Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Lukáš Jirovský

Teorie grafů ve výuce na střední škole

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

Studijní program: Matematika, Učitelství pro střední školy M-I

2010

Chtěl bych poděkovat RNDr. Pavle Pavlíkové, Ph.D., za pomoc při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 23. července 2010 Lukáš Jirovský

Název práce: Teorie grafů ve výuce na střední škole

Autor: Lukáš Jirovský

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

E-mail vedoucího: pavla.pavlikova@vscht.cz

Abstrakt: Úkolem této diplomové práce je vytvořit interaktivní webové stránky zaměřené na vybrané problémy teorie grafů (např. hledání kostry grafu, problematika toků v sítích, význam jádra grafu v teorii her atd.) a možnosti jejich využití (např. v rámci motivace při výuce matematiky a informatiky). Vytvořený učební materiál bude použitelný nejen pro zpestření a doplnění výuky na střední škole (teorie grafů dosud není součástí standardního učiva gymnázií a středních odborných škol), ale i pro samostudium. Důraz je v práci kladen na široké spektrum úloh a řešených příkladů vhodných na procvičení a upevnění/osvojení základních pojmů a myšlenek teorie grafů.

Klíčová slova: teorie grafů, kostra grafu, barvení mapy, toky v sítích, teorie her

Title: Graph theory at high school teaching

Author: Lukáš Jirovský

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

Supervisor's e-mail adress: pavla.pavlikova@vscht.cz

Abstract: The task of this thesis is to create an interactive website focusing on some problems of graph theory and the possibility to use them to model a variety of situations (for example as a motivation in the lessons of mathematics and computer science). The created instructional material will be applicable for high school teaching as good as for self-study.

The thesis is mostly focused on a wide range of tasks, problems and fully-worked solutions and the basic terms and ideas from graph theory.

Keywords: Graph Theory, Spanning Tree, Map Colouring, Flow Network, Game Theory

1. Úvod

Tato diplomová práce navazuje na mou bakalářskou práci [14], kterou jsem obhájil v září 2008 na MFF UK v Praze – internetové stránky, které poskytují studentům úvod do teorie grafů a ukazují nejznámější problémy teorie grafů spolu s jejich řešeními a praktickým využitím. Stránky, které jsou především určeny pro studenty středních škol, mohou být rovněž využívány jako doplňková literatura při studiu na vysokých školách a při samostudiu – převážně slouží pro vysvětlení základních pojmů z teorie grafů. Ačkoliv teorie grafů nepatří mezi standardní učivo v matematice na středních školách, často může studentům poskytnout jiný pohled na řešení úloh. Grafy jako množiny bodů a spojů mezi nimi jsou také významně používány v programování.

Práce přináší jak náročnější problémy (například hledání maximálního toku v síti či jádra grafu), tak i množství jednoduchých příkladů, které stejně jako v bakalářské práci ukazují široké možnosti využití teorie grafů ve středoškolských úlohách (například úloha o převozníkovi či tvorba optimálního rozvrhu).

Vzhledem k provázanosti s bakalářskou prací (množství interaktivních odkazů) tato diplomová práce zachovává původní rozdělení kapitol a také číslování obrázků, zdrojů a odkazů – ve výsledku tak tvoří s bakalářskou prací jedny webové stránky, ve kterých může čtenář plynule přecházet mezi oběma částmi. Barevnou lištou v horní části stránky jsou odlišeny části pocházející z bakalářské práce (modrá lišta) a části nové (fialová).

Textová verze diplomové práce, kterou držíte v ruce, obsahuje pouze nové pojmy a problémy spolu s drobným komentářem k částem textu již obsaženým v bakalářské práci.

Práci ve formě webových stránek naleznete na přiloženém CD.

Náhled úvodní stránky webové verze práce

Autor

Obsah

2. Základní pojmy

V této části práce nalezne čtenář vysvětlený pouze jeden nový pojem – jádro grafu.

Všechny základní pojmy teorie grafů již byly vysvětleny v bakalářské práci (viz úvod), čtenář tak všechny dříve definované pojmy najde v bakalářské práci [14], případně na přiloženém CD. Podobně zde také najde úvod k teorii grafů a informace o historii tohoto oboru.

Jedná se o tyto oblasti:

- Úplný graf
- Bipartitní graf
- Podgraf
- Isomorfismus
- Cesta
- Souvislost
- Kružnice
- Stupně vrcholů
- Skóre grafu
- Matematická reprezentace grafu
- Reprezentace grafu v počítači
- Orientované grafy
- Vzdálenost
- Metrika
- Stromy
- Kostra grafu

Jádro grafu

Jádro grafu je speciální **podgraf** splňující určité podmínky (viz následující definice), který hledáme u **orientovaných grafů**. Využívá se často v **teorii her**.

Definice

> Nechť $G = (V,E)$ je **orientovaný graf**. Množinou $W \subseteq V$ (tedy podmnožinu množiny vrcholů) nazveme jádrem grafu G, jestliže platí následující dvě podmínky:
> 1. Je-li $(u_0, u_1) \in E$ a $u_0 \in W$, pak $u_1 \notin W$.
> 2. Jestliže $u_0 \notin W$, pak existuje $u_1 \in W$ tak, že $(u_0, u_1) \in$ E.

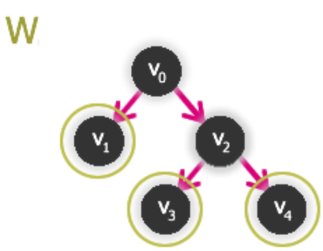
Je jádro grafu souvislým grafem podle definice (podobně jako kostra grafu)?

Není. Podle definice jádro neobsahuje žádné hrany, graf tedy nemůže být souvislý.

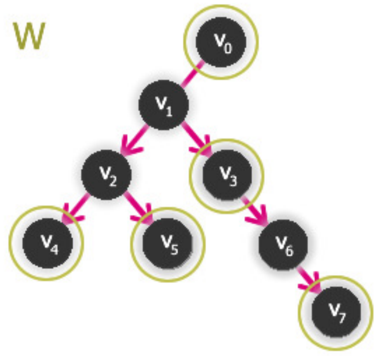
Pokuste se podmínky 1. a 2. z definice popsat slovy bez použití matematické symboliky.

1. Máme-li hranu vycházející z vrcholu, který je v jádru grafu, pak vrchol, do kterého daná hrana směřuje, v jádru grafu není.
2. Pokud nějaký vrchol u_0 v jádru není, potom existuje vrchol, který v jádru je, a do kterého vede hrana z u_0 (z každého vrcholu, který není v jádru, vede hrana do nějakého vrcholu v jádru).

Příklady



Obr. č. 2.31 - Příklad jádra grafu (množina W skládající se z bodů v_1, v_3, v_4)



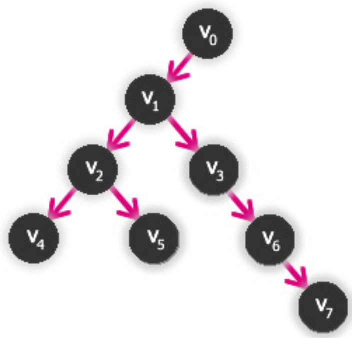
Obr. č. 2.32 - Příklad jádra grafu (množina W skládající se z bodů v_0, v_3, v_4, v_5, v_7)

Poznámky

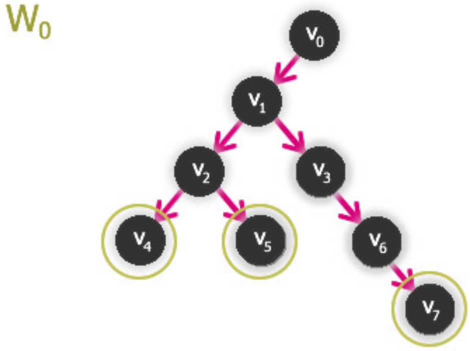
Pro každý orientovaný acyklický graf existuje jednoznačně určené jádro. Důkaz této věty slouží také jako návod, jak jádro najít - viz konstrukce.

Konstrukce

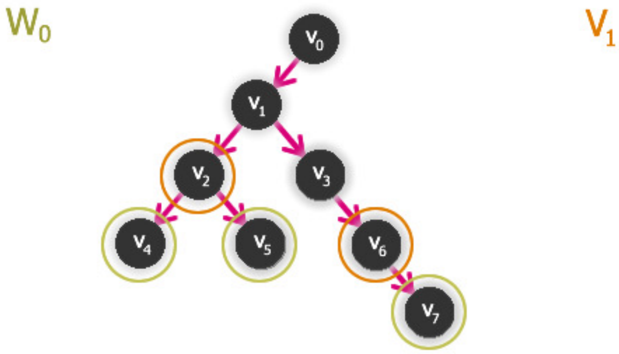
Mějme následující orientovaný graf G, ke kterému hledáme jádro.



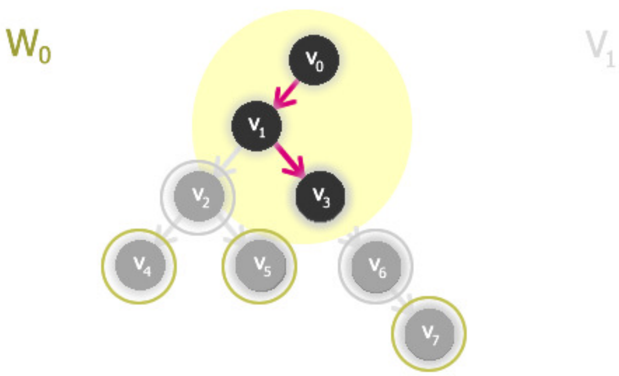
1. Označíme jako W_0 množinu vrcholů, které **nejsou počátečním vrcholem** žádné hrany. W_0 bude počátek hledaného jádra.



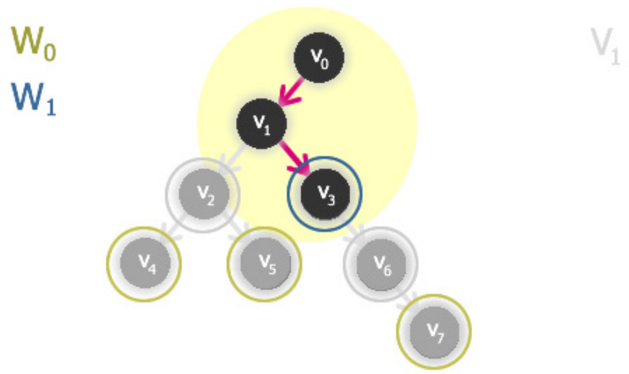
2. Množinu vrcholů, ze kterých směřují hrany do **vrcholů ve** W_0, označíme V_1. Pozor: množina V_1 **není** součástí jádra.

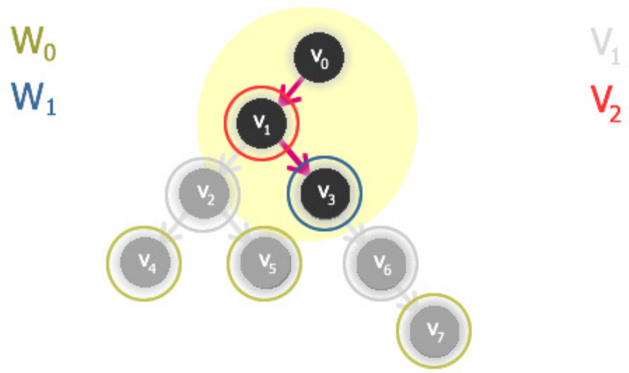


3. Nyní si zkontrolujeme, zda "nám nezbyly nějaké vrcholy" - tedy zda graf $G \setminus (V_1 \cup W_0)$ je prázdná množina. Pokud ano, našli jsme jádro původního grafu. Vidíme však, že nám ještě zbývají vrcholy v_0, v_1, v_3. Tyto zbývající vrcholy (i s hranami) si označíme jako graf G', indukovaný podgraf grafu G.

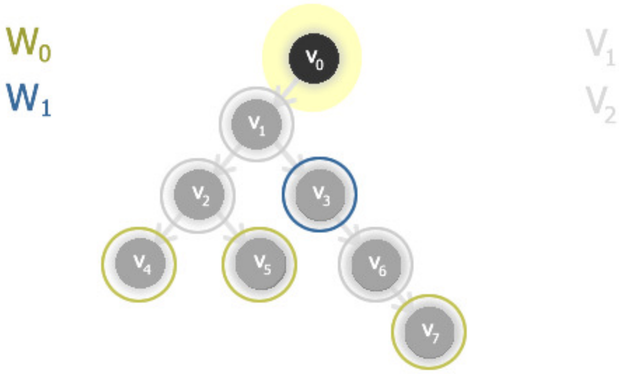


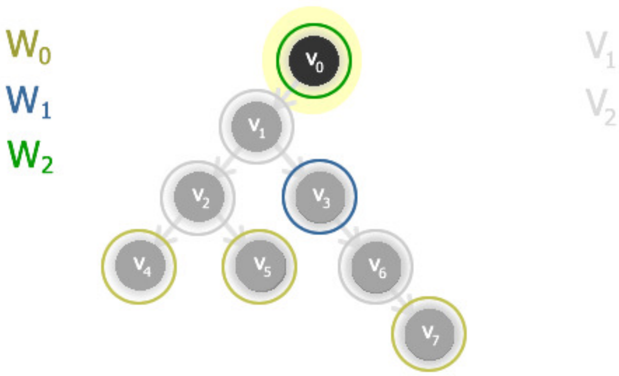
4. Stejně vyřešíme problém pro graf G' a výsledek (jádro G') připojíme k W_0. Hledaným výsledkem - jádrem grafu G bude množina vrcholů množiny W_0 doplněná o jádro G'. Pokud ani tak nenalezneme řešení (opět nám "zbudou" vrcholy), pokračujeme stále **rekurzivně** až do vyřešení celé úlohy (vytvoříme indukovaný podgraf, nalezneme jeho jádro a jeho vrcholy připojíme k předchozímu jádru).



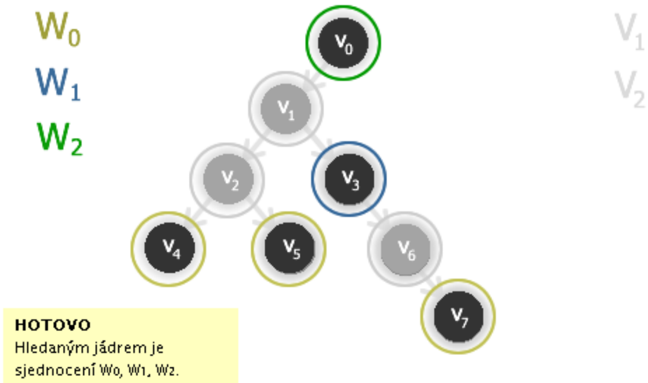


V našem konkrétním příkladě tato situace nastane u vrcholu v_0. Ten je sám o sobě podgrafem G'', je jediný koncový vrchol, jádrem grafu G'' je tedy vrchol v_0 (resp. množina W_2 obsahující pouze v_0).





Vrchol v_0 přidáme k výsledku pro graf G' (bez grafu G'') - vrcholu v_3 a tyto dva vrcholy připojíme k nalezenému jádru G bez G' - vrcholům v_4, v_5 a v_7. Výsledek: jádrem grafu G je sjednocení množin W_0, W_1 a W_2, tedy množina vrcholů $\{v_0, v_3, v_4, v_5, v_7\}$.

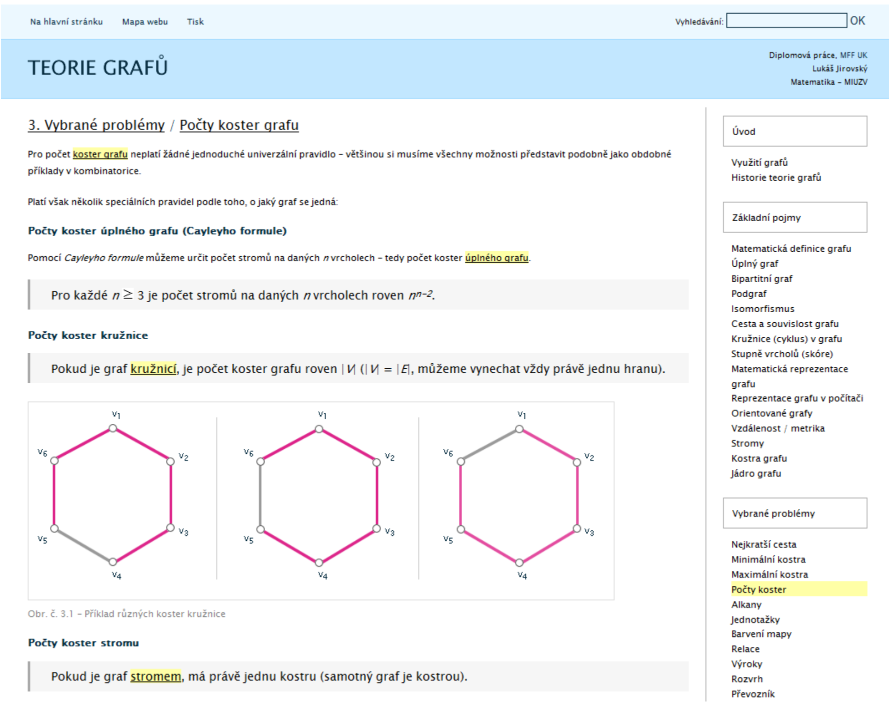


3. Vybrané problémy

V bakalářské práci [14] naleznete tato témata:

- Hledání nejkratší cesty
- Hledání minimální kostry
- Počty koster v grafu
- Alkany
- Jednotažky (eulerovské grafy)

Téma „Barvení mapy“ pochází také z bakalářské práce, ovšem v této práci je uvedeno ve zkrácené formě, protože na něj navazuje několik dalších úloh (např. Výroky). Původní text v celém rozsahu naleznete také na přiloženém CD.



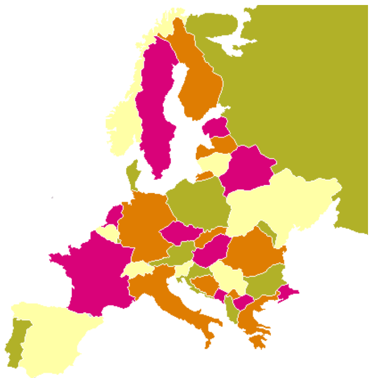
Náhled stránky „Počty koster“ z bakalářské práce

Barvení mapy

Úvod

Pomocí teorie grafů lze dokázat, že pro obarvení libovolné mapy tak, aby dvě sousední země nebyly obarveny stejnou barvou, nám postačí čtyři barvy.

Příklad mapy obarvené čtyřmi barvami

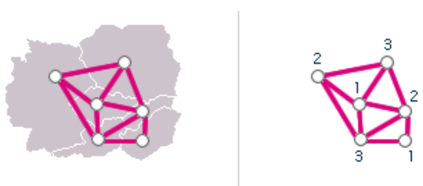


Obr. č. 3.7 - Politická mapa obarvená čtyřmi barvami (viz [7])

Spojitost s teorií grafů

Pro řešení tohoto problému použijeme podobný princip jako u Eulerovy úlohy - každý stát si představíme jako vrchol grafu a hranou spojíme státy, které spolu sousedí. Místo obarvení si také můžeme představit dosazování čísel k vrcholům. Díky tomu lze také formulovat problém matematicky (následuje).

Poznámka: Barvení grafu se řeší pro souvislé grafy, proto jsme z mapy vymazali ostrovy (např. Velkou Británii).



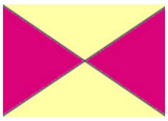
Obr. č. 3.8 - Spojitost mezi barvením mapy a grafem, který této mapě odpovídá

Zadání matematicky

> Nechť $G = (V,E)$ je graf, k přirozené číslo. Zobrazení b: $V \rightarrow \{1,2,...,k\}$
> nazveme **obarvením grafu G** pomocí k barev, pokud pro každou hranu $\{x,y\} \subseteq E$ platí $b(x) \neq b(y)$.

Poznámka

Někdy může nastat situace, že státy sousedí jedním bodem. V takovém případě není nutné, aby měly všechny státy různé barvy.



Obr. č. 3.9 - Státy sousedící jedním bodem

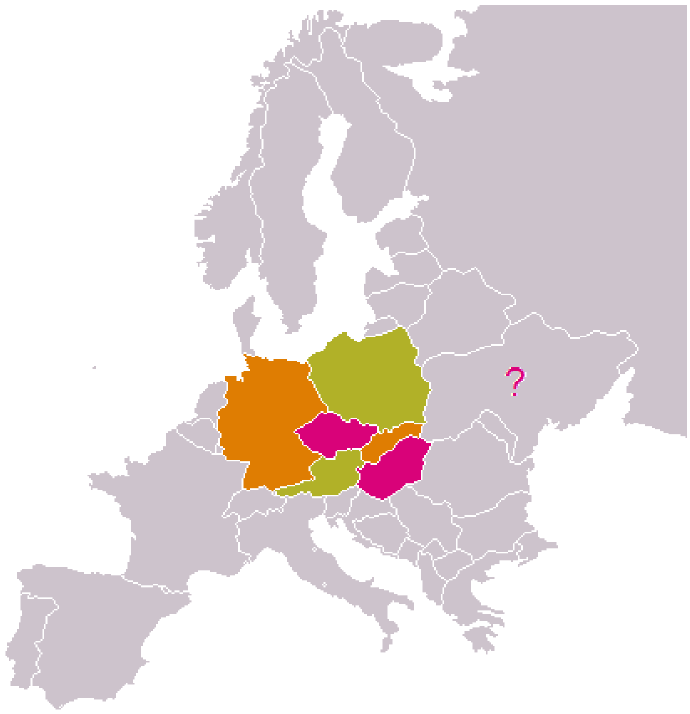
Proč čtyři barvy?

Nejprve se podívejme, proč potřebujeme **nejméně 4 barvy**:

Mějme 1 barvu: Úlohu bychom nemohli vyřešit. Mají-li mít sousední státy rozdílné barvy, nemohli bychom obarvit ani dva sousedy (např. ČR a SR).

Mějme 2 barvy: Podobná situace - dejme ČR první barvu, SR i Německu druhou. Polsko ovšem sousedí i s ČR (barva 1), SR (barva 2) i Německem (barva 2). Proto potřebujeme třetí barvu.

Mějme 3 barvy: Na obrázku č. 3.10 vidíme, že pro Ukrajinu (označena otazníkem) se nám opět nedostává barev - máme již obarvené tři sousedy (každý má jinou barvu) - znovu potřebujeme další barvu.



Obr. č. 3.10 - Proč potřebujeme při barvení mapy čtyři barvy?

Animaci znázorňující barvení mapy naleznete na CD.

Hledání maximální kostry

Úvod

V případě kostry grafu jsme zvyklí většinou hledat minimální kostru, užitečné výsledky nám ale často přináší i **maximální kostra** = souvislý podgraf (typu strom) s celkovým maximálním ohodnocením hran. Pro zjednodušení budeme uvažovat pouze souvislé neorientované grafy (neorientované proto, aby nenastalo různé ohodnocení hran AB a BA).

Předpokládejme, že máme graf, ve kterém vrcholy odpovídají prvkům z reálného světa (např. státy) a hrany jsou ohodnoceny dle nějakého **ukazatele znázorňujícího podobnost vrcholů**. Konkrétní význam ukazatele pro nás při hledání maximální kostry není podstatný. Typicky se jedná o číslo nabývající hodnoty 1, pokud se dva vrcholy v nějaké vlastnosti naprosto shodují, hodnoty 0, pokud se neshodují vůbec, či hodnoty mezi 0 a 1 (např: 0,5 - shoda v polovině případů). Často je takový graf úplný.

Příklady

A: Vrcholy grafu odpovídají **státům**, hrany jsou ohodnoceny podle exportu (nebo importu) zboží mezi zeměmi. Čím vyšší je hodnota ukazatele, tím větší je pohyb zboží mezi těmito dvěma státy.

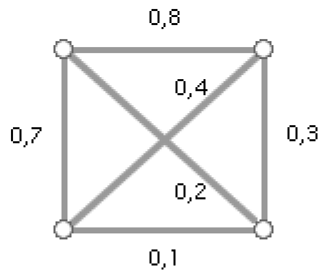
B: Vrcholy grafu představují **univerzity**, ohodnocení hran odpovídá **přechodům studentů** mezi univerzitami.

C: Vrcholy grafu znázorňují **zboží** v obchodech. Čím větší je hodnota ukazatele mezi dvěma typy zboží, tím častěji jsou kupována společně. Hodnota 1 představuje možnost, že zákazníci vždy kupují tyto dva druhy zboží spolu (v rámci všech objednávek), a hodnota 0, že naopak neexistuje žádná objednávka, na které by byly oba druhy spolu.

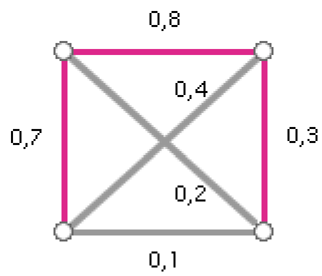
Význam maximální kostry grafu

Díky postupu, jakým maximální kostru najdeme (následuje), víme, že do maximální kostry použijeme vždy **hrany s nejvyšším ohodnocením**. **Tím pospojujeme vrcholy, které k sobě "nejvíce patří".**

V případě příkladu se státy (A) zapojujeme do maximální kostry dvojice států, které mezi sebou mají největší export/import. Podobně u univerzit používáme takové, mezi kterými přecházejí studenti nejčastěji a u obchodů (C) zboží, které je nejčastěji objednáváno společně (podobně fungují nákupní rádci v internetových obchodech, které před potvrzením objednávky poradí, jestli nechcete k digitálnímu fotoaparátu paměťovou kartu).



Obr. č. 3.11 - Příklad maximální kostry grafu (zadání)



Obr. č. 3.12 - Příklad maximální kostry grafu (řešení)

Nalezení maximální kostry

Pokud známe postup, jak najít minimální kostru, je nalezení maximální kostry jednoduché - stačí ohodnocení hran změnit na opačné (kladné → záporné) hodnoty a použít libovolný **algoritmus pro nalezení minimální kostry** (a opět otočit znaménko ohodnocení hran).

Druhou možností je upravit samotný hladový algoritmus - např. Kruskalův. Hrany ale seřadíme nikoliv vzestupně, ale sestupně - nejprve do kostry přidáváme hrany s největším ohodnocením.

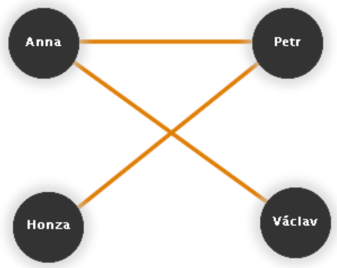
Úlohy na procvičování naleznete v části Procvičování.

Relace

Úvod

Již v úvodu k teorii grafů jsme si popisovali grafy jako vhodný prostředek pro popis vztahů mezi konečným počtem objektů.

Použití grafů ke znázornění relací jsme si ukázali u příkladu s kamarády - **zakreslovali jsme relaci** *"být kamarád s někým"*.



Příklad z Kapitoly 1: Úvod - 1.1 [14]

Podobně ale můžeme zakreslovat i jiné relace na jiných množinách představujících vrcholy grafu. Mohli bychom například na množině všech jednociferných přirozených čísel zakreslit relaci *"je dělitelem"*.

V celém textu budeme používat výraz "relace" ve významu "binární relace".

Matematická definice binární relace a definice vlastností (reflexivní...)

Kartézský součin

Nechť M a N jsou neprázdné množiny.

Kartézským součinem M×N rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic: $M \times N = \{(m,n);\ m \in M, n \in N\}$.

Relace

Relace je libovolná neprázdná podmnožina kartézského součinu.

(V našem případě používáme místo N opět M, uvažujeme kartézský součin mezi prvky stejné množiny - $M \times M$.)

Značení: v následujících definicích budeme pro výraz "prvek m je v relaci s prvkem n" používat označení mRn.

Vlastnosti relací

Řekneme, že relace na množině M je ..., jestliže pro každé tři prvky *m*, *n* a *o* z množiny *M* platí:

Reflexivní: *mRm*

Symetrická: *mRn* → *nRm*

Antisymetrická (slabě): (*mRn* a zároveň *nRm*) → *m* = *n*

Antisymetrická (silně): Nikdy nenastane: *mRn* a zároveň *nRm*

Tranzitivní: (*mRn* a zároveň *nRo*) → *mRo*

(Podrobnější vysvětlení vlastností a ukázky, jak se projevují v grafu, následují. Zde jsou uvedeny pouze definice.)

Orientovaný nebo neorientovaný graf?

Ještě před začátkem kreslení grafu (nebo jiného řešení úlohy) je nutné si uvědomit, zda budeme používat orientované hrany nebo ne - vždy záleží na konkrétní úloze. Například relace *"znát se s někým"* či *"být kamarádem"* jsou symetrické (viz níže), je tedy výhodnější použít jen jednu hranu. Naopak relace *"je větší než"*, *"je dělitelem"* symetrické nejsou a ve znázornění situace je pro nás velmi důležité, jakým směrem vede hrana.

Také může nastat situace, že u jedné relace vedou některé hrany oběma směry a některé jen jedním směrem (relace *"je větší nebo rovno než"*).

Shrnutí

1. Prvky zvolené množiny *M* znázorníme jako vrcholy budoucího grafu a vrcholy označíme stejně (případně vhodnými zkratkami) jako prvky *M*.
2. V grafu zakreslíme hranu *AB* právě tehdy, když je prvek $A \in M$ v dané relaci k prvku $B \in M$.

Jak se v grafu projevují vlastnosti relací (a jaký by to mělo praktický význam u relace "být kamarád" a "je dělitelem")?

Poznámka: vlastnosti relací uvažujeme u relací na kartézském množinu stejných množin (*M*×*M*) - tedy prvků ze stejné množiny.

Reflexivní (= každý prvek je v relaci sám se sebou):

Z každého vrcholu vede hrana do něj zpět. Většinou pro nás tyto hrany nemají žádný význam a nemá smysl je do grafu zakreslovat.

Příklady:
Každý je kamarád sám se sebou.

Každé číslo je svým dělitelem.

Obr. č. 3.12 - Ukázka reflexivní relace na množině M={A,B}

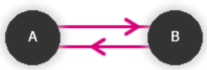
Symetrická (= je-li prvek A v relaci s B, pak je i B s A):

Používáme-li orientované hrany, povedou mezi každými dvěma vrcholy buď dvě šipky a nebo žádná šipka.

Pokud používáme neorientované hrany, chápeme každou hranu jako zakreslení symetrické relace (jako na obrázku 1.1).

Příklady:
Je-li *A* kamarádem s *B*, pak i *B* je kamarádem s *A*.

Je-li číslo *x* dělitelem *y*, pak je i *y* dělitelem *x* (tento výrok neplatí, relace "je dělitelem" není symetrická!).



Obr. č. 3.13 - Ukázka symetrické relace na množině M={A,B}

Antisymetrická (= nenastává symetrie):

Antisymetrické relace dělíme na slabě antisymetrické a silně antisymetrické. V případě **slabě antisymetrické relace** platí, že je-li A v relaci s B a B v relaci s A, pak $A = B$.
Nejde vždy nutně o opak symetrické relace - relace může být slabě antisymetrická i symetrická, například relace "rovná se".

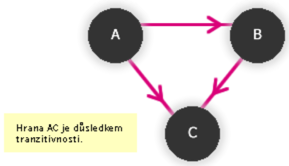
Silně antisymetrická relace zakazuje všechny případy "A je v relaci s B a zároveň B s A." (tedy i možnost, že se prvky rovnají).

Příkladem je relace "je ostře menší než".

Tranzitivní (= je-li prvek A v relaci s B a B v relaci s C, pak je A v relaci s C):
Vede-li šipka z vrcholu A do B a (jiná) šipka z B do C, povede šipka i z A do C.
U neorientovaných grafů bude hranu znázorňovat úsečka místo šipky.

Příklady:
Je-li A kamarádem s B a B je kamarádem s C, pak i A je kamarádem s C ("přítel mého přítele je můj přítel").

Je-li 3 dělitelem 6 a 6 dělitelem 12, je 3 dělitelem 12.



Obr. č. 3.14 - Ukázka tranzitivní relace na množině M={A,B,C}

Tyto tři vlastnosti (reflexivní, symetrická, tranzitivní) se mohou u jedné relace vyskytovat zároveň - je-li relace reflexivní, symetrická i tranzitivní, pak ji nazýváme **ekvivalence**.
Příkladem ekvivalence je relace "rovná se" na množině přirozených čísel či relace "je rovnoběžná s" na množině přímek v rovině.

Pokud je relace reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní, nazýváme ji **uspořádáním**.
Příkladem je relace "je menší nebo rovno než" či relace "je dělitelem".

Pokud relace **není** reflexivní a je silně antisymetrická a tranzitivní, nazýváme ji **ostrým uspořádáním**.

Příkladem je relace "je menší než" na množině přirozených čísel.

Příklad č. 1 (dělitelé jednociferných čísel)

Zadání:

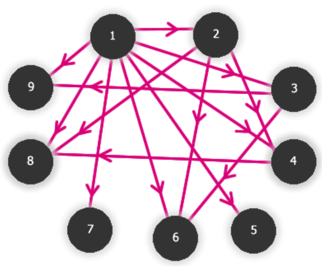
Zakreslete vztah *"být dělitelem"* na množině všech jednociferných přirozených čísel.

Řešení:

1) Vrcholy grafu budou jednotlivá čísla: *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8*, *9*.

2) Budou hrany grafu orientované nebo neorientované? (Bude relace symetrická?) - Relace nebude symetrická (to, že jedno číslo dělí druhé, neznamená, že druhé dělí první).

3) Všechny možné dvojice na dané množině zakreslíme do grafu - tzn. z vrcholu *1* povede šipka do všech ostatních vrcholů (1 dělí všechna čísla), z vrcholu *2* do vrcholů *4*, *6* a *8*. Také bychom měli mít dalších 9 hran, protože každé číslo dělí samo sebe (z vrcholu *1* vede hrana do vrcholu *1*, z vrcholu *2* do vrcholu *2* atd.). Tyto hrany ale nebudeme pro přehlednost zakreslovat. (Zakreslujeme jen tzv. vlastní dělitele.)



Obr. č. 3.15 - Výsledný graf úlohy na relaci dělitelnosti

Příklad č. 2 (kamarádi ze studií) [15]

Zadání:

Na nové škole se sešel mladý učitelský sbor. Nahraďme jména učitelů písmeny a do závorky udejme jejich věk:

A(32), *B*(24), *D*(25), *E*(35), *H*(34), *K*(26), *L*(33), *M*(28), *P*(29).

Dva učitelé se navzájem znali ze studií právě tehdy, když se jejich věk liší o **méně než**

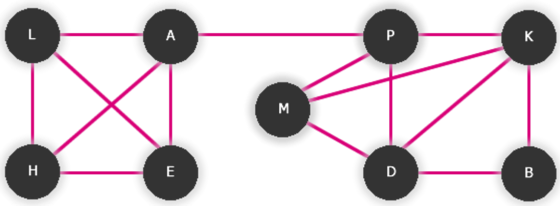
čtyři roky (předpokládáme, že všichni studovali stejnou školu). Zakreslete graf relace *"učitel A zná učitele B"* definované na uvedené množině (učitelském sboru).

Řešení:

1) Vrcholy grafu budou představovat jednotlivé učitele.

2) Budou hrany orientované nebo neorientované? - Neorientované - jde o typický případ symetrického vztahu (když *A* zná *B*, pak zná i *B* osobu *A*).

3) U každé dvojice učitelů zkontrolujeme jejich věk a pokud se liší o méně než čtyři roky, zakreslíme hranu.



Obr. č. 3.16 - Výsledný graf daného učitelského sboru

Další využití relací najdeme také v řešení logických úloh - více informací naleznete v kapitole "Výroky".

Výroky

Úvod

Výroková logika je další částí matematiky, kde můžeme využít teorii grafů. Možná jste při řešení logických úloh již grafy nebo alespoň podobné zobrazení pomocí bodů a čar použili.

Při řešení těchto úloh budeme používat spojování známých objektů (kterými mohou být osoby, automobily... - jim odpovídají **vrcholy** grafu) pomocí logických vazeb mezi nimi (ke znázornění logických vazeb typu implikace slouží **hrany** grafu). Samotný výsledek (**pravdivostní hodnoty** příslušných výroků) pak zjistíme pomocí **barvení uzlů** - obdobně jako u barvení mapy.

Princip řešení s použitím základních pravidel si ukážeme na ukázkové úloze.

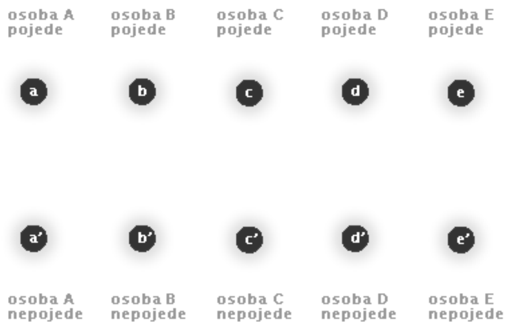
Zadání [15]

> Rekreanti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* se rozhodují, zda podniknou cestu parníkem. Své rozhodnutí podmiňují někteří tím, jak se rozhodne další z nich. Paní *B* říká, že pojede, vydá-li se na cestu její manžel *A*. Pánové *A*, *D* rozhodně pojedou, pojede-li šprýmař *E*. Paní *B* a slečna *C* se nemají rády, společně nepojedou "za nic na světě". Slečna *C* a pan *D* pojedou jen spolu nebo nepojede žádný z nich. Máme zjistit, kdo nastoupí na parník, je-li jisto, že alespoň jeden z pánů *D*, *E* si toto dobrodružství nenechá ujít.

Řešení:

Nejprve si popíšeme **vrcholy grafu**, se kterými budeme pracovat. Nemůžeme použít jen pět vrcholů (co osoba, to jeden vrchol), protože některé implikace jsou závislé na tom, že vybraná osoba na výlet nepojede.

Vrcholů bude v grafu celkem 10 - u každé osoby vždy jeden vrchol bude odpovídat situaci, že daná osoba pojede, druhý vrchol, že nepojede. Pro označení vrcholů použijeme malá písmena - a bude znamenat, že osoba A pojede (a', že osoba A nepojede). Prohlédněte si obrázek č. 3.17.



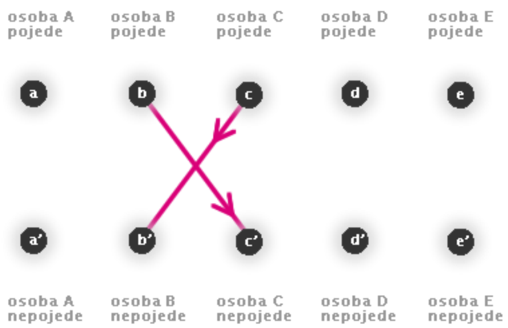
Obr. č. 3.17 - Množina vrcholů pro ukázkovou úlohu

Samotné **implikace budeme zakreslovat** jako **orientované** hrany.

Např.: *"Paní B říká, že pojede, vydá-li se na cestu její manžel A."* zakreslíme jako hranu $a \rightarrow b$.

"Paní B a slečna C se nemají rády, společně nepojedou 'za nic na světě'. " - $b \rightarrow c'$ a $c \rightarrow b'$ (obr. č. 3.18).

Na této implikaci vidíme, proč jsme museli zavést speciálně i vrcholy pro opačné výroky.



Obr. č. 3.18 - Zakreslení implikace v grafu

Zakreslujeme relaci "z prvního výroku vyplývá druhý" na desetiprvkové množině vrcholů {a, a', b, b', c, c', d, d', e, e'}.

Jak se v našem grafu projeví výroky "alespoň jeden z a a b", "nejvýše jeden z a a b", "právě jeden z a a b", "a právě tehdy, když b"?

Tyto výroky musíme umět převést na jednodušší - pomocí implikací.

"Alespoň jeden z a a b" = znázorníme pomocí šipek $a' \to b$, $b' \to a$

(Pokud není splněno a, musí být splněno b a naopak.)

"Nejvýše jeden z a a b" = vyjádříme pomocí šipek $a \to b'$, $b \to a'$

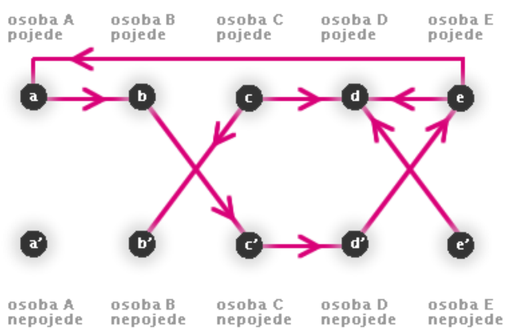
(Pokud je splněno a, nesmí být splněno b a naopak.)

"Právě jeden z a a b" = podobně: $a \to b'$, $b' \to a$, $a' \to b$, $b \to a'$

(a je splněno právě tehdy, když není splněno b; a není splněno právě tehdy, když je splněno b)

"a právě tehdy, když b" = buď platí a i b současně, nebo oba výroky současně neplatí (v grafu načrtneme čtyři šipky $a \to b$, $b \to a$, $a' \to b'$, $b' \to a'$)

Všechny relace z úlohy zakreslené v grafu



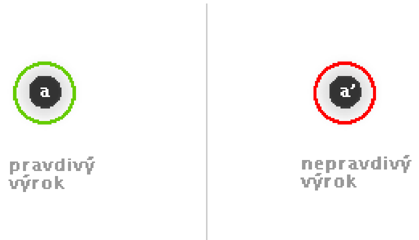
Obr. č. 3.19 - Všechny relace z úlohy zakreslené v grafu

Řešení pomocí barvení vrcholů

Nyní potřebujeme zjistit, jaké je správné řešení úlohy (která osoba pojede a která nikoliv).

Použijeme **barvení vrcholů** - podobný princip jako u barvení mapy, ovšem jen se dvěma barvami - **zelenou**, která bude vyjadřovat **pravdivý výrok** a **červenou,** , která bude odpovídat nepravdivému výroku.

Pro snazší orientaci v textu bude **"zelený vrchol"** znamenat vrchol obarvený zeleně (zakresleno zeleným kolečkem) a odpovídající pravdivému výroku, **"červený vrchol"** bude znamenat vrchol obarvený červeně (červené kolečko, odpovídá nepravdivému výroku).



Obr. č. 3.20 - Příklad zakreslení pravdivého a nepravdivého výroku jako vrcholu v grafu

Na začátku budeme vycházet z libovolného předpokladu o nějakém výroku (například "výrok A platí") a pomocí logických pravidel (následující odstavec) příklad vyřešíme nebo dojdeme ke sporu.

Základní pravidla barvení vrcholů:

1: Každý výrok má **právě jednu pravdivostní hodnotu**.

→ Každý vrchol má **právě jednu barvu** (je zelený nebo červený).

2: Výroky x a y mají **různou pravdivostní hodnotu**.

→ Vrcholy x a y mají **různou barvu**.

3: Dva vrcholy zakreslené **nad sebou mají opačné barvy**.

→ Je-li jeden z vrcholů zelený, druhý obarvíme červeně. Je-li červený, druhý obarvíme zeleně.
(Toto pravidlo odpovídá základnímu logickému pravidlu: vždy je pravdivý **buď výrok samotný nebo jeho negace**.)

4: Platí-li předpoklad implikace a platí-li implikace, musí platit důsledek.

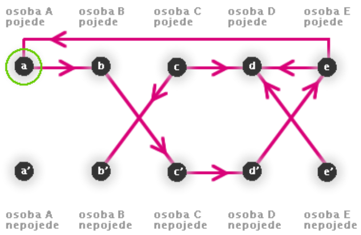
→ Pokud **ze zeleného vrcholu směřuje hrana**, vrchol, **do** kterého směřuje, musí být také **zelený**.

5: Pokud neplatí důsledek implikace a platí-li implikace, neplatí ani předpoklad.

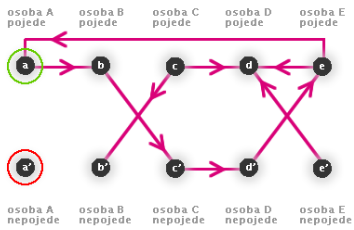
→ Pokud **do červeného vrcholu směřuje hrana**, vrchol, **ze** kterého směřuje, musí být také **červený**.

Příklad, ve kterém při barvení vrcholů dojde ke sporu (animace na CD)

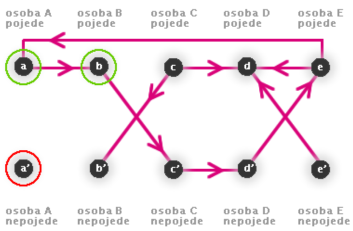
Následující animace znázorňuje možnost, při které dojde k logickému sporu. V takovém případě dojdeme k závěru, že předpoklad nebyl správný a vyzkoušíme jiný.



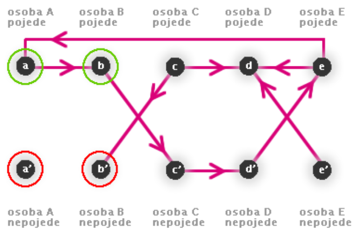
Začínáme libovolně zvoleným předpokladem (osoba A pojede).



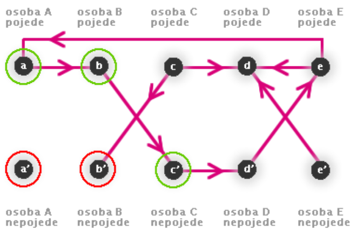
Výrok "osoba A nepojede" je tedy nepravdivý a vrchol a' bude červený (pravidlo 3).



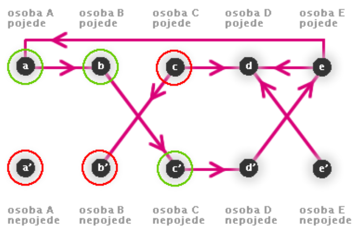
Vrcholy, do kterých vedou hrany ze zeleného vrcholu, jsou také zelené (pravidlo 4).



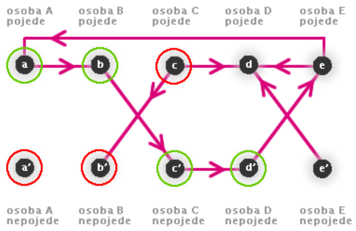
Negace výroku má opačnou barvu (pravidlo 3).



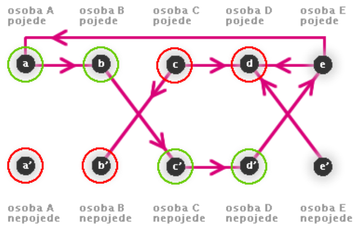
Vrcholy, do kterých vedou hrany ze zeleného vrcholu, jsou také zelené (pravidlo 4).



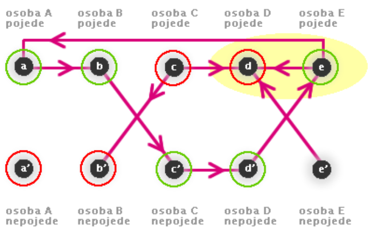
Negace výroku má opačnou barvu (pravidlo 3).



Vrcholy, do kterých vedou hrany ze zeleného vrcholu, jsou také zelené (pravidlo 4).



Negace výroku má opačnou barvu (pravidlo 3).

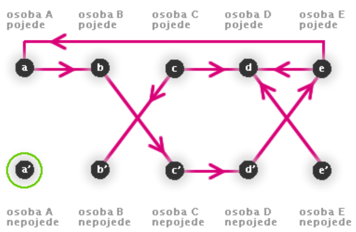


Vrchol *d* by měl být zároveň červený (pravidlo 3) i zelený (4) - spor s pravidlem 1!

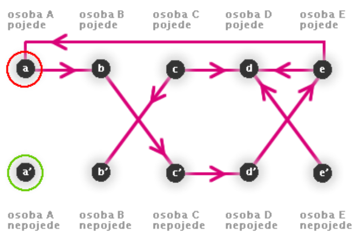
Nyní jsme zjistili, že za předpokladu, že pan A pojede parníkem, není možné splnit všechny požadavky všech cestujících. Nyní mohou nastat 2 situace: 1) předpoklad, že pan A nepojede, rovněž povede ke sporu a ukáže se, že požadavky jednotlivých cestujících jsou navzájem neslučitelné

2) předpoklad, že pan A nepojede, nás dovede k výslednému řešení úlohy.

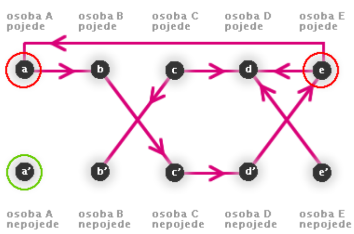
Příklad, který nalezne hledané řešení (animace)



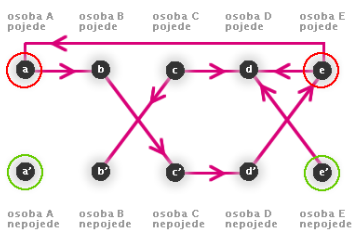
Nový předpoklad - osoba A nepojede.



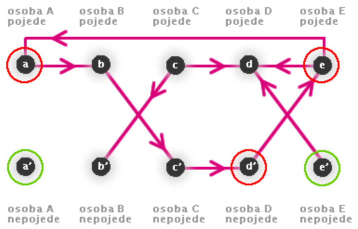
Negace výroku má opačnou barvu (pravidlo 3).



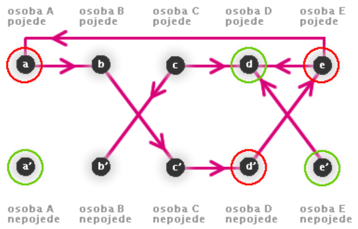
Vrchol, ze kterého vede hrana do červeného vrcholu, je také červený (pravidlo 5).



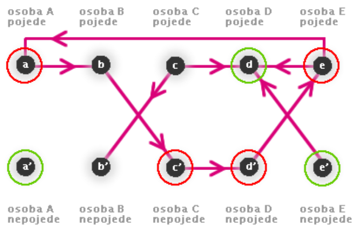
Negace výroku má opačnou barvu (pravidlo 3).



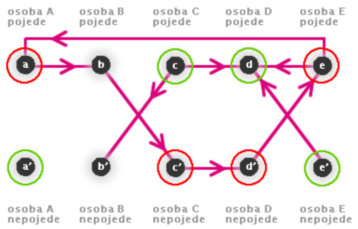
Vrchol, ze kterého vede hrana do červeného vrcholu, je také červený (pravidlo 5).



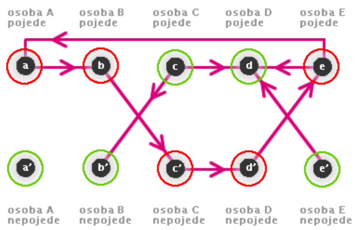
Na vrcholu *d* se pravidla 3 i 5 spojují.



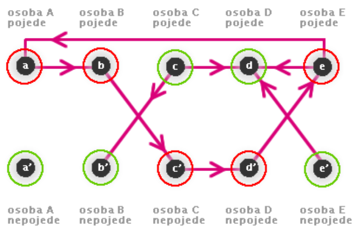
Vrchol, ze kterého vede hrana do červeného vrcholu, je také červený (pravidlo 5).



Negace výroku (pravidlo 3) a zároveň obarvení souhlasí s pravidlem 4.



Na obarvení *b* a *b'* nastává opět shoda pravidel 3 a 5.



Nedošlo k logickému sporu a máme obarvené všechny vrcholy – hledané řešení.

Shrnutí řešení

> Hledaným řešením úlohy je situace: na výlet pojede jen osoba C a D.
>
> (Osoby A, B, E nepojedou.)

Rozvrh

Úvod

Podobný princip, jaký jsme využili v úlohách s barvením mapy a o výrocích, lze úspěšně použít i při hledání optimálního rozvrhu.

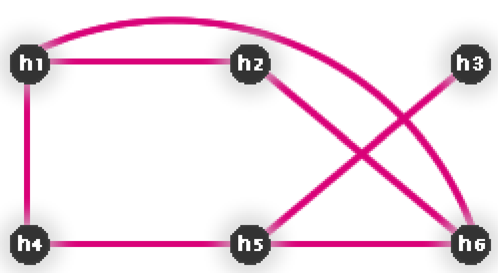
Zadání [16]

> Mějme 6 hodin (lekcí) označených h_1 až h_6, mezi kterými si mohou studenti vybírat. Všechny lekce trvají stejně dlouho.
> Nalezněte takový rozvrh, ve kterém všechny lekce proběhnou v nejkratším čase a zároveň umožněte, aby se nepřekrývaly
> hodiny h_1 a h_2; h_1 ah_4; h_3 a h_5; h_2 a h_6; h_4 a h_5; h_5 a h_6; h_1 a h_6.

Řešení

Nejjednodušším řešením by bylo všechny hodiny seřadit za sebou - zajistili bychom tak, že každý, kdo si vybral hodinu h_1, může jít i na hodinu h_2 či jakoukoliv jinou (a tím bychom snadno splnili všechny podmínky ze zadání). Úkolem je ale umožnit souběh hodin, u kterých nejsou studenti, kteří by měli zájem jít na obě hodiny současně.

Všechny hodiny zakreslíme jako vrcholy grafu. Hrany mezi nimi (které jsou neorientované) spojí vrcholy odpovídající hodinám, které nemají probíhat zároveň. **Zakreslujeme relaci "nemá probíhat zároveň" na množině hodin h_1 až h_6.**

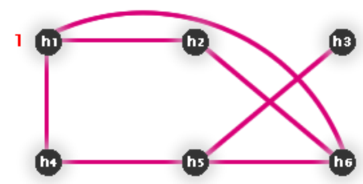


Obr. č. 3.21 - Graf popisující požadavky na rozvrh

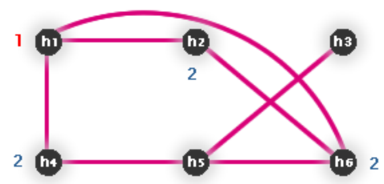
Jednotlivým vrcholům budeme přiřazovat čísla (již v úloze barvení mapy jsme si ukázali, že přiřazování barev odpovídá přiřazování čísel). Tato čísla budou odpovídat pořadí hodin v rozvrhu (pokud dvě hodiny dostanou číslo 1, budou v rozvrhu probíhat zároveň).

Při číslování budeme používat podobnou podmínku jako u sousedních států při barvení mapy - pokud **dvě hodiny nemají začínat ve stejnou chvíli, jejich čísla budou různá**.

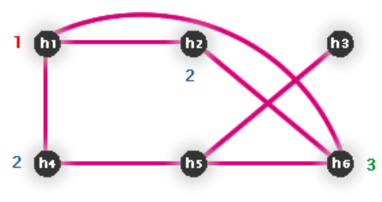
Postup přiřazení hodin (animace na CD)



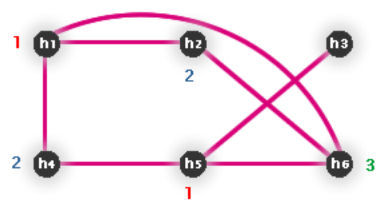
Hodina *h1* (resp. vrchol) bude ohodnocena číslem 1.



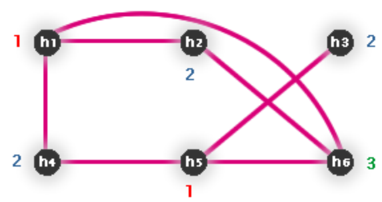
Hodiny, které jsou s *h1* spojeny hranou, musí mít jiné číslo, např. 2.



h2 a *h6* jsou také spojeny - pro *h6* volíme opět jiné číslo, např. 3.



h5 může být ohodnoceno 1 stejně jako *h1* (*h5* a *h1* nespojuje hrana).



h3 může být ohodnoceno 2 jako *h2* a *h4*.

Závěr

Hledaný rozvrh hodin vyčteme z obarvení vrcholů grafu - vrcholy se stejnou barvou představují hodiny probíhající souběžně.

1.	2.	3.
h_1 a h_5	h_2, h_3, h_4	h_6

Minimální počet hodin, během kterých je možné odučit h_1 až h_6 za předepsaných podmínek, je 3.

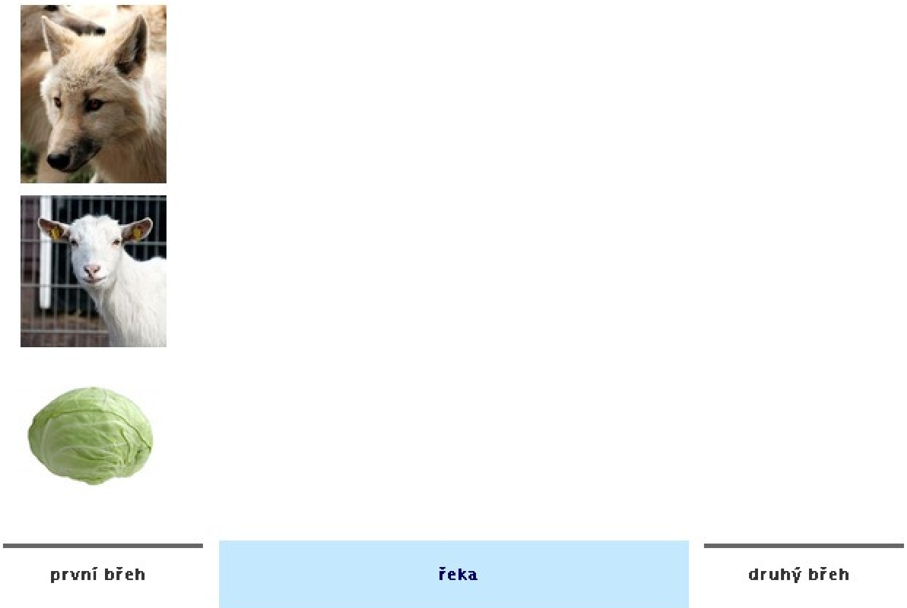
Další úlohu na určení rozvrhu naleznete v Procvičování.

Převozník

Pomocí teorie grafů lze řešit také populární matematickou úlohu o převozníkovi, kterou uvedl už Alkuin z Yorku (cca 735-804) ve sbírce Úlohy k bystření mladíků.

Zadání [6]

> Převozník chce převézt z jednoho břehu na druhý **hlávku zelí**, **kozu** a **vlka**. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu.
> Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?



Obr. č. 3.22 - Ilustrace k úloze o převozníkovi

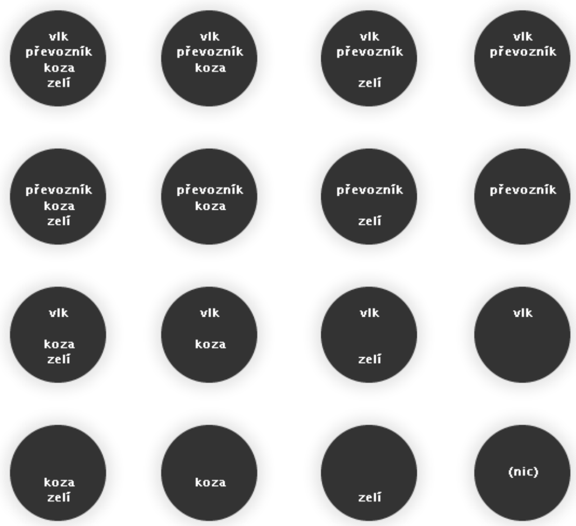
Řešení pomocí teorie grafů

Pomocí vrcholů grafu popíšeme situaci na prvním břehu. Takovýchto vrcholů (možností, kdo zůstal na prvním břehu) máme 16.

Proč 16 možností?

Máme 4 "objekty", u kterých nás zajímá, zda na břehu jsou nebo ne - vlka, zelí, převozníka a kozu.

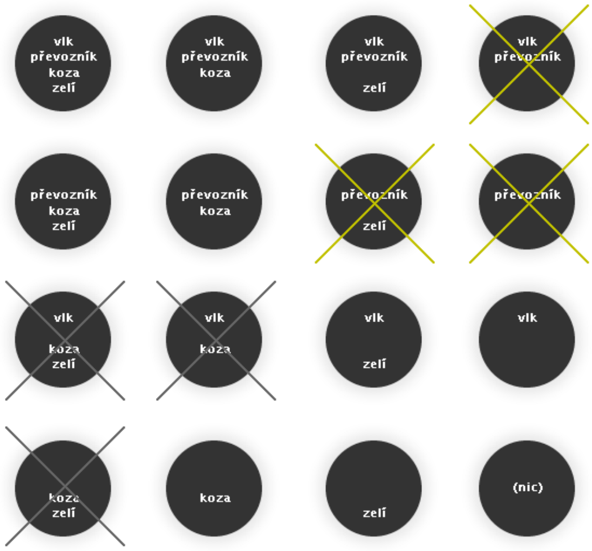
Máme tedy dvě možnosti (je na břehu/není) pro každý ze 4 objektů - celkem 2×2×2×2 = 2^4 = 16 možností.



Obr. č. 3.23 - Znázornění situace na prvním břehu

Pomocí hran v grafu si můžeme popsat změnu, která se stala (odvezl-li převozník zelí na druhý břeh, můžeme si na hranu poznamenat "**-zelí,-převozník**" – z důvodu přehlednosti není popis na hranách v obrázku uveden). Potřebujeme pospojovat vrcholy grafu tak, abychom se dostali z levého horního vrcholu (na prvním břehu jsou všichni) do pravého dolního vrcholu (na prvním břehu není nikdo).

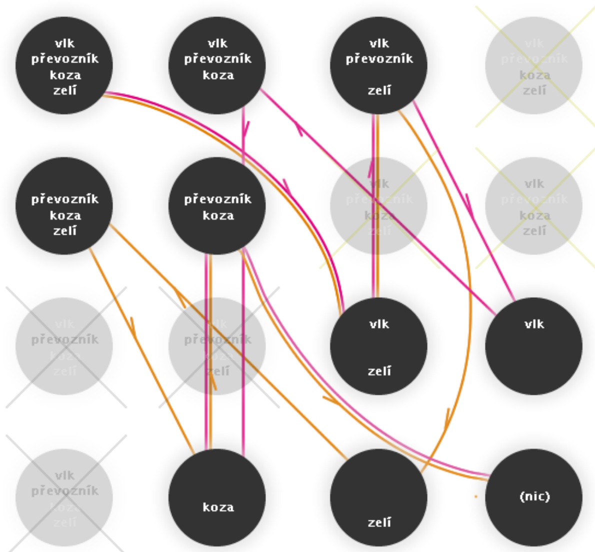
Ne všechny vrcholy zakreslené na obrázku č. 3.23 jsou však přípustné. Nesmíme nechat bez dozoru **kozu s vlkem** a také **kozu a zelí**. Z toho důvodu celkem 6 vrcholů vypustíme.



Obr. č. 3.24 - Znázornění situace na prvním břehu - jen povolené vrcholy

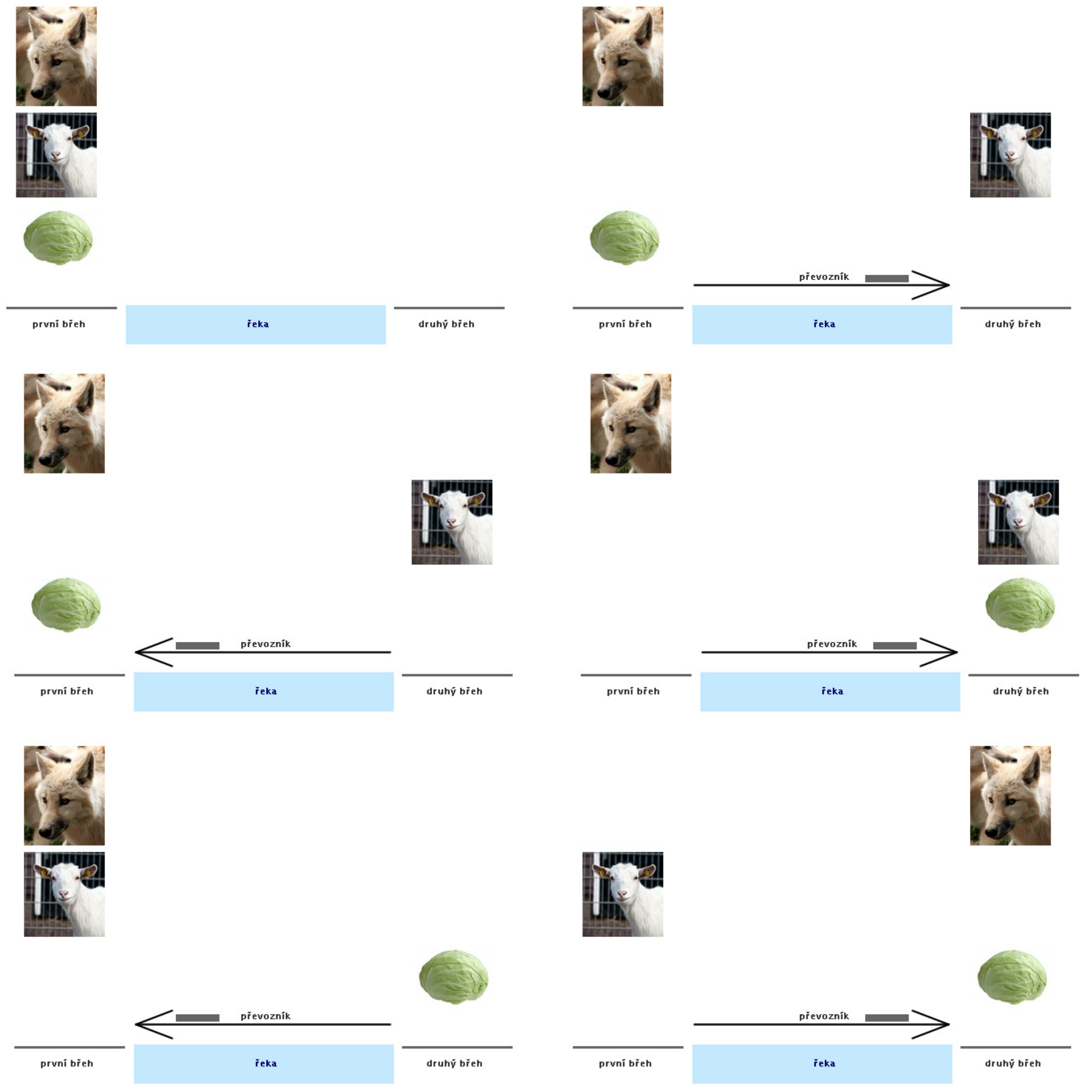
Pokud se vám zdá, že vrcholy přeškrtnuté žlutou barvou podmínky neporušují, vzpomeňte si, že zakreslujeme situaci na prvním břehu. Pokud jsme tedy nechali spolu vlka s převozníkem, není to v pořádku, protože na druhém břehu nám zůstala koza se zelím.

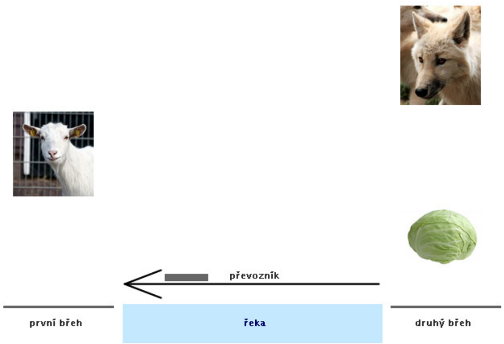
Nyní v grafu hledáme cestu (začínající v levém horním rohu a končící v pravém dolním rohu), která by popisovala při zachování předepsaných podmínek průběh přepravy. Všimněte si, že se po cestě střídají vrcholy s převozníkem a bez něho - podle toho, jak vozí ostatní z břehu na břeh. Jak vidíte, úloha má dvě možná řešení.

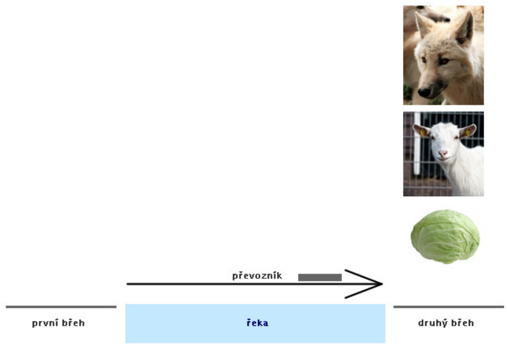


Obr. č. 3.25 - Řešení úlohy

Animace prvního řešení (fialové hrany)







Druhé řešení (oranžové hrany) naleznete jako animaci na CD.

Toky v sítích

Úvod

Pomocí grafů můžeme řešit problém nalezení **maximálního toku v síti**.

Nejtypičtějším příkladem tohoto problému je vodovodní potrubí - zjišťujeme, kolik vody může potrubím protéct.

Pozor: maximálním tokem nerozumíme nějakou konkrétní část grafu ("nejširší potrubí"). Maximální tok je výsledek (číslo, viz níže) platný pro celý graf.

Do budoucna budeme v textu používat příklad s vodovodním potrubím. Mohli bychom ale uvažovat také silniční či datovou síť.

Co pro řešení takového problému potřebujeme znát?

Popis potrubí - pro popis potrubí (kde jsou uzly, kolik je trubek...) použijeme orientovaný graf.

Odkud voda teče - vrchol grafu, ze kterého vytéká do potrubí voda, který označíme jako **zdroj** s ($s \in V$, s z anglického *source*).

Kam voda teče - vrchol, který označíme jako **stok** (cíl, spotřebič) t (stok je některý z vrcholů grafu: $t \in V$, z anglického *target*).

Kolik vody může daným místem (hranou) sítě protéct - budeme používat funkci **kapacita**.

Kolik vody daným místem (hranou) opravdu protéká - znázorníme pomocí funkce **tok**.

Zdrojů i stoků může být v grafu obecně více, my však v dalším textu budeme předpokládat vždy jen jeden zdroj a jeden stok.

Vnitřními vrcholy budeme rozumět všechny vrcholy grafu kromě zdroje a stoku.
U **silniční sítě** by tedy kapacita odpovídala například množství aut, která mohou projet daným úsekem silnice za jednotku času (minutu). U **datové sítě** by to byla například

přenosová rychlost. (Záměrně bychom neuvažovali o jednotlivých autech či datových paketech.)

Kapacita

> **Kapacita** je funkce c přiřazující každé hraně nezáporné reálné číslo ($c : E \rightarrow R_0+$).

Podle definice může být kapacita nulová, v praxi se to však nepoužívá - stejný výsledek by nastal, kdyby taková hrana v grafu nebyla.

Poznámka

Přidáním opačné hrany s nulovou kapacitou můžeme dosáhnout symetričnosti hran. **Neplatí však obecně**, že $c(uv) = c(vu)$.

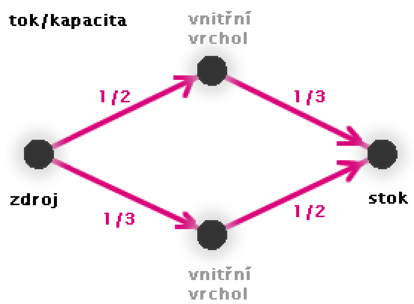
Tok

> **Tok** je funkce f přiřazující každé hraně nezáporné reálné číslo. ($f : E \rightarrow R_0+$).
> Definici vyhovuje i nulový tok.
> Pro každou hranu e platí, že tok danou hranou nemůže být větší než je kapacita této hrany.
> $\forall e \in E: f(e) \leq c(e)$

Tok také musí splňovat **Kirchhoffův zákon**:

Pro všechny vrcholy kromě zdroje a stoku platí, že součet toků na hranách vstupujících do vrcholu se musí rovnat součtu toků na hranách vycházejících z vrcholu.

> **Velikost toku** (v celém grafu) získáme jako součet toků ze zdroje.



Obr. č. 3.25 - Příklad toku v síti (ne maximálního)

Jak jsme uvedli v definici, kapacita i tok mohou být reálná nezáporná čísla – v dalším textu však budeme předpokládat, že kapacity i toky jsou popsány přirozenými čísly.

Síť

Výše uvedené definice lze shrnout do následující definice **sítě**.

> **Síť** je uspořádaná pětice (V, E, z, s, c), kde platí:
>
> (V, E) je orientovaný graf
>
> c: $E \rightarrow R_0+$ je kapacita hran
>
> z, $s \in V$ jsou dva vrcholy grafu, kterým říkáme **zdroj** a **stok**
>
> graf je symetrický, tedy pro každé dva vrcholy u, $v \in V$: $uv \in E$ právě tehdy,
>
> když $vu \in E$. Pokud ale tyto hrany mají nulový tok, tak je do grafu nezakreslujeme (viz algoritmus).

Přítokem rozumíme součet toků hran směřujících do vrcholu.

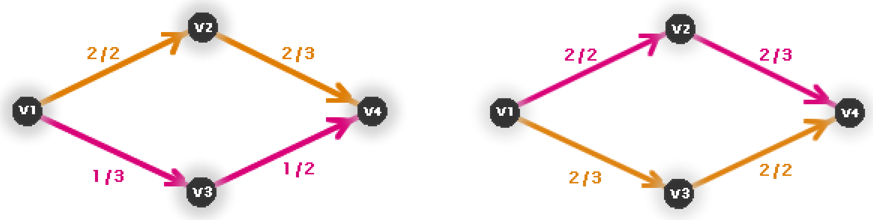
Odtokem chápeme součet toků hran vycházejících z vrcholu. Ve zdroji nesmí být větší přítok než odtok.

Ve stoku naopak nesmí být odtok větší než přítok.

Primitivní algoritmus

Asi nejjednodušší možnost, která nás při hledání maximálního možného toku v síti napadne, je zkoušet všechny cesty ze zdroje do stoku a zkoumat, zda nemůžeme zvýšit tok, případně o kolik (není-li v grafu žádný tok, začneme zvyšováním nulového).

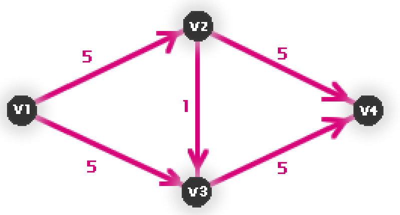
Na ukázkovém příkladě (obrázek 3.25, v_1 je zdroj, v_4 je stok) by to znamenalo prozkoumat dvě cesty - (v_1, v_3, v_4) a (v_1, v_2, v_4).



Obr. č. 3.26 - Příklad primitivního algoritmu

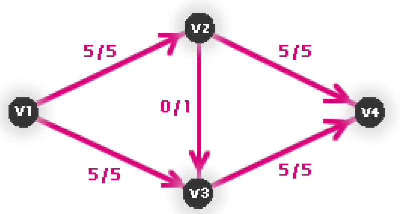
Dostali jsme maximální tok 4, což je správný výsledek. U některých grafů ovšem může dojít k situaci, kdy nám tento postup vrátí špatný výsledek, viz obrázek č. 3.27 (na hranách jsou uvedeny jen kapacity, tok na začátku předpokládáme nulový,v_1 je zdroj, v_4 spotřebič).

Výsledek záleží na pořadí, ve kterém cesty zkoušíme.



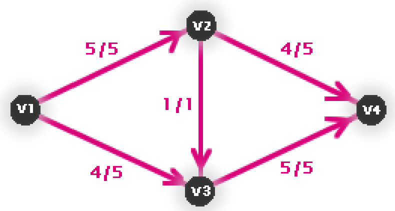
Obr. č. 3.27 - Příklad, kdy primitivní algoritmus selže (zadání)

Správný výsledek je zřejmě 10 (obrázek 3.28).



Obr. č. 3.28 - Příklad, kdy primitivní algoritmus selže (správný výsledek)

Pokud bychom ale začali zvyšovat tok nejprve na cestě (v_1, v_2, v_3, v_4), vyjde nám maximální tok v grafu jen 9.



Obr. č. 3.29 - Příklad, kdy primitivní algoritmus selže (špatný výsledek)

Z toho důvodu zavádíme možnost, že po hraně pošleme tok opačným směrem. (To můžeme díky tomu, že síť je symetrická.)

Rezerva hrany

Rezerva hrany nám popisuje, jaká část kapacity na hraně zbývá - kolik vody by ještě mohlo v trubce protékat, kolik dalších aut by mohlo danou komunikací projíždět apod.
Zároveň také započítává zmiňovaný tok v opačném směru - s opačným znaménkem než původní tok.

> Rezerva hrany uv: $r(uv) = c(uv) - f(uv) + f(vu)$.

Ford-Fulkersonův algoritmus

Ford-Fulkersonův algoritmus také zkouší všechny cesty v grafu a hledá zlepšující tok, využívá přitom ale rezervy hrany.

Pro každou cestu, kde lze zvýšit tok, určí hodnotu ε, o kterou bude tok zvyšovat. Pro každou hranu na cestě určí také hodnotu δ, která bude počítat, o kolik snížit tok proti směru hrany.

> 1. Na začátku mějme libovolný tok (může být všude nulový, $\forall e \in E: f(e) = 0$).
>
> 2. Dokud existuje nějaká cesta P z vrcholu z do s taková, že každá hrana na cestě má nenulovou rezervu, $\forall e \in P: r(e) > 0$, vybereme ji.
>
> 3. Zvolíme nejmenší rezervu z hran po cestě a její hodnotu si zapamatujeme jako ε . $\varepsilon = \min(r(e), e \in P)$

4. Pro všechny hrany na cestě (každou hranu vždy v tomto kroku pojmenujeme *uv*), $uv \in P$:

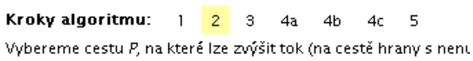
4a. $\delta = \min(f(vu), \varepsilon)$.

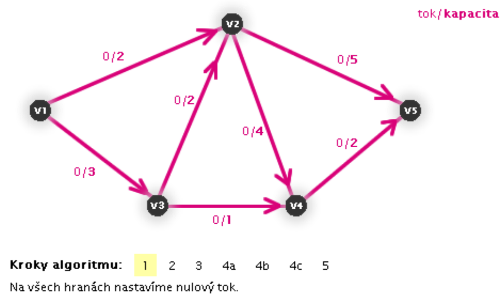
4b. Upravíme tok na hraně (opačným směrem - *f(vu)*). $f(vu) = f(vu) - \delta$.

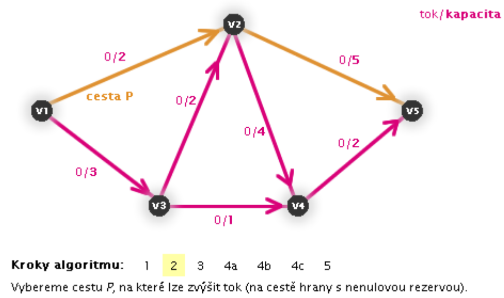
4c. Upravíme tok na hraně (směrem *f(uv)*). $f(uv) = f(uv) + \varepsilon - \delta$.

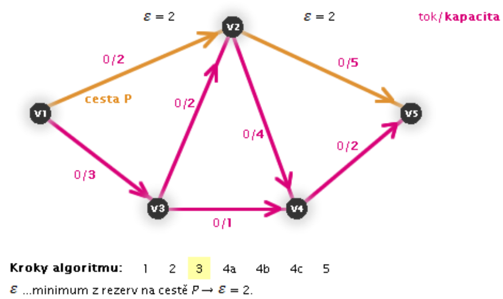
5. Vyčerpáme-li všechny cesty, na kterých můžeme zlepšit tok, prohlásíme **součet** ***f*** **(toků ze zdroje) za maximální tok**.

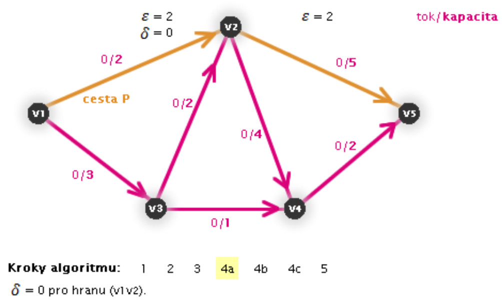
V následujících animacích uvidíte vždy aktuální krok zvýrazněný číslem:

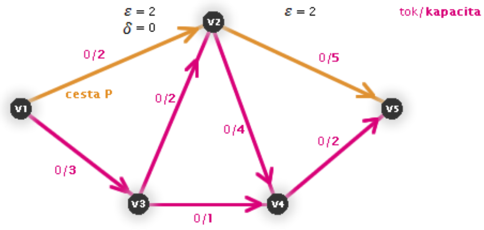






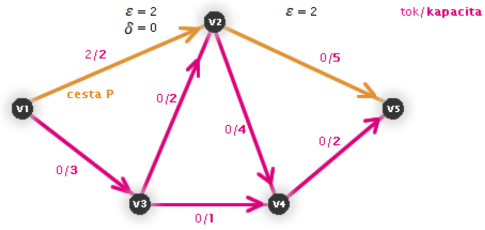






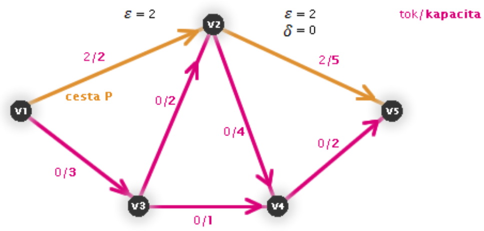
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Úprava toku na hraně (v1v2) v opačném směru. $f(vu) = f(vu) - \delta$



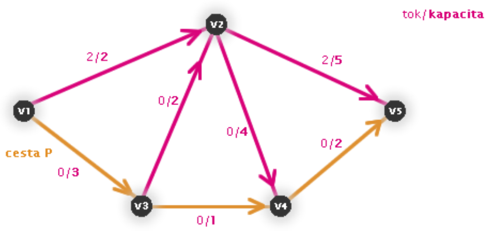
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Úprava toku na hraně (v1v2) ve směru. $f(uv) = f(uv) + \varepsilon - \delta$



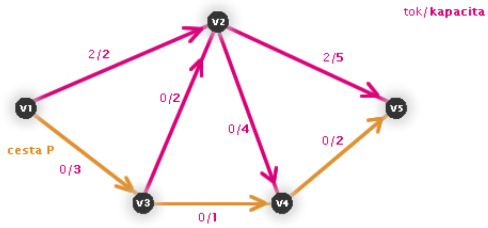
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Obdobně pro hranu (v2v5).



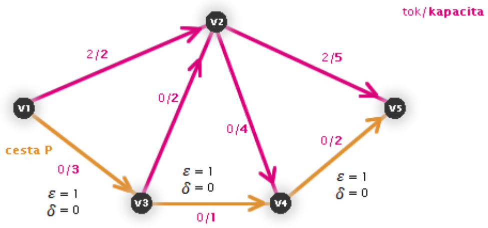
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Nová cesta *P*.



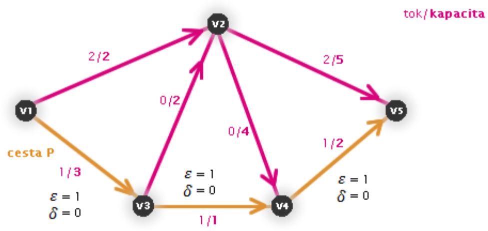
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

$\varepsilon = 1$



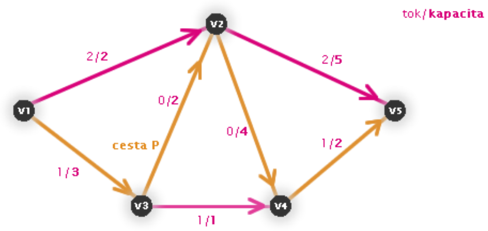
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Nalezení δ pro každou hranu.



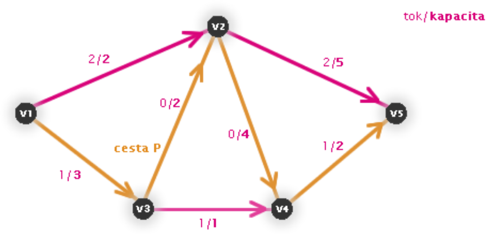
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Zlepšení toku.



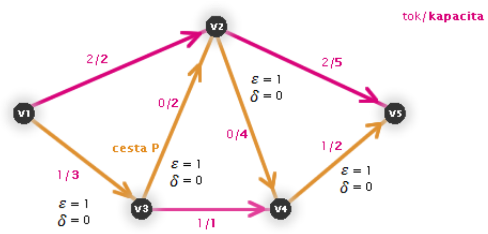
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

Nová cesta *P*.



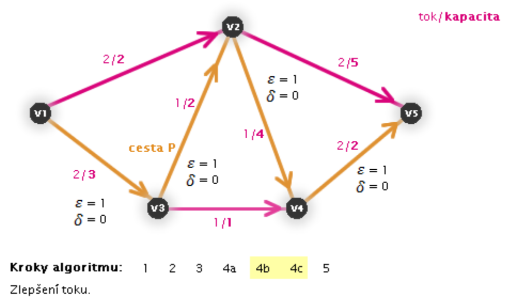
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

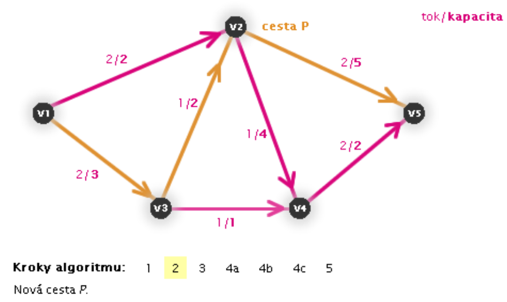
$\varepsilon = 1$

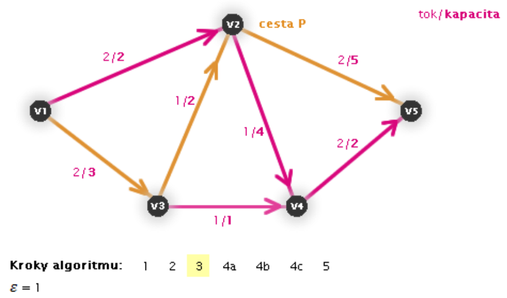


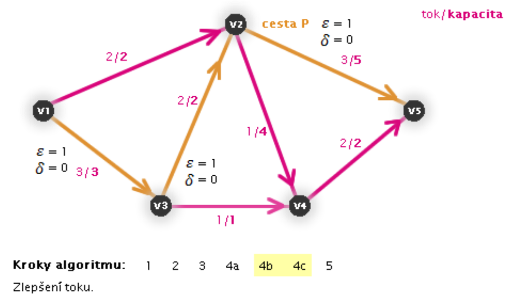
Kroky algoritmu: 1 2 3 4a 4b 4c 5

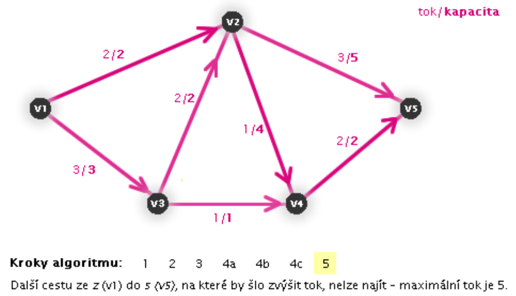
Nalezení δ pro každou hranu.











Zastaví se algoritmus?

Ano, v každém kroku totiž zvýší velikost toku alespoň o 1.

(Předpokládáme celočíselné hodnoty u kapacit i toků.)

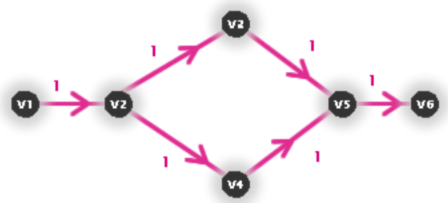
Najde algoritmus vždy maximální tok?

Pro důkaz pravdivosti tohoto tvrzení je potřeba zavést pojem řez, který v této práci vysvětlovat nebudeme - podrobnější informace naleznete v literatuře: [19]

Je výsledek jednoznačný?

Samotný maximální tok (číslo) jednoznačný je.

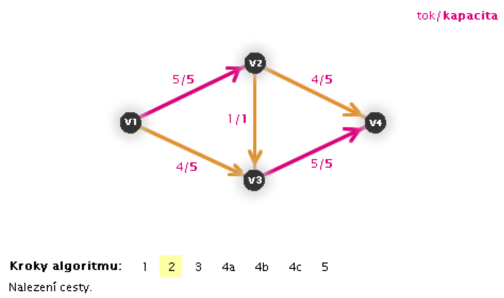
Můžeme se k němu ale dostat více způsoby. Rozmyslete si, jaké by byly možnosti u následujícího grafu (v1 zdroj, v6 stok).

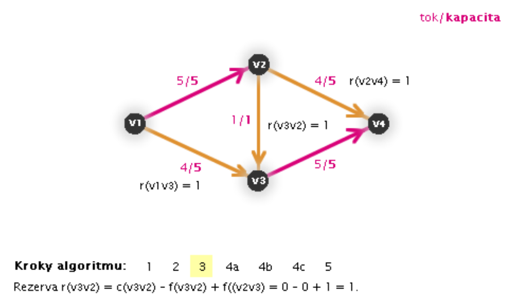


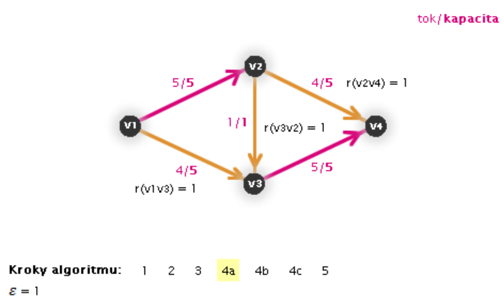
Obr. č. 3.30 - Graf s více možnostmi, jak dosáhnout maximálního toku

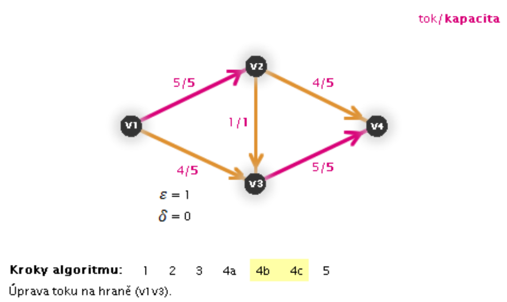
Příklad na obrázku 3.29

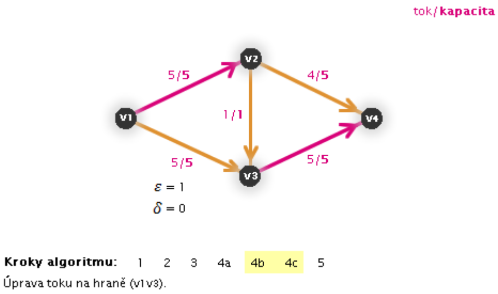
Díky tomu, že Ford-Fulkersonův algoritmus pracuje, dokud nenajde maximální tok, můžeme ho spustit již na grafu s tokem, kterým původně zamýšlený primitivní algoritmus skončil výpočet (proto následující animace již nezačíná krokem 1).

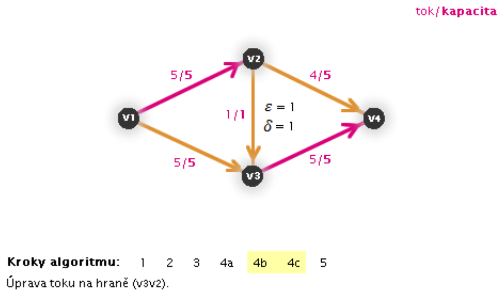


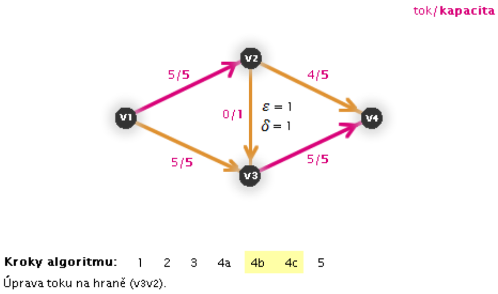


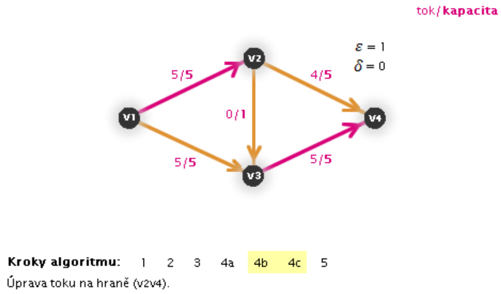


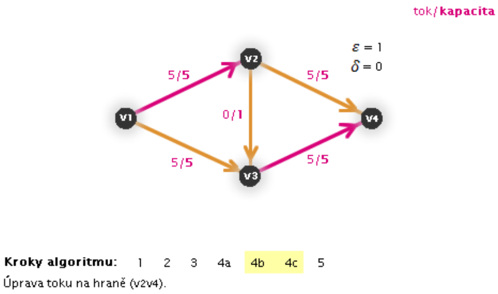


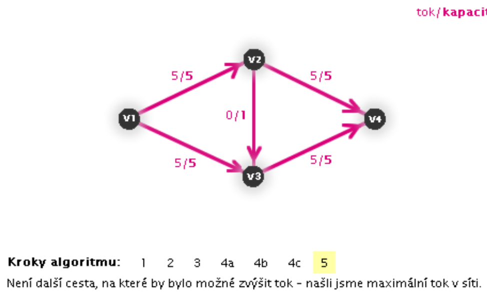












Jiné algoritmy na hledání maximálního toku

Další algoritmy na hledání maximální toku jsou například *Dinitzův algoritmus* nebo *Edmonds-Karpův* - jejich výhodou je nižší výpočetní složitost (= počet kroků algoritmu), jsou ovšem náročnější na implementaci. Více informací v [19].

Další úlohy naleznete v Procvičování.

Teorie her

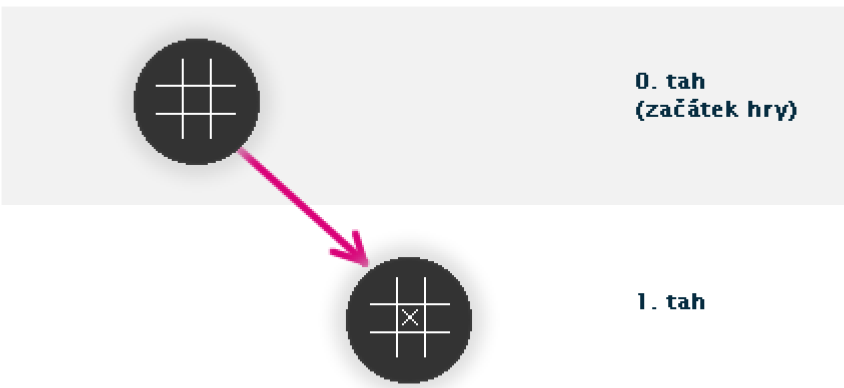
Úvod

Teorie her je oblast vědy, která zasahuje do více oborů (matematiky, psychologie, sociologie, ekonomie...) a zkoumá chování jednotlivých subjektů v okamžicích, při kterých dochází ke střetům zájmů. Můžeme sem řadit jak jednodušší hry (piškvorky, dáma), tak i složité ekonomické modely nebo například tzv. vězňovo dilema, které je příkladem spíše psychologie než matematiky v teorii her. My se budeme věnovat té skupině her, kde snadno rozpoznáme, který hráč vyhrál a kde si můžeme hru rozdělit na jednotlivé tahy - **vrstvy**.

Příkladem nám mohou být **piškvorky (3×3)** - pravděpodobně jste zjistili, že hráč, který hru začne (a umístí svoji značku doprostřed mřížky), má mnohem větší naději na výhru - pokud neudělá chybu, nemůže prohrát.

Snadno si přitom můžeme rozkreslit možnosti, které nastávají - z prázdné mřížky vede 9 možností, kam umístí první hráč svoji značku, z každé další pak 8 možností atd. Někdy se nám hrany opět sbíhají (není důležité v jakém pořadí byly značky zakresleny), nikdy ale nevede možnost zpět (značku umazat).

Zde právě použijeme grafy: **vrcholem** zakreslíme **aktuální stav hry** (například popisem křížků a koleček vázajícím se ke konkrétnímu vrcholu) a **orientovanou hranou možnost tahu**.



Obr. č. 3.31 - Příklad jednoho z možných tahů

Definice

> **Hra v explicitním tvaru** je dána orientovaným acyklickým grafem $G = (V, E)$ s vybraným vrcholem $v_0 \in V$.
> Na začátku vybere první hráč vrchol $v \in V$ tak, že $(v_0, v) \in E$. Dále hráči střídavě vybírají vrcholy tak, že pokud vybral protihráč v posledním tahu vrchol u, musí hráč vybrat takový vrchol w, pro který $(u, w) \in E$.

Touto definicí jsme popsali způsob, jak mohou hráči táhnout. Jak ale zadefinovat vítěze hry?

> Hráč, který již nemůže žádný vrchol vybrat, **prohrál** (tato definice je otázkou dohody mezi hráči).
>
> Řekneme, že hráč má v této hře **vyhrávající strategii**, jestliže může volit tahy tak, že neprohraje, ať protihráč volí jakékoliv možné tahy.

Všimněte si, že **mít vyhrávající strategii neznamená nutně vyhrát!** Například právě u piškvorek 3×3 má vyhrávající strategii první hráč. Pokud ale udělá chybu, může se stát, že vyhraje druhý hráč.

Pomocí teorie grafů můžeme u her v explicitním tvaru určit, kdo má vyhrávající strategii. Vzhledem k tomu, že zjistit všechny možnosti například pro šachy je stále technicky nemožné, nehrozí, že by naše vítězství určilo pořadí. U jednodušších her (např. odebírání zápalek) to však možné je.

Nejprve však potřebujeme rozhodující kritérium:

> Uvažujme hru v explicitním tvaru určenou acyklickým orientovaným grafem $G = (V, E)$ s vybraným vrcholem v_0. Označme W jádro grafu G. Pak platí:
> 1. První hráč má vyhrávající strategii, jestliže $v_0 \notin W$.
> 2. Druhý hráč má vyhrávající strategii, jestliže $v_0 \in W$.

Nyní, známe-li vztah mezi jádrem grafu a vítězstvím ve hře, zkuste si znovu prohlédnout, jak se jádro v grafu hledá.

U některých her je nutné připustit i možnost remízy - můžeme ji například považovat za vítězství druhého hráče.

Hra NIM (odebírání sirek)

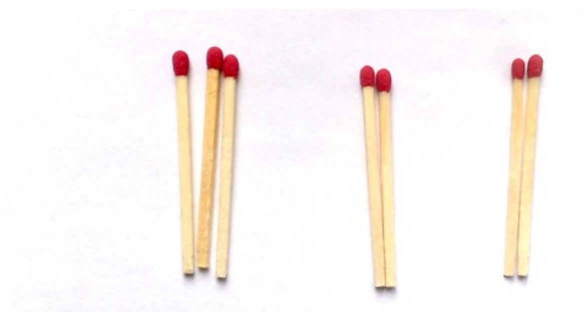
Úvod

Na hře NIM (= odebírání sirek) si ukážeme praktické využití znalostí z oblasti teorie her - jak pomocí jádra grafu už před začátkem hry můžeme určit, který hráč má vyhrávající strategii - stačí nám k tomu pouze vědět, kdo začíná (a kolik hromádek sirek je ve hře).

Ve hře NIM hráči postupně odebírají sirky a ten, který **odebere poslední sirku** vyhrál/prohrál (záleží na variantě hry). My si popíšeme hru, ve které je více hromádek sirek a každý hráč může z jedné hromádky odebrat od jedné do všech sirek. Vítězem je pak hráč, který odebral poslední sirku (viz dále). Poznámka: další častou variantou hry je jedna hromádka sirek, ze které hráči při každém tahu odebírají 1-3 sirky.

Popis hry

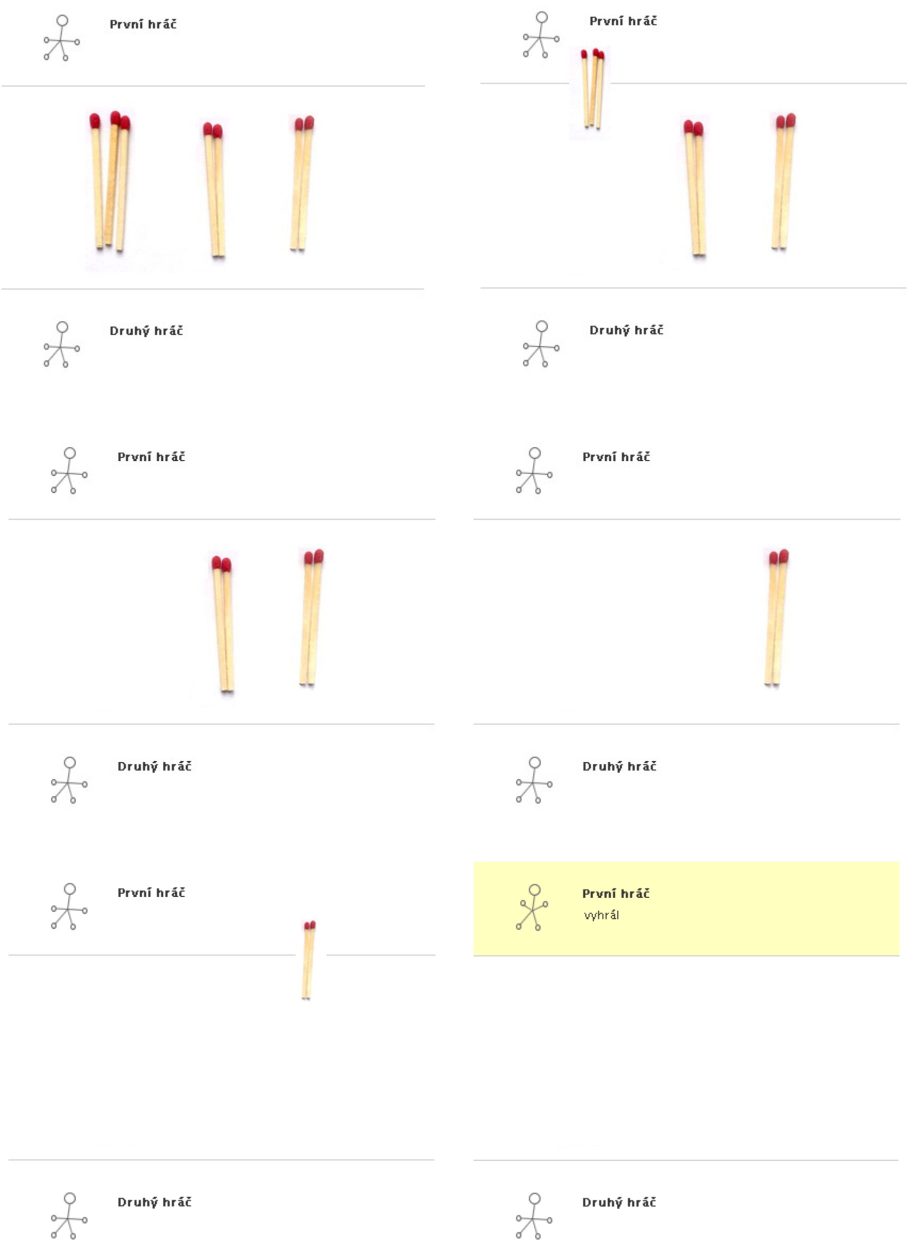
> Uvažujme k hromádek sirek, kdy v i-té hromádce je $n_i \geq 1$ sirek, $i = 1,..., k$.
> Hráči střídavě odebírají sirky z hromádek.
> V daném tahu si hráč zvolí hromádku, z které bude odebírat (kde ještě nejsou odebrány všechny sirky) a odebere minimálně jednu a maximálně všechny sirky vybrané hromádky.
> Hráč, který odebere poslední sirku, vyhrál.
> Hru NIM s k hromádkami o $n_1,...,n_k$ sirkách budeme značit NIM($n_1,...,n_k$).



NIM(3,2,2)

Obr. č. 3.32 - Příklad hry NIM(3,2,2)

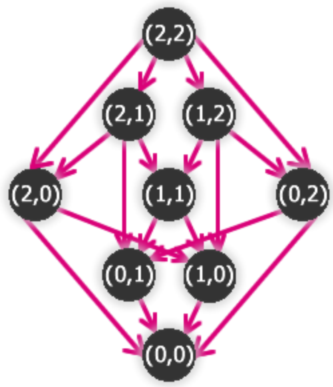
Ukázka konkrétní hry s výhrou prvního hráče



Ukázku hry s výhrou druhého hráče naleznete na CD.

Jak využít teorii grafů?

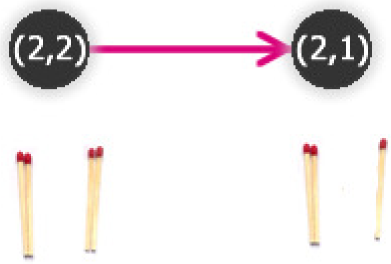
Hru můžeme zakreslit pomocí grafu, viz následující obrázek. Rozsah grafu výrazně roste jak s množstvím hromádek, tak s množstvím sirek, proto jsme situaci **zjednodušili na hru NIM(2,2)**.



Obr. č. 3.33 - Hra NIM(2,2) zakreslená pomocí grafu

Co znamenají čísla u jednotlivých vrcholů?

Jak již bylo vidět na úvodním obrázku (3.32), počty sirek na jednotlivých hromádkách zapíšeme jako uspořádanou k-tici. Ta popisuje stav hry v dané chvíli a zapíšeme ji k vrcholu grafu. Hrana vedoucí do jiného vrcholu pak znamená, že je možný takovýto tah (viz obrázek 3.34).

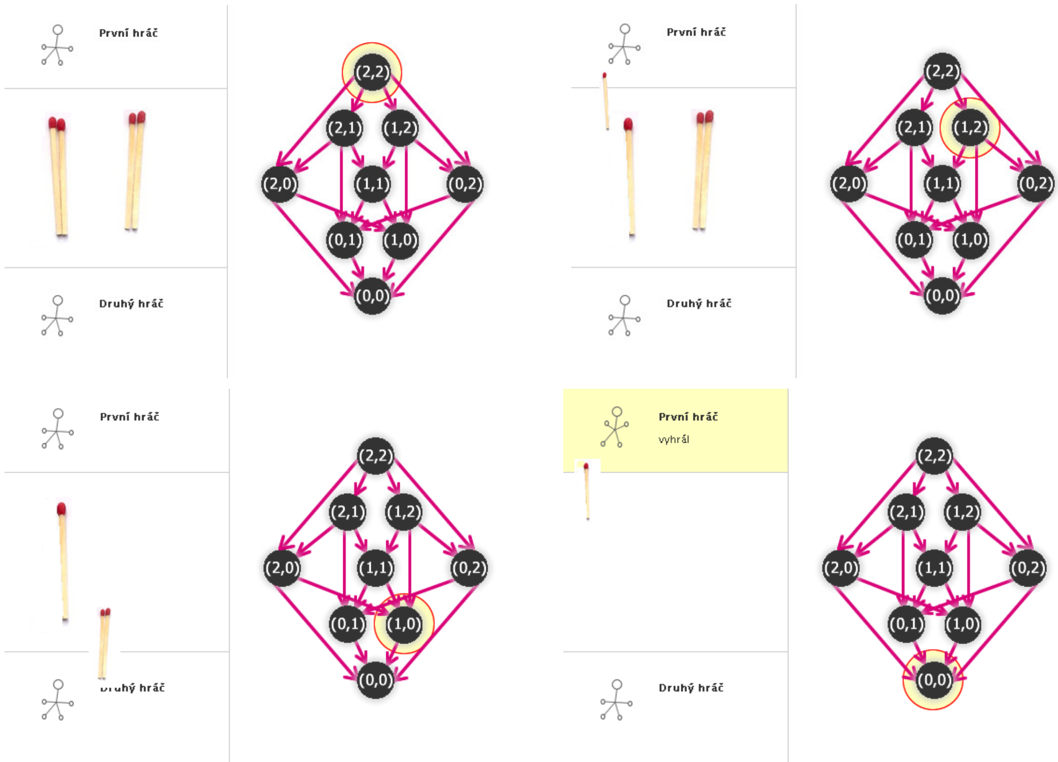


Obr. č. 3.34 - Význam čísel příslušných k vrcholům grafu

Například z vrcholu **(2,2)** vedou orientované hrany do čtyř vrcholů - **(2,0)**, **(2,1)**, **(1,2)**, **(0,2)** - podle toho, odebereme-li jednu nebo dvě sirky a odebereme-li je z první nebo druhé hromádky.

Do některých vrcholů může vést také více cest (hlavně vždy vede cesta od vrcholu **(2,2)** do vrcholu **(0,0)** - ať hrajeme jakkoliv, nakonec oba hráči odeberou všechny sirky).

Možnost vývoje konkrétních her spolu se zakreslením do grafů



Animaci s jiným vývojem hry naleznete na CD.

Kdo tedy vyhraje NIM(2,2)?

Nejprve zkusme úlohu vyřešit úvahou. **První** (začínající hráč) může odebrat jednu nebo dvě sirky.

Odebral jednu sirku:

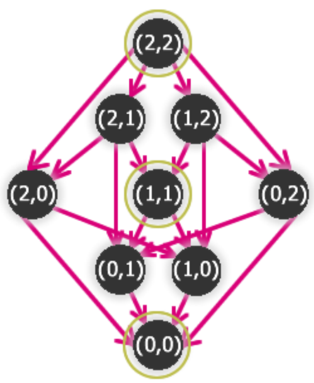
(Hra tedy zůstala ve stavu *(2,1)* nebo *(1,2)*, předpokládejme bez újmy na obecnosti *(2,1)*.) Druhý hráč, chce-li vyhrát, musí odebrat také jednu sirku z první hromádky (tedy *(1,1)*).

Prvnímu pak nezbyde nic jiného, než vzít jednu sirku (ať už z první nebo druhé hromádky) a druhý hráč odebere zbývající poslední a vyhrál. Kdyby totiž druhý hráč vzal po prvním tahu obě dvě sirky z první hromádky (*(0,1)*), první vezme poslední zbývající a vyhrál. A kdyby druhý hráč po prvním tahu vzal jednu z druhé hromádky (*(2,0)*), první vezme zbývající dvě a vyhrál.

Odebral dvě sirky:

Hra je v tom případě *(2,0)* nebo *(0,2)*. Druhý hráč tedy odebere zbylé dvě sirky a vyhrál. Vidíme tedy, že vyhrávající strategii má druhý hráč - neudělá-li chybu, neprohraje. Podle této souvislosti mezi jádrem grafu a vyhrávající strategií by tedy v jádru grafu odpovídajícího dané hře měl být vrchol popisující začátek NIMu(2,2).

Pokud ke grafu na obrázku 3.33 nalezneme jeho jádro, dostaneme tento výsledek:



Obr. č. 3.35 - Graf hry NIM(2,2) s vyznačeným jádrem

Počáteční vrchol je obsažen v jádru grafu, odpovídá to tedy závěru, ke kterému jsme u tohoto příkladu došli úvahou.

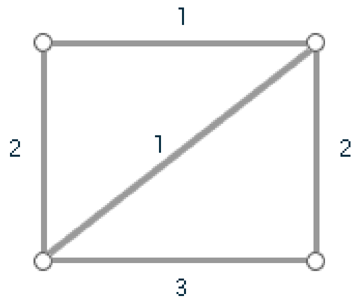
4. Procvičování

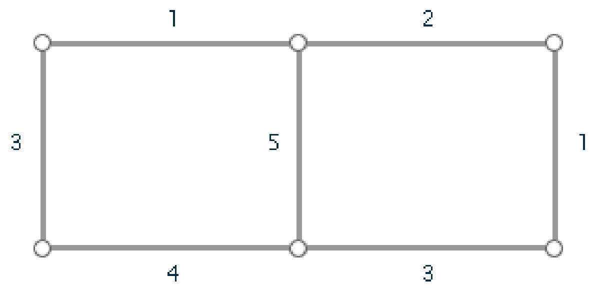
Tato část obsahuje, stejně jako *Základní pojmy* a *Vybrané problémy*, úlohy pouze z diplomové práce, na přiloženém CD naleznete následující:

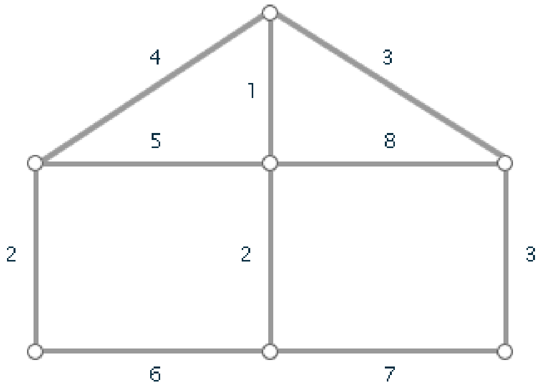
- Základní pojmy (procvičování úloh na základní pojmy)
- Minimální kostra grafu
- Počty koster grafu
- Jednotažky
- Barvení mapy
- Úloha s kamarády

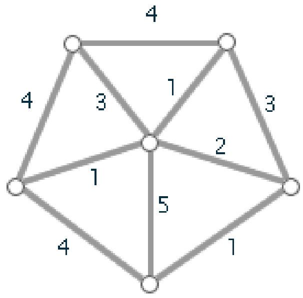
Maximální kostra

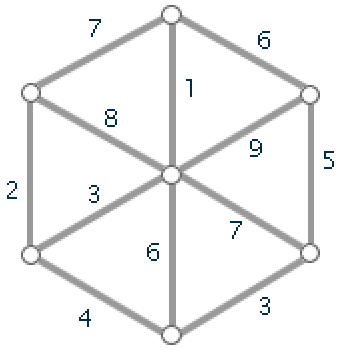
Nalezněte maximální kostry grafů:



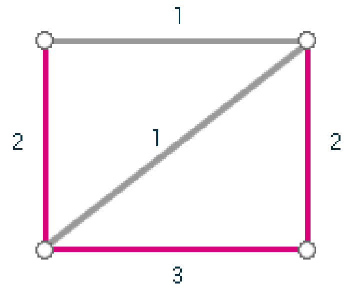


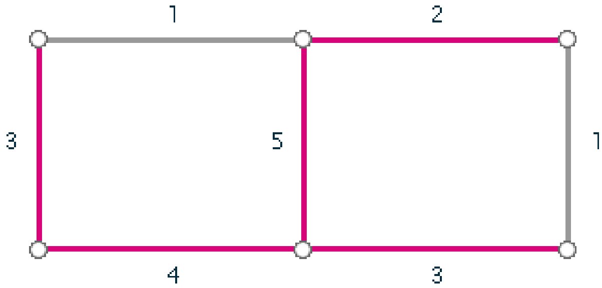


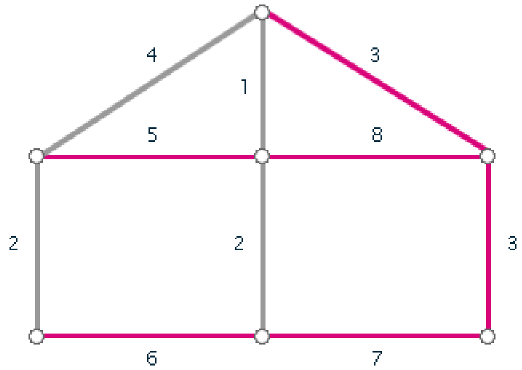


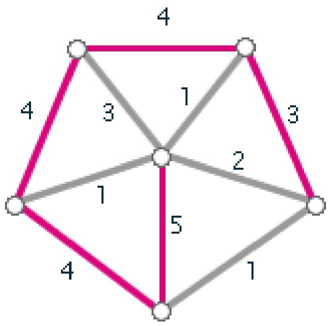


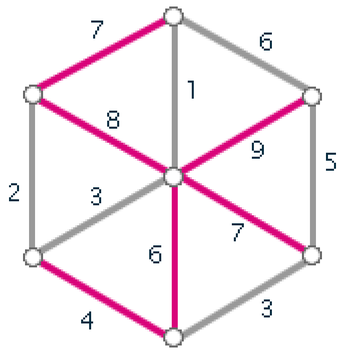
Řešení:











Váhy a závaží

Úloha

Máme k dispozici **rovnoramenné váhy** a tři závaží - 5 kg, 2 kg a 1 kg.

Pomocí nich chceme zjistit hmotnost předmětu (předpokládejme, že velikost hledané hmotnosti je přirozené číslo).

Ukažte pomocí teorie grafů, předměty o jaké hmotnosti jsme schopni zvážit.

Nápověda

Snadno vidíme, že navážíme 1 kg, 2 kg, 5 kg a 8 kg (hmotnost všech závaží na jedné straně vah).

Otázkou zůstává, jaké jiné hmotnosti navážíme pomocí různého pokládání závaží na levou i pravou stranu vah.

Na každý vrchol grafu si zakreslíme dvě čísla - **součet hmotností závaží na levé straně** a **součet hmotností na pravé straně**.

Další vrcholy (= nové hmotnosti, které umíme navážit) budeme získávat přidáváním nových vrcholů tím, že ke stávajícím zkusíme přidat některé z dosud nepoužitých závaží.

Hrany budou znázorňovat přidání závaží na některou ze stran vah.

Řešení

Každý vrchol v našem grafu bude znázorňovat jedno rozmístění závaží na vahách. Dohodneme se, že předmět, jehož hmotnost hledáme, položíme na pravou misku vah - hmotnost závaží **na levé straně přičítáme** k hmotnosti tělesa, **na pravé straně odečítáme**.

Jak budou vypadat vrcholy grafu?

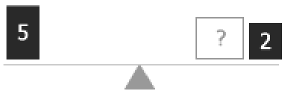
Čísla odpovídající rozdílům *(součet hmotností na levé straně)-(součet hmotností na pravé straně).*

Jak budou vypadat hrany?

Hrany popisují přidání závaží na některou ze stran. Zavedeme značení (**+1** - přidání 1 kg závaží na levou stranu, **-1** - přidání 1 kg závaží na pravou stranu).

Poznámka: může nastat situace, že stejná hmotnost je znázorněna více vrcholy (a nijak nám to nevadí, naopak vidíme více možností, jak se k dané hmotnosti dostat) - v obrázku však kreslíme jen jeden takový vrchol. Například u 1 kg jsou dvě možnosti: 1 kg vlevo a vpravo hledaný předmět a nebo 2 kg vlevo a 1 kg vpravo (s předmětem).

Bude-li předmět vážit 3 kg - na levé straně máme 5 kg závaží, na pravé 2 kg závaží a hledaný předmět. Dvojice čísel, která tomuto stavu odpovídá, je *(5,2).*

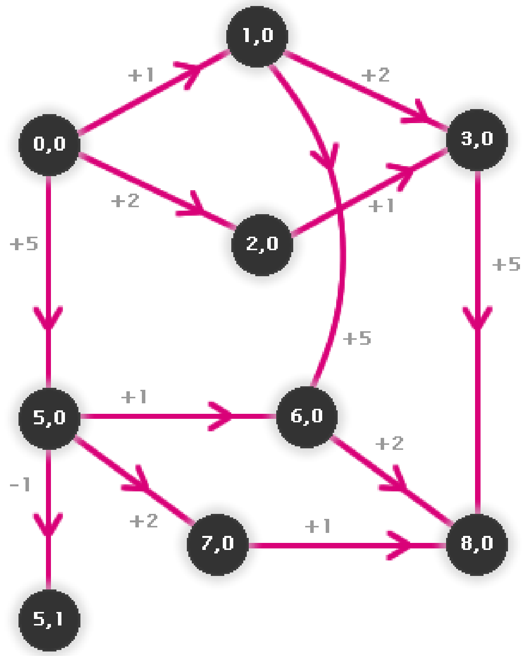


Nyní máme popsáno, jak bude graf vypadat. Začneme vrcholem *(0,0)* (prázdné váhy, resp. pouze předmět na pravé straně). Budeme přidávat další vrcholy odpovídající přidávání závaží na váhy.

Dohoda: nebudeme přidávat závaží tak, aby vycházela hmotnost hledaného předmětu záporná (na pravé straně by spolu s předmětem byla závaží těžší než závaží na levé straně - váhy by se okamžitě převážily doprava a takový výsledek by neměl žádný význam, jen by znepřehledňoval graf).

Nejprve přidáme jedno závaží na levou stranu - dostáváme vrcholy *(1,0)* odpovídající 1 kg a obdobně *(2,0)* a *(5,0)*. Poté přidáme druhé závaží (vlevo či vpravo) - dostaneme např. 3 kg.

A obdobně pokračujeme dál.



Na výsledném grafu nalezneme vrchol odpovídající každé z hmotností 1 kg-8 kg - tedy pokud hmotnost předmětu je jedna z těchto nalezených, dokážeme ji s pomocí rovnoramenných vah a závaží 5 kg, 2 kg a 1 kg zjistit.

Přelévání mléka

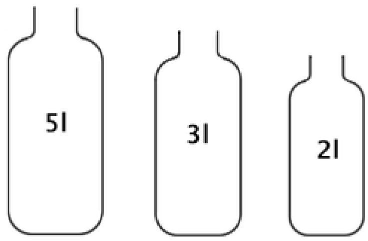
Úloha [15]

Mlékařka má osm litrů mléka ve dvou nádobách, **pětilitrové** a **třílitrové**, zapomněla si však dnes litrovou odměrku.

Přichází zákaznice s **dvoulitrovou** nádobou, ale žádá jen litr mléka. Může mlékařka najít postup, jak odměřit do dvoulitrové nádoby jeden litr mléka, smí-li použít jen přelévání mezi těmito třemi nádobami?

Pokud ano, popište postup.

Pokud ne, zdůvodněte, proč ne.



Nápověda

Použijte podobný princip jako v úloze o převozníkovi - zakreslete si všechna možná množství mléka v nádobách (na každém vrcholu tedy bude údaj ve tvaru *(x,y,z)* - *x* litrů mléka v pětilitrové nádobě, *y* litrů v třílitrové a *z* litrů v dvoulitrové). V tomto grafu pak budeme hledat vhodnou cestu.

Řešení

Všechny možnosti rozlití mléka si zakreslíme jako vrcholy grafu. Na **každém vrcholu budou vždy tři čísla** - počet litrů mléka v první nádobě, druhé a třetí (zvolíme si například pořadí "pětilitrová, třílitrová, dvoulitrová").

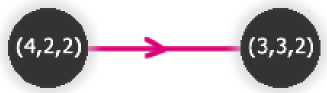
Pokud se z jednoho vrcholu dokážeme dostat do druhého, zakreslíme hranu mezi vrcholy. Rozepíšeme si tedy všechny možné stavy - v součtu dávají 8 litrů (množství mléka, které má mlékařka k dispozici) a v každé nádobě je maximálně tolik mléka, kolik se tam vejde (vrchol *(6,1,1)* nepadá v úvahu, protože první nádoba má kapacitu 5 litrů).

Všechny stavy:

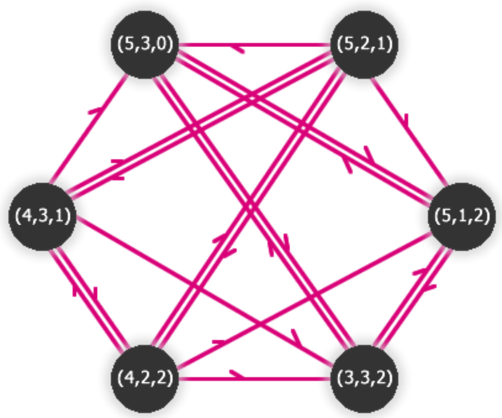
(5,3,0), *(5,2,1)*, *(5,1,2)*, *(4,3,1)*, *(4,2,2)*, *(3,3,2)*

Proč budou hrany grafu orientované?

Například ze stavu *(4,2,2)* se dokážeme dostat do *(3,3,2)* (z první nádoby budeme lít do druhé třílitrové). Zpět to však nejde, protože cestou zpět nedokážeme odměřit litr.



Jak vypadají v grafu všechny možnosti přelití mléka?



Co je pro nás hledaný výsledek?

Začínáme ve vrcholu *(5,3,0)* a hledáme cestu do vrcholů, které mají na posledním místě 1 (1 litr mléka má být nádobě, kterou si přinesla zákaznice), tedy *(4,3,1)* a *(5,2,1)*.

Žádnou takovou **cestu nenajdeme** - tím jsme ukázali, že **úloha nemá řešení**.

Otáčení skleniček

Úloha [18]

Na stole stojí v řadě pět skleniček vedle sebe. Čtyři z nich (nevíme, které) jsou dnem vzhůru a jedna dnem dolů. Úkolem je otočit všechny skleničky dnem dolů. V jednom tahu můžete otočit vždy pouze tři sousední skleničky.

Nalezněte počáteční rozmístění skleniček, pro které je úloha řešitelná.

Nápověda

Rozkreslete si možnosti pomocí grafu, ve kterém bude každému vrcholu odpovídat jedno rozestavení skleniček (např. *VDVVV* - skleničky v řadě dnem vzhůru, dolů, vzhůru, vzhůru, vzhůru) a každé hraně přípustné otočení skleniček.

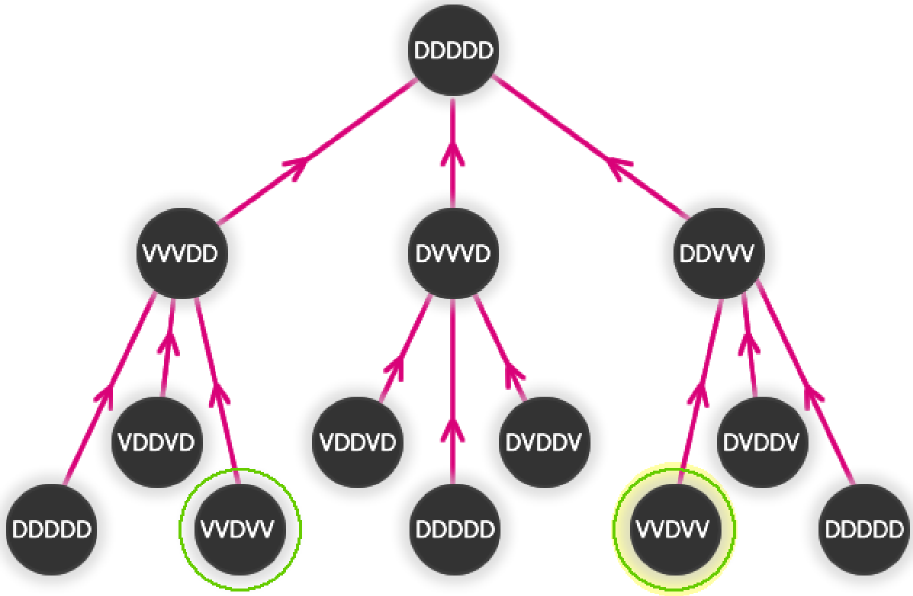
Řešení

Úlohu začneme řešit od konce.

Známe koncový stav, do kterého se chceme dostat (všechny skleničky jsou otočené dnem dolů - *DDDDD*).

Víme také, že pro každé uspořádání skleniček máme jen tři možnosti změny - otočíme **první, druhou a třetí**; **druhou, třetí a čtvrtou** či **třetí, čtvrtou a pátou**.

Do každého vrcholu proto povedou tři hrany - budeme kreslit vrcholy (od stavu *DDDDD* do stavů, ze kterých stav nastal otočením tří skleniček, dokud nenalezneme vrchol, který by odpovídal zadání (čtyři skleničky dnem vzhůru a jedna dnem dolů).



Takové vrcholy najdeme dva - oba přitom odpovídají stavu, kdy je směrem dolů otočená prostřední sklenička - *VVDVV*.

To je hledané řešení naší úlohy.

Malíř a míchání barev

Úloha [15]

Malíř má sedm kelímků a tub s barvami, chce namíchat odstín barvy, který se nevyrábí.

Přál by si, aby "jeho barva" obsahovala aspoň jednu z barev *D*, *E*, nejvýše jednu z barev *A*, *B* a aby obsahovala barvu *C* právě tehdy, když bude obsahovat barvu *B*. Použije-li barvy *C*, musí použít barvu *F*, použije-li *D*, nesmí použít *A*. Nepoužije-li barvu *B*, musí použít barvu *G*, barvu *F* však nesmí míchat s *G*.

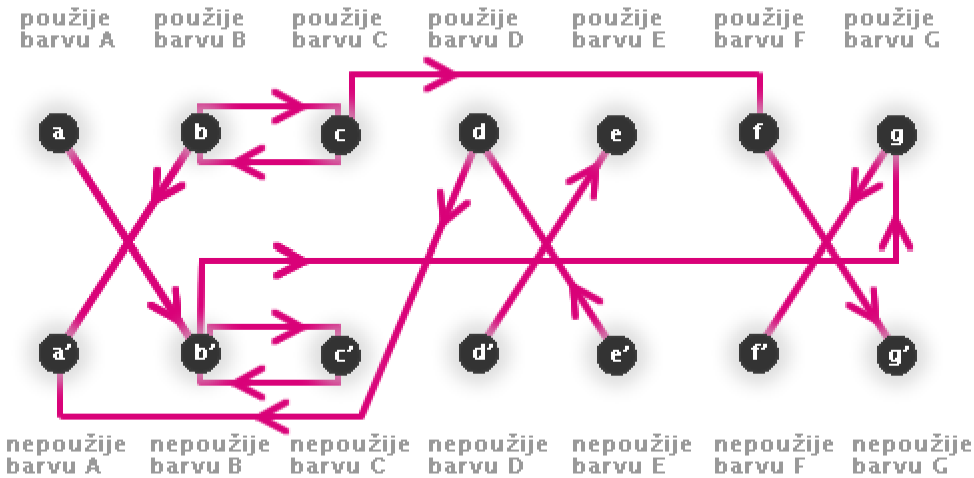
Nalezněte alespoň jednu možnost namíchání barev.

Nápověda

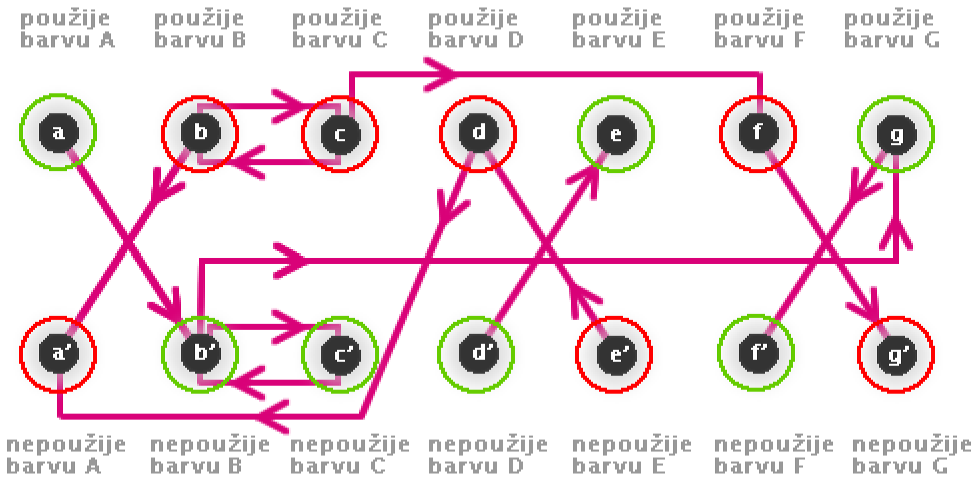
Zakreslete všechny implikace v zadání pomocí grafu s orientovanými hranami. Potom použijte barvení vrcholů.

Řešení

Po zakreslení implikací bude graf vypadat následovně:



Jedno z možných řešení vzniklých barvením vrcholů:



Malíř tedy může použít například barvy *A*, *E* a *G*.

Rozvrh

Úloha

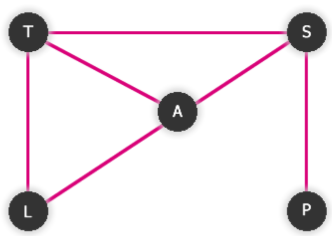
Máte za úkol určit rozvrh pro následující sportovní aktivity: tenis, squash, posilovnu, aerobik a lezení.

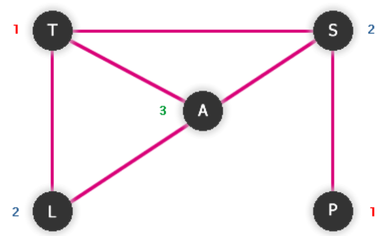
Navrhněte rozvrh, ve kterém budou všechny aktivity naplánované v co nejkratším čase, ovšem nedojde k souběhu tenisu s lezením, lezení a aerobiku, tenisu s aerobikem, squashe s tenisem, squashe s posilovnou.

Nápověda

Jednotlivé aktivity zakreslete jako vrcholy grafu a hranami vyznačte vztah "nesmí probíhat ve stejnou chvíli". Pak použijte barvení vrcholů.

Řešení



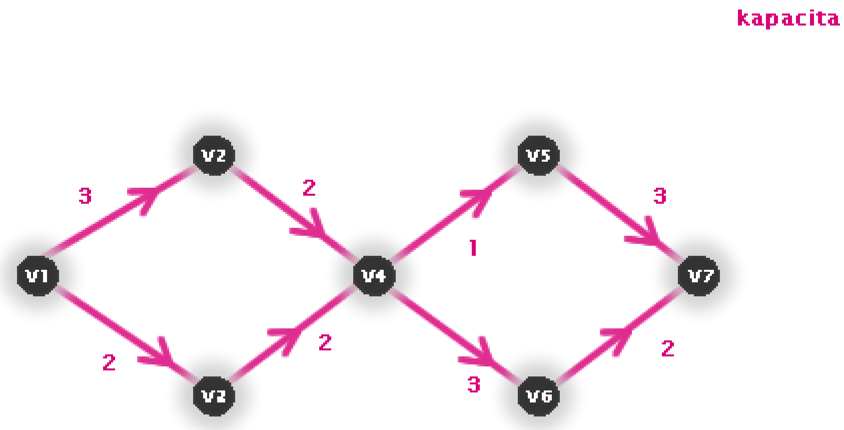


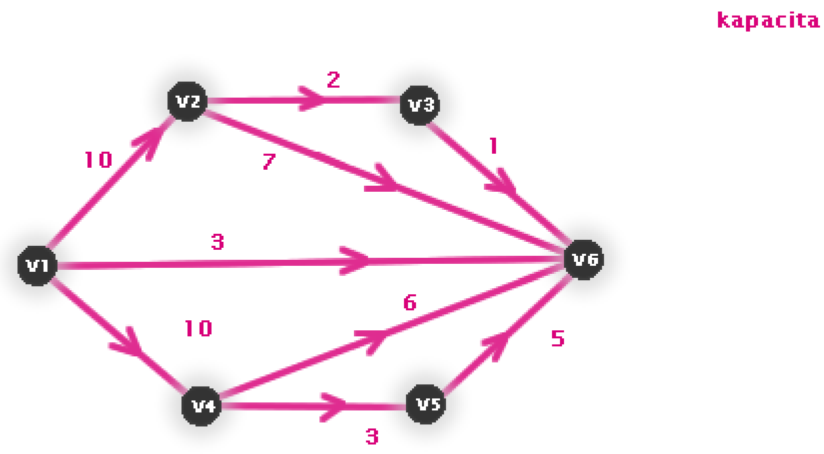
Hledaný rozvrh (jedna z možností):

1.	2.	3.
Tenis, posilovna	Lezení, squash	Aerobik

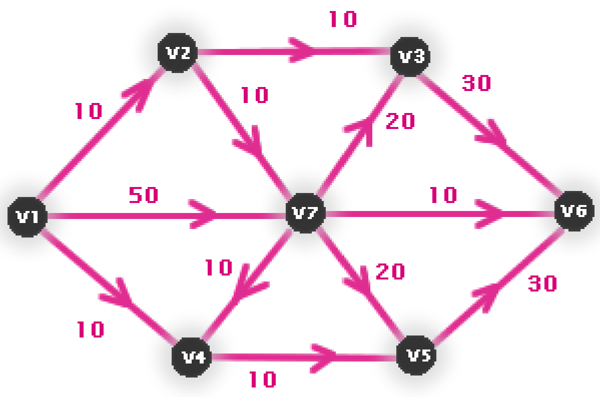
Hledání maximálního toku

Určete maximální tok v grafech:

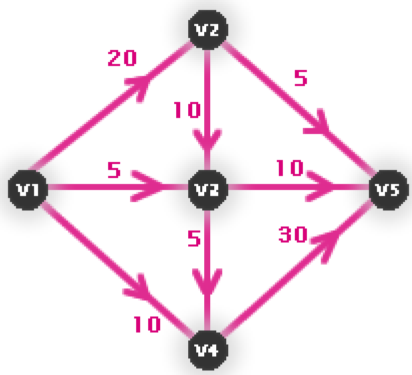




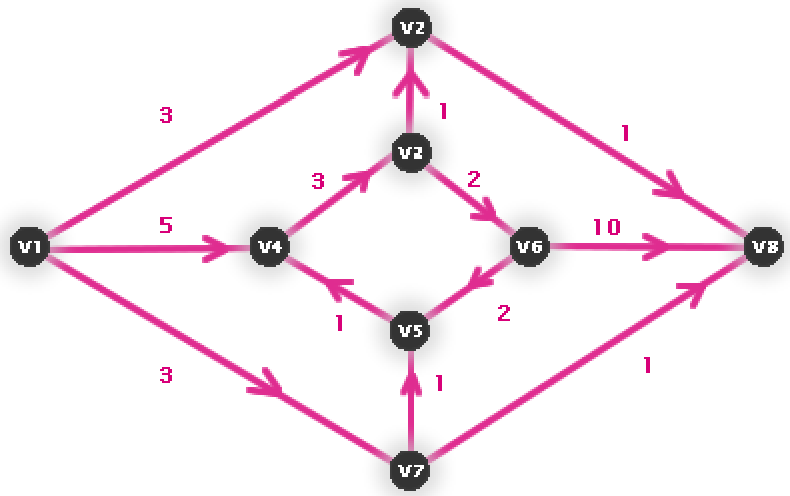
kapacita



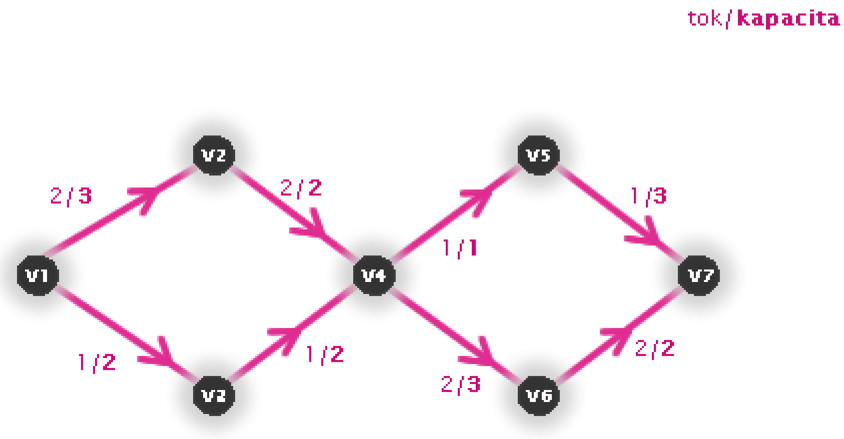
kapacita



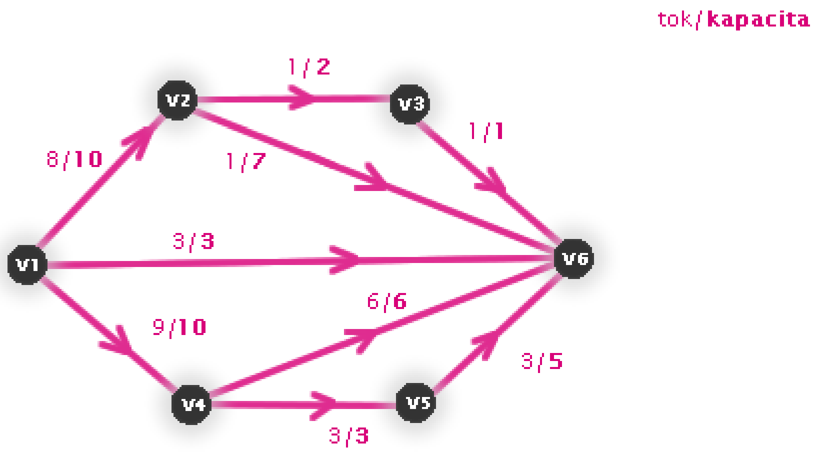
kapacita



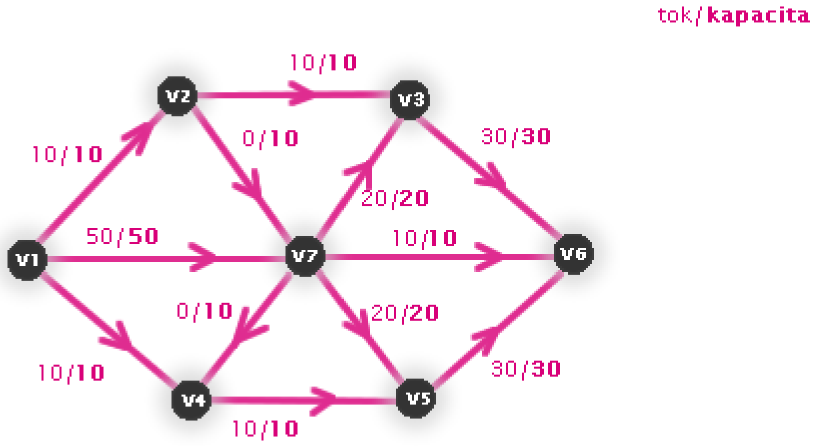
Řešení:



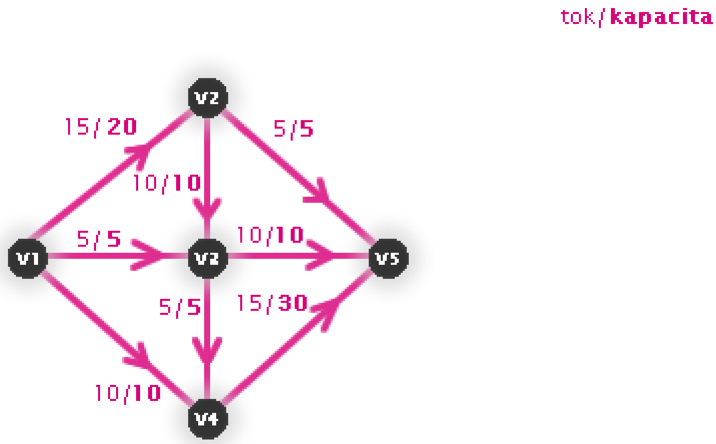
Maximální tok v grafu je 3.



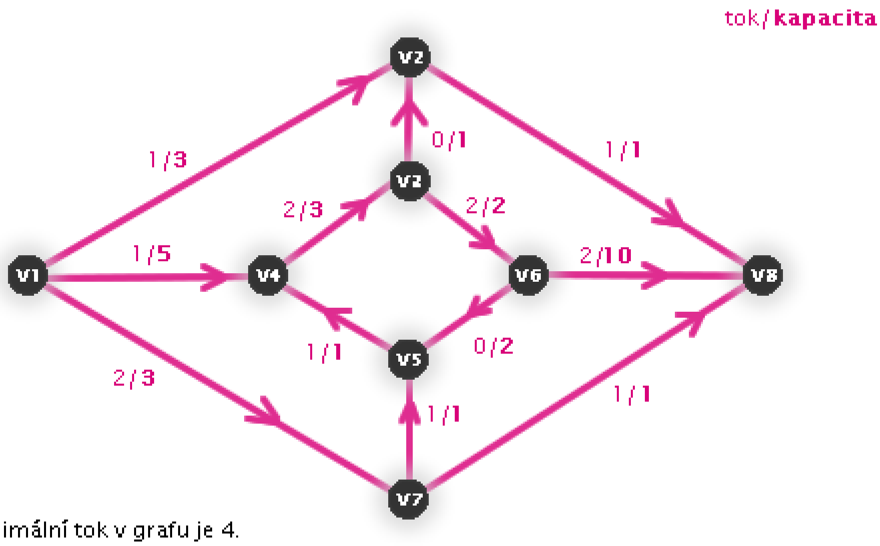
Maximální tok v grafu je 20.



Maximální tok v grafu je 70.



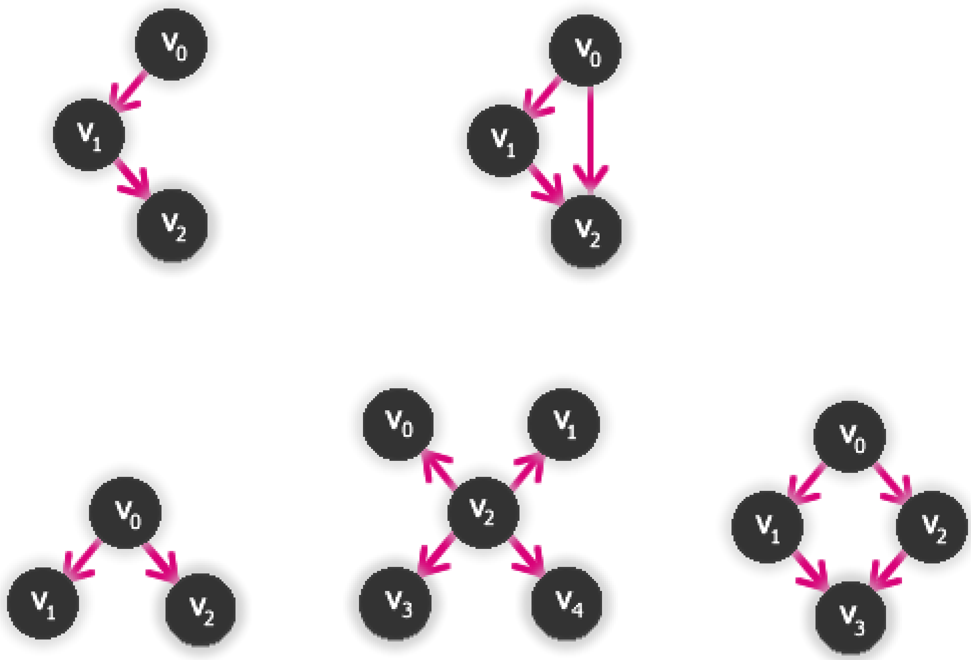
Maximální tok v grafu je 30.



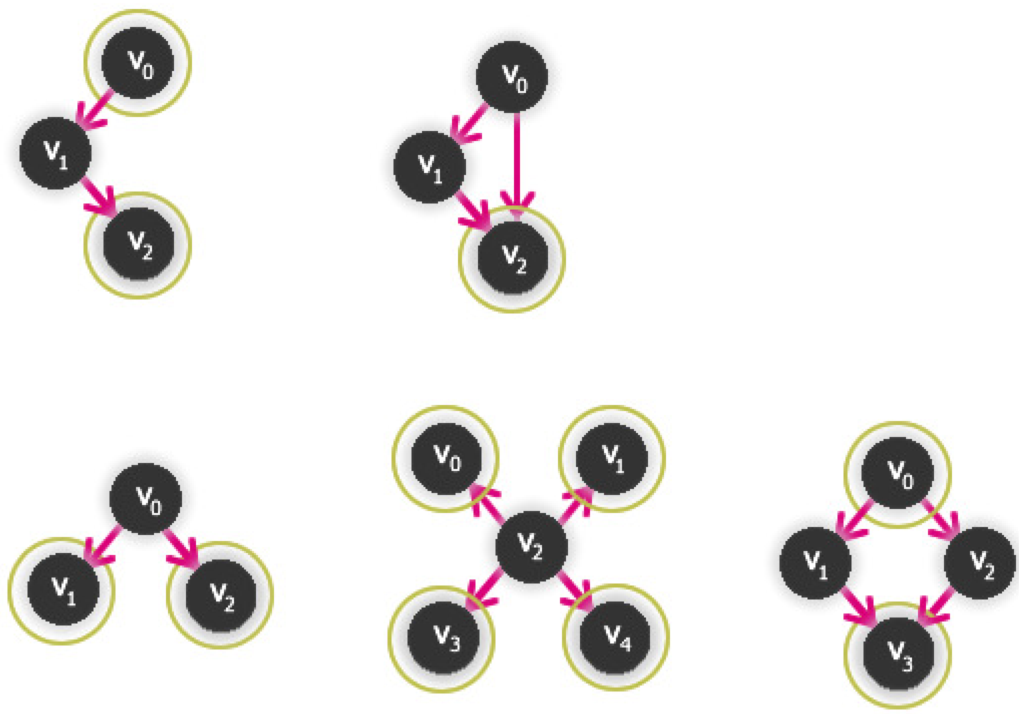
Maximální tok v grafu je 4.

Nalezení jádra grafu

Nalezněte pro každý graf jeho jádro:



Řešení (vrcholy patřící do množiny jádra jsou označeny zeleným kolečkem):



Výhra NIMu (teorie her)

Úloha č. 1:

Který hráč má vyhrávající strategii ve hře NIM(1,1)? První nebo druhý?

Úloha č. 2:

Který hráč má vyhrávající strategii ve hře NIM(2,1)? První nebo druhý?

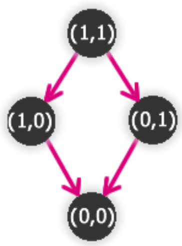
Úloha č. 3:

Který hráč má vyhrávající strategii ve hře NIM(3,1)? První nebo druhý?

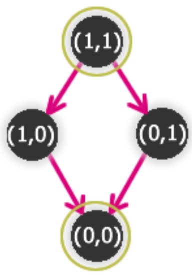
Nápověda a řešení:

Úloha č. 1:

Graf hry:



Graf s vyznačeným jádrem hry:

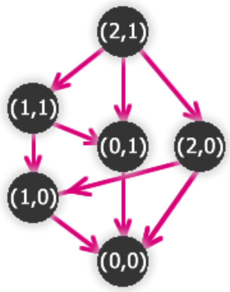


Vidíme, že vrchol (1,1), kterým hra začíná, je v jádru grafu - vyhrávající strategii má proto druhý hráč.

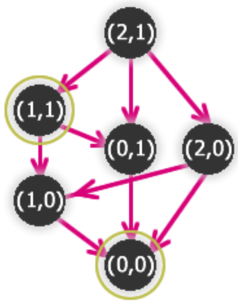
U této hry ani nemá jinou možnost, než vyhrát (nemá šanci udělat chybu).

Úloha č. 2:

Graf hry:



Graf s vyznačeným jádrem hry:

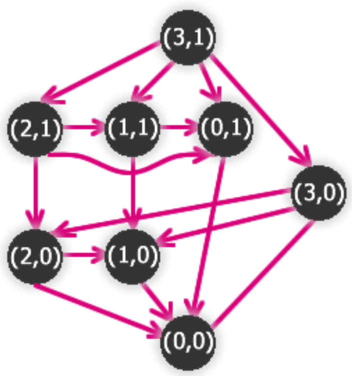


Vidíme, že vrchol (2,1) není součástí jádra grafu - vyhrávající strategii má proto první hráč.

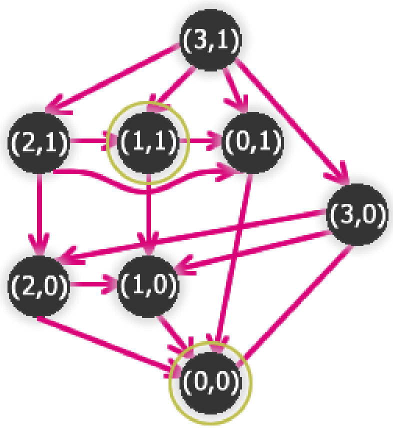
Odpovídá to hře - odebere-li první hráč jednu sirku z hromádky, kde byly dvě, druhému nezbyde, než vybrat jednu z dvou hromádek po jedné sirce a první hráč pak odebere zbývající.

Úloha č. 3:

Graf hry:



Graf s vyznačeným jádrem hry:



Vidíme, že vrchol (3,1) není v jádru grafu - vyhrávající strategii má první hráč. Prohlédněte si graf - potřebuje druhého hráče přimět, aby již ve svém prvním kroku mohl vzít právě jednu sirku.

Závěr

Hlavním úkolem této práce bylo rozsáhlé rozšíření webových stránek (původně bakalářské práce), které poskytují úvod do teorie grafů s vysvětlením základních pojmů a ukázkami řešení nejznámějších problémů. Bakalářská práce se osvědčila nejen jako výukový text pro studenty středních škol - často na ni vysokoškolští učitelé odkazují studenty pro vysvětlení základních pojmů a výraznou část návštěv tvoří návštěvy z vyhledávačů, kdy studenti hledají vysvětlení některých pojmů či řešení problémů. Stránky byly také zařazeny do programu WebArchiv Národní knihovny ČR.

Tato diplomová práce rozšiřuje předchozí práci bakalářskou jak do náročnosti probírané látky, kde nabízí obtížnější témata, tak také do šíře problémů, kde lze teorii grafů využít. Stejně jako u bakalářské práce je kladen důraz na provázání témat hypertextovými odkazy, takže pro návštěvníka by neměl být problém najít si vysvětlení konkrétního pojmu, pokud nezačal stránky číst od úvodu a základních pojmů, ale přišel například z vyhledávače na konkrétní stránku.

Pro pohodlí čtenáře je důležité mít všechny informace o teorii grafů pohromadě (a nikoliv pátrat po pojmech vysvětlených v bakalářské práci), a proto tvoří obě práce jedny společné webové stránky. Barevně je však odlišeno, která část vznikla jako práce bakalářská a která jako diplomová.

Diplomová práce umožňuje snadný tisk textů - animace, kterých web obsahuje značné množství, se automaticky tisknou jako posloupnost obrázků. Z tohoto důvodu bylo pro animace použito právě přepínání obrázků pomocí JavaScriptu a nikoliv Flash či Java applety. Další výhodou je také nižší náročnost na vybavení počítače návštěvníka (nejsou nutné žádné rozšiřující pluginy).

Webové stránky jsou vytvořené v XHTML s použitím kaskádových stylů (CSS) a využitím PHP na straně serveru. Obrázky grafů a i jiné ilustrace byly nakresleny v programu Adobe (Macromedia) Fireworks.

Vytvořené stránky doplňují jiné středoškolské internetové učebnice umístěné na stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK [11] v rámci aplikací informačních technologií ve výuce.

Literatura a zdroje

[1] Matoušek J., Nešetřil J. (2007): Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum, Praha

[2] Wolfram Mathworld: Icosian Game, elektronický text, obrázek citován 12. 4. 2008, http://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html

[3] 57. ročník matematické olympiády (2007/2008), Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C, úloha 3

[4] Zagorová P. (2001): Historie a vývoj teorie grafů, seminární práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita, Brno - dostupné na www: http://www.math.muni.cz/~xzagorov/hist_mat/Hist_mat.doc, citováno 19. 4. 2008

[5] Šišma P. (1997): Teorie grafů 1736-1963, Prometheus, Praha

[6] Opava Z. (1989): Matematika kolem nás, Albatros, Praha

[7] Anderson I. (2001): A First Course in Discrete Mathematics, Springer, London

[8] Wikipedia (EN verze), slepá mapka Evropy, obrázek citován 30. 3. 2008, http://en.wikipedia.org/wiki/Image:BlankMap-Europe.png

[9] Wikipedia (EN verze), slepá mapka států USA, obrázek citován 30. 3. 2008, http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Blank_maps#North_America_2

[10] Mapy.cz (vzdálenosti mezi městy), elektronická služba, údaje citovány 1. 2. 2008, http://mapy.cz

[11] Vaníček J. a kolektiv (2008): Teoretické základy informatiky, Kernberg Publishing, s.r.o., Praha

[12] Robertson N., Sanders D.P., Seymour P.D., Thomas R. (1997): The Four Color Theorem, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 70, 2-44

[13] Gonthier G. (2005): A computer-checked proof of the Four Color Theorem, Technical Report, Microsoft Research

[14] Jirovský L. (2008): Vybrané problémy z teorie grafů ve výuce na střední škole, bakalářská práce, MFF UK, Praha

[15] Šedivý J. (1966): O konečných grafech a jejich využití, časopis Matematika ve škole, ročník XVI, str. č. 496-509, 556-575

[16] Biggs N. (2002): Discrete mathematics, Oxford University Press

[17] Sxc.hu (zdroj ilustračních obrázků - vlk, koza, zelí, skleničky, rovnoramenné váhy), elektronická služba pro výměnu fotografií

[18] Renc Z. (2000): Sbírka řešených úloh z matematiky, fyziky a informatiky (přijímací řízení na MFF UK v letech 1992-1999), Matfyzpress, Praha

[19] Mareš M.: Algoritmy a datové struktury II, elektronický text, http://mj.ucw.cz/vyuka/0910/ads2/, citováno 15. 3. 2010

[20] Turzík D., Pavlíková P. (2007): Diskrétní matematika, VŠCHT, Praha