu a jsou různě korelovaná, přirovnat k portfoliu o 39-ti aktivech, která budou vzájemně různorodá. My budeme pro simulační metody využívat spíše odhadovanou korelaci uvnitř a mezi jednotlivými odvětvími, jakožto tradičně užívaný předpoklad. Tabulka 3.3 zachycuje vzhledem k rozsahu podkladového portfolia jen jeho část.

Tabulka 3.3: Část podkladového portfolia CLO

Spol.	Jistina	Spread	Frekvence	Rating	Moodys Industry Name	Splatnost
s1	468317	3,92%	4	B1	Healthcare, Education and Childcare	5,6
s1	1034317	3,92%	4	B1	Healthcare, Education and Childcare	5,6
s2	730000	2,25%	12	B2	Healthcare, Education and Childcare	4,0
s2	730000	3,00%	12	B2	Healthcare, Education and Childcare	5,0
s3	1321788	3,00%	2	B2	Healthcare, Education and Childcare	5,4
s4	126151	0,75%	2	B2	Personal and Non-Durable Consumer Products	5,9
s5	1811347	0,75%	2	B2	Personal and Non-Durable Consumer Products	5,9
s6	2985400	3,45%	2	B1	Diversified/Conglomerate Service	6,7
s7	3702204	3,445%	2	B1	Hotels, Motels, Inns and Gaming	6,0
s7	2089705	3,445%	2	B1	Hotels, Motels, Inns and Gaming	6,0
s8	977455	2,50%	2	B2	Personal Transportation	5,3
s8	969915	3,00%	2	B2	Personal Transportation	6,3
s8	155063	1,00%	2	B2	Personal Transportation	7,3
s9	1777331	2,00%	12	B1	Personal, Food and Miscellaneous Services	5,8
s9	580595	4,25%	12	B1	Personal, Food and Miscellaneous Services	5,3
s9	694167	4,25%	12	B1	Personal, Food and Miscellaneous Services	5,3
s10	2104100	3,50%	2	Ba1	Healthcare, Education and Childcare	4,9
s11	1248296	2,00%	4	B2	Healthcare, Education and Childcare	4,1
s12	666667	2,50%	2	Caa1	Oil and Gas	2,2
s12	666667	3,50%	2	Caa1	Oil and Gas	3,2
s13	2739726	3,50%	12	B1	Diversified/Conglomerate Service	6,5
s14	3348485	2,00%	12	B2	Diversified/Conglomerate Service	4,7
s14	3151515	2,50%	12	B2	Diversified/Conglomerate Service	5,7
s14	762183	2,00%	12	B2	Diversified/Conglomerate Service	4,7
s14	729045	2,50%	12	B2	Diversified/Conglomerate Service	5,7
s15	3000000	4,00%	2	B1	Utilities	5,5
s16	4170000	2,88%	4	Ba3	Broadcasting and Entertainment	3,5
s17	1000000	2,50%	12	B2	Broadcasting and Entertainment	4,6
s17	1000000	3,00%	12	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s18	5000000	1,75%	12	Ba3	Broadcasting and Entertainment	2,5
s19	484934	2,38%	2	B2	Broadcasting and Entertainment	5,4
s19	484934	2,63%	2	B2	Broadcasting and Entertainment	6,4
s20	5000000	3,50%	12	B1	Diversified/Conglomerate Service	7,8
s20	1000000	2,75%	12	B1	Diversified/Conglomerate Service	6,3
s20	1000000	3,5%	12	B1	Diversified/Conglomerate Service	7,3
s21	281215	3,88%	12	B1	Ecological	6,7
s21	467272	3,88%	12	B1	Ecological	6,7
s21	151680	3,88%	12	B1	Ecological	7,7
s21	596807	3,88%	12	B1	Ecological	7,7
s22	186375	1,88%	4	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s22	396906	1,88%	4	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s22	432872	1,88%	4	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s22	528191	1,88%	4	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s22	991340	1,88%	4	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s22	1793036	1,88%	4	B2	Broadcasting and Entertainment	5,7
s23	6193916	2,75%	12	B1	Printing and Publishing	3,7
s24	5238000	1,25%	4	Ba2	Mining, Steel, Iron and Non-Precious Metals	5,6
s25	5000000	3,75%	12	Ba3	Broadcasting and Entertainment	7,8
s26	3898157	1,79%	12	B2	Printing and Publishing	5,7
s27	951777	3,29%	12	B3	Oil and Gas	6,4
s27	951777	3,51%	12	B3	Oil and Gas	7,4
s28	2385674	2,00%	12	B2	Personal Transportation	3,7
s28	4293318	2,5%	12	B2	Personal Transportation	4,7
s29	2000000	3,25%	12	Ba3	Telecommunications	3,6
s29	2000000	4,25%	12	Ba3	Telecommunications	4,6
s30	4098759	1,75%	4	Caa2	Printing and Publishing	4,6

3.1.3 Modelování dob do defaultu

Ke každému ratingu jsme schopni získat víceleté vypočítané pravděpodobnosti defaultu z tabulek agentury Moody's, které jsou spolu s metodologií výpočtu poskytovány registrovaným uživatelům na [11]. Jejich přehled pro ratingy zastoupené v portfoliu vidíme v tabulce 3.4.

Tabulka 3.4: Víceleté pravděpodobnosti defaultu podle agentury Moody's (v %)

Rok	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa1	Caa2
1	0,87	1,56	2,81	4,68	7,16	11,62	17,38	26,00
2	2,02	3,47	5,51	8,38	11,67	16,61	23,23	32,50
3	3,13	5,18	7,87	11,58	15,55	21,03	28,64	39,00
4	4,20	6,80	9,79	13,85	18,13	24,04	32,48	43,88
5	5,28	8,41	11,86	16,12	20,71	27,05	36,31	48,75
6	6,25	9,77	13,49	17,89	22,65	29,20	38,97	52,00
7	7,06	10,70	14,62	19,13	24,01	31,00	41,39	55,25
8	7,89	11,66	15,71	20,23	25,15	32,58	43,66	58,50
9	8,69	12,65	16,71	21,24	26,22	33,78	45,67	61,75
10	9,40	13,50	17,66	22,20	27,20	34,90	47,70	65,00

V podkapitole 2.3 jsme si ukázali, jak z těchto pravděpodobností vypočteme pravděpodobnosti rizikově neutrální. Tento postup nyní aplikujeme u ratingů zastoupených v našem portfoliu a využijeme k výpočtu index S&P 500. U části společností v portfoliu jsme schopni např. na [17] zjistit vývoj jejich akciového indexu. V našem případě se jedná přibližně o 10%. Z těchto údajů v ročním horizontu, tj. od 13. října 2008 do 13. října 2009, a z vývoje indexu S&P 500 za stejné období, jsme schopni určit průměrnou korelaci portfolia aktiv s tímto indexem. Námi vypočtená korelace je $\rho = 0,72$ a Sharpeův poměr indexu S&P 500 je podle Witzany [7] $U = 0,406$. Tyto hodnoty dosadíme do vzorce 2.15 a pro jednotlivé roky a různé ratingy dostaneme rizikově neutrální pravděpodobnosti defaultu. Přehled těchto hodnot můžeme vidět v tabulce 3.5 a při porovnání s hodnotami z tabulky 3.4 vidíme, že rizikově neutrální pravděpodobnosti jsou značně vyšší než ty vypočítané.

Tabulka 3.5: Víceleté rizikově neutrální pravděpodobnosti defaultu (v %)

Rok	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa1	Caa2
1	1,81	3,07	5,21	8,19	11,90	18,14	25,62	35,97
2	4,97	7,87	11,60	16,40	21,48	28,51	37,10	47,93
3	8,54	12,81	17,84	24,07	30,12	37,71	47,14	58,43
4	12,31	17,81	23,42	30,20	36,62	44,57	54,54	66,07
5	16,29	22,89	29,24	36,17	42,82	50,96	61,23	72,71
6	20,10	27,47	34,19	41,16	47,84	55,91	66,13	77,23
7	23,59	31,18	38,17	45,18	51,83	60,11	70,34	81,16
8	27,14	34,89	41,97	48,82	55,33	63,77	74,03	84,58
9	30,59	38,57	45,50	52,17	58,55	66,79	77,15	87,52
10	33,80	41,90	48,82	55,30	61,48	69,52	79,98	90,04

Z víceletých pravděpodobností defaultu získáme jednoleté podle vzorce 2.5 a pokud přijmeme předpoklad, že intenzita defaultu je v průběhu jednotlivých let konstantní, můžeme ji získat ze vzorce 2.6. Budeme tedy pro každý rating znát intenzitu defaultu v jednotlivých letech.

V této fázi jsme již blízko k určení distribuční funkce doby do defaultu. Aktiva se stejným ratingem budou mít předpokládané rozdělení doby do defaultu stejné. Pro každý rating zastoupený v portfoliu jsme tedy schopni z intenzity defaultu určit kombinací definice funkce přežití 2.1.1 a tvrzení věty 2.1.1 distribuční funkci doby do defaultu. Pro zjednodušení výpočtu této distribuční funkce použijeme výpočet hodnoty integrálu v půlročních intervalech a výslednou funkci získáme interpolací. Protože naše portfolio obsahuje i více aktiv od jedné společnosti, budeme modelovat korelační strukturu na úrovni společností a následně ji aplikujeme i na samotná aktiva. Nyní tedy budeme mít pro každý rating jednu distribuční funkci doby do defaultu, ale použijeme obecnější značení pro všechny společnosti, tj. F_i pro $i = 1, \dots, 88$, kde $F_i = F_j$, pokud společnosti i a j mají stejný rating.

Vzhledem k tomu, že nyní známe marginální rozdělení $i = 1, \dots, 88$ dob do defaultu v portfoliu, můžeme využít kopula funkcí k získání sdruženého rozdělení dob do defaultu resp. vygenerovat doby do defaultu odpovídající korelační struktuře uvnitř portfolia. Tu si můžeme definovat pomocí korelační matice $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1}^{88}$, kde

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j \\ \text{inner} & \text{pokud } i \neq j \text{ jsou společnosti působící ve stejném odvětví} \\ \text{outer} & \text{pokud } i \neq j \text{ jsou společnosti působící v různém odvětví} \end{cases} \quad (3.2)$$

a *inner* a *outer* jsou volitelné konstanty. Pokud zvolíme gaussovskou kopulu, bude postup, který jsme již zmínili v podkapitole 2.5.1 následující:

1. vygenerujeme náhodný vektor $X = (X_1, \dots, X_{88})$ z 88-rozměrného normálního rozdělení s korelační maticí $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1}^{88}$
2. určíme hodnoty $c_i = \Phi(X_i)$ pro $i = 1, \dots, 88$
3. pro všechna $i = 1, \dots, 88$ hledáme numericky řešení rovnice $F_i(\bar{T}_i) = c_i$ pro \bar{T}_i
4. takto získané hodnoty $\bar{T} = (\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_{88})$ jsou pak doby do defaultu společností $i = 1, \dots, 88$ korelované podle matice ρ
5. pro více aktiv jedné společnosti bude doba do defaultu stejná, a můžeme tedy určit doby do defaultu jednotlivých aktiv $T = (T_1, \dots, T_{264})$, tak, že $T_{a_i} = \bar{T}_i$ pro aktivum a_i vydané společností i resp. úvěr a_i společnosti i .

3.1.4 Peněžní toky plynoucí z portfolia

Vzhledem k tomu, že podkladová aktiva jsou úvěry korporátních společností a mají tedy pro nás složitě definovatelný systém splácení úroků a jistiny, budeme předpokládat, že se aktiva v tomto ohledu chovají stejně jako dluhopisy, tj. průběžně vyplácejí pouze kupóny resp. úrokové výnosy a ke splacení jistiny dojde jednorázově až v době splatnosti aktiva. Modelování peněžních toků můžeme tedy pro úrokové a jistinné výnosy provádět odděleně.

Z dob do defaultu, které jsme vygenerovali pomocí kopula funkce, a z dob do splatnosti jednotlivých aktiv určíme dobu výplaty, tj. období, kdy z podkladového aktiva plynou úrokové výnosy jako minimum z těchto dvou dob. Celkovou výši úrokové sazby pro jednotlivá aktiva za určité období, kterou budeme označovat anglickým termínem *all-in-rate*, přizpůsobíme frekvenci plateb. Bude se skládat z plovoucí složky, kterou modelujeme forwardovou sazbou mezi začátkem a koncem období, pro které chceme *all-in-rate* určit, a ze složky fixní, tj. z části ročního spreadu připadající na toto období. Matematicky lze celkovou sazbu aktiva i v čase t spočítat jako

$$all-in-rate_i(t) = spread_i^m + e^{\frac{1}{m}f(t, t+\frac{12}{m})} - 1, \quad (3.3)$$

kde m je frekvence úročení (12 pro měsíční, 4 pro čtvrtletní a 2 pro půlroční), f je forwardová sazba podle vzorce 2.21 a čas t uvažujeme v měsících. Zjednodušeně počítáme $spread_i^m = spread_i/m$. Vzhledem k tomu, že výplaty kupónů tranším probíhají v půlročních intervalech, budeme shromažďovat úrokové výnosy z portfolia podle toho, jak spadají do jednotlivých půlroků.

Jistinným výnosem aktiva, u kterého default po dobu života CLO nenastal, máme na mysli splacení celkové nominální hodnoty v čase splatnosti aktiva. Pokud doba do defaultu T_i aktiva i je menší než doba života CLO, vygenerujeme míru výtežnosti R_i z Beta rozdělení s volitelnými parametry a jistinným výnosem tedy bude celková nominální hodnota vynásobená R_i . Stejně jako u úrokových výnosů budeme tyto příjmy z portfolia shromažďovat po půlročních intervalech.

3.1.5 Struktura tranší

Oceňované CLO se skládá ze sedmi dluhových tranší A, B, C1, C2, D, E1 a E2, kde tranše C2 a E2 vyplácí fixní kupón a zbylé tranše mají stanoven plovoucí kupón jako 6-ti měsíční EU-RIBOR navýšený o spread. Investor zakoupil tranše B a C1. Vzhledem k tomu, že konkrétní hodnoty fixních sazeb nemáme k dispozici, budeme tranše C2 a E2 uvažovat se stejnou sazbou jako jejich plovoucí ekvivalenty, ale zachováme jejich senioritu neboli jejich pořadí při přerozdělování prostředků získaných z portfolia. Tabulka 3.6 znázorňuje nominální hodnotu a spread jednotlivých tranší a také hodnoty IC trigger a OC trigger pro vyhodnocování IC a OC testů.

Tabulka 3.6: Struktura tranší CLO

Tranše	Jistina v EUR	Spread	IC trigger	OC trigger
A	235000000	0,25%	120,0%	117,6%
B	14500000	0,36%	120,0%	117,6%
C1	18000000	0,70%	110,0%	107,8%
C2	11000000	0,70%	110,0%	107,8%
D	16250000	1,70%	105,0%	103,9%
E1	6250000	6,00%	102,0%	102,5%
E2	4000000	6,00%	102,0%	102,5%

Velmi často bývají equity tranše bez přesně stanoveného kupónu a získávají v každém období příjmy z úroků podkladových aktiv, které zbyly po vyplacení kupónů nadřazeným tranším. V našem případě tomu tak není a equity tranše mají stejně jako ostatní stanovený kupón, přičemž spread je výrazně vyšší než u ostatních tranší. Jednotlivé tranše A, B, C1, C2, D, E1, E2 budeme pro přehlednost značit jako $n = 1, \dots, 7$ v tomto pořadí. Konkrétní výši kupónu pro jednotlivé tranše určujeme podobně jako u úroků podkladových aktiv jako

$$coupon_n(t) = \frac{1}{2} spread_n + e^{\frac{1}{2}f(t,t+6)} - 1, \quad (3.4)$$

kde n značí pořadí tranše, f je forwardová sazba a čas t opět uvažujeme v měsících. Vzhledem k půlročním výplatám kupónů spread n -té tranše zjednodušeně počítáme jako polovinu ze spreadu ročního.

3.1.6 Finanční vodopád

V každém zúčtovacím období, tj. v každém půlroce, máme k dispozici jistinné a úrokové výnosy z daného portfolia. Vzhledem k tomu, že jsou finanční vodopády pro přerozdělení jistinných a úrokových výnosů dluhovým tranším propojené, popíšeme podrobně algoritmus jako celek. Označme si $k = 1, \dots, k_{max}$ období, kdy dochází ke kumulaci výnosů z portfolia a k výplatám tranším, tedy jde o k -tý půlrok. Poslední období k_{max} je určeno podle maximální doby výplaty v portfoliu. V každém období k , kdy máme k dispozici příjmy z úroků a příjmy z nominálů, probíhá přerozdělení do tranší $n = 1, \dots, 7$ v tomto pořadí následovně:

1. Z příjmů z úroků vyplatíme n -té tranši kupón. Pokud není k dispozici dostatek prostředků, nevyplacená část kupónu či celý nevyplacený kupón se do následujících období přenáší jako tzv. odložený kupón.
2. Pro n -tou tranši určíme hodnotu IC a OC testů. Pokud nejsou splněny, začnou se z příjmů z úroků splácet tranše podle principu seniority, tj. od nejvyšší 1. tranše k tranši 7. nejnižší, dokud nejsou hodnoty IC a OC testu splněny nebo dokud jsou k dispozici příjmy z úroků nebo dokud nejsou splaceny všechny tranše. Pokud tedy nemáme dostatek prostředků ke splnění IC i OC testu, použijeme všechny příjmy z úroků.
3. Z příjmů z nominálů vyplatíme n -té tranši odložený kupón. Pokud se z příjmů z úroků nepodařilo zajistit splnění IC i OC testů, použijeme příjmy z nominálů na splácení tranší podle principu seniority tak, aby byly testy splněny nebo dokud jsou k dispozici příjmy z úroků nebo dokud nejsou splaceny všechny tranše.

V obdobích $k < k_{max}$ jsou zbylé prostředky ukládány na rezervní účet, kde se úročí forwardovou úrokovou sazbou. V posledním období výplaty k_{max} se tyto prostředky použijí na splácení tranší podle seniority.

3.2 Úskalí oceňování CLO

V této části se zamysleme nad námi použitým způsobem ocenění CLO i nad těmito deriváty obecně. Následující poznatky nám umožní lépe nahlížet na celou tuto problematiku, neboť míru nejistoty spojenou s tak složitými instrumenty, jako jsou právě CLO resp. ABS obecně, můžeme z velké části ovlivnit buď přijetím kvalitnějších předpokladů, pokud to je možné, nebo střízlivým náhledem na výsledky ocenění, pokud předpoklady přesněji určit nelze.

3.2.1 Nedostatek transparentních informací

Většina nejasností spojených s oceňováním CDO obecně má svou příčinu v charakteru informací, které má investor k dispozici. Právní dokumenty k těmto cenným papírům mají i několika set stránkové rozsahy, což činí jeho správné porozumění značně složitějším. Pro investora jsou totiž klíčové transparentní informace, ze kterých by mohl čerpat nejen pro potřeby ocenění CDO, které již vlastní, ale především při rozhodování o koupi tranší.

Dalším úskalím, které jsme již zmínili, je nedostatečná informace o ratingu společností zas-toupených v portfoliu. Investor není schopen zjistit ratingové hodnocení u přibližně dvou třetin aktiv portfolia, což jej při oceňování nutí k používání odhadů, které ve svém důsledku vnášejí do oceňování další zdroj nejistoty. Jediné, co má investor k dispozici, je rozdělení aktiv podle tříd priority (*seniority class*), což je podrobněji popsáno např. v Jež [4], nebo podle úrovně bezpečnosti (*security level*). V našem případě materiály uvádějí pouze, zda je aktivum prioritní zajištěné (*senior secured*) a nebo jde o středně rizikové (*mezzanine*) či druhotné břemeno (*second lien*).

3.2.2 Přijetí zjednodušujících předpokladů

Mimo výše zmíněné nedostatky v poskytovaných informacích jsou při oceňování největším úskalím námi přijaté zjednodušující předpoklady. Každé portfolio je jistým způsobem řízeno a predikovat přesně strategii nakládání s jeho aktivy je prakticky nemožné. Pokud je portfolio ve fázi aktivního řízení, velmi často se užívá zjednodušující předpoklad, že se aktivum v případě defaultu nebo splatnosti nahradí aktivem stejným, tj. se stejnou nominální hodnotou, spreadem, ratingem, splatností, atd. V reálném případě však jde pouze o aktivum podobné a nebo dojde k obměně větší části aktiv. Stejně tak není přesně dáno nakládání s rezervním účtem. Obecně se pro účely modelování procesu přeměrování finančních prostředků dluhovým tranším používá značně zjednodušená podoba finančního vodopádu založená na dostupných informacích a přijatých předpokladech.

V našem případě bylo také zapotřebí přijmout zjednodušující předpoklad týkající se splá-cení úroků a jistiny u úvěrů v podkladovém portfoliu, kdy jsme uvažovali stejné chování jako u dluhopisů. Reálně bývá splácení korporátních úvěrů z tohoto hlediska značně specifické, ale z dostupných informací nejsme schopni určit přesné podmínky splácení.

V neposlední řadě je nutné zamyslet se nad modelováním korelací defaultů v portfoliu. Předpokládáme korelaci uvnitř jednotlivých odvětví stejnou pro všechna odvětví, což také není v souladu s realitou. Např. v zemědělství mohou být selhání společnosti silně korelována, neboť neúroda pravděpodobně postihne všechny společnosti působící na daném území stejnou měrou, naopak v automobilovém průmyslu může korelace mezi jednotlivými společnostmi nabývat

i hodnot blízkých -1, protože klienti budou více nakupovat u konkurenčních společností. I korelace mezi odvětvími může být velmi různorodá. Vzhledem k tomu, že tyto korelace uvnitř portfolia nelze zpravidla přesně určit a zjednodušení výpočtu je žádoucí, držíme se těchto tradičních předpokladů. Stejně tradičním předpokladem je i použití kopula funkcí, a to konkrétně gaussovské kopuly. Do jaké míry ovlivňuje změna kopula funkce výsledky ocenění, je také tématem hodným zamyšlení. Užití příliš složitých kopul či jiných metod však může mít na náročnost výpočtu značný vliv. I jednoduché porovnání výpočtů s pomocí gaussovské a např. Studentovy T-kopuly může podat dostatečnou informaci o správnosti těchto předpokladů.

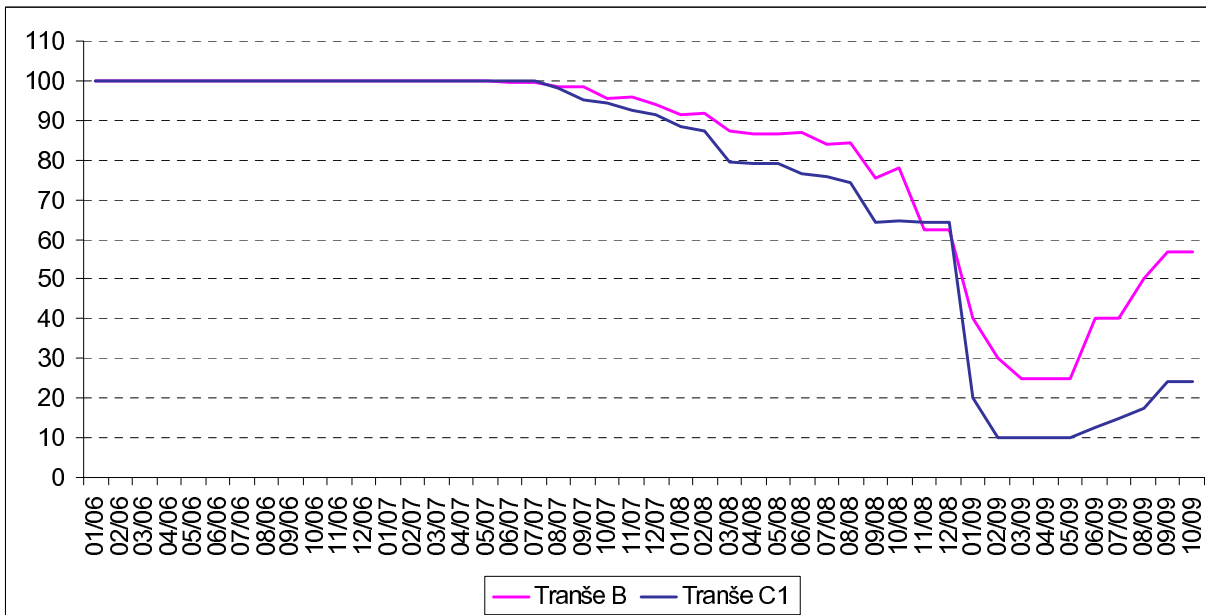
V neposlední řadě je nutno podotknout, že oceňujeme CLO k datu v průběhu jeho života. Nevíme, jak v minulosti probíhaly platby kupónu jednotlivým tranším ani jaké výměny aktiv proběhly uvnitř podkladového portfolia. Od minulosti se tedy zcela oprostíme a budeme počítat současnou hodnotu investice v pravém slova smyslu, tedy diskontované peněžní toky, které v následujícím období z investice vyplynou. Jak bude patrné z výsledků samotných simulací, CLO se nachází ve fázi, kdy zcela jistě není dostatek prostředků ke splnění závazků vůči všem tranším, i kdyby k žádným defaultům nedošlo. V posledním období CLO již nedochází k nahrazení aktiv v portfoliu, a tudíž generuje menší množství finančních prostředků, než jaké vyžadují závazky vůči dluhovým tranším.

3.2.3 Úskalí z pohledu interpretace výsledků

Výše popsaná úskalí je třeba mít na paměti jak při samotném oceňování, tak i při interpretaci jeho výsledků. Jak již bylo v této práci několikrát zmíněno, CLO jsou svou strukturou velmi složité a záleží tedy na nás, jak časově náročnou nebo přesnou metodu ocenění zvolíme. Vhodnou volbou zjednodušujících předpokladů lze dosáhnout také větší transparentnosti výpočtu, což v kombinaci s povědomím o možných nedostatcích v postupu ocenění přináší investorovi dostatečnou informaci o hodnotě zakoupených tranšů.

3.3 Výstupy simulací

V této části se zaměříme na samotné výsledky ocenění a především na jejich citlivost na změnu jednotlivých předpokladů. Cílem této práce je posouzení, jak se ceny jednotlivých tranší mění v závislosti na změně parametrů ocenění, narozdíl např. od práce Dvořáková [2], která se soustředí na posouzení investice do CDO z hlediska určení hodnoty v riziku, očekávané ztráty a dalších podobných charakteristik u jednoho konkrétního ocenění s pevnými parametry. Nám pro přehlednost postačí informace o ceně CLO, tedy střední současné hodnotě diskontovaných peněžních toků, a o směrodatné odchylce, které vypočteme na základě 5000 simulací v programu Mathematica 7.0. U tranší B a C1 zná investor tržní hodnotu a můžeme tedy porovnat výsledky simulací i s těmito hodnotami. Následující graf 3.2 zachycuje vývoj tržní ceny těchto tranší od ledna 2006 do října 2010, kdy byla hodnota tranše B 57% a tranše C1 24%.



Obrázek 3.2: Vývoj tržní ceny tranší CLO, Zdroj: neuvádíme

Proved' me nyní ocenění CLO, přičemž za primární parametry zvolíme korelační matici podle vzorce 3.2 s hodnotou $inner = 0,4$ a $outer = 0,75 \times inner = 0,3$. Míru výtěžnosti budeme pro úvodní ocenění modelovat Beta rozdělením se střední hodnotou $\mu_R = 0,6$ a směrodatnou odchylkou $\sigma_R = 0,3$. Použijeme gaussovskou kopulu a budeme se držet výše popsaného finančního vodopádu, což budeme nazývat základním algoritmem. Podíváme se však také na ocenění v případě, že se nebudou vyplácet odložené kupóny. Střední současnou hodnotu budeme značit $E[PV]$, směrodatnou odchylku $\sigma[PV]$ a tyto údaje budeme uvádět v procentech jako poměr výnosů z tranše k její nominální hodnotě.

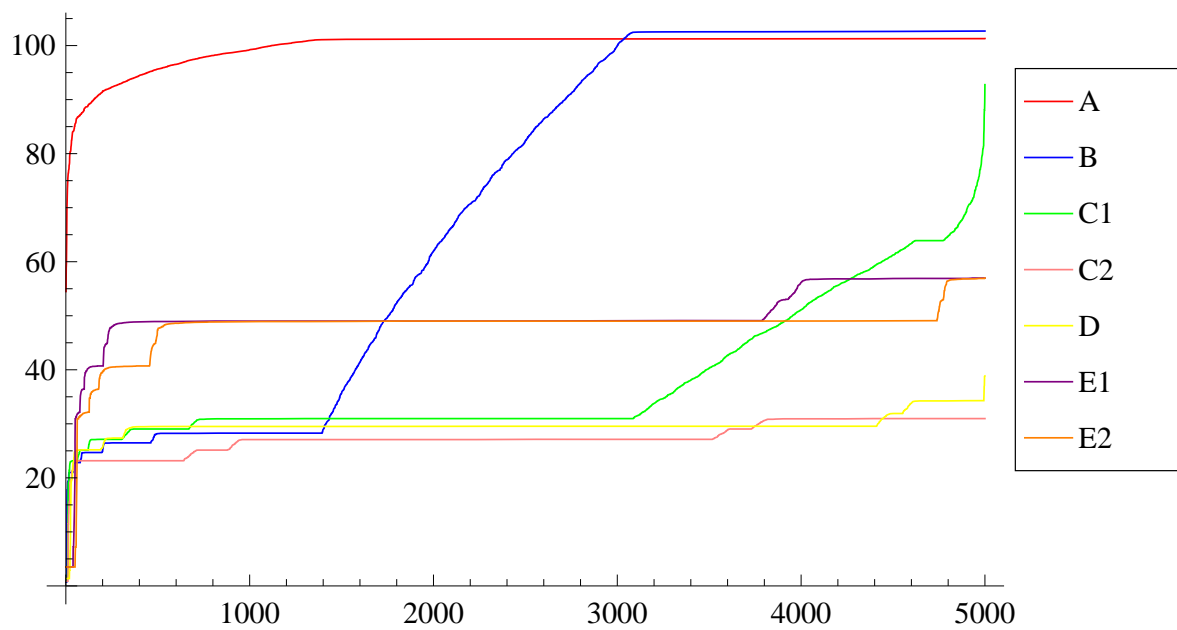
Následující tabulka 3.7 obsahuje výsledky simulací pro 4 různé případy - základní algoritmus, případ, když by nenastal v portfoliu žádný default, případ, kdy bychom nepoužili IC a OC testy a výpočet bez vyplácení odložených kupónů. Prostřední dvě varianty berme jako čistě hypotetické, neboť případ bez defaultů je velmi nerealistický a nepoužití IC a OC testů zruší princip seniority, což je základní myšlenka CDO.

Tabulka 3.7: Hodnoty tranší v procentech při $inner = 0,4$, $\mu_R = 0,6$, $\sigma_R = 0,3$

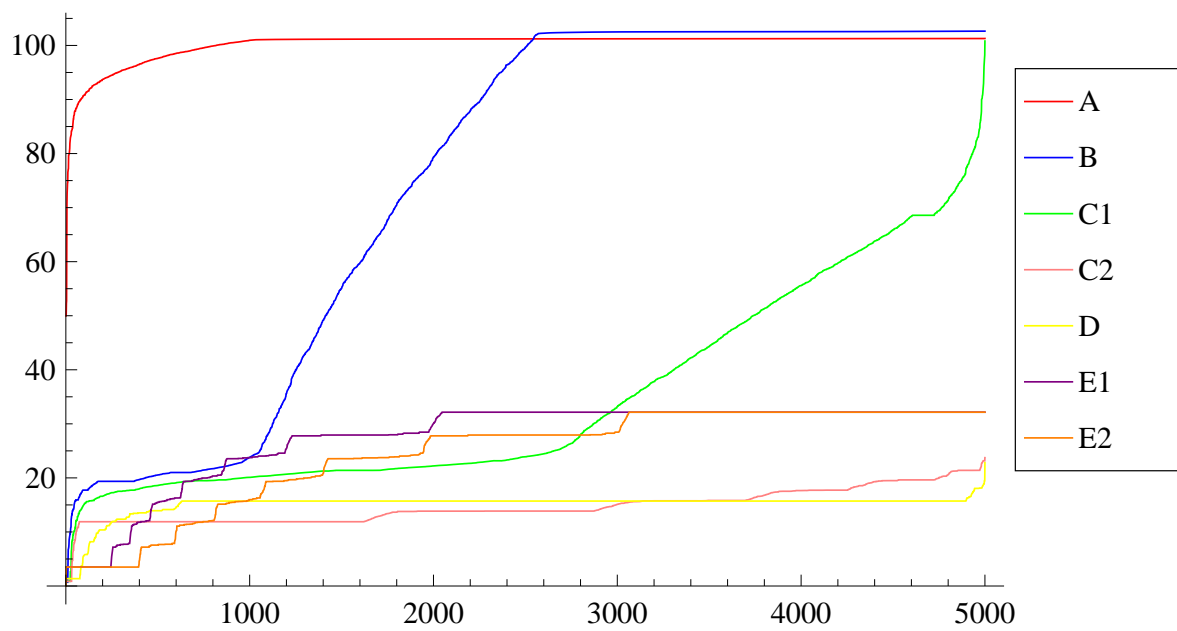
Tranše	Zákl. algoritmus		Bez odlož. kupónů		Bez defaultů		Bez IC a OC testů	
	E[PV]	σ [PV]	E[PV]	σ [PV]	E[PV]	σ [PV]	E[PV]	σ [PV]
A	99,75	3,61	100,21	3,13	101,27	0,00	25,75	1,08
B	70,58	32,69	74,86	34,11	102,55	0,00	24,31	1,14
C1	38,39	12,94	35,01	19,01	63,90	0,00	26,62	1,30
C2	27,42	2,82	14,66	3,09	27,08	0,00	26,55	1,41
D	29,63	2,62	15,12	2,30	29,51	0,00	33,44	1,81
E1	49,94	5,94	27,42	7,97	49,01	0,00	63,45	3,32
E2	47,93	5,94	24,49	9,23	49,01	0,00	63,19	3,45

Podle případů bez defaultů, kdy je dodržen algoritmus, co se týče odložených kupónů i testů pokrytí, vidíme, že díky postupnému úbytku aktiv v portfoliu mohou být ziskové jen tranše A a B. Případ, kdy vynecháme IC a OC testy ukazuje, jak nadřazené tranše nejsou chráněny při nedostatečném množství prostředků. Dále se však těmito dvěma případy nezabývejme, neboť jsou pro nás směrodatné reálné možnosti. Ve zbylých dvou variantách, tedy v základním algoritmu s a bez odložených kupónů, vidíme, že jsou equity tranše v celkovém efektu méně ztrátové než střední tranše úrovně C2 a D. To je způsobeno tím, že v horizontu nejbližších let je dostatek financí na výplatu kupónů všem tranším, což v kombinaci s velmi vysokým spreadem equity tranší vytváří značné zisky z kupónů v počátku. V dalších letech postupně končí splatnost jednotlivých aktiv a zisky z portfolia velmi brzy vystačí jen na kupón nejvyšší tranše A a tranše B. Z kupónů mají tedy střední tranše relativně nízký zisk v průběhu života CLO, narozdíl od equity tranší, které mají zisk alespoň v prvních letech. Při výplatě nominální hodnoty na konci života CLO je drtivé množství prostředků použito na splacení tranše A a B, takže na střední tranše mnoho nezůstane.

V našem případě, kdy je nedostatek příjmů z portfolia, také odložené kupóny zvýhodňují equity tranše, neboť v případě, že nastane období, kdy na kupón equity tranší nezbydou prostředky, ale v následujícím období je prostředků dostatek, vyplatíme equity tranším vysoký kupón místo toho, aby se přebytky uložily na rezervní účet pro pozdější využití ve prospěch nadřazených tranší. To, zda a za jakých konkrétních podmínek budou odložené kupóny vypláceny, je otázkou jejich definice v právním dokumentu k danému derivátu. Také je patrné, že největší směrodatnou odchylku má tranše B, což souvisí s výše popsány faktky. Pokud by žádný default v portfoliu nenastal, byla by tranše B zisková, ale při různém rozsahu defaultů v portfoliu bude právě tato tranše absorbovat tyto různorodé ztráty. Na ostatní tranše nevystačí prostředky ani v případě bez defaultů. Za běžných podmínek, tj. pokud oceňujeme CDO, které je na počátku života a hodnota portfolia nemá sestupnou tendenci, by tyto ztráty absorbovaly equity tranše. Seřazené simulace při použití základním algoritmu s a bez vyplácení odložených kupónů jsou vykresleny v následujících grafech.



Obrázek 3.3: Seřazené simulace při základním algoritmu s vyplácením odložených kupónů



Obrázek 3.4: Seřazené simulace při základním algoritmu bez vyplácení odložených kupónů

3.3.1 Změna kopula funkce

Jedním z našich cílů je vyzkoumat závislost hodnoty jednotlivých tranší na změně kopula funkce. Kromě již zmíněné gaussovské kopuly vypočteme požadované hodnoty při použití T-kopul s T-rozdělením o 88, 87 a 86 stupních volnosti, což při počtu společností $n = 88$ odpovídá n , $n - 1$ a $n - 2$. Výsledky jsou zachyceny v tabulce 3.8.

Tabulka 3.8: Hodnoty tranší v procentech při základním algoritmu s různými kopulami

Tranše	Gauss. kopula		T-kopula (88)		T-kopula (87)		T-kopula (86)	
	E[PV]	σ [PV]	E[PV]	σ [PV]	E[PV]	σ [PV]	E[PV]	σ [PV]
A	99,75	3,61	99,67	3,95	99,68	3,89	99,70	3,99
B	70,58	32,69	69,11	32,77	69,90	32,85	69,31	32,91
C1	38,39	12,94	37,74	12,73	38,07	12,97	37,93	12,88
C2	27,42	2,82	27,32	2,94	27,31	3,08	27,35	3,06
D	29,63	2,62	29,54	2,97	29,57	2,89	29,55	2,95
E1	49,94	5,94	49,71	6,36	49,83	6,25	49,86	6,25
E2	47,93	5,94	47,71	6,69	47,79	6,19	47,82	6,21

Z těchto hodnot můžeme usoudit, že se ocenění tranší při takové volbě kopula funkcí příliš neliší. Ceny tranší jsou při gaussovské kopule vyšší než u T-kopul, ale jen nepatrně. Směrodatné odchylky se pohybují ve všech čtyřech případech také na přibližně stejné úrovni.

3.3.2 Změna korelační struktury

Nyní se zaměříme na to, jak závisí cena tranší na změně předpokladů o korelaci uvnitř portfolia. Budeme předpokládat, že $outer = 0,75 \times inner$, a pro různě volené hodnoty $inner \geq 0$ spočteme hodnoty jednotlivých tranší. Pro hodnoty $inner < 0$ není korelační matice pozitivně semidefinitní, takže generování dob do defaultu pomocí kopula funkce není možné. Předpoklad záporné korelace ve všech odvětvích i mezi všemi odvětvími je značně vzdálený realitě, a proto pro nás toto omezení není nijak zásadní.

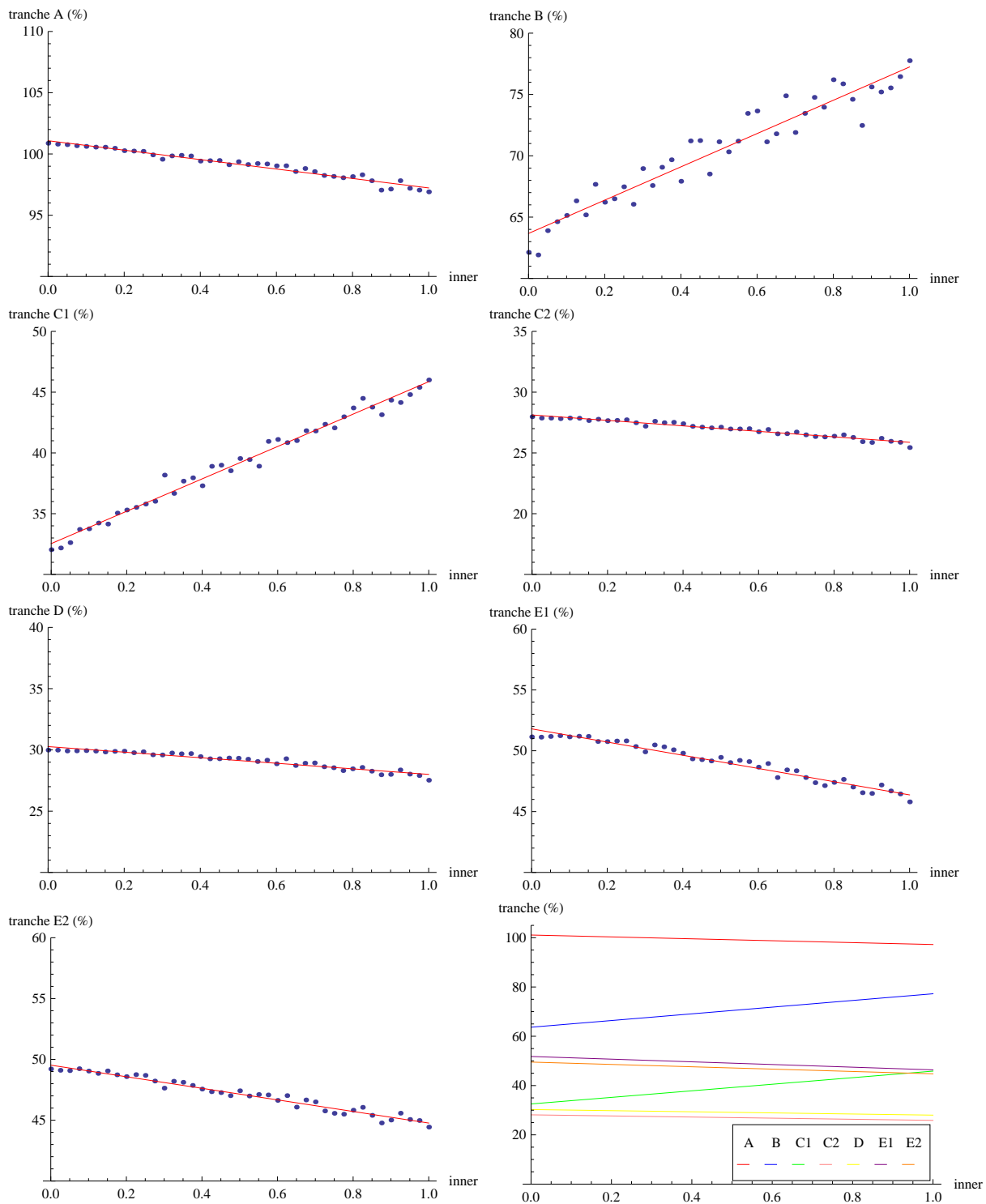
V základním algoritmu budeme volit hodnoty od 0 do 1 po intervalech 0,025, přičemž výpočty budeme z důvodu časové náročnosti provádět pro 1000 simulací, což je dostačující pro vysledování závislosti. Vzhledem k tomu, že pro hodnotu 1 korelační matice také není pozitivně semidefinitní, je nutno 1 nahradit např. 0,999999. Tabulky 3.9 a 3.10 obsahují výsledné ceny a směrodatné odchylky u jednotlivých tranší a v souboru grafů 3.3.2 je závislost cen na korelaci názorně vyobrazena. Daty jsme vždy proložili přímkou získanou lineární regresí. Souhrnně jsou tyto přímkou pro všechny tranše vykresleny v posledním ze souboru grafů.

Tabulka 3.9: Hodnoty E[PV] pro různě volené korelace *inner*

<i>inner</i>	A	B	C1	C2	D	E1	E2
0,000	100,88	62,13	32,04	27,98	29,99	51,14	49,21
0,025	100,80	61,92	32,18	27,86	29,98	51,12	49,10
0,050	100,76	63,90	32,62	27,86	29,91	51,18	49,08
0,075	100,67	64,63	33,70	27,82	29,92	51,24	49,23
0,100	100,62	65,14	33,76	27,87	29,94	51,14	49,04
0,125	100,56	66,32	34,23	27,85	29,90	51,19	48,85
0,150	100,55	65,18	34,15	27,66	29,83	51,18	49,05
0,175	100,47	67,67	35,05	27,77	29,88	50,76	48,73
0,200	100,27	66,21	35,30	27,66	29,90	50,75	48,58
0,225	100,24	66,49	35,52	27,68	29,77	50,80	48,75
0,250	100,22	67,47	35,79	27,73	29,85	50,81	48,69
0,275	99,93	66,05	36,02	27,48	29,60	50,35	48,22
0,300	99,57	68,96	38,17	27,20	29,59	49,91	47,64
0,325	99,84	67,58	36,67	27,60	29,75	50,48	48,20
0,350	99,89	69,07	37,68	27,49	29,68	50,32	48,11
0,375	99,84	69,68	37,95	27,52	29,70	50,08	47,86
0,400	99,42	67,92	37,30	27,40	29,45	49,80	47,56
0,425	99,45	71,21	38,90	27,19	29,27	49,33	47,34
0,450	99,47	71,24	38,99	27,12	29,28	49,27	47,27
0,475	99,12	68,51	38,53	27,06	29,34	49,16	47,02
0,500	99,37	71,14	39,54	27,12	29,32	49,46	47,42
0,525	99,14	70,32	39,45	26,97	29,24	49,03	46,99
0,550	99,22	71,20	38,91	26,97	29,05	49,21	47,11
0,575	99,19	73,46	40,95	26,99	29,16	49,11	47,08
0,600	99,03	73,66	41,11	26,74	28,87	48,65	46,63
0,625	99,04	71,14	40,85	26,93	29,28	48,95	47,02
0,650	98,57	71,79	41,01	26,57	28,73	47,80	46,08
0,675	98,81	74,89	41,83	26,58	28,91	48,43	46,66
0,700	98,56	71,90	41,80	26,72	28,94	48,36	46,50
0,725	98,25	73,46	42,36	26,49	28,62	47,80	45,76
0,750	98,17	74,76	42,06	26,35	28,55	47,37	45,57
0,775	98,06	73,96	42,97	26,32	28,31	47,13	45,50
0,800	98,15	76,20	43,70	26,38	28,46	47,40	45,82
0,825	98,30	75,87	44,49	26,49	28,57	47,65	46,06
0,850	97,82	74,61	43,77	26,28	28,26	47,02	45,40
0,875	97,05	72,47	43,14	25,93	27,97	46,55	44,77
0,900	97,14	75,61	44,34	25,86	28,00	46,49	45,01
0,925	97,82	75,20	44,15	26,20	28,36	47,18	45,58
0,950	97,20	75,54	44,80	25,96	28,02	46,69	45,06
0,975	97,05	76,46	45,39	25,87	27,91	46,45	44,98
1,000	96,91	77,75	46,00	25,44	27,53	45,80	44,44

Tabulka 3.10: Hodnoty σ [PV] pro různě volené korelace *inner*

<i>inner</i>	A	B	C1	C2	D	E1	E2
0,000	0,85	26,60	4,87	2,60	1,74	3,64	2,85
0,025	0,97	27,32	5,04	2,64	1,79	3,57	2,61
0,050	1,14	27,98	6,17	2,60	1,65	3,55	2,69
0,075	1,32	28,84	8,14	2,68	1,85	3,72	2,81
0,100	1,46	29,41	7,95	2,55	1,81	3,68	3,10
0,125	1,61	30,14	8,53	2,61	1,75	3,66	2,95
0,150	1,63	29,57	8,65	2,64	1,67	3,85	3,07
0,175	1,84	30,78	9,61	2,52	1,68	3,64	3,25
0,200	2,25	30,95	10,30	2,55	1,82	3,80	3,57
0,225	2,30	31,58	10,07	2,47	1,76	3,80	3,50
0,250	2,34	31,39	10,19	2,54	1,72	3,79	3,37
0,275	3,34	32,45	11,21	3,22	2,94	5,74	5,33
0,300	3,79	33,19	13,44	2,93	2,64	5,81	6,29
0,325	3,23	32,33	11,58	2,62	2,12	4,98	5,11
0,350	3,14	32,49	12,33	2,58	2,06	5,21	5,57
0,375	3,30	32,69	12,60	2,76	2,17	5,01	5,49
0,400	3,94	33,37	12,27	2,77	3,02	6,20	6,51
0,425	4,89	32,95	13,82	3,27	3,58	7,31	7,32
0,450	4,66	33,09	13,67	3,32	3,92	8,00	7,82
0,475	5,07	33,97	13,63	3,46	3,42	7,48	7,95
0,500	4,74	33,59	14,25	3,51	3,57	7,25	7,44
0,525	5,54	33,51	14,40	3,49	3,78	7,52	7,77
0,550	5,61	33,43	13,93	3,70	4,09	7,89	8,05
0,575	5,84	33,50	14,87	3,73	3,91	7,72	8,31
0,600	6,09	33,80	15,37	4,05	4,53	8,54	8,66
0,625	5,46	34,01	15,13	3,69	3,93	7,46	8,03
0,650	6,90	34,55	15,68	4,36	4,97	9,82	9,96
0,675	7,24	33,72	15,92	4,36	4,59	8,72	8,80
0,700	7,53	34,63	16,09	4,06	4,31	8,38	8,75
0,725	7,71	34,66	16,60	4,42	5,05	9,89	10,42
0,750	8,42	34,39	16,46	4,86	5,35	10,21	10,42
0,775	7,84	34,96	16,93	4,65	5,28	10,21	10,63
0,800	8,84	34,12	16,80	4,51	5,20	9,77	10,00
0,825	8,76	34,13	17,01	4,35	4,90	9,49	9,71
0,850	9,55	34,89	17,32	4,64	5,47	10,42	10,61
0,875	10,70	35,90	17,67	5,13	6,10	11,29	11,45
0,900	11,04	35,31	17,68	5,24	6,00	11,31	11,61
0,925	9,57	34,90	17,43	4,74	5,19	9,78	9,92
0,950	11,14	35,23	18,20	5,29	5,78	11,07	11,18
0,975	11,70	35,55	18,16	5,33	6,02	10,97	11,05
1,000	11,91	35,36	18,58	5,76	6,30	11,41	11,67



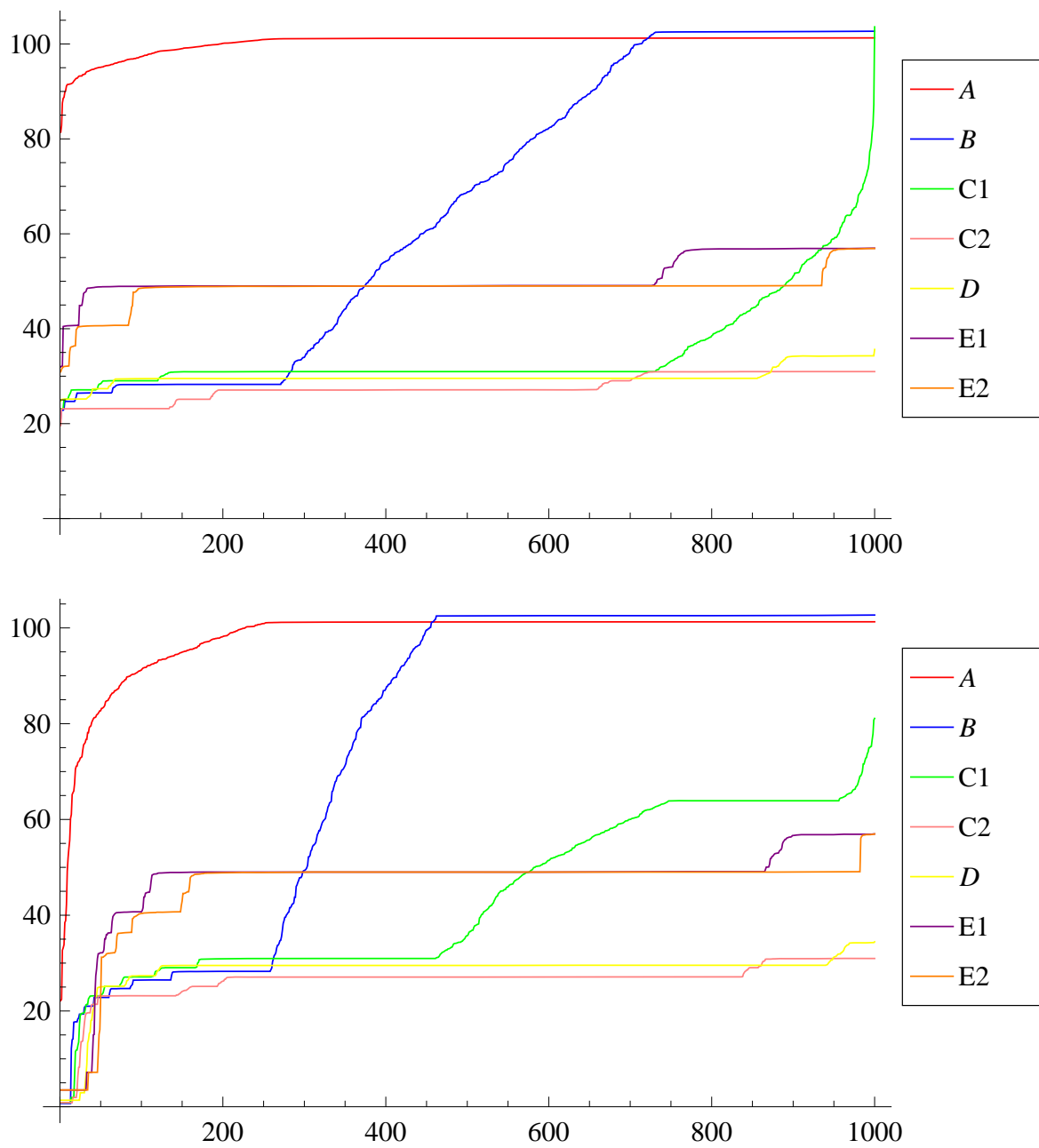
Obrázek 3.5: Grafy závislosti hodnoty tranší na změně korelace *inner*

Z výsledných dat je zřejmé, že korelace ovlivňuje ceny jednotlivých tranší různě, ale rozhodně ne zanedbatelně. Zatímco tranše B a C1 mají s rostoucí korelací cenu vyšší, ostatní tranše naopak při rostoucí korelaci uvnitř podkladového portfolia na ceně ztrácejí. K vysvětlení nám pomůže podívat se na počty defaultů N_{def} při takto volených korelacích. Z následující tabulky 3.11 vidíme, že střední počet defaultů $E[N_{def}]$ se pohybuje ve všech případech okolo 50-ti defaultů v portfoliu. Co se však významně s rostoucí korelací zvyšuje, je směrodatná odchylka počtu defaultů $\sigma[N_{def}]$ vypočtená z jednotlivých simulací. Můžeme tedy říci, že čím větší je korelace defaultů uvnitř portfolia, tím extrémnější situace mohou nastat, což např. pro hodnotu $inner = 1$ znamená, že buď v daném odvětví dojde k defaultu u všech společností nebo u žádných.

Tabulka 3.11: Charakteristiky počtu defaultů v portfoliu při různě volené korelaci $inner$

$inner$	$E[N_{def}]$	$\sigma[N_{def}]$	$inner$	$E[N_{def}]$	$\sigma[N_{def}]$	$inner$	$E[N_{def}]$	$\sigma[N_{def}]$
0,000	49,65	18,19	0,350	49,17	40,67	0,700	50,77	57,29
0,025	50,98	19,90	0,375	49,06	41,85	0,725	51,73	61,96
0,050	49,72	22,66	0,400	52,84	44,67	0,750	49,37	60,59
0,075	49,22	24,51	0,425	48,79	47,08	0,775	51,37	63,38
0,100	49,44	26,42	0,450	49,04	47,42	0,800	47,60	61,85
0,125	49,63	27,65	0,475	53,57	50,16	0,825	46,35	60,84
0,150	48,25	29,37	0,500	49,16	49,79	0,850	50,08	64,41
0,175	47,52	29,64	0,525	51,00	51,10	0,875	55,25	69,72
0,200	50,38	33,41	0,550	50,13	50,18	0,900	49,80	69,10
0,225	49,36	33,79	0,575	47,33	51,20	0,925	49,40	65,35
0,250	49,81	35,40	0,600	47,88	53,19	0,950	51,15	69,45
0,275	51,87	38,37	0,625	49,73	51,91	0,975	49,73	70,87
0,300	51,79	46,04	0,650	50,99	57,83	1,000	46,81	71,02
0,325	51,27	39,97	0,675	46,70	55,30			

Vysvětlíme si vliv rozdílné korelace na případech s hodnotami $inner$ 0,2 a 0,8. Zmiňovali jsme se již dříve, že díky tomu, že v portfoliu i bez defaultů není dostatek prostředků pro všechny tranše, mohou být defaulty výrazně ovlivněny pouze tři nejvyšší tranše. Při vyšší korelaci je vyšší výskyt extrémních případů, což u tranše B má za následek, že bude ve větším množství případů zisková, a u tranše C1, že častěji dosáhne své maximální možné ceny, tedy ceny limitované množstvím dostupných prostředků. Převažují u nich tedy vysoké extrémy nad těmi nízkými. U tranše A, která byla při nižší korelaci defaulty zasažena jen ve velmi málo simulacích, extrémní případy způsobí, že i u této tranše nastanou v jistých případech velké ztráty. Ostatní tranše mají také s rostoucí korelací větší výskyt extrémně nízkých hodnot, které nemohou být vyváženy vysokými extrémy díky již zmíněné limitovanosti prostředků z podkladového portfolia. Velmi názorně to můžeme vidět na grafu seřazených simulací 3.3.2.



Obrázek 3.6: Seřazené simulace při korelaci $inner = 0,2$ (nahore) a $inner = 0,8$ (dole)

3.3.3 Změna míry výtěžnosti

Posledním faktorem, jehož vliv na cenu tranší budeme zkoumat, je míra výtěžnosti. Budeme stále předpokládat, že jde o náhodnou veličinu s Beta rozdělením, ale parametry a a b , resp. střední hodnotu μ_R a směrodatnou odchylku σ_R , budeme volit různé. Opět použijeme pro každý případ 1000 simulací, což pro základní představu o závislosti postačí. Výsledné hodnoty pro jednotlivé volby zachycuje tabulka 3.12.

Tabulka 3.12: Ocenění tranší pro různě volené parametry míry výtěžnosti

Střední současná hodnota tranší E[PV]								
μ_R	σ_R	A	B	C1	C2	D	E1	E2
0,6	0,1	99,53	68,71	37,61	27,23	29,57	49,87	47,65
0,6	0,2	99,71	68,46	37,81	27,29	29,49	49,59	47,73
0,6	0,3	99,57	68,96	38,17	27,20	29,59	49,91	47,64
0,6	0,4	99,74	70,04	38,24	27,38	29,64	49,72	47,64
0,7	0,3	100,56	80,42	42,35	27,55	29,65	49,60	47,61
0,5	0,3	98,67	62,66	36,53	26,99	29,47	49,66	47,94
0,4	0,3	97,11	55,81	34,14	26,58	29,28	49,74	47,78
0,3	0,3	95,23	51,43	33,26	26,36	29,18	49,64	47,97

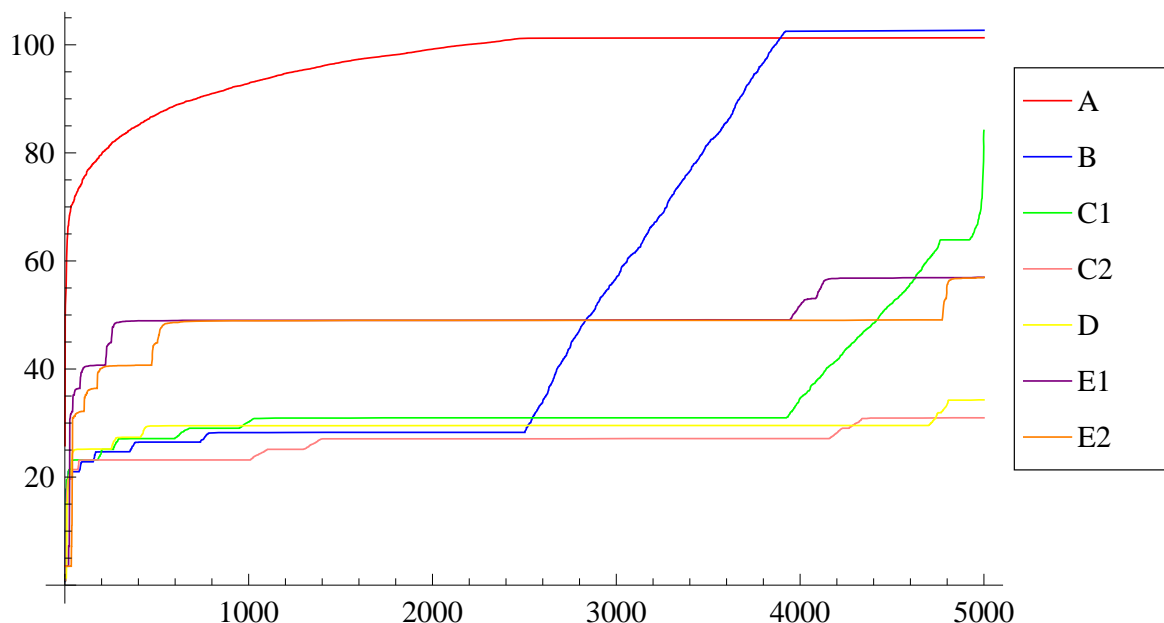
Směrodatná odchylka současné hodnoty tranší σ [PV]								
μ_R	σ_R	A	B	C1	C2	D	E1	E2
0,6	0,1	3,83	33,32	12,74	2,87	2,66	5,93	6,29
0,6	0,2	3,74	32,79	12,72	2,97	2,99	6,30	6,41
0,6	0,3	3,79	33,19	13,44	2,93	2,64	5,81	6,29
0,6	0,4	3,80	32,69	13,41	2,84	3,01	6,79	6,67
0,7	0,3	2,46	29,56	15,14	2,90	3,09	6,49	6,79
0,5	0,3	5,15	33,67	11,78	2,68	2,61	5,86	5,65
0,4	0,3	7,00	32,57	9,91	2,68	2,35	5,32	5,39
0,3	0,3	9,07	31,76	9,29	2,52	2,02	5,24	5,13

Je patrné, že změna směrodatné odchylky míry výtěžnosti σ_R při stejné střední hodnotě μ_R nemá na ocenění tranší výrazný vliv. Totéž však nelze říci o změně střední hodnoty μ_R při konstantní hodnotě σ_R . Nejvýrazněji jsou touto změnou ovlivněny opět nejvyšší tři tranše. Je logické, že při nižší výtěžnosti je k dispozici méně prostředků k přerozdelení jednotlivým tranším, a tudíž jsou nižší i ceny tranší. Musíme však poznamenat, že změna předpokladů míry výtěžnosti může mít na cenu tranše vliv v řádu až desítek procent, jako to pozorujeme např. u tranše B.

3.3.4 Porovnání ocenění s tržní cenou

Jak jsme již v této části uvedli, známe tržní kotaci tranší B 57% a C1 24%, které investor vlastní, k říjnu 2009. Oceněním základním algoritmem, tj. při použití gaussovské kopuly s korelací $inner = 0,4$ a míry výtěžnosti se střední hodnotou $\mu_R = 0,6$ a směrodatnou odchylkou $\sigma_R = 0,3$, však získáme ceny tranší vyšší, a to cenu tranše B 71% a tranše C1 38%. Tržní cena tranší CLO může být zvláště v období spojeném s finanční krizí značně ovlivněna negativním postojem investorů k těmto derivátům. Toto očekávání tedy může tlačit tržní cenu derivátu k velmi nízkým hodnotám.

Pokud bychom přijali předpoklad nižší míry výtěžnosti a zvolili bychom $\mu_R = 0,4$, pro 5000 simulací bude cena tranše B 55% přibližně odpovídat své tržní kotaci, avšak cena tranše C1 34% bude stále výrazně nad tržní kotací. Seřazené simulace pro tento případ jsou zachyceny v grafu 3.3.4.



Obrázek 3.7: Seřazené simulace při $inner = 0,4$, $\mu_R = 0,4$ a $\sigma_R = 0,3$

Na můžeme také poznamenat, že ve více než 20-ti procentech výše znázorněných simulací je tranše B zisková, ovšem tranše C1 díky nedostatku prostředků z portfolia zisková nikdy být nemůže. To však nic nemění na faktu, že výrazně ztrátové scénáře převažují, což má za následek takto nízké ceny obou tranší. Tranše C1 je dle našich výpočtů hodnotnější, než je její tržní kotace, což můžeme vysvětlit očekáváním investorů, že ztrátovost této tranše je zvláště s uvažováním vlivu finanční krize předpokládána ještě výraznější.

Závěr

Shrňme si na závěr samotný postup ocenění a prodiskutujeme výsledky empirické studie. Ocenění derivátu typu ABS je založeno na modelování peněžních toků plynoucích z podkladového portfolia a na jejich následném přerozdělení do dluhových tranší. Jistinné a úrokové výnosy z portfolia jsou ovlivněny událostmi defaultu, přičemž předpokládáme jejich korelovanost a modelujeme ji pomocí kopula funkcí. K následnému přerozdělení těchto výnosů do tranší dochází na základě finančního vodopádu, který zahrnuje také vyhodnocování testů pokrytí a v případě jejich nesplnění dochází k předčasnému splácení části nominální hodnoty tranší podle seniority. Peněžní toky plynoucí ve prospěch jednotlivých tranší jsou diskontovány bezrizikovou úrokovou mírou a poměřovány k nominální hodnotě tranší. Střední hodnoty a směrodatné odchylky těchto hodnot spočtené na základě Monte Carlo simulací dávají základní výsledek ocenění.

Samotná empirická studie založená na ocenění existujícího CLO ukazuje, jak mohou být námi vypočtené ceny tranší různé v závislosti na volených předpokladech. Výrazný vliv na rozsah defaultů v portfoliu a následně i na hodnoty tranší má předpoklad korelace mezi aktivy. Zjistili jsme, že s rostoucí korelací se zvyšuje množství scénářů, kdy střední tranše B a C1 dosahují zisku resp. vysoké hodnoty. Na tyto tranše má dopad změny předpokladů obecně nejvyšší vliv, neboť množství prostředků vystačí pouze do jejich úrovně i bez událostí defaultů v portfoliu. Stěžejní je také závislost ocenění na změně míry výtěžnosti, kdy se hodnoty všech tranší přímo úměrně snižují s klesající střední hodnotou míry výtěžnosti, kterou modelujeme Beta rozdělením.

Porovnáním výsledných cen tranší B a C1 s jejich tržní kotací jsme zjistili, že pro námi uvažovaný základní algoritmus vychází ocenění znatelně vyšší než kotované tržní hodnoty. Nelze jednoznačně určit, zda můžeme tento výsledek přisuzovat podhodnocenosti tranší na trhu či zda jsme zvolili pro ocenění nevhodné předpoklady. Zdrojů nejistoty při oceňování takto složitých instrumentů je mnoho a jejich vliv rozhodně není zanedbatelný. Na druhou stranu i očekávání investorů na trhu kreditních derivátů se s nástupem finanční krize v roce 2007 značně změnila. Ocenění derivátů typu ABS zcela jistě vyžaduje pečlivé zvážení přijatých předpokladů a postupů, neboť případné ztráty mohou nabývat kritických rozměrů. To by měli mít investoři do těchto instrumentů vždy na paměti.

Literatura

- [1] Bluhm Ch., Overbeck L., Wagner Ch.: An Introduction to Credit Risk Modeling. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2002.
- [2] Dvořáková J.: Finanční analýza struktur CDO, Diplomová práce MFF UK, 2007.
- [3] Hull, J.: Option, Futures and Other Derivative Securities, Fifth Edition, Prentice Hall Inc., New Jersey, 2002.
- [4] Jež, B.: Oceňování dluhopisů zajištěných aktivy, Diplomová práce MFF UK, 2003.
- [5] Schmid B.: Credit Risk Pricing Models (Theory and Practice), Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [6] Schönbucher, Philipp J.: Credit Derivatives Pricing Models (Models, Pricing and Implementation), Wiley Finance, Chichester, 2003.
- [7] Witzany, J.: Credit Risk Management and Modeling, VŠE Oeconomica, 2010.
- [8] <http://www.dtcc.com>
- [9] <http://www.iosco.org>
- [10] <http://www.isda.org>
- [11] <http://www.moodys.com>
- [12] <http://www.occ.treas.gov>
- [13] <http://www.patriaplus.cz>
- [14] <http://www.sec.gov>
- [15] <http://www.sifma.org>
- [16] <https://www.theice.com>
- [17] <http://finance.yahoo.com>