Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Tomáš Franc

Zavedení exponenciály a logaritmu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,
Katedra matematické analýzy

Studijní program:
Fyzika, Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy

2010

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D., který mi při psaní této práce ochotně pomáhal a poskytl cenné rady a návrhy, které přispěly ke zlepšení celého textu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 3.8.2010 Tomáš Franc

Obsah

Název práce: Zavedení exponenciály a logaritmu
Autor: Bc. Tomáš Franc
Katedra: Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Katedra matematické analýzy
e-mail vedoucího: barta@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této diplomové práci uvedeme šest definic exponenciály o základu e a pět definic přirozeného logaritmu. Dokážeme korektnost jednotlivých definic, odvodíme základní vlastnosti obou funkcí a ukážeme ekvivalenci všech definic pro danou funkci. Podíváme se, jak se tyto funkce zavádí v některých učebnicích, a to jak v učebnicích pro vysoké školy, tak pro gymnázia. Budeme diskutovat výhody a nevýhody všech definic, zaměříme se při tom na potřebnou teorii a obtížnost či délku důkazů. V závěru práce dáme některá doporučení ohledně zavedení těchto funkcí na středních a vysokých školách a uvedeme několik námětů k dalšímu zkoumání.

Klíčová slova: exponenciála, logaritmus, definice, Eulerovo číslo

Title: Defining the exponential function and logarithm
Author: Bc. Tomáš Franc
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Department of Mathematical Analysis
Supervisor's e-mail address: barta@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this diploma thesis we will introduce six definitions of the natural exponential function and five definitions of the natural logarithmic function. We will prove the definitions' correctness, derive basic properties of both funcions and show the equivalence of all definitions for each function. We will see how these funcions are defined in some textbooks for universities and in textbooks for grammar schools. We will discuss the benefits and drawbacks of all definitions and will use the criteria such as required theory and difficulty or length of proofs. At the end of the thesis we will make some recommendations regarding defining these functions at high schools and universities and we will give several suggestions for an additional research.

Keywords: exponential, logarithm, definition, Euler's number

Úvod

Exponenciála se v literatuře asi nejčastěji definuje pomocí funkcionální rovnice

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

a nějaké dodatečné podmínky (nutné kvůli jednoznačnosti zaváděné funkce), nejčastěji to je podmínka v podobě limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1. \tag{2}$$

Logaritmus se potom definuje jako funkce inverzní k exponenciále. Případně je velmi častým způsobem zavést nejprve logaritmus pomocí integrálu

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad x \in (0, +\infty) \tag{3}$$

a pak exponenciálu definovat jako funkci inverzní k logaritmu. Když se následně odvozují vlastnosti exponenciály, dojde se k jejímu vyjádření pomocí Taylorovy řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

a rovněž se ukáže, že exponenciála vyhovuje diferenciální rovnici

$$y' = y \tag{5}$$

s počáteční podmínkou

$$y\,(0) = 1. \tag{6}$$

V té chvíli následuje komentář, že exponenciálu lze ekvivalentně zavést právě řadou (4) nebo pomocí diferenciální rovnice (5) s počáteční podmínkou (6), avšak podrobnosti o takovém způsobu zavedení většinou chybí. V případě logaritmu je situace mírně odlišná, pokud se logaritmus zavede integrálem (3) či jako funkce inverzní k exponenciále, pak žádný komentář o jiné, ekvivalentní definici většinou nenásleduje.

Je zavedení exponenciály řadou (4) nebo pomocí diferenciální rovnice (5) s počáteční podmínkou (6) náročnější nebo naopak snažší než zavedení pomocí funkcionální rovnice (1) a podmínky (2)? Jsou všechny tyto definice skutečně ekvivalentní? Proč se v literatuře používá jedna definice exponenciály častěji než ostatní? A není možné definovat exponenciálu ještě nějakým dalším způsobem? Jsou nějaké další definice pro logaritmus kromě výše zmíněných? Je lepší nejprve zavést exponenciálu a logaritmus pak definovat jako funkci inverzní nebo naopak? Na tyto otázky by měla odpovědět právě tato práce.

Před první kapitolou je Předmluva, ve které je uvedeno, čím vším se v této práci budeme zabývat, co naopak zkoumat nebudeme, jaký způsob číslování teorémů budeme používat apod.

V první kapitole se budeme zabývat exponenciálou, uvedeme její možné definice, dokážeme korektnost všech definic, odvodíme vlastnosti exponenciály ze všech definic a na konci první kapitoly ukážeme, že všechny definice exponenciály jsou ekvivalentní.

V druhé kapitole bude středem pozornosti logaritmus a budeme postupovat analogicky jako u exponenciály, uvedeme možné definice logaritmu, dokážeme jejich korektnost, odvodíme vlastnosti logaritmu a ukážeme evkivalenci všech definic logaritmu.

Ve třetí kapitole porovnáme výhody a nevýhody jednotlivých definic exponenciály a logaritmu, kritérii budou náročnost teorie, obtížnost či délka důkazů, zamyslíme se, které definice exponenciály a logaritmu jsou nejvhodnější k zavedení těchto funkcí na středních školách a které definice jsou nejvhodnější k zavedení na školách vysokých.

Na konci celé práce se nachází Dodatek, ve kterém uvádíme tvrzení a věty matematické analýzy, které jsme v této práci potřebovali k některým odvozením.

Předmluva

Název práce a Úvod obsahuje pojmy *exponenciála* a *logaritmus*. Co tím ovšem máme na mysli? Exponenciálou budeme v celé práci stručně označovat přirozenou exponenciální funkci, tj. exponenciální funkci o základu Eulerova čísla e a logaritmem budeme označovat přirozenou logaritmickou funkci, tj. logaritmickou funkci o základu e.

V celé práci se budeme zabývat zaváděním exponenciály a logaritmu pouze v oboru reálných čísel, zavedení v oboru komplexních čísel zde dělat nebudeme.

Exponenciální a logaritmické funkce mají kromě čísla e samozřejmě i jiné základy (libovolné kladné číslo různé od jedné), jejich zaváděním se v této práci zabývat nebudeme. Ve 3. kapitole alespoň uvedeme několik poznámek ohledně závádění všech exponenciálních a logaritmických funkcí.

V Úvodu jsme uvedli, že se při zavádění exponenciály pomocí funkcionální rovnice (1) používá ještě dodatečná podmínka v podobě limity (2). My však v této práci použijeme jinou podmínku, která je s podmínkou (2) ekvivalentní (ekvivalenci obou podmínek ukážeme v 1. kapitole), a sice

$$f(x) \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proč užijeme právě tuto podmínku zdůvodníme v Poznámce 2.16.

V této práci se budeme zabývat exponenciálou a logaritmem, avšak důraz budeme klást především na exponenciálu. Je to tím, že pro logaritmus se celá řada důkazů provede velmi podobně jako v případě analogických odvození u exponenciály. Důraz na exponenciálu se projeví mj. např. tím, že v případě exponenciály odvodíme její vlastnosti z každé definice zvlášť, u logaritmu odvodíme vlastnosti pouze z jedné definice.

V práci budeme používat následující způsob číslování definic, vět, tvrzení, lemmat a poznámek (dále budeme užívat souhrnný pojem teorém):
`číslo podkapitoly.číslo teorému v podkapitole`. Pokud se budeme na nějaký teorém odkazovat v rámci jedné kapitoly, použijeme číslo ve výše uvedeném formátu, pokud bychom se odkazovali na teorém v jiné kapitole, pak před číslo

teorému ještě přidáme číslo kapitoly, tj. při odkazování např. na teorém číslo 2.1.5 se bude jednat o 5. teorém v 1. podkapitole 2. kapitoly a pokud se odkážeme na teorém 3.4, pak půjde o 4. teorém ve 3. podkapitole v téže kapitole, kde jsme odkaz učinili. Teorémy v Dodatku budeme číslovat způsobem `D.číslo teorému v Dodatku` a odkazovat se tím pádem budeme rovněž v tomto tvaru, neboť v tomto případě nemůže dojít ke zmatení. Rovnice budeme číslovat ve tvaru `číslo kapitoly.číslo rovnice v kapitole` a rovněž se na ně budeme v tomto tvaru odkazovat[1].

Některé důkazy, které v této práci provedeme, jsou v učebnicích velmi časté (jedná se zejména o důkazy související s definicí exponenciály pomocí rovnice (1) a podmínky (2)), takže by bylo možné se na ně odkázat. To ovšem neuděláme a všechny důkazy zde provedeme, jednak aby čtenář měl všechny důkazy ihned k dispozici, jednak abychom pak mohli porovnávat jednotlivé definice exponenciály i z hlediska délky a náročnosti potřebných důkazů. Přebírané důkazy budeme podle našich potřeb modifikovat. U některých důkazů uvedeme i zdroj, ze kterého jsme čerpali. Důkazy, kde zdroj neuvedeme, lze nalézt hned v několika knihách a nebo jsme je nikde nenalezli a provedli je (i když jsou pravděpodobně někde provedeny).

K některým odvozením budeme potřebovat tvrzení z matematické analýzy, která uvedeme v Dodatku. Většinou se jedná o tvrzení běžně probíraná, takže student vysoké školy by je měl znát a mohlo by se zdát, že většina Dodatku je zbytečná. Dodatek jsme k této práci zařadili proto, že se budeme snažit zpřístupnit text středoškolským žákům, kteří potřebná tvrzení nemají k dispozici a mohly by jim tak uniknout některé souvislosti, případně by jim mohla být některá odvození zcela nejasná. Dalším důvodem je snaha usnadnit práci učitelům, kteří tak díky této práci budou mít všechna potřebná tvrzení matematické analýzy ihned k dispozici (navíc v takové podobě, kterou vyžaduje tato práce – viz úvodní komentář v Dodatku).

[1]To neplatí pro rovnice v Úvodu, kde jsme použili specifické číslování – viz zpět.

Kapitola 1

Exponenciála

Na úvod kapitoly uveďme přehledně různé možnosti, jak se exponenciála dá zavést.

Definice E1. Funkci f, která vyhovuje funkcionální rovnici

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

a podmínce

$$f(x) \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

nazýváme exponenciála.

Definice E2. Exponenciálou nazýváme funkci definovanou následujícím způsobem

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Definice E3. Exponenciálou nazýváme funkci definovanou následujícím způsobem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Definice E4. Exponenciálou nazýváme funkci, která je maximálním řešením diferenciální rovnice

$$y' = y \tag{1.5}$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = 1. \tag{1.6}$$

Definice E5. Exponenciálou budeme nazývat obecnou mocninu e^x s pevným základem e a proměnným exponentem $x \in \mathbb{R}$, kde

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.7}$$

Poznámka. Funkci obecná mocnina v této práci zavádět nebudeme. Aby však bylo jasné, co přesně máme touto funkcí na mysli, uvádíme v Dodatku definici obecné mocniny, viz Definici D.61.

Poznámka. V celé práci budeme pod označením e^x mít na mysli pouze funkci z Definice E5 (i když jde o „obecné“ označení exponenciály).

Definice E6. Inverzní funkci k funkci logaritmus nazýváme exponenciála.

Poznámka. Logaritmus je zaveden v Kapitole 2.

1.1 Korektnost definic

V této podkapitole ukážeme, že jednotlivé definice exponenciály jsou korektní, tj. že mají smysl, a jedná se tedy o „dobře“ definované funkce. U každé definice vždy nejprve uvedeme, za jakých podmínek bude daná definice korektní.

Korektnost Definice E1

Definice E1 bude korektní, jestliže funkce s požadovanými vlastnostmi existuje a jestliže taková funkce existuje pouze jedna. Jak uvidíme, důkaz je poměrně náročný, takže se nabízí otázka, zda neexistují jednodušší důkazy. Na to odpovíme ve 3. kapitole.

Věta 1.1. *Existuje právě jedna funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující funkcionální rovnici (1.1) a podmínce (1.2).*

Důkaz. Důkaz je obsažen v Lemmatech 1.2, 1.5, 1.7, 1.8, 1.9 a 1.10. □

V následujících lemmatech dokážeme Větu 1.1 a při tom odvodíme některé vlastnosti exponenciální funkce (které jsou pro důkaz Věty 1.1 potřeba). Později odvodíme některé další vlastnosti exponenciály.

Lemma 1.2. *Pro každou funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí:*

(i) $f(0) = 1$;

(ii) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*.*

Důkaz.

(i) Dosadíme-li $x = y = 0$ do (1.1), získáme rovnost $f(0) = (f(0))^2$, odkud plyne $f(0) = 0$ nebo $f(0) = 1$. Možnost $f(0) = 0$ je však ve sporu s podmínkou (1.2), takže nutně je $f(0) = 1$.

(ii) Dosadíme-li $y = -x$ do (1.1), získáme rovnost (s ohledem na již dokázanou vlastnost (i)) $1 = f(0) = f(x - x) = f(x) f(-x)$. Tato rovnost je platná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a proto je $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Rovnost

$$f(x) f(-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

proto můžeme vydělit nenulovým členem $f(x)$ a obdržíme tak dokazovanou vlastnost.

(iii) S využitím (1.1) získáme výraz $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, který je vždy nezáporný díky druhé mocnině. Již jsme v části (ii) dokázali $f(x) \neq 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je nutně $f(x) > 0$.

(iv) Tuto vlastnost dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ uvedená vlastnost platí triviálně. Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ platí $f(kx) = (f(x))^k$, pak s využitím (1.1) obdržíme

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) f(x) = (f(x))^k f(x) = (f(x))^{k+1}. \quad \square$$

Poznámka 1.3. Ukažme ještě další způsob, jak odvodit část (iii) Lemmatu 1.2. Z podmínky (1.2) ihned plyne $f(x) \geq x + 1 > 0$ pro $x > -1$, takže tím spíš platí

$$f(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x > 0. \tag{1.9}$$

Z rovnosti (1.8) společně s (1.9) plyne $f(-x) > 0$ pro $x > 0$, což je ekvivalentní s $f(x) > 0$ pro $x < 0$, takže celkově s ohledem na (1.9) a část (i) Lemmatu 1.2 dostáváme platnost nerovnosti $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka 1.4. Ve znění Lemmatu 1.2 jsme použili obrat „Pro *každou* funkci $f\dots$“, protože zatím nevíme, zda funkce f vůbec existuje a zda taková funkce existuje pouze jedna. Lemma 1.2 tedy platí, ať už tedy žádná taková funkce neexistuje nebo jich existuje hned několik.

Lemma 1.5. *Pro každé reálné číslo x existuje vlastní limita*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{1.10}$$

Důkaz. Použijeme Větu D.5, podle které stačí dokázat, že pro každé $x\in\mathbb{R}$ je posloupnost $a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ (a) monotónní od nějakého přirozeného čísla n_0 a (b) omezená. Zvolme $x\in\mathbb{R}$ pevné, pak jistě existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $n_0>|x|$ (n_0 tedy závisí na x).

(a) Pro všechna přirozená čísla $n\geq n_0$ zřejmě platí $\left(1+\frac{x}{n}\right)>0$ a lze proto použít AG-nerovnost (Tvrzení D.2) ve tvaru

$$a_1a_2\dots a_na_{n+1}\leq\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

kde $a_1=a_2=\dots=a_n=1+\frac{x}{n}$, $a_{n+1}=1$. Pak totiž platí

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left(\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

neboli $a_n\leq a_{n+1}$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy neklesající pro všechna $n\geq n_0$.

(b) Zvolme pevné $k\in\mathbb{N}$, $k\geq n_0$. Platí

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{nk}\right)^n}=\left(\frac{nk}{nk+x}\right)^n=\left(1-\frac{x}{nk+x}\right)^n, \tag{1.11}$$

kde n je libovolné přirozené číslo. Poslední člen odhadneme pomocí Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1)

$$\left(1-\frac{x}{nk+x}\right)^n\geq 1-\frac{nx}{nk+x}\geq 1-\frac{x}{k}. \tag{1.12}$$

Poslední nerovnost platí, neboť jistě platí $nkx\leq nkx+x^2$. Aby však Bernoulliova nerovnost platila, musí být $-\frac{x}{nk+x}\geq -1$, což je ovšem splněno.

Ze vztahů (1.11) a (1.12) jsme získali nerovnost

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{nk}\right)^n} \geq 1-\frac{x}{k},$$

kterou dále upravíme na tvar (obě strany nerovnosti jsou díky volbě k kladné)

$$\left(1+\frac{x}{nk}\right)^n \leq \frac{1}{1-\frac{x}{k}}$$

a umocníme na k-tou

$$\left(1+\frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{k}\right)^k}.$$

Protože je x pevné a k rovněž pevné, je proto hodnota výrazu $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{k}\right)^k}$ konečné reálné číslo. Proto je posloupnost $a_{nk} = \left(1+\frac{x}{nk}\right)^{nk}$, $n \in \mathbb{N}$ omezená shora pro všechna přirozená čísla n. Protože je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající pro všechna $n \geq n_0$, je i každá její vybraná podposloupnost neklesající pro $n \geq n_0$, tedy i $\{a_{nk}\}$, která je proto omezená zdola (číslem $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$). Posloupnost $\{a_{nk}\}$ je tedy neklesající a omezená a podle Věty D.13 je proto omezená i posloupnost $\{a_n\}$.

Celkově je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající a omezená, proto podle Věty D.5 pro zvolené pevné x existuje vlastní limita (1.10). Volba pevného x však byla zcela libovolná, proto limita (1.10) existuje a je vlastní pro každé reálné číslo x. □

Poznámka 1.6. Monotónii posloupnosti $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ z předešlého Lemmatu 1.5 lze dokázat i bez použití AG-nerovnosti (Tvrzení D.2) (avšak pomocí Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1)), a to následovně. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ pevné, pak jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > |x|$. Pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ pak platí

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x+n+1}{x+n}\right)^n = \\ &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1-\frac{x}{(x+n)\,(n+1)}\right)^n.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Abychom mohli použít Bernoulliovu nerovnost (Tvrzení D.1), musí být

$$-\frac{x}{(x+n)\,(n+1)} \geq -1,$$

což platí s ohledem na $n \geq n_0 > |x|$. S využitím Bernoulliovy nerovnosti aplikované na (1.13) (a s ohledem na fakt, že $\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) > 0$) obdržíme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(1 - \frac{xn}{(x+n)(n+1)}\right) = 1 + \frac{x^2}{(x+n)(n+1)^2} \geq 1,$$

kde poslední nerovnost platí, neboť je $\frac{x^2}{(x+n)(n+1)^2} \geq 0$. Posloupnost $\{a_n\}$ je proto neklesající pro všechna $n \geq n_0$ a všechna reálná čísla x, protože volba pevného x byla zcela libovolná.

Lemma 1.7. *Pro každé reálné číslo x platí*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \neq 0.$$

Důkaz. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ pevné, pak jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > |x|$. V důkazu Lemmatu 1.5 jsme ukázali, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ neklesající pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pro všechna $n \geq n_0$ je $\left(1 + \frac{x}{n}\right) > 0$ a po umocnění na n-tou tak platí

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0, \quad n \geq n_0. \tag{1.14}$$

Protože je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající pro všechna přirozená $n \geq n_0$, můžeme použít Větu D.14, podle které platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

pro všechna přirozená $k \geq n_0$, takže podle (1.14) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k > 0 \tag{1.15}$$

a tím spíš platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \neq 0$$

pro všechna reálná čísla x (volba pevného x byla totiž libovolná). □

Lemma 1.8. *Pro funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Důkaz. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ pevné, pak jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > |x|$. Pak pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0. \tag{1.17}$$

První rovnost platí triviálně, ve druhé rovnosti jsme využili část (iv) Lemmatu 1.2, první nerovnost plyne z podmínky (1.2) a poslední nerovnost[2] jsme již dokázali v důkazu Lemmatu 1.7, viz nerovnost (1.14).

Dosadíme-li do (1.17) místo x výraz $(-x)$, získáme tak

$$f(-x) \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n > 0. \tag{1.18}$$

Použijeme-li ve vztahu (1.18) navíc část (ii) Lemmatu 1.2, obdržíme po jednoduché úpravě s využitím části (iii) Lemmatu 1.2

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \geq f(x) > 0. \tag{1.19}$$

Celkově pak ze vztahů (1.17) a (1.19) plyne

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \geq f(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0.$$

Protože je $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$, lze tímto výrazem v předchozím vztahu vydělit beze změny znamének nerovností a získáme

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n} \geq \frac{f(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \geq 1. \tag{1.20}$$

Dále platí

$$1 \geq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}, \tag{1.21}$$

první nerovnost je zřejmá a druhá plyne z Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1), kterou můžeme použít, neboť pro $n \geq n_0$ určitě je $-\frac{x^2}{n^2} \geq -1$. Protože je x pevné, platí podle Věty D.6 o limitě rozdílu a součinu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) = 1 - x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - x^2 \cdot 0 = 1. \tag{1.22}$$

[2]Tím jsme navíc jinak dokázali část (iii) Lemmatu 1.2.

Aplikací Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti na nerovnosti (1.21) s využitím (1.22) a triviální rovnosti[3] $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ získáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1. \tag{1.23}$$

Podle Věty D.7 o limitě podílu a rovnosti (1.23) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n} = 1. \tag{1.24}$$

Nyní můžeme Větu D.9 o limitě sevřené posloupnosti společně s předchozí rovností (1.24) použít na nerovnosti (1.20) a získáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = 1.$$

Na závěr použijeme Větu D.7 o limitě podílu na předchozí rovnost (Větu D.7 můžeme díky Lemmatu 1.5 a Lemmatu 1.7 použít) a obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{f(x)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n} = 1,$$

kde stačí poslední rovnost vynásobit limitou (1.10) a získáme tak dokazovanou rovnost (1.16). Volba pevného x byla zcela libovolná, takže rovnost (1.16) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Lemma 1.9. *Existuje nejvýše jedna funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici* (1.1) *a podmínce* (1.2).

Důkaz. Na předchozí lemma stačí aplikovat jednoznačnost limity (Věta D.3). $\square$

Později (viz Tvrzení 2.13) dokážeme Lemma 1.9 ještě jiným způsobem bez použití jednoznačnosti limity posloupnosti.

V předchozích dvou lemmatech jsme tedy dokázali, že pokud funkce vyhovující rovnici (1.1) a splňující podmínku (1.2) existuje, tak to musí být jedině funkce definovaná limitou (1.16) a žádná jiná funkce nepřichází v úvahu. To, že limita (1.16) je skutečně hledanou funkcí vyhovující rovnici (1.1) a podmínce (1.2), ukážeme nyní.

[3] V dalším textu podobné triviální rovnosti jakou je právě uvedená rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ již nebudeme zmiňovat.

Lemma 1.10. *Funkce f definovaná předpisem (1.16) vyhovuje rovnici (1.1) a splňuje podmínku (1.2).*

Důkaz. Zvolme čísla $x, y \in \mathbb{R}$ pevná, pak jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \max\{|x|, |y|, |x+y|+1, |xy|\}$. Pak pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ podle AG-nerovnosti (Tvrzení D.2) platí

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) \leq \left(\frac{2+\frac{x+y}{n}}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^2,$$

kde členy $\left(1+\frac{x}{n}\right)$ a $\left(1+\frac{y}{n}\right)$ jsou díky volbě n_0 kladné (což je pro AG-nerovnost potřeba). Předchozí nerovnost umocníme na n-tou:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n}. \tag{1.25}$$

Protože posloupnost $\left\{\left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, která má podle Lemmatu 1.5 vlastní limitu pro každé $x \in \mathbb{R}$ (a tedy i pro $(x+y) \in \mathbb{R}$), je proto podle Věty D.12

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n}. \tag{1.26}$$

Podle Věty D.6 o součinu limit, kterou můžeme použít díky Lemmatu 1.5, platí

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right). \tag{1.27}$$

Díky Lemmatu 1.5 a rovnostem (1.26) a (1.27) můžeme na nerovnost (1.25) aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti a obdržíme

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n$$

a po použití rovnosti (1.16) získáme

$$f(x)f(y) \leq f\left(x+y\right). \tag{1.28}$$

Dále použijeme opět AG-nerovnost, tj.

$$a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n \leq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n}\right)^n,$$

kde je nyní $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = \left(1 + \frac{x+y}{n-1}\right)$, $a_n = \left(1 + \frac{xy}{n}\right)$ a všechny tyto členy jsou opět díky volbě n_0 kladné. Takže platí

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{xy}{n}\right) \leq \left(\frac{(n-1)\left(1 + \frac{x+y}{n-1}\right) + \left(1 + \frac{xy}{n}\right)}{n}\right)^n = \\ = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Protože x, y jsou pevná (konečná) čísla, je i jejich součin pevné (konečné) číslo, a proto podle Věty D.6 o limitě součtu a součinu platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{xy}{n}\right) = 1 + xy \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + xy \cdot 0 = 1. \tag{1.30}$$

Jelikož zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n,$$

tak s použitím rovnosti (1.30) a Věty D.6 o limitě součinu (jejíž předpoklady jsou splněny díky (1.30) a Lemmatu 1.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{xy}{n}\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{xy}{n}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Díky Lemmatu 1.5 a rovnostem (1.27) a (1.31) můžeme na nerovnost (1.29) aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti a obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \leq \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n\right),$$

což s ohledem na (1.16) můžeme přepsat na tvar

$$f\left(x + y\right) \leq f(x)f(y). \tag{1.32}$$

Protože nerovnosti (1.28) a (1.32) platí současně, je jediná možnost, a sice $f\left(x + y\right) = f(x)f(y)$, která platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, neboť volba pevných čísel x, y byla zcela libovolná. A to jsme chtěli dokázat.

Zbývá ukázat, že funkce f splňuje podmínku (1.2). Zvolme $x \in \mathbb{R}$ pevné a najděme přirozené číslo n_0 takové, že $n_0 > |x|$. V důkazu Lemmatu 1.5 jsme ukázali, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ neklesající pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$, takže můžeme použít Větu D.14, podle které platí

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

pro všechna přirozená $k \geq n_0$, takže dostáváme

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \geq 1 + k\frac{x}{k} = 1 + x,$$

kde druhá nerovnost platí podle Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1), kterou jsme mohli díky volbě n_0 použít. Funkce f tedy splňuje podmínku (1.2) pro všechna reálná čísla x (i zde byla totiž volba pevného x libovolná). $\square$

V tuto chvíli je důkaz Věty 1.1 dokončen a Definice E1 je proto korektní.

Korektnost Definice E2

Aby definice E2 byla korektní, je potřeba dokázat, že limita (1.3) existuje a je vlastní pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Existence vlastní limity však již byla dokázána v Lemmatu 1.5.

Korektnost Definice E3

Aby definice E3 byla korektní, je potřeba dokázat, že řada (1.4) konverguje (tj. jde o konečné číslo) pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.11. *Řada* (1.4) *absolutně konverguje pro všechna* $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pro $x = 0$ tvrzení platí triviálně. Zvolme pevné $x \neq 0$, pak platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1},$$

a proto dále platí (s využitím Věty D.6 o limitě součinu, neboť x je pevně zvoleno)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

takže podle limitní verze d'Alembertova podílového kritéria (Věta D.42) zkoumaná řada konverguje absolutně i pro všechna reálná x, $x \neq 0$, neboť volba pevného x byla zcela libovolná. $\square$

Tvrzení 1.12. *Řada* (1.4) *konverguje pro všechna* $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Konvergence plyne z absolutní konvergence (Věta D.43), kterou jsme dokázali v Lemmatu 1.11. $\square$

Korektnost Definice E4

Definice E4 bude korektní, pokud existuje právě jedno maximální řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6). To dokážeme ve Větě 1.13.

Věta 1.13. *Řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) existuje na celém* $\mathbb{R}$ *a je na tomto intervalu určeno jednoznačně.*

Důkaz. Zřejmé řešení rovnice (1.5) $y \equiv 0$ je ve sporu s podmínkou (1.6). Maximální intervaly, na kterých je funkce $g(y) = y$ různá od nuly, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Vzhledem k podmínce (1.6) však stačí uvažovat jen interval $(0, +\infty)$, který označme I.

K důkazu použijeme jednu z metod řešení diferenciálních rovnic, a sice metodu separace proměnných. Podle této metody je rovnice (1.5) ekvivalentní rovnici

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x.$$

Funkce $y \mapsto \frac{1}{y}$ je na intervalu I zřejmě spojitá, proto k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce podle Věty D.40, takže předchozí rovnost je ekvivalentní

$$G(y(x)) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{1.33}$$

kde G je taková funkce, že $G'(y) = \frac{1}{y}$ na intervalu I.

Všechny předpoklady Věty D.53 jsou splněny (funkce $g(y) = y$ je na intervalu $[0, +\infty)$ očividně spojitá, na I je tato funkce kladná, $g(0) = 0$ a $g'_+(0) = 1$), takže podle této věty platí $\lim\limits_{y \to 0^+} G(y) = -\infty$. Protože pro funkci $g(y) = y$ platí $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{g(y)}{y} = 1$, tak podle části (i) Věty D.54 (jejíž předpoklady jsou splněny, neboť na intervalu I je funkce g spojitá a kladná) platí $\lim\limits_{y \to +\infty} G(y) = +\infty$.

Funkce G je na I rostoucí (její derivace je totiž $\frac{1}{y}$ a tato funkce je na I kladná, takže podle Věty D.27 je G rostoucí) a spojitá (její derivace $\frac{1}{y}$ je zřejmě v každém bodě I vlastní, takže podle Věty D.23 je G spojitá na I), takže podle Věty D.30 je $\mathcal{R}_G = (-\infty, +\infty)$. Jelikož je G na I rostoucí, pak k této funkci existuje funkce inverzní a je proto $\mathcal{D}_{G^{-1}} = (-\infty, +\infty)$. Pro řešení rovnice (1.5) tedy s ohledem na (1.33) platí

$$y\,(x) = G^{-1}\,(x + c)\,, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,. \tag{1.34}$$

Vzhledem k tomu, že řešení je definováno na intervalu $(-\infty, +\infty)$, je řešení (1.34) maximální.

Protože úpravy byly ekvivalentní, žádná jiná řešení než řešení tvaru (1.34) neexistují a k vyřešení otázky jednoznačnosti tedy zbývá ukázat, že konstanta c je jednoznačně určena. K tomu použijeme počáteční podmínku (1.6), ze které a z (1.33) vyplývá konkrétní hodnota čísla $c \in \mathbb{R}$, a sice

$$c = G\,(1)\,, \tag{1.35}$$

neboli řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) je na $\mathbb{R}$ určeno jednoznačně. $\square$

Poznámka 1.14. Mohli jsme provést jiný způsob důkazu Věty 1.13, viz Větu 3.21.

Poznámka 1.15. Ukažme ještě další jiný způsob, jak dokázat jednoznačnost řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6). Nechť funkce f a g vyhovují rovnici (1.5) a podmínce (1.6). Pak podle Věty D.24 o derivaci podílu platí (ponecháme-li značení Věty 1.13, pak jsme v jejím důkazu dospěli k závěru, že nás zajímá pouze situace, kdy je $y \in (0, +\infty)$, odkud plyne $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, neboť je řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) podle Věty 1.13 definované na $\mathbb{R}$, takže Větu D.24 můžeme použít)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0.$$

Protože je derivace nulová, je podíl $\frac{f}{g}$ podle Věty D.26 konstantní funkce, neboli pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{f(x)}{g(x)} = K$, $K \in \mathbb{R}$. Z počáteční podmínky (1.6) získáme hodnotu $K = 1$, a proto platí $f = g$.

Poznámka 1.16. Důkaz Věty 1.13 samozřejmě vyplývá z obecných vět o existenci a jednoznačnosti diferenciálních rovnic, např. z Picardovy věty (její znění včetně důkazu lze nalézt např. v [24] na stranách 368 – 369). My jsme se však takovým větám chtěli vyhnout, neboť se jedná o náročná tvrzení z teorie diferenciálních rovnic.

Korektnost Definice E5

Korektnost Definice E5 je poměrně obtížné ukázat, neboť úzce souvisí s korektností definice obecné mocniny (Definice D.61). Provádět ji nebudeme, lze ji nalézt velmi podrobně zpracovanou v [9]. V Dodatku pak lze nalézt oddíl věnovaný obecné mocnině, kde je (postupné) zavedení této funkce a kde jsou rovněž věty související s korektností jejího zavedení. Zejména Věta D.62 obsahuje, co všechno se skrývá pod pojmem korektnost Definice E5. Ke korektnosti definice E5 je však kromě Věty D.62 ještě třeba ukázat, že limita (1.7) existuje a je vlastní. A protože v definici obecné mocniny je základ kladný, musíme ještě ukázat, že limita (1.7) je kladná. To nyní provedeme.

Tvrzení 1.17. *Limita (1.7) existuje a je vlastní.*

Důkaz. V Lemmatu 1.5 stačí položit $x = 1$. □

Poznámka 1.18. Ukažme jiný způsob, jak dokázat Tvrzení 1.17 bez toho, aniž bychom nejprve dokazovali Lemma 1.5 pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ a ukažme, že je klesající. Chceme tedy ukázat, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}, \tag{1.36}$$

což je ekvivalentní

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}, \\
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} &> \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}, \\
\left(\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}\right)^{n+2} &> \frac{n+1}{n}, \\
\left(1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2} &> 1 + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí podle Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1), neboť zřejmě pro všechna přirozená čísla n je $\frac{1}{n(n+2)} > 0$ a $(n+2) > 1$. Tím jsme tedy dokázali platnost nerovnosti (1.36), neboli posloupnost $\{b_n\}$ je klesající pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto je shora omezená svým prvním členem a zdola je zřejmě omezená nulou. Tím jsou splněny předpoklady Věty D.5, takže limita posloupnosti $\{b_n\}$ existuje a je vlastní. Označme ji A. Platí

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{A}{1} = A,$$

kde třetí rovnost platí díky Větě D.7 o limitě podílu, jejíž předpoklady jsou zřejmě splněny. Z rovnosti $e = A$ tak plyne, že i limita (1.7) existuje a je vlastní.

Tvrzení 1.19. *$e > 0$.*

Důkaz. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

Na předchozí nerovnost můžeme aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti (jejíž předpoklady jsou díky Tvrzení 1.17 splněny) a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

neboli $e \geq 1 > 0$. □

Poznámka 1.20. Nerovnost $e > 0$ jsme mohli dokázat rovněž pomocí Lemmatu 2.53 (kde dokážeme nerovnost $e \geq 2$) a rovněž z nerovnosti $e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ platné pro každé $n \in \mathbb{N}$, kterou dokážeme v Lemmatu 3.3 ve 2. kapitole[4]. Celkově by nám k důkazům Tvrzení 1.19 a Lemmatu 2.53 stačilo pouze Lemma 2.3.3, jehož důkaz je ovšem ze všech zmiňovaných důkazů nejnáročnější, proto jsme důkazy Tvrzení 1.19 a Lemmatu 2.53 provedli nezávisle na Lemmatu 2.3.3. A k důkazu Tvrzení 1.19 by samozřejmě stačilo Lemma 2.53, nicméně jsme chtěli ukázat co nejvíce možností na dokazování některých vlastností, v tomto případě tedy vlastností čísla e.

[4]V souladu s Předmluvou budeme dále při odkazování mezi kapitolami přidávat před číslo teorému číslo kapitoly, tj. v tomto případě jde o Lemma 2.3.3.

Korektnost Definice E6

Definice E6 bude korektní, jestliže je funkce logaritmus prostá na svém definičním oboru. To ukážeme v Tvrzení 2.2.4, takže Definici E6 můžeme považovat za korektní.

1.2 Vlastnosti exponenciály

V této podkapitole budeme odvozovat vlastnosti exponenciály z jednotlivých definic. V další podkapitole potom ukážeme, že všechny definice jsou ekvivalentní. Odvození vlastností by proto šlo samozřejmě udělat tak, že bychom nejprve ukázali ekvivalenci definic, pak z jedné definice odvodili vlastnosti a tím bychom měli automaticky i vlastnosti z ostatních definic. Tak to ale neuděláme, protože na závěr budeme porovnávat jednotlivé přístupy k zavedení exponenciály a přišli bychom tak o rozdíly mezi jednotlivými zavedeními.

Na druhé straně se dá předpokládat (pokud se skutečně jedná o definice jedné a té samé funkce), že některé vlastnosti exponenciály se odvodí naprosto stejným způsobem hned u několika definic. V tom případě důkazy nebudeme dělat znovu, ale jen se odvoláme na již hotový důkaz.

Odvození vlastností z Definice E1

Nejprve připomeňme Lemma 1.2, kde jsme již odvodili některé vlastnosti.

Tvrzení 2.1. *Pro funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí:*

(i) $f\left(x-y\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$ *pro všechna* $x,y\in\mathbb{R}$*;*

(ii) $f(px)=\left(f(x)\right)^p$ *pro všechna* $x\in\mathbb{R}$ *a pro všechna* $p\in\mathbb{Z}$*;*

(iii) $f\left(rx\right)=\left(f\left(x\right)\right)^r$ *pro všechna* $x\in\mathbb{R}$ *a pro všechna* $r\in\mathbb{Q}$*.*

Důkaz.

(i) Do rovnice (1.1) dosadíme místo y výraz $-y$ a s využitím části (ii) Lemmatu 1.2 ihned pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$ dostáváme

$$f\left(x-y\right)=f\left(x\right)f\left(-y\right)=\frac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)}.$$

(ii) Pro $p \in \mathbb{N}$ tvrzení platí podle části (iv) Lemmatu 1.2, pro $p = 0$ dokazovaná rovnost platí triviálně podle části (i) Lemmatu 1.2. Nechť je $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, pak pro $n = -p$ je $n \in \mathbb{N}$ a podle částí (ii) a (iv) Lemmatu 1.2 platí

$$f(px) = f(-nx) = \frac{1}{f(nx)} = \frac{1}{(f(x))^n} = (f(x))^{-n} = (f(x))^p,$$

takže dokazovaná rovnost celkově platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $p \in \mathbb{Z}$.

(iii) Zvolme $t = \frac{p}{q}x$, $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, pak s využitím předchozí části (ii) obdržíme

$$(f(t))^q = f(qt) = f(px) = (f(x))^p,$$

neboli

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = (f(x))^{\frac{p}{q}},$$

takže dokazovaná rovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $r \in \mathbb{Q}$ $(r = \frac{p}{q})$. □

Tvrzení 2.2. *Funkce f, která splňuje rovnici (1.1) a podmínku (1.2), je rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Z podmínky (1.2) pro $x > 0$ ihned plyne, že $f(x) > 1$. Proto pro libovolná reálná čísla $x > y$ platí

$$1 < f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)},$$

kde rovnost platí podle části (i) Tvrzení 2.1. Protože platí část (iii) Lemmatu 1.2, lze předchozí nerovnost vynásobit kladným číslem $f(y)$ beze změny znaménka nerovnosti, čímž pro libovolná reálná čísla x, y, $x > y$ získáme nerovnost $f(x) > f(y)$. A to je definice rostoucí funkce. □

Tvrzení 2.3. *Pro funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí:*

(i) f je prostá na $\mathbb{R}$;

(ii) $f(x) > 1$ pro $x > 0$;

(iii) $f(x) < 1$ pro $x < 0$.

Důkaz.

(i) Jde o důsledek předchozího tvrzení.

(ii) Plyne ihned z podmínky (1.2).

(iii) Jde o důsledek předchozího tvrzení a části (i) Lemmatu 1.2. □

Poznámka 2.4. Část (iii) předchozího tvrzení lze dokázat ještě dalším způsobem, než jak jsme to provedli. Z části (ii) Tvrzení 2.3 plyne $f(-x) > 1$ pro $x < 0$, odkud s použitím části (ii) Lemmatu 1.2 pro $x < 0$ vyplývá nerovnost $\frac{1}{f(x)} > 1$, kterou můžeme podle části (iii) Lemmatu 1.2 vynásobit kladným výrazem $f(x)$ beze změny znaménka nerovnosti, čímž získáme dokazovanou nerovnost $f(x) < 1$ pro $x < 0$.

Funkcionální rovnici (1.1) splňuje více funkcí než jen jedna[5], proto je kvůli jednoznačnosti nutné ještě uvést nějakou dodatečnou podmínku. My jsme volili podmínku (1.2), není to však jediná možnost. V Tvrzení 2.8 ukážeme, jaké podmínky na zaručení jednoznačnosti exponenciály zaváděné pomocí funkcionální rovnice (1.1) jsme mohli volit.

Před důkazem Tvrzení 2.8 nejprve dokažme dvě pomocná lemmata.

Lemma 2.5. *Pro funkci f vyhovující rovnici (1.1) a podmínce*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1 \tag{1.37}$$

platí:

(i) $f(0) = 1$*;*

(ii) $f(x) > 1$ *pro* $x > 0$*;*

(iii) $f(x) < 1$ *pro* $x < 0$*.*

Důkaz.

(i) Dosadíme-li $x = y = 0$ do (1.1), získáme rovnost $f(0) = (f(0))^2$, odkud plyne $f(0) = 0$ nebo $f(0) = 1$. Kdyby platila rovnost $f(0) = 0$, tak z rovnice (1.1) dále plyne $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$, neboli $f \equiv 0$. To však vede ke sporu s podmínkou (1.37) (limita (1.37) by neexistovala), takže nutně je $f(0) = 1$.

[5] Jsou to všechny exponenciální funkce o libovolném kladném základu různém od jedné, dále konstantní funkce $y \equiv 0$ a $y \equiv 1$. To jsme zmínili pouze očividná řešení rovnice (1.1), která jsou navíc spojitá. Zkoumání možných řešení rovnice (1.1) (ať už spojitých či nespojitých) však není předmětem této práce.

(ii) Rovnost (1.37) platí i pro jednostranné limity (Věta D.21). Zkoumejme nejprve limitu zprava, tedy $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = 1$. Podle definice jednostranné limity zprava platí

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(0 < x < \delta)\left(\left|\frac{f(x)-1}{x} - 1\right| < \varepsilon\right). \tag{1.38}$$

Kdyby pro $0 < x < \delta$ platila nerovnost $f(x) - 1 \leq 0$, platilo by $\frac{f(x)-1}{x} \leq 0$, neboť jmenovatel zlomku je pro $0 < x < \delta$ kladný. Celkově by pro $0 < x < \delta$ platila nerovnost

$$\left|\frac{f(x)-1}{x} - 1\right| \geq 1,$$

což je ve sporu s platností (1.38), neboť pro $0 < \varepsilon < 1$ by definice (1.38) nebyla splněna. Takže nutně je $f(x) - 1 > 0$ (neboli $f(x) > 1$) pro $0 < x < \delta$, kde δ je obecně nějaké velmi malé reálné číslo. Z nerovnosti $f(x) > 1$ po umocnění na n-tou společně s platností části (iv) Lemmatu 1.2 (k důkazu této části byla potřeba pouze rovnice (1.1), takže ji můžeme použít) plyne

$$f(nx) = (f(x))^n > 1^n = 1,$$

takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna x, $0 < x < \delta$ platí nerovnost $f(nx) > 1$, odkud vyplývá platnost $f(x) > 1$ pro všechna $x > 0$.

(iii) V případě jednostranné limity zleva budeme postupovat analogicky, provedeme to proto již stručněji. Podle definice jednostranné limity zleva platí

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(-\delta < x < 0)\left(\left|\frac{f(x)-1}{x} - 1\right| < \varepsilon\right). \tag{1.39}$$

Kdyby pro $-\delta < x < 0$ platila nerovnost $f(x) - 1 \geq 0$, platila by nerovnost

$$\left|\frac{f(x)-1}{x} - 1\right| \geq 1,$$

což je ve sporu s platností (1.39). Proto nutně pro $-\delta < x < 0$ platí $f(x) < 1$ a s využitím části (iv) Lemmatu 1.2 tak nerovnost $f(x) < 1$ platí pro všechna $x < 0$. □

Lemma 2.6. *Funkce f vyhovující rovnici (1.1) a podmínce (1.37) má derivaci v každém bodě a platí rovnost $f'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Platí

$$f(x) = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

kde první rovnost platí díky podmínce (1.37), druhá rovnost platí díky Větě D.17 o limitě součinu (jejíž předpoklady jsou splněny), ve třetí rovnosti jsme využili rovnici (1.1) a poslední rovnost je definice derivace funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Poznámka 2.7. Pro funkci f vyhovující rovnici (1.1) a podmínce (1.37) lze díky části (i) Lemmatu 2.5 odvodit platnost nerovnosti $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ stejným způsobem jako v případě části (iii) Lemmatu 1.2. To dává ještě jiný způsob odvození částí (ii) a (iii) Lemmatu 2.5. Z Lemmatu 2.6 a nerovnosti $f(x) > 0$ plyne $f'(x) = f(x) > 0$, takže podle Věty D.27 je funkce f rostoucí na celém $\mathbb{R}$. A z části (i) Lemmatu 2.5 pak již ihned dostáváme platnost nerovností $f(x) > 1$ pro $x > 0$ a $f(x) < 1$ pro $x < 0$.

Tvrzení 2.8. *Pro funkci f vyhovující rovnici (1.1) jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $f(x) \geq x + 1$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\dfrac{1}{1-x} \geq f(x) \geq x + 1$ *pro všechna* $x < 1$*;*

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$

Důkaz. Nechť platí část (i), můžeme tak použít Lemma 1.2. Z podmínky (i) plyne platnost $f(-x) \geq 1 - x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a podle části (ii) Lemmatu 1.2 tedy platí $\frac{1}{f(x)} \geq 1 - x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dále podle části (iii) Lemmatu 1.2 je $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, proto je nerovnost $\frac{1}{f(x)} \geq 1 - x$ ekvivalentní s nerovností $f(x) \leq \frac{1}{1-x}$ pro všechna $x < 1$. Spolu s platností podmínky (i) pak dostáváme

$$\frac{1}{1-x} \geq f(x) \geq x + 1 \quad \text{pro všechna} \quad x < 1,$$

což je přesně podmínka (ii).

Odečteme-li od všech nerovností v (ii) jedničku, získáme

$$\frac{x}{1-x} \geq f(x) - 1 \geq x \quad \text{pro všechna} \quad x < 1.$$

Vydělením předchozích nerovností výrazem x pro $0 < x < 1$ obdržíme

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{f(x)-1}{x} \geq 1 \quad \text{pro všechna} \quad 0 < x < 1 \tag{1.40}$$

a pro $x < 0$

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq 1 \quad \text{pro všechna} \quad x < 0. \tag{1.41}$$

Podle Věty D.18 o limitě sevřené funkce (která platí i pro jednostranné limity) a (1.40) platí

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 1 \tag{1.42}$$

a podle téže Věty D.18 a (1.41) platí

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = 1, \tag{1.43}$$

neboť $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ a totéž platí i pro jednostranné limity v nule (Věta D.21). Limity (1.42) a (1.43) mají stejnou hodnotu a tím je (s využitím Věty D.21) dokázána část (iii).

Díky podmínce (iii) můžeme použít Lemma 2.5 a Lemma 2.6. Definujme dále funkci $g(x) = f(x) - (x+1)$ pro $x \in \mathbb{R}$ a zderivujme jí:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = f(x) - 1,$$

kde poslední rovnost platí podle Lemmatu 2.6. Podle části (ii) Lemmatu 2.5 je $g'(x) > 0$ pro $x > 0$ a podle části (iii) Lemmatu 2.5 $g'(x) < 0$ pro $x < 0$, proto podle Věty D.27 je funkce g na intervalu $(0, +\infty)$ rostoucí, na $(-\infty, 0)$ klesající, a protože navíc platí $g(0) = f(0) - (0+1) = 0$ (využili jsme část (i) Lemmatu 2.5), nabývá funkce g v nule svého (globálního) minima. Proto platí $g(x) \geq 0$, neboli $f(x) - (x+1) \geq 0$ a dokázali jsme tak $f(x) \geq x+1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Celkově jsme tak dokázali platnost implikací (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), neboli všechny tři podmínky jsou ekvivalentní. $\square$

Tvrzení 2.9. *Pro funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí rovnost $f^{(n)}(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Důkaz pro $n = 1$ vyplývá[6] z Lemmatu 2.6 a Tvrzení 2.8. Nechť je tvrzení platné pro $k \in \mathbb{N}$, pak platí

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = f'(x) = f(x),$$

kde jsme v první rovnosti použili definici $(k+1)$-ní derivace, ve druhé rovnosti jsme využili indukční předpoklad a poslední rovnost již byla dokázána, neboť jde o případ $n = 1$. □

Tvrzení 2.10. *Funkce f, která splňuje rovnici (1.1) a podmínku (1.2), je spojitá na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Plyne ihned z Tvrzení 2.9 a Věty D.23. □

Podejme jiný důkaz spojitosti, ke kterému není potřeba Věta D.23.

Poznámka 2.11. Funkce f, která splňuje rovnici (1.1) a podmínku (1.2), je spojitá na $\mathbb{R}$.

Pro všechna $x, a \in \mathbb{R}$ díky funkcionální rovnici (1.1) platí

$$f(x) = f(a - a + x) = f(a)\, f(x - a),$$

což využijeme v následujícím výpočtu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) &= f(a)\lim_{x\to a}(f(x-a) - 1) = \\ &= f(a)\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x-a)-1}{x-a}(x-a)\right) = \\ &= f(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)-1}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a),\end{aligned} \tag{1.44}$$

ve kterém jsme použili Větu D.17 o limitě součinu, jejíž předpoklady jsou splněny, neboť platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)-1}{x-a} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a}(x-a) = 0, \tag{1.45}$$

kde první limita platí díky Větě D.20 o limitě složené funkce (jejíž předpoklady jsou zřejmě spléeny) a Tvrzení 2.8 a druhá limita je triviální. Hledaná limita je proto podle (1.44) a (1.45) rovna

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = f(a)\cdot 1\cdot 0 = 0$$

[6] Abychom byli úplně přesní, měli bychom správně uvést, že důkaz pro $n = 1$ vyplývá z Lemmatu 2.6 a z toho, že funkce f vyhovující rovnici (1.1) a splňující podmínku (iii) Tvrzení 2.8 rovněž splňuje podmínku (i) (téhož tvrzení). V dalším textu to již nebudeme takto podrobně zmiňovat a budeme pouze uvádět, že dokazovaná vlastnost vyplývá z Tvrzení 2.8.

a s využitím Věty D.17 o limitě součtu a součinu (jejíž předpoklady jsou splněny) dále platí

$$0 = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) = \lim_{x \to a} f(x) - f(a).$$

Tím jsme tedy dokázali rovnost $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, což je definice spojitosti funkce f v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$.

Nyní můžeme dokázat Tvrzení 2.2 jiným způsobem než jak jsme to provedli.

Tvrzení 2.12. *Funkce f, která splňuje rovnici (1.1) a podmínku (1.2), je rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 2.9 a podle části (iii) Lemmatu 1.2 pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = f(x) > 0$, takže podle Věty D.27 je funkce f rostoucí na $\mathbb{R}$. □

V tuto chvíli můžeme jednoznačnost dokázat ještě jinak, než jak jsme jí dokázali v Lemmatu 1.9.

Tvrzení 2.13. *Existuje nejvýše jedna funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici* (1.1) *a podmínce* (1.2)*.*

Důkaz. Díky části (i) Lemmatu 1.2, části (iii) Lemmatu 1.2 (resp. jejímu důsledku $f(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$) a Tvrzení 2.9 lze důkaz provést stejně jako důkaz v Poznámce 1.15. □

Tvrzení 2.14. *Funkce f splňující rovnici* (1.1) *a podmínku* (1.2) *je ryze konvexní na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 2.9 a části (iii) Lemmatu 1.2 platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = f(x) > 0$ a podle Tvrzení 2.10 je f spojitá na $\mathbb{R}$, takže funkce f je podle Věty D.28 ryze konvexní na $\mathbb{R}$. □

Tvrzení 2.15. *Pro funkci f splňující rovnici* (1.1) *a podmínku* (1.2) *platí:*

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$*;*

(iii) $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$*.*

Důkaz.

(i) Podle podmínky (1.2) platí $f(x) \geq x+1$, a protože je $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$, tak podle Věty D.19 je rovněž $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$, kde druhá rovnost platí podle části (ii) Lemmatu 1.2 a poslední rovnost podle části (i) tohoto tvrzení a Věty D.22.

(iii) Plyne z Věty D.30, jejíž předpoklady jsou splněny díky Tvrzení 2.2, díky Tvrzení 2.10 a díky částem (i) a (ii) tohoto tvrzení. □

Poznámka 2.16. Nyní dodržíme slib daný v Předmluvě, a sice jak to je s dodatečnými podmínkami pro funkci splňující rovnici (1.1). V Tvrzení 2.8 jsme ukázali, které podmínky jsou ekvivalentní. Podmínka (ii) Tvrzení 2.8 se v učebnicích vůbec nepoužívá, proto jsme se v Předmluvě o ní ani nezmiňovali. Důvod je zřejmý, mnohem jednodušší je totiž podmínka (i) (téhož tvrzení). Někteří autoři učebnic používají podmínku (i) a jiní podmínku (iii) Tvrzení 2.8, přičemž ve větší míře se používá podmínka (iii). Odpověď na otázku, proč je jedna podmínka častější než druhá, plyne z porovnání důkazů derivace exponenciály v Lemmatu 2.6 a Tvrzení 2.9 a důkazů spojitosti exponenciály v Tvrzení 2.10 a Poznámce 2.11. Z tohoto porovnání vyplývá, že derivaci a spojitost je snažší odvodit z podmínky (iii) než z podmínky (i) Tvrzení 2.8. Na druhé straně k odvození „algebraických“ vlastností, např. vlastností v Lemmatu 1.2, Tvrzení 2.1, Tvrzení 2.2 či Tvrzení 2.3 je očividně vhodnější podmínka (i) Tvrzení 2.8, neboť k důkazům nejsou potřeba znalosti o limitách ani o derivacích na rozdíl od důkazu Lemmatu 2.5 (či Poznámky 2.7).

My jsme v této práci záměrně zvolili méně často se vyskytující podmínku $f(x) \geq x + 1$ pro $x \in \mathbb{R}$, a to ze dvou důvodů. Jednak právě proto, že tato podmínka je méně častá a jednak proto, že tato podmínka je vhodnější k definování exponenciály na střední škole, což je zřejmé – středoškolák jistě snáze přijme podmínku ve tvaru nějaké jednoduché nerovnosti než podmínku v podobě limity.

Poznámka 2.17. Stojí za povšimnutí, že důkaz Lemmatu 1.2 a všechny důkazy lemmat, tvrzení a poznámek 2.1 až 2.15 vycházejí jen a pouze z původních podmínek na funkci f, a sice (1.1) a (1.2), a vůbec nesouvisí s limitou (1.10). Zmíněné důkazy lze provést aniž víme, zda funkce v požadovanými vlastnostmi vůbec existuje (tak jsme ostatně provedli důkaz Lemmatu 1.2). Totéž se týká Tvrzení 3.1 v Podkapitole 1.3. S ohledem na Poznámku 1.4 bychom do znění uvažovaných teorémů akorát přidali slovní spojení „Pro *každou* funkci $f\ldots$“.

Při odvozování vlastností z ostatních definic se budeme snažit dodržet odvození ve stejném pořadí, jako tomu bylo u Definice E1.

Odvození vlastností z Definice E2

Tvrzení 2.18. *Funkce f definovaná limitou* (1.3) *splňuje funkcionální rovnici* (1.1)*.*

Důkaz. To jsme již dokázali v Lemmatu 1.10. □

Tvrzení 2.19. *Pro funkci f definovanou limitou (1.3) platí:*

(i) $f(0) = 1$*;*

(ii) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*.*

Důkaz. Část (i) plyne z dosazení nuly do (1.3), a sice

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Ostatní části se dokáží stejně jako části (ii), (iii) a (iv) Lemmatu 1.2, kde je potřeba právě dokázaná část (i) a vlastnost (1.1) dokázaná v Tvrzení 2.18. □

Poznámka 2.20. Ukažme, jak jinak lze dokázat část (ii) předchozího tvrzení, a sice přímo pomocí definice (1.3). Zvolme $x \in \mathbb{R}$ pevné. Pak platí

$$f(-x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{f(x)},$$

kde předposlední rovnost platí díky Větě D.7 o limitě podílu a v poslední rovnosti jsme využili již dokázaný vztah (1.23) a definici funkce f (1.3) (předpoklady Věty D.7 jsou splněny díky (1.23), díky Lemmatu 1.5 a díky Lemmatu 1.7).

Volba pevného x byla zcela libovolná, takže dokazovaný vztah platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Nerovnost (1.15) v důkazu Lemmatu 1.7 dává další způsob, jak odvodit část (iii) předchozího tvrzení, a sice přímo pomocí definice (1.3).

Tvrzení 2.21. *Pro funkci f definovanou limitou* (1.3) *platí:*

(i) $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $f(px) = (f(x))^p$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$*;*

(iii) $f(rx) = (f(x))^r$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $r \in \mathbb{Q}$*.*

Důkaz. Všechny části se dokáží stejně jako části (i), (ii) a (iii) Tvrzení 2.1, k tomu je totiž potřeba rovnice (1.1) dokázaná v Tvrzení 2.18 a již dokázané vlastnosti v částech (i), (ii) a (iv) Tvrzení 2.19. □

Tvrzení 2.22. *Funkce f definovaná vztahem (1.3) je rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. V důkazu Lemmatu 1.5 jsme dokázali, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ je neklesající pro každé pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna přirozená n taková, že $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ a $n_0 > |x|$. Lze proto použít Větu D.14, podle které pro $k \geq n_0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k. \tag{1.46}$$

Pro $x > 0$ platí nerovnost $\left(1 + \frac{x}{n}\right) > 1$ pro všechna přirozená n (a tedy i pro $n \geq n_0$). Po umocnění na n-tou získáme pro $x > 0$ nerovnost

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1^n = 1$$

platící pro všechna přirozená n (a tedy i pro $n \geq n_0$). S využitím předchozí nerovnosti a (1.46) tak získáváme nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k > 1, \tag{1.47}$$

neboli $f(x) > 1$ pro $x > 0$.

Zbytek důkazu tak lze provést úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.2, kde se využívají již dokázané vlastnosti z části (iii) Tvrzení 2.19 a části (i) Tvrzení 2.21. □

Poznámka 2.23. Přímo z definice (1.3) lze jednoduše pouze ukázat, že funkce f je neklesající na $\mathbb{R}$. To nyní provedeme. Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$ pevná a navíc taková, že $x > y$. Pak určitě platí nerovnost

$$1 + \frac{x}{n} > 1 + \frac{y}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.48}$$

Zvolme dále $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n_0 > \max\{|x|, |y|\}$ (takové n_0 jistě nalezneme, neboť čísla x, y jsou pevně zvolena). Pak pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ jsou výrazy $\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ a $\left(1 + \frac{y}{n}\right)$ kladné a nerovnost (1.48) lze umocnit na n-tou:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Na tuto nerovnost můžeme aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti (jejíž předpoklady jsou díky Lemmatu 1.5 splněny)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n,$$

neboli pro $x > y$ platí s použitím definice (1.3) nerovnost

$$f(x) \geq f(y),$$

což je definice neklesající funkce.

Tvrzení 2.24. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.3) platí:*

(i) *f je prostá na $\mathbb{R}$;*

(ii) *$f(x) > 1$ pro $x > 0$;*

(iii) *$f(x) < 1$ pro $x < 0$.*

Důkaz.

(i) Jde o důsledek Tvrzení 2.22.

(ii) Důkaz je součástí důkazu Tvrzení 2.22, viz (1.47).

(iii) Jde o důsledek Tvrzení 2.22 a části (i) Tvrzení 2.19. □

Nyní bude následovat derivace funkce f definované limitou (1.3). Nejprve však dokážeme dvě pomocná lemmata.

Lemma 2.25. *Pro libovolná přirozená čísla n, k, $n > k$ platí:*

(i) $1 > \dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} > 0$;

(ii) $1 > \dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} \geq 1 - \dfrac{k^2}{n}$.

Důkaz. Upravujme

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} = \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{n^k},$$

kde v čitateli posledního zlomku je právě k členů, a proto můžeme s úpravami dále pokračovat:

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k}{n} = \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right).\end{aligned} \tag{1.49}$$

Každý člen má tedy tvar $\left(1-\frac{c}{n}\right)$, kde $c = 1, 2, \ldots, k$ a $1 \leq k < n$. Proto pro všechna taková c a k platí

$$1 > \left(1-\frac{c}{n}\right) > 0, \tag{1.50}$$

$$1 > \left(1-\frac{c}{n}\right) \geq \left(1-\frac{k}{n}\right) > 0. \tag{1.51}$$

Část (i) ihned plyne z nerovností (1.50) a vztahu (1.49).

Díky nerovnostem (1.51) a vztahu (1.49) platí

$$1 > \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} \geq \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^k.$$

Na předchozí vztah lze použít Bernoulliovu nerovnost (Tvrzení D.1), neboť její předpoklad je díky $k < n$ splněn, a sice $-\frac{k}{n} \geq -1$, takže platí

$$1 > \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} \geq \left(1-\frac{k}{n}\right)^k \geq 1 - \frac{k^2}{n}.$$

Tím je dokázána i část (ii). $\square$

Lemma 2.26. *Pro posloupnost funkcí*

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

platí, že konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro všechna $x \in \mathbb{R}$ má vlastní derivace a posloupnost derivací $\{f_n'(x)\}$ konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Důkaz. Konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jsme již dokázali v Lemmatu 1.5. Dále platí

$$f_n'(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1},$$

takže zřejmě pro všechna $x \in \mathbb{R}$ má posloupnost $\{f_n'(x)\}$ vlastní derivace.

Zvolme $L > 1$ pevné, pak podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci (Věta D.47) musí na intervalu $I = (-L, L)$ platit

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n > n_0)\,(\forall x \in I) \\ \left(\left|\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m-1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right| < \varepsilon\right).\end{gathered} \tag{1.52}$$

Nerovnost v (1.52) bude pro $m = n$ splněna triviálně, takže dále předpokládejme bez újmy na obecnosti $m > n$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a najděme pro něj n_0.

Řada (1.4) je podle Lemmatu 1.11 absolutně konvergentní, podle Věty D.46 proto pro dané $\varepsilon > 0$ existuje číslo $C \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $D \geq C$ je

$$\sum_{k=D+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.53}$$

Nechť $m, n > C + 1$. Podle binomické věty a trojúhelníkové nerovnosti platí

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m-1}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right| = \\
=&\left|\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\left(\frac{x}{m}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^{k}\right| = \\
=&\left|\sum_{k=1}^{C}\frac{x^k}{k!}\left(\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right)+\right. \\
&+\sum_{k=C+1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\left(\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right)+ \\
&\left.+\sum_{k=n}^{m-1}\frac{x^k}{k!}\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}\right| \leq \\
\leq&\sum_{k=1}^{C}\frac{|x|^k}{k!}\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right|+ \\
&+\sum_{k=C+1}^{n-1}\frac{|x|^k}{k!}\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right|+ \\
&+\sum_{k=n}^{m-1}\frac{|x|^k}{k!}\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}\right|.
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

Dále platí

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=C+1}^{n-1}\frac{|x|^k}{k!}\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right| \leq \\
\leq&\sum_{k=C+1}^{n-1}\frac{|x|^k}{k!}\left(\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}\right|+\left|\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right|\right) \leq \\
&\leq\sum_{k=C+1}^{n-1}\frac{|x|^k}{k!}(1+1)=2\sum_{k=C+1}^{n-1}\frac{|x|^k}{k!},
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

kde první nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti a druhá z části (i) Lemmatu 2.25, které lze použít, neboť určitě je $k < m, n$.

Rovněž platí

$$\sum_{k=n}^{m-1} \frac{|x|^k}{k!} \left| \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{|x|^k}{k!} \leq 2 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{|x|^k}{k!}, \tag{1.56}$$

kde první nerovnost plyne z části (i) Lemmatu 2.25, které lze použít, neboť určitě je $k < m$, a druhá nerovnost je triviální.

Z (1.55) a (1.56) dostáváme odhad

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=C+1}^{n-1} \frac{|x|^k}{k!} \left| \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} - \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} \right| + \\
&+ \sum_{k=n}^{m-1} \frac{|x|^k}{k!} \left| \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} \right| \leq \\
\leq & 2 \sum_{k=C+1}^{n-1} \frac{|x|^k}{k!} + 2 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{|x|^k}{k!} = 2 \sum_{k=C+1}^{m-1} \frac{|x|^k}{k!} \leq 2 \sum_{k=C+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned} \tag{1.57}$$

kde poslední nerovnost platí podle (1.53).

Takže podle (1.54) a (1.57) platí nerovnost

$$\begin{aligned}
&\left| \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m-1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{C} \frac{|x|^k}{k!} \left| \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} - \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} \right|.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Podle části (ii) Lemmatu 2.25 dále pro $1 \leq k \leq C < m$ platí

$$1 > \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} \geq 1 - \frac{k^2}{m} \geq 1 - \frac{C^2}{m} > 1 - \frac{\varepsilon}{2CL^C}, \tag{1.59}$$

přičemž poslední nerovnost platí, neboť jistě nalzeneme m tak, aby bylo

$$m > \frac{2C^3L^C}{\varepsilon}. \tag{1.60}$$

Pro zlomek $\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}$, $1 \leq k \leq C < n$ lze odvodit (naprosto stejným způsobem, jako jsme odvodili vztah (1.59)):

$$1 > \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k} \geq 1 - \frac{C^2}{n} > 1 - \frac{\varepsilon}{2CL^C}, \tag{1.61}$$

přičemž poslední nerovnost platí, neboť jistě nalzeneme n tak, aby bylo

$$n > \frac{2C^3L^C}{\varepsilon}. \tag{1.62}$$

Z nerovností (1.59) a (1.61) dostáváme pro všechna $m > n > C + 1 > k$ odhad

$$\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} - \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right| < \frac{\varepsilon}{2CL^C}, \tag{1.63}$$

neboť obě čísla $\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k}$ a $\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}$ leží v témže intervalu $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2CL^C}, 1\right)$ délky $\frac{\varepsilon}{2CL^C}$.

Protože je $x \in I$ a $k \leq C$, tak pro všechna k platí[7]:

$$\frac{|x|^k}{k!} < |x|^k < L^k \leq L^C. \tag{1.64}$$

Podle (1.63) a (1.64) jsme získali odhad

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{C} \frac{|x|^k}{k!}\left|\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!m^k} - \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!n^k}\right| &< \\ < \sum_{k=1}^{C} L^C \frac{\varepsilon}{2CL^C} = \frac{\varepsilon}{2C}\sum_{k=1}^{C} 1 = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Takže s ohledem na (1.58) a na (1.65) platí

$$\left|\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m-1} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nyní se vraťmě k nerovnostem (1.60) a (1.62), ze kterých plyne pro n_0 podmínka (ještě bylo pro výpočet (1.54) potřeba $m, n > C + 1$)

$$n_0 \geq \max\left\{C + 1, \frac{2C^3L^C}{\varepsilon}\right\},$$

takže jsme pro dané libovolné ε nalezli n_0 a (1.52) platí. $\square$

[7] Právě kvůli platnosti poslední nerovnosti v (1.64) bylo potřeba volit $L > 1$. Kdybychom totiž volili $L > 0$, tak pro $0 < L < 1$ by poslední nerovnost v (1.64) neplatila.

Poznámka 2.27. Silným nástrojem ke zjišťování stejnoměrné konvergence posloupností funkcí je Diniho věta (Věta D.50), kterou jsme však použít nemohli, neboť bychom museli dokázat jeden z jejích přepokladů, a sice spojitost limitní funkce. Tu dokážeme v Tvrzení 2.29, ale k tomu budeme potřebovat právě Lemma 2.26, takže jsme k důkazu tohoto lemmatu Diniho větu použít nemohli.

Tvrzení 2.28. *Pro funkci f definovanou vztahem* (1.3) *platí* $f^{(n)}(x) = f(x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Platnost $f(0) = 1$ jsme již dokázali v části (i) Lemmatu 2.19. Zvolme pevné $x \in \mathbb{R}$. Podle definice (1.3) a Věty D.48 o derivaci limitní funkce, jejíž předpoklady jsou splněny díky Lemmatu 2.26, platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Protože x je pevně zvoleno, tak podle Věty D.6 o limitě součtu a součinu (jejíž předpoklady jsou zřejmě splněny) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 + x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 + x\cdot 0 = 1, \tag{1.67}$$

což využijeme společně s (1.66) a definicí (1.3) k výpočtu

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{1+\frac{x}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)} = f(x),$$

ve kterém jsme použili Větu D.7 o limitě podílu, jejíž předpoklady jsou splněny díky Lemmatu 1.5 a díky rovnosti (1.67).

Pro pevně zvolené x jsme tak dokázali platnost $f'(x) = f(x)$, a protože volba x byla zcela libovolná, tak tato rovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zbytek důkazu se provede pomocí matematické indukce stejně jako důkaz Tvrzení 2.9, kde se využívá právě dokázaná rovnost $f'(x) = f(x)$. □

Tvrzení 2.29. *Funkce f definovaná vztahem (1.3) je spojitá na* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Plyne ihned z Tvrzení 2.28, Lemmatu 1.5 a Věty D.23. □

Poznámka 2.30. Další možností, jak dokázat spojitost funkce f definované limitou (1.3) bez znalosti derivace této funkce (Tvrzení 2.28) a Věty D.23, je Věta D.49 o spojitosti limitní funkce. K tomu je podle Věty D.49 potřeba dokázat, že posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ (že se jedná o posloupnost spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ je zřejmé). Důkaz by se provedl zcela analogicky jako důkaz stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n'(x)\}$ v Lemmatu 2.26 a byl by obdobně dlouhý. Dělat jej proto nebudeme.

Tvrzení 2.31. *Funkce f definovaná vztahem (1.3) je ryze konvexní na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.28, části (iii) Tvrzení 2.19 a Tvrzení 2.29 se důkaz provede úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.14. □

Tvrzení 2.32. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.3) platí:*

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$*;*

(iii) $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$*.*

Důkaz.

(i) Podle Lemmatu 1.10 platí $f(x) \geq x + 1$, a protože je $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$, tak podle Věty D.19 je rovněž $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, kde druhá rovnost platí podle části (ii) Tvrzení 2.19 a poslední rovnost podle části (i) tohoto tvrzení a Věty D.22.

(iii) Plyne z Věty D.30, jejíž předpoklady jsou splněny díky Tvrzení 2.22, díky Tvrzení 2.29 a díky částem (i) a (ii) tohoto tvrzení.

□

Odvození vlastností z Definice E3

Tvrzení 2.33. *Funkce f definovaná rovností (1.4) splňuje rovnici (1.1).*

Důkaz. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x)\,f(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot x^k y^{n-k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y)\,,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili Větu D.44 (pro kterou je potřeba absolutní konvergence obou násobených řad, kterou jsme však již dokázali v Lemmatu 1.11) a v předposlední rovnosti jsme použili binomickou větu. $\square$

Tvrzení 2.34. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.4) platí:*

(i) $f(0) = 1$*;*

(ii) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Část (i) plyne z přímého dosazení hodnoty 0 do vztahu (1.4). Důkazy zbylých částí se dokáží úplně stejně jako části (ii), (iii) a (iv) Lemmatu 1.2, kde se využívá jen část (i) tohoto tvrzení a rovnost (1.1), kterou jsme již dokázali v Tvrzení 2.33. $\square$

Tvrzení 2.35. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.4) platí:*

(i) $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $f(px) = (f(x))^p$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$*;*

(iii) $f(rx) = (f(x))^r$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $r \in \mathbb{Q}$.

Důkaz. Všechny části se dokáží stejně jako části (i), (ii) a (iii) Tvrzení 2.1, k tomu je totiž potřeba rovnice (1.1) dokázaná v Tvrzení 2.33 a již dokázané vlastnosti v částech (i), (ii) a (iv) Tvrzení 2.34. □

Tvrzení 2.36. *Funkce f definovaná vztahem (1.4) je rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Přímo z definice funkce f (vztah (1.4)) ihned plyne, že pro $x > 0$ je $f(x) > 1$. Zbytek důkazu tak lze provést úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.2, kde se využívají již dokázané vlastnosti z části (iii) Tvrzení 2.34 a části (i) Tvrzení 2.35. □

Tvrzení 2.37. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.4) platí:*

(i) f *je prostá na* $\mathbb{R}$;

(ii) $f(x) > 1$ *pro* $x > 0$;

(iii) $f(x) < 1$ *pro* $x < 0$.

Důkaz.

(i) Jde o důsledek předchozího tvrzení.

(ii) Plyne ihned z definice (1.4).

(iii) Jde o důsledek předchozího tvrzení a části (i) Tvrzení 2.34. □

Tvrzení 2.38. *Funkce f definovaná vztahem (1.4) je spojitá na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 1.12 je poloměr konvergence řady (1.4) $R = +\infty$ a podle Věty D.51 je proto funkce (1.4) spojitá na $\mathbb{R}$. □

Tvrzení 2.39. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.4) platí $f^{(n)}(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Funkce f definovaná rovností (1.4) je mocninnou řadou, kterou lze podle Věty D.52 o derivaci mocninné řady derivovat člen po členu na intervalu $(-R, R)$, kde R je poloměr konvergence. Podle Tvrzení 1.12 je $R = +\infty$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x). \qquad (1.68)$$

Zbytek důkazu se provede pomocí matematické indukce stejně jako důkaz Tvrzení 2.9, kde se využívá právě dokázaná rovnost $f'(x) = f(x)$. □

Tvrzení 2.40. *Funkce f definovaná vztahem (1.4) je ryze konvexní na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.39, části (iii) Tvrzení 2.34 a Tvrzení 2.38 se důkaz provede úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.14. $\square$

Tvrzení 2.41. *Pro funkci f definovanou vztahem (1.4) platí:*

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

(iii) $\mathcal{R}_f = (0,+\infty)$.

Důkaz.

(i) Pro $x > 0$ ihned z definice (1.4) plyne $f(x) > x + 1$, a protože platí $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$, tak podle Věty D.19 je rovněž $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, kde druhá rovnost platí podle části (ii) Tvrzení 2.34 a poslední rovnost podle části (i) tohoto tvrzení a Věty D.22.

(iii) Plyne z Věty D.30, jejíž předpoklady jsou splněny díky Tvrzení 2.36, díky Tvrzení 2.38 a díky částem (i) a (ii) tohoto tvrzení.

$\square$

Odvození vlastností z Definice E4

Odvození vlastností z Definice E4 uděláme v trochu jiném pořadí, než jak jsme to dělali doposud. Mohli bychom postupovat jako obvykle, ale Definice E4 nabízí nové možnosti na důkazy některých vlastností exponenciály.

Tvrzení 2.42. *Funkce f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, je spojitá na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Plyne ihned z diferenciální rovnice (1.5), Věty D.23 a Věty 1.13, podle které je řešení f definované na $\mathbb{R}$. $\square$

Tvrzení 2.43. *Pro funkci f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, platí:*

(i) $f(0) = 1$;

(ii) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

(i) To je přímo počáteční podmínka (1.6).

(ii) Definujme funkci $h(x) = f(x) f(-x)$. Podle Věty D.24 o derivaci součinu, Věty D.25 o derivaci složené funkce a faktu, že funkce f je řešením diferenciální rovnice (1.5), dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = f'(x) f(-x) - f(x) f'(-x) = f(x) f(-x) - f(x) f(-x) = 0,$$

takže podle Věty D.26 je funkce h konstantní na $\mathbb{R}$. Z části (i) ihned dostáváme $h(0) = 1$, proto pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost $f(x) f(-x) = 1$, ze které nutně plyne $f(x) \neq 0$. Rovnost $f(x) f(-x) = 1$ tak stačí vydělit nenulovým členem $f(x)$ a obdržíme dokazovanou vlastnost.

(iii) V důkazu Věty 1.13 jsme dospěli k závěru, že nás zajímá pouze situace, kdy je $y \in (0, +\infty)$, což je jen v jiném označení právě dokazovaná nerovnost $f(x) > 0$ (ponechali jsme značení Věty 1.13). Tato nerovnost navíc platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, neboť je řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) podle Věty 1.13 definované na $\mathbb{R}$. □

Poznámka 2.44. Část (iii) předešlého tvrzení lze dokázat ještě jiným způsobem: Již jsme při důkazu části (ii) Tvrzení 2.43 dokázali platnost $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Kdyby pro nějaké reálné číslo y bylo $f(y) < 0$, pak s využitím části (i) Tvrzení 2.43 a Věty D.29 (kterou můžeme použít, neboť podle Tvrzení 2.42 je funkce f spojitá na $\mathbb{R}$) by muselo existovat číslo z mezi čísly 0 a y takové, pro které je $f(z) = 0$, což je spor. Proto nutně musí platit nerovnost $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 2.45. *Funkce f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, splňuje rovnici* (1.1).

Důkaz. Zvolme libovolné pevné číslo $y \in \mathbb{R}$ a definujme funkci

$$h(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Taková definice má smysl, neboť jsme při důkazu (ii) Tvrzení 2.43 dokázali, že $f(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Podle Věty D.24 o derivaci podílu, triviálního použití Věty D.25 o derivaci složené funkce a faktu, že funkce f je řešením diferenciální rovnice (1.5), dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{f'(x+y)\, f(x) - f(x+y)\, f'(x)}{(f(x))^2} = 0,$$

takže podle Věty D.26 je funkce h konstantní na $\mathbb{R}$. S využitím části (i) Tvrzení 2.43 dostáváme $h(0) = f(y)$, proto pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y),$$

kterou stačí vynásobit (nenulovým) výrazem $f(y)$ a obdržíme platnost rovnice $f(x+y) = f(x)f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, neboť volba pevného čísla y byla zcela libovolná. □

Důkazy části (ii) Tvrzení 2.43, Poznámky 2.44 a Tvrzení 2.45 byly převzaty z [16].

Tvrzení 2.46. *Pro funkci, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, platí:*

(i) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(px) = (f(x))^p$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$;

(iv) $f(rx) = (f(x))^r$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $r \in \mathbb{Q}$.

Důkaz. Část (i) se dokáže stejně jako část (iv) Lemmatu 1.2, neboť k důkazu byla potřeba pouze rovnice (1.1) dokázaná v Tvrzení 2.45. Zbylé části se dokáží stejně jako části (i), (ii) a (iii) Tvrzení 2.1, k tomu je totiž potřeba rovnice (1.1) dokázaná v Tvrzení 2.45 a již dokázané vlastnosti v částech (i) a (ii) Tvrzení 2.43 a vlastnost (i) tohoto tvrzení. □

Tvrzení 2.47. *Funkce* f*, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, je rostoucí na* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Podle diferenciální rovnice (1.5) a části (iii) Tvrzení 2.34 pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = f(x) > 0$, takže podle Věty D.27 je funkce f rostoucí na celém $\mathbb{R}$. □

Tvrzení 2.48. *Pro funkci f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, platí:*

(i) *f je prostá na $\mathbb{R}$;*

(ii) *$f(x) > 1$ pro $x > 0$;*

(iii) *$f(x) < 1$ pro $x < 0$.*

Důkaz.

(i) Jde o důsledek předchozího tvrzení.

(ii) Jde o důsledek předchozího tvrzení a počáteční podmínky (1.6).

(iii) Jde o důsledek předchozího tvrzení a počáteční podmínky (1.6). □

Tvrzení 2.49. *Pro funkci f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, platí $f^{(n)}(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Tvrzení platí pro $n = 1$, neboť jde přímo o rovnici (1.5). Zbytek důkazu se provede pomocí matematické indukce stejně jako důkaz Tvrzení 2.9, kde se využívá právě dokázaná rovnost $f'(x) = f(x)$. □

Tvrzení 2.50. *Funkce f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, je ryze konvexní na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.49, části (iii) Tvrzení 2.43 a Tvrzení 2.42 se důkaz provede úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.14. □

Tvrzení 2.51. *Pro funkci f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, platí podmínka* (1.2)*.*

Důkaz. Z diferenciální rovnice (1.5) a části (i) Tvrzení 2.43 ihned pro derivaci funkce f v bodě nula plyne $f'(0) = f(0) = 1$, proto má tečna funkce f v bodě 0 rovnici

$$y = x + 1. \tag{1.69}$$

Dále podle Tvrzení 2.50 je funkce f ryze konvexní na celém $\mathbb{R}$. Speciálně pro bod nula podle definice ryze konvexní funkce platí podle (1.69) nerovnost

$$f(x) > x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

S ohledem na část (i) Tvrzení 2.43 můžeme předchozí nerovnost upravit na tvar

$$f(x) \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

což je přesně podmínka (1.2). □

Tvrzení 2.52. *Pro funkci f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, platí:*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$*;*

(iii) $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$*.*

Důkaz.

(i) Podle Tvrzení 2.51 platí $f(x) \geq x + 1$, a protože je $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$, tak podle Věty D.19 je rovněž $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, kde druhá rovnost platí podle části (iii) Tvrzení 2.43 a poslední rovnost podle části (i) tohoto tvrzení a Věty D.22.

(iii) Plyne z Věty D.30, jejíž předpoklady jsou splněny díky Tvrzení 2.42, díky Tvrzení 2.47 a díky částem (i) a (ii) tohoto tvrzení.

□

Odvození vlastností z Definice E5

Lemma 2.53. *$e \geq 2$.*

Důkaz. Z Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1) pro $n > 1$ ihned dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + 1 = 2,$$

neboť je určitě $\frac{1}{n} > 0$. Na předchozí nerovnost můžeme aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti (jejíž předpoklady jsou díky Tvrzení 1.17 splněny) a dostaneme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} 2 = 2. \qquad \square$$

Poznámka 2.54. V souvislosti s důkazem předchozího Lemmatu 2.53 připomínáme Poznámku 1.20.

V následujících tvrzeních budeme využívat Větu D.63, kterou můžeme používat díky dokázané nerovnosti $e > 0$ v Tvrzení 1.19.

Tvrzení 2.55. *Funkce $f(x) = e^x$ splňuje rovnici (1.1).*

Důkaz. Plyne z části (i) Věty D.63. $\square$

Tvrzení 2.56. *Pro funkci $f(x) = e^x$ platí:*

(i) $f(0) = 1$*;*

(ii) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*.*

Důkaz.

(i) Plyne přímo z definice obecné mocniny (Definice D.61).

(ii) Plyne z části (ii) Věty D.63.

(iii) Plyne z části (v) Věty D.63.

(iv) Plyne z části (iii) Věty D.63. $\square$

Tvrzení 2.57. *Pro funkci $f(x) = e^x$ platí:*

(i) $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $f(px) = (f(x))^p$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$*;*

(iii) $f(rx) = (f(x))^r$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $r \in \mathbb{Q}$*.*

Důkaz. Všechny části se dokáží stejně jako části (i), (ii) a (iii) Tvrzení 2.1, k tomu je totiž potřeba rovnice (1.1) dokázaná v Tvrzení 2.55 a již dokázané vlastnosti v částech (i), (ii) a (iv) Tvrzení 2.56. □

Tvrzení 2.58. *Funkce* $f(x) = e^x$ *je rostoucí na* $\mathbb{R}$*.*

Důkaz. Podle části (iv) Věty D.63 a Lemmatu 2.53 platí $e^x > e^y$ pro $x > y$, což je přímo definice rostoucí funkce. □

Tvrzení 2.59. *Pro funkci* $f(x) = e^x$ *platí:*

(i) f *je prostá na* $\mathbb{R}$*;*

(ii) $f(x) > 1$ *pro* $x > 0$*;*

(iii) $f(x) < 1$ *pro* $x < 0$*.*

Důkaz.

(i) Jde o důsledek předchozího tvrzení.

(ii) Podle části (iv) Věty D.63 a Lemmatu 2.53 pro $x > 0$ platí $e^x > e^0 = 1$, kde jsme využili část (i) Tvrzení 2.56.

(iii) Podle části (iv) Věty D.63 a Lemmatu 2.53 pro $x < 0$ platí $e^x < e^0 = 1$, kde jsme využili část (i) Tvrzení 2.56. □

Tvrzení 2.60. *Platí*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Důkaz. Nejprve budeme zkoumat limitu zprava. Nechť je $0 < x < \frac{1}{2}$. Dále nalezněme přirozené číslo n tak, aby platila dvojice nerovností

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \tag{1.70}$$

odkud po jednoduché úpravě plyne pro n podmínka

$$n \leq \frac{1}{x} < n + 1,$$

kterou splňuje právě jedno číslo[8] n. Protože je $\frac{1}{x} > 2$, plyne z (1.70) $n \geq 2$. Z předchozí nerovnosti $n \leq \frac{1}{x}$ po přičtení jedničky dostáváme

$$n + 1 \leq \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}, \text{ resp. } \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{n+1} \tag{1.71}$$

a z nerovnosti $\frac{1}{x} < n + 1$ po odečtení dvojky

$$n - 1 > \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}, \text{ resp. } \frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}. \tag{1.72}$$

Z Lemmatu 2.3.3 ihned plyne dvojice nerovností

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

resp. po úpravě

$$1 + \frac{1}{n+1} < \sqrt[n+1]{e} = e^{\frac{1}{n+1}}, \quad e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e} < 1 + \frac{1}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2. \tag{1.73}$$

Funkce e^x je podle Tvrzení 2.58 rostoucí, takže s ohledem na nerovnosti (1.70) a (1.73) dostáváme

$$1 + \frac{1}{n+1} < e^{\frac{1}{n+1}} < e^x \leq e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}$$

a s ohledem na nerovnosti (1.71) a (1.72) (ke kterým stačí přičíst jedničku) dále platí

$$1 + \frac{x}{1+x} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x} \quad \text{pro} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \tag{1.74}$$

což po odečtení jedničky a vydělení kladným číslem x dává platnost dvojice nerovností

$$\frac{1}{1+x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x} \quad \text{pro} \quad 0 < x < \frac{1}{2}. \tag{1.75}$$

Protože platí

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-2x} = 1,$$

[8] Jde o funkci dolní celá část, která se běžně značí $\lfloor x \rfloor$. Důkaz, že pro každé reálné číslo x existuje právě jedno celé číslo n (což je obecnější než zde zkoumaný případ) tak, že platí $n \leq x < n + 1$, lze nalézt na straně 65 v [9].

tak společně s nerovnostmi (1.75) jsou splněny předpoklady Věty D.18 o limitě sevřené funkce (která platí i pro jednostranné limity) a dostáváme platnost rovnosti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{1.76}$$

Při vyšetřování limity zleva budeme postupovat analogicky jako v případě limity zprava, budeme proto postupovat rychleji. Nechť je $-\frac{1}{2} < x < 0$. Položme $y = -x$, takže je $0 < y < \frac{1}{2}$ a podle (1.74) platí

$$\frac{1+2y}{1+y} = 1 + \frac{y}{1+y} < e^y < 1 + \frac{y}{1-2y} = \frac{1-y}{1-2y} \quad \text{pro} \quad 0 < y < \frac{1}{2},$$

odkud po úpravě plyne

$$\frac{1-2y}{1-y} < \frac{1}{e^y} < \frac{1+y}{1+2y} \quad \text{pro} \quad 0 < y < \frac{1}{2},$$

což je ekvivalentní

$$\frac{1+2x}{1+x} < \frac{1}{e^{-x}} = e^x < \frac{1-x}{1-2x} \quad \text{pro} \quad -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Od předchozí dvojice nerovností odečteme jedničku a poté výsledek vydělíme záporným číslem x a obdržíme

$$\frac{1}{1-2x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1+x} \quad \text{pro} \quad -\frac{1}{2} < x < 0. \tag{1.77}$$

Protože platí

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-2x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1+x} = 1,$$

tak společně s nerovnostmi (1.77) jsou splněny předpoklady Věty D.18 o limitě sevřené funkce (která platí i pro jednostranné limity) a dostáváme platnost rovnosti

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{1.78}$$

Limity (1.76) a (1.78) mají stejnou hodnotu a tím je tvrzení dokázáno (podle Věty D.21). □

Předešlý důkaz byl převzat ze stran 170 – 172 v [9].

Tvrzení 2.61. *Funkce $f(x) = e^x$ je spojitá na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.55 a Tvrzení 2.60 lze důkaz provést stejně jako důkaz v Poznámce 2.11. □

Poznámka 2.62. Na straně 162 v [9] je proveden jiný důkaz spojitosti funkce e^x, který se ovšem opírá o inverzní funkci k e^x, která v [9] byla zavedena ještě před důkazem spojistosti. My jsme proto museli zvolit jiný důkaz spojitosti, neboť inverzní funkci k exponenciále zavedeme až v Kapitole 2.

Tvrzení 2.63. *Pro funkci $f(x) = e^x$ platí $f^{(n)}(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Tvrzení pro $n = 1$ platí podle Lemmatu 2.6, které můžeme použít díky Tvrzení 2.55 a Tvrzení 2.60. Zbytek důkazu tak můžeme pomocí matematické indukce provést úplně stejně, jako jsme provedli důkaz Tvrzení 2.9. □

Tvrzení 2.64. *Funkce $f(x) = e^x$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.63, části (iii) Tvrzení 2.56 a Tvrzení 2.61 se důkaz provede úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.14. □

Lemma 2.65. *Pro každé přirozené číslo n platí $e^n > n$.*

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Zkoumaná nerovnost platí pro $n = 1$ podle Lemmatu 2.53. Nechť pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $e^k > k$. Pak dostáváme

$$e^{k+1} = e^k e > ke \geq 2k \geq k + 1,$$

kde rovnost platí podle Tvrzení 2.55, první nerovnost platí podle indukčního předpokladu, druhá nerovnost podle Lemmatu 2.53 a poslední nerovnost je triviální. □

Tvrzení 2.66. *Pro funkci $f(x) = e^x$ platí:*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$*;*

(iii) $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$*.*

Důkaz.

(i) Podle definice $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ máme dokázat, že platí

$$(\forall K \in \mathbb{R})\,(\exists x_0 \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R}, x > x_0)\,(f(x) > K)\,. \tag{1.79}$$

Zvolme libovolně $K \in \mathbb{R}$ pevné. K němu určitě nalezneme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > K$. Podle Tvrzení 2.58 a Lemmatu 2.65 je pro $x > n$

$$f\,(x) > f\,(n) > n > K,$$

takže pro dané K jsme nalezli $x_0 = n$ $(n > K)$ tak, že pro všechna $x > x_0$ je $f(x) > K$. Protože volba pevného K byla zcela libovolná, je platnost definice (1.79) ověřena.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, kde druhá rovnost platí podle části (ii) Tvrzení 2.56 a poslední rovnost podle části (i) tohoto tvrzení a Věty D.22.

(iii) Plyne z Věty D.30, jejíž předpoklady jsou splněny díky Tvrzení 2.58, díky Tvrzení 2.61 a díky částem (i) a (ii) tohoto tvrzení.

□

Odvození vlastností z Definice E6

V této části se budeme často odkazovat na tvrzení z 2. kapitoly.

Splnění rovnice (1.1) a podmínky (1.2) viz Větu 3.5.

Tvrzení 2.67. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2)*, platí:*

(i) $f\,(0) = 1$;

(ii) $f\,(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$;

(iv) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz.

(i) Podle části (i) Lemmatu 2.1.2 je $g(1) = 0$, takže ihned z definice inverzní funkce dostáváme $f(0) = 1$.

(ii) Pro inverzní funkci $f = g^{-1}$ platí

$$f(g(z)) = z, \quad z \in (0, +\infty). \tag{1.80}$$

Podle části (ii) Lemmatu 2.1.2 je $g\left(\frac{1}{z}\right) = -g(z)$ pro všechna $z \in (0, +\infty)$, odkud s využitím (1.80) vyplývá

$$\frac{1}{z} = f\left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right) = f(-g(z))$$

a po substituci $x = g(z)$ dostáváme

$$\frac{1}{g^{-1}(x)} = \frac{1}{f(x)} = f(-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde jsme využili část (iii) Tvrzení 2.2.13, podle které je $\mathcal{R}_g = (-\infty, +\infty)$.

(iii) Plyne přímo z definice inverzní funkce a skutečnosti, že funkce g je definována právě na intervalu $(0, +\infty)$.

(iv) Podle části (iii) Lemmatu 2.1.2 je $g(z^n) = ng(z)$ pro všechna $z \in (0, +\infty)$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$, odkud s využitím (1.80) vyplývá

$$z^n = f(g(z^n)) = f(ng(z))$$

a po substituci $x = g(z)$ dostáváme

$$\left(g^{-1}(x)\right)^n = (f(x))^n = f(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

neboť platí část (iii) Tvrzení 2.2.13. □

Tvrzení 2.68. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2), *platí:*

(i) $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(px) = (f(x))^p$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$;

(iii) $f(rx) = (f(x))^r$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $r \in \mathbb{Q}$.

Důkaz.

(i) Podle části (i) Tvrzení 2.2.2 platí $g\left(\frac{u}{v}\right) = g(u) - g(v)$ pro všechna čísla $u, v \in (0, +\infty)$, odkud s využitím (1.80) vyplývá

$$\frac{u}{v} = f\left(g\left(\frac{u}{v}\right)\right) = f(g(u) - g(v))$$

a po substituci $x = g(u)$, $y = g(v)$ dostáváme

$$\frac{g^{-1}(x)}{g^{-1}(y)} = \frac{f(x)}{f(y)} = f(x - y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, neboť platí část (iii) Tvrzení 2.2.13.

(ii) Podle části (ii) Tvrzení 2.2.2 platí $g(z^p) = pg(z)$ pro všechna $z \in (0, +\infty)$ a pro všechna $p \in \mathbb{Z}$, odkud s využitím (1.80) vyplývá

$$z^p = f(g(z^p)) = f(pg(z))$$

a po substituci $x = g(z)$ dostáváme

$$\left(g^{-1}(x)\right)^p = (f(x))^p = f(px)$$

pro všechna $p \in \mathbb{Z}$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboť platí část (iii) Tvrzení 2.2.13.

(iii) Podle části (iii) Tvrzení 2.2.2 platí $g(z^r) = rg(z)$ pro všechna $z \in (0, +\infty)$ a pro všechna $r \in \mathbb{Q}$, odkud s využitím (1.80) vyplývá

$$z^r = f(g(z^r)) = f(rg(z))$$

a po substituci $x = g(z)$ dostáváme

$$\left(g^{-1}(x)\right)^r = (f(x))^r = f(rx)$$

pro všechna $r \in \mathbb{Q}$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboť platí část (iii) Tvrzení 2.2.13.

□

Tvrzení 2.69. *Funkce f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2), *je rostoucí na* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Podle Tvrzení 2.2.3 je funkce g rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$ a podle části (iii) Tvrzení 2.2.13 je $\mathcal{R}_g = (-\infty, +\infty)$, takže z Věty D.31 ihned dostáváme, že f je rostoucí na $\mathbb{R}$. □

Tvrzení 2.70. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2), *platí:*

(i) *f je prostá na $\mathbb{R}$;*

(ii) *$f(x) > 1$ pro $x > 0$;*

(iii) *$f(x) < 1$ pro $x < 0$.*

Důkaz.

(i) Jde o důsledek předchozího tvrzení.

(ii) Podle části (ii) Tvrzení 2.2.1 je $g(z) > 0$ pro $z \in (1, +\infty)$, takže s využitím Tvrzení 2.69, části (i) Tvrzení 2.67 a rovnosti (1.80) dostáváme $z = f(g(z)) > f(0) = 1$, odkud po substituci $x = g(z)$ dostáváme $g^{-1}(x) = f(x) > 1$ pro $x > 0$.

(iii) Podle části (i) Tvrzení 2.2.1 je $g(z) < 0$ pro $z \in (0, 1)$, takže s využitím Tvrzení 2.69, části (i) Tvrzení 2.67 a rovnosti (1.80) dostáváme $z = f(g(z)) < f(0) = 1$, odkud po substituci $x = g(z)$ dostáváme $g^{-1}(x) = f(x) < 1$ pro $x < 0$. □

Tvrzení 2.71. *Funkce f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2), *je spojitá na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 2.2.3 a Tvrzení 2.2.10 je funkce g rostoucí a spojitá na intervalu $(0, +\infty)$ a podle části (iii) Tvrzení 2.2.13 je $\mathcal{R}_g = (-\infty, +\infty)$, takže z Věty D.32 ihned dostáváme, že f je spojitá na $\mathbb{R}$. □

Tvrzení 2.72. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2), *platí $f^{(n)}(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.2.3 a Tvrzení 2.2.7 jsou splněny předpoklady Věty D.33 o derivaci inverzní funkce, podle které pro každé $z \in (0, +\infty)$ platí

$$f'(g(z)) = \frac{1}{g'(z)} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z,$$

resp. po substituci $x = g(z)$

$$f'(x) = g^{-1}(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde jsme využili část (iii) Tvrzení 2.2.13, podle které je $\mathcal{R}_g = (-\infty, +\infty)$.

Zbytek důkazu můžeme pomocí matematické indukce provést úplně stejně, jako jsme provedli důkaz Tvrzení 2.9. □

Tvrzení 2.73. *Funkce f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2)*, je ryze konvexní na* $\mathbb{R}$*.*

Důkaz. Díky Tvrzení 2.72, části (iii) Tvrzení 2.67 a Tvrzení 2.71 se důkaz provede úplně stejně jako důkaz Tvrzení 2.14. □

Tvrzení 2.74. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2)*, platí:*

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*;*

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$*;*

(iii) $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$*.*

Důkaz.

(i) Plyne ihned z části (i) Tvrzení 2.2.13 a Věty D.34.

(ii) Plyne ihned z části (ii) Tvrzení 2.2.13 a Věty D.34.

(iii) Plyne přímo z definice inverzní funkce a skutečnosti, že funkce g je definovaná právě na intervalu $(0, +\infty)$. □

1.3 Ekvivalence definic

V této podkapitole ukážeme, že všech 6 definic pro exponenciálu skutečně zavádí jednu a tutéž funkci. Bylo by možné postupovat např. tak, že bychom ukázali postupně implikace E1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ E3 $\Rightarrow$ E4 $\Rightarrow$ E5 $\Rightarrow$ E6 $\Rightarrow$ E1, čímž bychom byli hotovi. Abychom však ukázali co nejvíce souvislostí mezi jednotlivými definicemi, budeme se snažit dokázat, jak z jedné definice plyne jiná.

V Tabulce 1 přehledně uvádíme, kde lze v práci příslušnou implikaci ihned najít. Čísla v jednotlivých buňkách Tabulky 1 označují čísla stránek a implikaci $\mathrm{E}_i \Rightarrow \mathrm{E}_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, 6$, $i \neq j$) nalezneme v i-tém řádku a j-tém sloupci. Z Tabulky 1 je ihned patrné, že se budeme snažit dokázat 30 implikací.

Způsob řazení implikací je takový, že jsme se v první řadě drželi schématu E1 $\Rightarrow$ E2, E1 $\Rightarrow$ E3, …, E2 $\Rightarrow$ E1, E2 $\Rightarrow$ E3, atd., které jsme ovšem porušili vždy, když nějaké důkazy byly analogické, jako tomu bylo např. u implikací E1 $\Rightarrow$ E6 a E6 $\Rightarrow$ E1. V tom případě jsme oba důkazy zařadili bezprostředně po sobě. Dané schéma jsme rovněž porušili v případech, kdy jsme na přímý důkaz některé implikace nepřišli a v tom případě jsme příslušnou implikaci nechali až na samotný závěr této podkapitoly.

Tabulka 1: Implikace definic

Definice	E1	E2	E3	E4	E5	E6
E1	—	60	60	62	87	62
E2	64	—	64	67	67	73
E3	79	64	—	82	87	87
E4	82	82	82	—	86	84
E5	85	67	85	86	—	86
E6	63	76	88	85	87	—

E1 $\Rightarrow$ E2

Jedná se o Lemma 1.8.

E1 $\Rightarrow$ E3

Věta 3.1. *Pro funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Podle Tvrzení 2.9 a části (i) Lemmatu 1.2 má Taylorův polynom stupně nejvýše n-tého v bodě 0 tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

a Lagrangeův zbytek (Věta D.35) tvar

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f(\zeta),$$

kde ζ je vnitřní bod intervalu s krajními body 0 a x, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f(\zeta)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f(|x|), \tag{1.81}$$

kde první nerovnost vyplývá z definice absolutní hodnoty a druhá platí, neboť funkce f je jednak podle části (iii) Lemmatu 1.2 kladná (platí tedy $|f(\zeta)| = f(\zeta)$) a dále podle Tvrzení 2.2 rostoucí (proto pro $\zeta < |x|$ platí $f(\zeta) < f(|x|)$). Dále definujme

$$a_n = f(|x|) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(|x|) \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{f(|x|) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0,$$

kde předposlední rovnost platí díky Větě D.6 o limitě součinu a faktu, že x je pevně zvoleno. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak podle limitní verze d'Alembertova podílového kritéria (Věta D.42) konverguje (předpoklad této věty $a_n > 0$ je splněn, neboť $x \neq 0$ a podle části (iii) Lemmatu 1.2 je f kladná), a proto je podle nutné podmínky konvergence (Věta D.41)

$$\lim_{n\to\infty} f(|x|) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{1.82}$$

Aplikací Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti na nerovnosti (1.81) a s využitím rovnosti (1.82) dostáváme $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$, a tudíž je podle Věty D.4 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Podle Věty D.36 je proto pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{1.83}$$

neboť volba pevného x byla zcela libovolná. Rovnost (1.83) však podle části (i) Lemmatu 1.2 platí i pro hodnotu $x = 0$, neboli platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Poznámka 3.2. Důkaz Věty 1.1 je tzv. konstrukčním důkazem, tj. získali jsme rovnou předpis pro funkci, která vyhovuje rovnici (1.1) a podmínce (1.2). Pokud se v nějaké učebnici zavádí exponenciála Definicí E1, pak důkaz Věty 1.1 je v podstatě jediným důkazem, který se v učebnicích provádí. Nicméně Věta 3.1 je další možností, jak dokázat Větu 1.1 a opět jde o konstrukční důkaz. V tom případě by se postupovalo tak (aniž bychom věděli, zda funkce v požadovanými vlastnostmi vůbec existuje – viz Poznámku 2.17), že by se nejprve odvodily všechny potřebné vlastnosti, které se při důkazu Věty 3.1 používají, a nakonec by přišel důkaz Věty 3.1.

A proč se v literatuře k důkazu existence právě jedné funkce z Definice E1 nepoužívá Věta 3.1? Na to odpovíme v Kapitole 3.

E1 $\Rightarrow$ E4

Věta 3.3. *Funkce f, která vyhovuje rovnici (1.1) a podmínce (1.2), splňuje diferenciální rovnici* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.5).

Důkaz. Důkaz je obsažen v Tvrzení 2.9 a části (i) Lemmatu 1.2. □

E1 $\Rightarrow$ E6

Nyní budeme dokazovat první implikaci s Definicí E6. Ke všem důkazům implikací s Definicí E6 použijeme vždy vhodnou definici logaritmu, např. v tomto případě použijeme Definici L1 (v dalším textu toto již nebudeme zmiňovat).

Věta 3.4. *Funkce g, která je inverzní k funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2), vyhovuje rovnici* (2.1) *a podmínce* (2.2).

Důkaz. Pro inverzní funkci $g = f^{-1}$ platí

$$g\left(f\left(x\right)\right) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.84}$$

Zvolme libovolně $s, t \in \mathbb{R}$ a definujme $u = f\left(s\right)$, $v = f\left(t\right)$. Podle části (iii) Tvrzení 2.15 je $u, v \in (0, +\infty)$.

Protože je g inverzní k f, tak také platí $s = g\left(u\right)$, $t = g\left(v\right)$. Podle rovnice (1.1) platí

$$uv = f\left(s\right) f\left(t\right) = f\left(s + t\right),$$

a tudíž s využitím rovnosti (1.84) pro všechna $u, v \in (0, +\infty)$ platí

$$g\left(uv\right) = g\left(f\left(s + t\right)\right) = s + t = g\left(u\right) + g\left(v\right),$$

což je přesně funkcionální rovnice (2.1).

Z nerovnosti (1.1) (znaménko nerovnosti se nemění, neboť podle Tvrzení 2.2.3 je g rostoucí) plyne

$$g\left(f\left(z\right)\right) \geq g\left(z + 1\right), \quad z \in (-1, +\infty).$$

Použijeme-li dále (1.84), pak platí

$$z \geq g\,(z+1)\,, \quad z \in (-1, +\infty)$$

a to je ekvivalentní nerovnosti

$$g\,(z) \leq z - 1, \quad z \in (0, +\infty)\,,$$

což je přesně podmínka (2.2). $\square$

E6 $\Rightarrow$ E1

Věta 3.5. *Funkce f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici (2.1) a podmínku (2.2), vyhovuje rovnici* (1.1) *a podmínce* (1.2)*.*

Důkaz. Budeme postupovat úplně analogicky jako v důkazu Věty 3.4. Pro inverzní funkci $f = g^{-1}$ platí rovnost (1.80). Zvolme libovolně $s, t \in (0, +\infty)$ a definujme $u = g\,(s)$, $v = g\,(t)$. Podle části (iii) Tvrzení 2.2.13 je $u, v \in \mathbb{R}$.

Protože je f inverzní k g, tak také platí $s = f\,(u)$, $t = f\,(v)$. Podle rovnice (2.1) platí

$$u + v = g\,(s) + g\,(t) = g\,(st)\,,$$

a tudíž s využitím rovnosti (1.80) pro všechna $u, v \in \mathbb{R}$ platí

$$f\,(u+v) = f\,(g\,(st)) = st = f\,(u)\,f\,(v)\,,$$

což je přesně funkcionální rovnice (1.1).

Z nerovnosti (2.1) (znaménko nerovnosti se nemění, neboť podle Tvrzení 2.2 je f rostoucí) plyne

$$f\,(g\,(z)) \leq f\,(z-1)\,, \quad z \in (0, +\infty)\,.$$

Použijeme-li dále (1.80), pak platí

$$z \leq f\,(z-1)\,, \quad z \in (0, +\infty)$$

a to je ekvivalentní nerovnosti

$$f\,(x) \geq x + 1, \quad x \in (-1, +\infty)\,. \tag{1.85}$$

Dále platí

$$f\,(x) > 0 \geq x + 1, \quad x \in (-\infty, -1]\,, \tag{1.86}$$

kde první nerovnost platí podle[9] části (iii) Lemmatu 1.2 a druhá nerovnost je triviální. Obě nerovnosti (1.85) a (1.86) dohromady dávají

$$f(x) \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

což je přesně podmínka (1.2). □

E2 ⇒ E1

Jedná se o Lemma 1.10.

E2 ⇒ E3 a E3 ⇒ E2

Lemma 3.6. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$. Pak pro výraz*

$$A(n,k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}$$

platí:

(i) $A(n,0) = A(n,1) = 1$ *pro všechna* n*;*

(ii) $0 < A(n,k) < 1$ *pro všechna* $2 \leq k \leq n$*;*

(iii) $1 - \frac{k(k-1)}{n} < A(n,k)$ *pro všechna* $2 \leq k \leq n$*.*

Důkaz. Část (i) platí triviálně. Důkaz částí (ii) a (iii) provedeme analogicky jako důkaz Lemmatu 2.25, budeme proto postupovat rychleji. Pro všechna $2 \leq k \leq n$ platí

$$\begin{aligned} A(n,k) &= \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} = \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{1.87}$$

Poslední výraz obsahuje právě $(k-1)$ členů (člen $\frac{n}{n} = 1$ již neuvažujeme, neboť následující úvahy na něm vůbec nezávisí vzhledem k jeho hodnotě). Každý člen

[9] Část (iii) Lemmatu 1.2 můžeme použít, neboť k jejímu důkazu byla potřeba již dokázaná rovnice (1.1) a rovnost $f(0) = 1$, k jejímuž důkazu byla potřeba nerovnost $f(x) \geq x + 1$ pro bod $x = 0$, kterou jsme již dokázali v (1.85).

má tedy tvar $\left(1-\frac{c}{n}\right)$, kde $c = 1, 2, \ldots, (k-1)$ a $2 \leq k \leq n$. Ze zřejmých nerovností $0 < \left(1-\frac{c}{n}\right) < 1$ a vztahu (1.87) ihned plyne $0 < A\left(n,k\right) < 1$, čímž je dokázána část (ii).

Pro všechna c a k, kde $c = 1, 2, \ldots, (k-1)$ a $2 \leq k \leq n$. platí $\left(1-\frac{c}{n}\right) \geq \left(1-\frac{k-1}{n}\right) > 0$. Díky tomu a vztahu (1.87) platí nerovnost

$$A\left(n,k\right) \geq \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}.$$

Protože je $2 \leq k \leq n$, tak platí nerovnost $-\frac{k-1}{n} \geq -1$ a lze proto použít Bernoulliovu nerovnost (Tvrzení D.1), takže s ohledem na předchozí výpočet platí

$$A\left(n,k\right) \geq \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \geq 1-\frac{(k-1)^2}{n} > 1-\frac{k\left(k-1\right)}{n},$$

kde poslední nerovnost je triviální a tím je dokázána i část (iii). □

Věta 3.7. *Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{1.88}$$

Důkaz. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ pevné a definujme výraz

$$V\left(n\right) = \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|,\ n \in \mathbb{N}.$$

Protože podle binomické věty platí

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k,$$

můžeme výraz $V(n)$ pro $n \geq 2$ následovně upravovat

$$\begin{aligned} V(n) &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| = \\ &= \left| 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1 - x - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| = \\ &= \left| \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} - \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{n^k} \right) \right| = \left| \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \right) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \left| 1 - A(n,k) \right| \frac{|x|^k}{k!}, \end{aligned} \tag{1.89}$$

kde třetí rovnost je platná díky konečnosti obou sum a poslední nerovnost vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti. Navíc jsme v souladu s Lemmatem 3.6 označili $A(n,k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$, kde $2 \leq k \leq n$. Podle Lemmatu 3.6 pro tato n a k platí nerovnosti $0 < A(n,k) < 1$ a $1 - \frac{k(k-1)}{n} < A(n,k)$. Odtud dále plyne

$$|1 - A(n,k)| = 1 - A(n,k) < \frac{k(k-1)}{n}. \tag{1.90}$$

Celkově jsme tedy výraz $V(n)$ odhadli pomocí vztahů (1.89) a (1.90) následovně

$$\begin{aligned} 0 \leq V(n) &< \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^k}{(k-2)!} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|x|^{j+2}}{j!} = \\ &= \frac{|x|^2}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{|x|^j}{j!} \leq \frac{|x|^2}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}, \end{aligned} \tag{1.91}$$

kde první nerovnost plyne triviálně z definice $V(n)$ pomocí absolutní hodnoty a poslední nerovnost je zřejmá. Již v Lemmatu 1.11 jsme dokázali, že $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}$ konverguje (neboli jde o konečné číslo pro všechna $x \in \mathbb{R}$), a tudíž i součin $|x|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}$ je pevné konečné číslo, protože x je pevně zvoleno. Proto podle Věty D.6 o limitě součinu platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|^2}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \right) = |x|^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \right) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{1.92}$$

Podle Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti aplikované na nerovnosti (1.91) s využitím (1.92) tak platí

$$\lim_{n\to\infty} V(n) = 0.$$

Díky poslední rovnosti a Lemmatu 1.5 (resp. Tvrzení 1.12) jsou splněny předpoklady Věty D.10 a rovnost (1.88) tak platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboť volba pevného x byla zcela libovolná. $\square$

Předešlý důkaz jsme převzali z [3], strany 112 – 113.

Poznámka 3.8. Mohlo by se zdát, že jsme díky Větě 3.7 najednou dokázali obě implikace E2 $\Rightarrow$ E3 a E3 $\Rightarrow$ E2. Ve skutečnosti tomu tak není, protože k důkazu implikace E2 $\Rightarrow$ E3 tak s ohledem na samotný závěr důkazu Věty 3.7 bylo mj. potřeba Lemma 1.5 a naopak na důkaz E3 $\Rightarrow$ E2 bylo mj. potřeba Tvrzení 1.12. To proto, aby byl splněn jeden z předpokladů Věty D.10. Takže jsme místo jedné věty mohli dokazovat věty dvě (jednu pro E2 $\Rightarrow$ E3 a jednu pro E3 $\Rightarrow$ E2), jejichž důkazy by se lišily jen samotným závěrem.

E2 $\Rightarrow$ E4

Věta 3.9. *Funkce f definovaná limitou* (1.3) *splňuje diferenciální rovnici* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6).

Důkaz. Splnění počáteční podmínky (1.6) jsme ukázali v části (i) Tvrzení 2.19 a platnost diferenciální rovnice (1.5) je obsažena v Tvrzení 2.28 (pro $n = 1$). $\square$

Poznámka 3.10. Důkaz Věty 3.9 se opírá o Tvrzení 2.28, jehož důkaz nebyl vůbec triviální, a proto dokázat Větu 3.9 není rovněž vůbec snadné. Snažší důkaz vede přes již dokázané implikace E2 $\Rightarrow$ E1 a E1 $\Rightarrow$ E4 (a tranzitivitu implikace), viz Lemma 1.10 a Větu 3.3.

E2 $\Rightarrow$ E5 a E5 $\Rightarrow$ E2

Lemma 3.11. *Pro každé přirozené číslo k platí*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n = 1.$$

Důkaz. Podle definice limity posloupnosti má platit

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\left(\left|\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n - 1\right| < \varepsilon\right). \tag{1.93}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ pevné. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n - 1 \right| &= \left| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{k}{n^2}\right)^j - 1 \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{k}{n^2}\right)^j \right| = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \cdot \frac{k^j}{n^{2j}} = \sum_{j=1}^{n} A\,(n,j)\, \frac{k^j}{j! \cdot n^j}, \end{aligned} \tag{1.94}$$

kde jsme v souladu s Lemmatem 3.6 označili $A\,(n,j) = \frac{n!}{n^j\,(n-j)!}$, kde $1 \le j \le n$. Podle Lemmatu 3.6 pro tato n a j platí nerovnosti $0 < A\,(n,j) \le 1$. Odtud a z (1.94) dále plyne

$$\left| \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n - 1 \right| \le \sum_{j=1}^{n} \frac{k^j}{j! \cdot n^j} \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{k^j}{j!} < \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!}. \tag{1.95}$$

Podle Tvrzení 1.12 je pro dané k součet $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!}$ konečné číslo. Pro dané ε (a dané k) tak určitě nalezneme přirozené číslo n_0 tak, aby platila nerovnost

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!},$$

takže s ohledem na (1.94) a (1.95) pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^n - 1 \right| < \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!} < \frac{1}{n_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!} < \varepsilon.$$

Volba pevného ε byla zcela libovolná, takže definice (1.93) skutečně platí. □

Věta 3.12. *Pro všechna reálná čísla x platí*

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Důkaz. S ohledem na definici (1.7) čísla e máme dokázat rovnost

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.96}$$

Důkaz rozdělíme do několika částí.

I) Nejprve dokážeme platnost rovnosti (1.96) pro všechna přirozená x pomocí matematické indukce. Rovnost (1.96) triviálně platí pro $x = 1$. Nechť rovnost (1.96) platí pro $x = k \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\begin{aligned}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{k+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(k+1)} = \\ = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\end{aligned} \tag{1.97}$$

kde první rovnost plyne z Věty D.6 o limitě součinu, kterou jsme mohli použít díky Tvrzení 1.17 a poslední rovnost plyne opět z Věty D.6 a díky tomu, že platí (podle téhož Tvrzení 1.17 a téže Věty D.6):

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk},$$

čímž je existence vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk}$ zajištěna a použití Věty D.6 v poslední rovnosti v (1.97) oprávněné. Pokračujme v úpravách rovností (1.97):

$$\begin{aligned}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{k+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^n,\end{aligned} \tag{1.98}$$

kde jsme v první rovnosti užili indukční předpoklad a ve druhé rovnosti Větu D.6 o limitě součinu, kterou jsme použili díky Lemmatu 1.5 a díky Tvrzení 1.17.

Definujme pro dané k výraz

$$V(n) = \left|\left(1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^n - \left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n\right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}V(n) &= \left|\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{k+1}{n}\right)^j\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{n-j} - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{k+1}{n}\right)^j\right| = \\ &= \left|\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{k+1}{n}\right)^j\left(\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{n-j}-1\right)\right| = \\ &= \sum_{j=0}^{n}A(n,j)\,\frac{(k+1)^j}{j!}\left(\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{n-j}-1\right),\end{aligned} \tag{1.99}$$

kde jsme v souladu s Lemmatem 3.6 označili $A(n,j) = \frac{n!}{n^j (n-j)!}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \leq n$. Podle Lemmatu 3.6 pro tato čísla n a j platí nerovnosti $0 < A(n,j) \leq 1$. Odtud a z (1.99) dále plyne

$$\begin{aligned} V(n) &\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{(k+1)^j}{j!} \left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n-j} - 1 \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{(k+1)^j}{j!} \left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - 1 \right) = \\ &= \left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - 1 \right) \sum_{j=0}^{n} \frac{(k+1)^j}{j!} < \left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{j!}. \end{aligned} \tag{1.100}$$

Podle Tvrzení 1.12 je pro dané k součet $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{j!}$ konečné číslo, takže s využitím Lemmatu 3.11 po aplikaci Věty D.6 o limitě součinu a rozdílu obdržíme

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \left(\left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{j!} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{j!} \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - 1 \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{j!} \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - \lim_{n\to\infty} 1 \right) = 0. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Pomocí vztahů (1.99) a (1.100) jsme výraz $V(n)$ odhadli následovně (první nerovnost vyplývá triviálně z definice výrazu $V(n)$ pomocí absolutní hodnoty)

$$0 \leq V(n) < \left(\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)^{n} - 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^j}{j!}.$$

Z Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti aplikované na předchozí dvojici nerovností a s využitím (1.101) plyne $\lim_{n\to\infty} V(n) = 0$, a protože podle Lemmatu 1.5 existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n$, tak z Věty D.10 dostáváme platnost rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n. \tag{1.102}$$

Celkově z (1.98) a (1.102) dostáváme pomocí matematické indukce platnost rovnosti (1.96) pro každé $x \in \mathbb{N}$.

II) Nechť $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$. Pak pro $x = \frac{p}{q}$ podle části I) platí

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p} = \sqrt[q]{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n}. \tag{1.103}$$

Protože posloupnost $\left\{\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{p}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, která má podle Lemmatu 1.5 vlastní limitu (pro každé $p \in \mathbb{R}$, takže i pro $p \in \mathbb{N}$), tak podle Věty D.12 platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n, \tag{1.104}$$

díky které můžeme ve výpočtu (1.103) pokračovat:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[q]{\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{\frac{qn}{q}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili Větu D.11, jejíž předpoklady jsou splněny díky rovnosti (1.104), dále díky Lemmatu 1.5 a rovněž díky faktu, že každý člen posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě kladný. Předchozím výpočtem jsme ověřili platnost rovnosti (1.96) pro každé kladné $x \in \mathbb{Q}$.

III) Nechť $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$, pak pro $y = -x$ je $y > 0$ a platí:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-y} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^y} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili fakt, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je e^x nenulové, což plyne z části (iii) Tvrzení 2.56), ve třetí rovnosti použili část II), v páté rovnosti Větu D.7 o limitě podílu (kterou jsme mohli použít díky Lemmatu 1.5 a Lemmatu 1.7), v předposlední rovnosti opět Větu D.7 o limitě podílu (kterou jsme mohli použít díky rovnosti (1.23) a Lemmatu 1.5) a v poslední rovnosti byl použit vztah (1.23). Tím jsme ověřili platnost (1.96) pro každé $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Rovnost (1.96) však platí i pro $x = 0$ podle části (i) Tvrzení 2.19 a podle části (i) Tvrzení 2.56, takže rovnost (1.96) platí pro každé $x \in \mathbb{Q}$.

IV) Podle Věty D.16 existují pro dané reálné x racionální čísla $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$. Aplikujeme-li téže větu na číslo $-x$, pak existují racionální čísla $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = x$. Pro všechna přirozená k proto podle Vět D.14 a D.15, jejichž předpoklady jsou zřejmě splněny, platí dvojice nerovností $u_k \leq x \leq v_k$, odkud ihned dostáváme nerovnosti

$$1 + \frac{u_k}{n} \leq 1 + \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{v_k}{n} \tag{1.105}$$

platící pro všechna přirozená čísla n. Předchozí nerovnosti budeme chtít umocnit na n-tou, abychom to však mohli učinit, musíme nejprve zařídit, že budeme umocňovat nezáporná čísla. Protože posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a navíc platí $u_k \leq x \leq v_k$ pro všechna k, tak ze všech čísel x, u_j, v_j, $j = 1, 2, \ldots$ je nejmenší u_1. Proto uvažujme platnost nerovností (1.105) pouze pro $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > |u_1|$.

Po umocnění nerovností (1.105) na n-tou pro $n \geq n_0$ dostáváme

$$\left(1 + \frac{u_k}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{v_k}{n}\right)^n.$$

Díky Lemmatu 1.5 můžeme na předchozí dvojici nerovností použít Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti, takže platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{u_k}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{v_k}{n}\right)^n$$

a po použití předchozí části III) dále platí

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{u_k} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{v_k}.$$

Protože je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = x$, tak přímo z Definice D.61 obecné mocniny a z Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti dostáváme platnost rovnice (1.96) pro všechna reálná x. $\square$

E2 $\Rightarrow$ E6

Věta 3.13. *Pro funkci g, která je inverzní k funkci f definované limitou* (1.3)*, platí rovnost* (2.3)*.*

Důkaz. V důkazu Lemmatu 1.5 jsme ukázali, že posloupnost $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ neklesající pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$, kde n_0 je takové přirozené číslo, že pro dané x je $n_0 > |x|$. Jsou tak splněny předpoklady Věty D.14, podle které pro funkci f pro všechna přirozená $k \geq n_0$ platí

$$f(x) \geq \left(1+\frac{x}{k}\right)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Navíc podle části (iii) Lemmatu 2.19 je $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže předchozí nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$k\left(\sqrt[k]{f(x)}-1\right) \geq x, \quad x \in \mathbb{R},$$

na kterou můžeme díky Lemmatu 2.1.4 aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\sqrt[k]{f(x)}-1\right) \geq x, \quad x \in \mathbb{R}$$

a dále dokažme, že v předchozím vztahu platí dokonce rovnost, tj.

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\sqrt[k]{f(x)}-1\right) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.106}$$

Důkaz rozdělíme do několika částí.

I) Rovnost (1.106) platí pro $x = 0$ s ohledem na část (i) Lemmatu 2.19, část (i) Lemmatu 2.1.2 a Poznámky 2.2.16 a pro $x = 1$ platí podle Lemmatu 2.3.5 a definice (1.7) čísla e.

II) Pro libovolná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ s využitím Tvrzení 2.18 a části (i) Věty D.58 platí

$$n\left(\sqrt[n]{f(x+y)}-1\right) = \sqrt[n]{f(y)}\cdot n\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right) + n\left(\sqrt[n]{f(y)}-1\right).$$

Podle části (iii) Věty D.58 je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(y)} = 1$, takže podle Věty D.6 o limitě součtu a součinu (a Lemmatu 2.1.4) aplikované na předchozí rovnost platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x+y)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(y)}-1\right). \tag{1.107}$$

III) Z rovnosti (1.107) ihned dostáváme dosazením $y = x$ platnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(2x)} - 1\right) = 2\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right).$$

Nechť dále platí pro $k \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(kx)} - 1\right) = k\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right),$$

pak odtud a z (1.107) plyne

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f((k+1)x)} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(kx+x)} - 1\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(kx)} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) = \\ &= (k+1)\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right),\end{aligned}$$

takže jsme pomocí matematické indukce dokázali rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(qx)} - 1\right) = q\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right), \quad q \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},$$

do které stačí dosadit $x = 1$ a s využitím části I) obdržíme platnost rovnosti (1.106) pro všechna přirozená čísla x.

IV) V části (iii) Tvrzení 2.21 dosaďme $x = 1$, takže pro všechna $r \in \mathbb{Q}$ platí $f(r) = (f(1))^r$. Nechť $r = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, pak podle části (iv) Tvrzení 2.19 dostáváme

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (f(1))^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(f(1))^p} = \sqrt[q]{f(p)}.$$

Z předchozí rovnosti a triviálního použití Věty D.6 o limitě součinu vyplývá

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f\left(\frac{p}{q}\right)} - 1\right) = \frac{1}{q}\lim_{n\to\infty} qn\left(\sqrt[qn]{f(p)} - 1\right).$$

Protože posloupnost $\left\{qn\left(\sqrt[qn]{f(p)} - 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z posloupnosti $\left\{n\left(\sqrt[n]{f(p)} - 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, která má podle Lemmatu 2.1.4 vlastní limitu, tak podle Věty D.12 mají obě posloupnosti tutéž limitu, takže z předchozí rovnosti s využitím části III) vyplývá

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f\left(\frac{p}{q}\right)} - 1\right) = \frac{1}{q}\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(p)} - 1\right) = \frac{p}{q},$$

neboli rovnost (1.106) platí pro všechna kladná racionální čísla x.

V) Po dosazení $y = -x$ do (1.107) dostaneme s využitím části (i) Tvrzení 2.19, části (i) Lemmatu 2.1.2 a Poznámky 2.2.16 platnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(-x)} - 1\right) = -\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right)$$

pro každé reálné číslo x a s ohledem na části I) a IV) rovnost (1.106) platí pro všechna racionální čísla x.

VI) Podle Věty D.16 existují pro dané reálné číslo x racionální čísla $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$, a racionální čísla $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = x$. Pro všechna přirozená k proto podle Vět D.14 a D.15, jejichž předpoklady jsou zřejmě splněny, platí dvojice nerovností $u_k \leq x \leq v_k$. S ohledem na Tvrzení 2.22 je dále $f(u_k) \leq f(x) \leq f(v_k)$ a podle části (ii) Věty D.58 je proto

$$\sqrt[n]{f(u_k)} \leq \sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{f(v_k)},$$

odkud ihned plyne dvojice nerovností

$$n\left(\sqrt[n]{f(u_k)} - 1\right) \leq n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) \leq n\left(\sqrt[n]{f(v_k)} - 1\right).$$

Díky Lemmatu 2.1.4 můžeme na předchozí dvojici nerovností použít Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti, takže platí

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(u_k)} - 1\right) \leq \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) \leq \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(v_k)} - 1\right)$$

a s použitím předchozí části V) dostáváme platnost

$$u_k \leq \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) \leq v_k$$

pro každé přirozené k. Protože je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = x$, tak z Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti aplikované na přechozí dvojici nerovností dostáváme platnost rovnice (1.106) pro všechna reálná x.

Právě dokázanou rovnost (1.106) můžeme přepsat na tvar (podle části (iii) Lemmatu 2.19 je $z = f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right) = f^{-1}(z) = g(z), \quad z \in (0, +\infty),$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Předchozí důkaz jsme provedli podle návodu z [9], strana 118. Tento návod jsme navíc mohli použít k důkazům Vět 3.12 a 3.14.

E6 $\Rightarrow$ E2

Věta 3.14. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g definované limitou* (2.3), *platí rovnost* (1.3).

Důkaz. Důkaz provedeme analogicky jako důkaz Věty 3.13. V důkazu Lemmatu 2.1.4 jsme ukázali, že posloupnost $\{n\,(\sqrt[n]{z}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $z>0$ nerostoucí pro všechna přirozená čísla n. Jsou tak splněny předpoklady Věty D.15, podle které pro funkci g a všechna přirozená k platí

$$g\,(z) \le k\left(\sqrt[k]{z}-1\right), \quad z \in (0,+\infty)\,.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$\left(1+\frac{g\,(z)}{k}\right)^k \le z, \quad z \in (0,+\infty)\,,$$

na kterou můžeme díky Lemmatu 1.5 aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{g\,(z)}{k}\right)^k \le z, \quad z \in (0,+\infty)$$

a dále dokažme, že v předchozím vztahu platí dokonce rovnost, tj.

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{g\,(z)}{k}\right)^k = z, \quad z \in (0,+\infty)\,. \tag{1.108}$$

Důkaz rozdělíme do několika částí.

I) Rovnost (1.108) platí podle části (i) Lemmatu 2.1.2, Poznámky 2.2.16 a části (i) Tvrzení 2.19 pro $z=1$. A podle Lemmatu 2.3.5 a definice (1.7) čísla e rovnost (1.108) platí i pro $z=e$.

II) Pro libovolná čísla $y,z \in (0,+\infty)$ s využitím Lemmatu 2.1.9 a Lemmatu 1.10 platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\,(yz)}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\,(y)}{n}\right)^n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\,(z)}{n}\right)^n\right). \tag{1.109}$$

III) Z rovnosti (1.109) ihned dostáváme dosazením $y=z$ platnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\,(z^2)}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\,(z)}{n}\right)^n\right)^2.$$

Nechť dále platí pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z^{k}\right)}{n}\right)^{n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z\right)}{n}\right)^{n}\right)^{k},$$

pak odtud a z (1.109) plyne

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z^{k+1}\right)}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z^{k}\cdot z\right)}{n}\right)^{n}=$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z^{k}\right)}{n}\right)^{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z\right)}{n}\right)^{n}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z\right)}{n}\right)^{n}\right)^{k+1},$$

takže jsme pomocí matematické indukce dokázali rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z^{q}\right)}{n}\right)^{n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(z\right)}{n}\right)^{n}\right)^{q},\quad q\in\mathbb{N},\ z\in(0,+\infty)\,. \tag{1.110}$$

Do rovnosti (1.110) po dosazení $z = e$ s využitím části I) dostáváme platnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{q}\right)}{n}\right)^{n}=e^{q},\quad q\in\mathbb{N}. \tag{1.111}$$

IV) Podle části (iii) Tvrzení 2.2.2 a Poznámky 2.2.16 pro $r, s \in \mathbb{N}$ platí

$$g\left(z^{\frac{r}{s}}\right)=\frac{r}{s}g\left(z\right)=\frac{1}{s}g\left(z^{r}\right),\quad z\in(0,+\infty)\,,$$

což využijeme v následujícím výpočtu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{\frac{r}{s}}\right)}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[s]{\left(1+\frac{g\left(e^{r}\right)}{sn}\right)^{sn}}.$$

Posloupnost $\left\{\left(1+\frac{g(e^{r})}{sn}\right)^{sn}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě vybranou posloupností z posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{g(e^{r})}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, která má podle Lemmatu 1.5 vlastní limitu, takže podle Věty D.12 platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{r}\right)}{sn}\right)^{sn}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{r}\right)}{n}\right)^{n}. \tag{1.112}$$

Podle části (ii) Tvrzení 2.59 pro všechna $r \in \mathbb{N}$ platí $e^r > 1$, takže z části (ii) Tvrzení 2.2.1 a Poznámky 2.2.16 proto plyne $g\left(e^r\right) > 0$ pro dané $r \in \mathbb{N}$. Pro všechna přirozená n a daná čísla $r, s \in \mathbb{N}$ je $\left(1 + \frac{g(e^r)}{sn}\right)^{sn} > 0$, čímž jsou společně s (1.112) a Lemmatem 2.1.4 splněny předpoklady Věty D.11, takže platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[s]{\left(1 + \frac{g\left(e^r\right)}{sn}\right)^{sn}} = \sqrt[s]{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(e^r\right)}{n}\right)^{n}} = \sqrt[s]{e^r} = e^{\frac{r}{s}},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili (1.111) a získali jsme tak

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(e^r\right)}{n}\right)^{n} = e^r, \quad r \in \mathbb{Q}, r > 0. \tag{1.113}$$

V) Nechť $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$ pak pro $y = -x$ je $y \in \mathbb{Q}$, $y > 0$ a s využitím předchozí části IV), části (ii) Tvrzení 2.19, části (ii) Lemmatu 2.1.2 a Poznámky 2.2.16 obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(e^x\right)}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(e^{-y}\right)}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(\frac{1}{e^y}\right)}{n}\right)^{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{g\left(e^y\right)}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(e^y\right)}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e^y} = e^{-y} = e^x,$$

takže společně s rovností (1.113) (tj. pro $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$) a částí I) (tj. pro $x = 0$) platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g\left(e^x\right)}{n}\right)^{n} = e^x, \quad x \in \mathbb{Q}. \tag{1.114}$$

VI) Podle Věty D.16 existují pro dané reálné číslo x racionální čísla $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$, a racionální čísla $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = x$. Pro všechna přirozená k proto podle Vět D.14 a D.15, jejichž předpoklady jsou zřejmě splněny, platí dvojice nerovností $u_k \leq x \leq v_k$. S ohledem na Tvrzení 2.58 je dále $e^{u_k} \leq e^x \leq e^{v_k}$ a podle Tvrzení 2.2.3 a Poznámky 2.2.16 je proto

$$g\left(e^{u_k}\right) \leq g\left(e^x\right) \leq g\left(e^{v_k}\right),$$

odkud ihned pro všechna přirozená čísla n plyne dvojice nerovností

$$\left(1 + \frac{g\left(e^{u_k}\right)}{n}\right)^{n} \leq \left(1 + \frac{g\left(e^x\right)}{n}\right)^{n} \leq \left(1 + \frac{g\left(e^{v_k}\right)}{n}\right)^{n}.$$

Díky Lemmatu (1.5) můžeme na předchozí dvojici nerovností aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti a získáme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{u_k}\right)}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{x}\right)}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{v_k}\right)}{n}\right)^n,$$

což můžeme podle předchozí části V) přepsat na dvojici nerovností

$$e^{u_k} \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{x}\right)}{n}\right)^n \le e^{v_k}$$

platící pro každé přirozené k. Protože je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = x$, tak z Věty D.9 o limitě sevřené posloupnosti dostáváme platnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g\left(e^{x}\right)}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.115}$$

Pro funkci $f(x) = e^x$ je podle části (iii) Tvrzení 2.66 $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$, takže z rovnosti (1.115) ihned plyne dokazovaná rovnost (1.108).

Pro úplnost ještě dodejme, že funkce $g(z)$ je definována pouze pro $z > 0$ a nabízí se tedy otázka, jestli má proto výraz $g\left(e^x\right)$ smysl. Podle části (iii) Tvrzení 2.56 je ovšem $e^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a proto má výraz $g\left(e^x\right)$ smysl. □

E3 ⇒ E1

Věta 3.15. *Funkce f definovaná vztahem (1.4) splňuje rovnici (1.1) a podmínku (1.2).*

Důkaz. Platnost rovnice (1.1) pro funkci (1.4) jsme již dokázali v Tvrzení 2.33 a nyní dokážeme nerovnost (1.2). Přímo z definice funkce f definované vztahem (1.4) ihned plyne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

takže zřejmě platí

$$f(x) - 1 - x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 0 \quad \text{pro} \quad x > 0,$$

neboli

$$f(x) > 1 + x \quad \text{pro} \quad x > 0. \tag{1.116}$$

Vynásobme rovnost (1.4) výrazem $(x-1)$ a upravujme:

$$\begin{aligned} f(x)(x-1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(x-1)}{k!} = \\ &= (x-1) + \frac{x(x-1)}{1!} + \frac{x^2(x-1)}{2!} + \frac{x^3(x-1)}{3!} + \ldots = \\ &= -1 + \frac{x^2}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \\ &= -1 + x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots, \end{aligned} \tag{1.117}$$

kde třetí rovnost platí díky Větě D.45, jejíž předpoklad je splněn, neboť řada (1.4) (a tedy i řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(x-1)}{k!}$) je absolutně konvergentní pro všechna $x \in \mathbb{R}$ podle Lemmatu 1.11. Z (1.117) dále plyne

$$1 + f(x)(x-1) = x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots. \tag{1.118}$$

Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!} > 0,$$

plyne z rovnosti (1.118)

$$1 + f(x)(x-1) > 0 \quad \text{pro} \quad x > 0.$$

Tuto nerovnost vynásobíme $f(-x)$ pro $x > 0$ (nerovnost se díky části (iii) Lemmatu 2.34 nezmění) a dostaneme

$$f(-x) + f(x)f(-x)(x-1) > 0 \quad \text{pro} \quad x > 0.$$

S použitím rovnice (1.1) a části (i) Lemmatu 2.34 získáme

$$f(-x) + (x-1) > 0 \quad \text{pro} \quad x > 0,$$

neboli

$$f(-x) > 1 - x \quad \text{pro} \quad x > 0,$$

což je ekvivalentní s

$$f\,(x) > 1 + x \quad \text{pro} \quad x < 0. \tag{1.119}$$

Celkově tak ze vzahů (1.116) a (1.119) a části (i) Lemmatu 2.34 dostáváme

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f\,(x) \geq 1 + x. \qquad \square$$

Poznámka 3.16. Místo platnosti podmínky (1.2) pro řešení rovnice (1.1) jsme mohli ukázat, že je splněna jiná podmínka (která je podle Tvrzení 2.8 s touto podmínkou (1.2) ekvivalentní), a sice $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 1$. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1,$$

kde první, druhá a třetí rovnost jsou zřejmé a zbývá ověřit čtvrtou rovnost. Definujme funkci

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k!}$ zřejmě konverguje pro $x = 0$ a pro $x \neq 0$ je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k!} = \dfrac{1}{x} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, přičemž řada (1.4) je konvergentní podle Tvrzení 1.12 pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže zkoumaná řada má poloměr konvergence $+\infty$. Podle Věty D.51 je proto funkce g spojitá na $\mathbb{R}$ a z definice spojitosti tak dostáváme

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g\,(0) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0^{k-1}}{k!} = 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

To je evidentně kratší postup než důkaz platnosti podmínky (1.2), na druhé straně pro Definici E1 jsme zvolili právě podmínku (1.2) a nikoli podmínku v podobě limity (1.37), takže jsme (pracněji) dokazovali právě platnost podmínky (1.2).

E3 $\Rightarrow$ E4

Věta 3.17. *Funkce definovaná mocninnou řadou* (1.4) *splňuje diferenciální rovnici* (1.5) *a počáteční podmínku* (1.6)*.*

Důkaz. Platnost podmínky (1.6) jsme dokázali v části (i) Tvrzení 2.34 a platnost rovnice (1.5) v Tvrzení 2.39, viz výpočet (1.68). □

E4 $\Rightarrow$ E1

Věta 3.18. *Funkce f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, vyhovuje rovnici* (1.1) *a splňuje podmínku* (1.2)*.*

Důkaz. Platnost rovnice (1.1) jsme dokázali v Tvrzení 2.45 a platnost podmínky (1.2) v Tvrzení 2.51. □

E4 $\Rightarrow$ E2

Věta 3.19. *Pro řešení diferenciální rovnice* (1.5) *s danou počáteční podmínkou* (1.6) *platí*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Plyne z Věty 3.9 a faktu, že řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) je podle Věty 1.13 jednoznačně určené. □

Poznámka 3.20. Protože důkaz Věty 3.19 využívá Větu 3.9, tak s ohledem na Poznámku 3.10 není důkaz Věty 3.19 vůbec snadný a snažší důkaz opět vede přes již dokázané implikace E2 $\Rightarrow$ E1 a E1 $\Rightarrow$ E4 (a tranzitivitu implikace), viz Lemma 1.10 a Větu 3.3, a dále přes Větu 1.13.

E4 $\Rightarrow$ E3

Věta 3.21. *Pro řešení diferenciální rovnice* (1.5) *s danou počáteční podmínkou* (1.6) *platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Důkaz. Jednou z metod řešení diferenciálních rovnic je metoda řešení pomocí mocninných řad, kterou použijeme. Hledejme proto řešení rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{1.120}$$

Z podmínky $y(0) = 1$ ihned plyne $a_0 = 1$. Derivujeme-li uvnitř intervalu konvergence (o kterém zatím nic nevíme, takže derivování je v tuto chvíli pouze formální) podle Věty D.52 o derivaci mocninné řady řadu (1.120), dostaneme

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)\, x^k$$

a tento výsledek nyní dosadíme do rovnice $y' = y$ a získáme rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Neznámé koeficienty určíme pomocí metody neurčitých koeficientů, takže se musí rovnat koeficienty u stejných mocnin proměnné x. Musí tedy platit

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad a_{k+1}(k+1) = a_k, \quad a_0 = 1.$$

Řešením této rekurentní rovnice je

$$a_k = \frac{1}{k!},$$

takže hledané řešení je proto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Tato řada konverguje (viz Tvrzení 1.12) pro všechna $x \in \mathbb{R}$, její poloměr konvergence je tedy $+\infty$ a výše provedená derivace řady člen po členu byla oprávněná jen na intervalu kovergence, tedy na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Vzhledem k intervalu $(-\infty, +\infty)$ je nalezené řešení rovnice (1.5) s podmínkou (1.6) maximální.

Zbývá otázka, zda neexistuje řešení rovnice $y' = y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, které nelze zapsat jako mocninnou řadu (nalezené řešení ve tvaru mocninné řady je díky metodě neurčitých koeficientů určené jednoznačně mezi mocninnými řadami, tzn. žádné jiné řešení ve tvaru mocninné řady již určitě neexistuje). Díky korektnosti Definice E4 (viz Větu 1.13) však víme, že řešení rovnice $y' = y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ je určené jednoznačně, a tudíž nalezené řešení je jediné možné. □

Nyní by měla na řadu přijít implikace E4 ⇒ E5, k jejímuž důkazu však budeme potřebovat implikaci opačnou, proto implikaci E4 ⇒ E5 zařadíme až po implikaci E5 ⇒ E4.

E4 ⇒ E6

Věta 3.22. *Funkce g, která je inverzní k funkci f, která je řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6)*, vyhovuje diferenciální rovnici* (2.5) *a splňuje podmínku* (2.6)*.*

Důkaz. Podle (1.34) a (1.35) pro funkci f platí

$$f(x) = G^{-1}(x + G(1)), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde G^{-1} je inverzní funkce k funkci G, která je definovaná na intervalu $(0, +\infty)$ a pro kterou na tomto intervalu platí $G'(z) = \frac{1}{z}$. Z předchozí rovnosti a části (iii) Tvrzení 2.52 pro funkci $g = f^{-1}$ vyplývá

$$g(z) = G(z) - G(1), \quad z \in (0, +\infty),$$

odkud pro derivaci v každém bodě z, $z \in (0, +\infty)$ dostáváme

$$g'(z) = G'(z) = \frac{1}{z},$$

což je přesně diferenciální rovnice (2.5).

Protože je $g = f^{-1}$, tak z počáteční podmínky (1.6) ihned dostáváme podmínku (2.6). □

Poznámka 3.23. Větu 3.22 lze dokázat ještě jiným způsobem: Podle Věty D.33 o derivaci inverzní funkce, jejíž předpoklady jsou splněny díky diferenciální rovnici (1.5), díky části (iii) Tvrzení 2.43 (resp. již při důkazu části (ii) téhož tvrzení jsme ukázali, že $f(x) \neq 0$) a díky Tvrzení 2.47, platí

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f(x)},$$

přičemž tato rovnost platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, neboť podle Věty 1.13 je funkce f definována na $\mathbb{R}$. Z předchozí rovnosti po substituci $z = f(x)$ obdržíme přesně diferenciální rovnici (2.5), neboť podle části (iii) Tvrzení 2.52 je $\mathcal{R}_f = (0, +\infty)$.

Protože je $g = f^{-1}$, tak z počáteční podmínky (1.6) ihned dostáváme podmínku (2.6).

E6 $\Rightarrow$ E4

Věta 3.24. *Funkce f, která je inverzní k funkci g, která je řešením diferenciální rovnice* (2.5) *s počáteční podmínkou* (2.6), *vyhovuje diferenciální rovnici* (1.5) *a splňuje podmínku* (1.6).

Důkaz. Podle Věty D.33 o derivaci inverzní funkce, jejíž předpoklady jsou splněny díky diferenciální rovnici (2.5), díky Tvrzení 2.2.3 a Poznámce 2.2.16, platí

$$f'(g(z)) = \frac{1}{g'(z)} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z,$$

přičemž tato rovnost platí pro každé $z \in (0, +\infty)$, neboť podle Věty 2.1.11 je funkce g definována na intervalu $(0, +\infty)$. Z předchozí rovnosti po substituci $x = g(z)$ obdržíme přesně diferenciální rovnici (1.5), neboť podle části (iii) Tvrzení 2.2.13 a Poznámky 2.2.16 je $\mathcal{R}_g = (-\infty, +\infty)$.

Protože je $f = g^{-1}$, tak z počáteční podmínky (2.6) ihned dostáváme podmínku (1.6). $\square$

E5 $\Rightarrow$ E1

Věta 3.25. *Funkce e^x vyhovuje rovnici* (1.1) *a podmínce* (1.2).

Důkaz. Splnění rovnice (1.1) jsme ukázali již v Tvrzení 2.55 a splnění podmínky (1.2) vyplývá z Tvrzení 2.8 a Tvrzení 2.60. $\square$

E5 $\Rightarrow$ E3

Věta 3.26. *Pro funkci e^x platí*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Díky částem (i) a (iii) Tvrzení 2.56, dále díky Tvrzení 2.58 a Tvrzení 2.63 lze důkaz provést úplně stejně jako důkaz Věty 3.1. $\square$

Poznámka 3.27. Vzhledem ke stejnému způsobu důkazu Vět 3.1 a 3.26 by se mohlo zdát, že nejsnažší cesta k důkazu implikace E5 $\Rightarrow$ E3 vede přes E5 $\Rightarrow$ E1 a E1 $\Rightarrow$ E3 (a tranzitivitu implikace). Není tomu tak – porovnáme-li potřebná tvrzení k důkazům Vět 3.1 a 3.26, tak vidíme, že k důkazu implikace E5 $\Rightarrow$ E3 přes E5 $\Rightarrow$ E1 a E1 $\Rightarrow$ E3 je potřeba navíc Tvrzení 2.8.

E5 $\Rightarrow$ E4

Věta 3.28. *Funkce e^x vyhovuje diferenciální rovnici* (1.5) *a počáteční podmínce* (1.6)*.*

Důkaz. Platnost podmínky (1.6) jsme dokázali v části (i) Tvrzení 2.56 a platnost rovnice (1.5) v Tvrzení 2.63. □

E4 $\Rightarrow$ E5

Věta 3.29. *Řešením diferenciální rovnice* (1.5) *s počáteční podmínkou* (1.6) *je funkce e^x.*

Důkaz. Plyne z Věty 3.28 a faktu, že řešení diferenciální rovnice (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) je podle Věty 1.13 jednoznačně určené. □

E5 $\Rightarrow$ E6

Věta 3.30. *Pro funkci g, která je inverzní k funkci e^x, platí rovnost* (2.3)*.*

Důkaz. S ohledem na Poznámku po Definici L5 máme dokázat rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{z}-1\right) = \log z, \quad z \in (0,+\infty)\,.$$

Zvolme $z > 0$ libovolně a položme $x = \log z$ (podle části (iii) Tvrzení 2.2.13 a Poznámky 2.2.16 je $x \in \mathbb{R}$), takže je $z = e^x$. K důkazu předchozí rovnosti tak stačí dokázat

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e^x}-1\right) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.121}$$

Důkaz se provede úplně stejně jako důkaz rovnosti (1.106) ve Větě 3.13, ke kterému byly potřeba vlastnosti, které jsme již dokázali v Tvrzení 2.55, části (i) Tvrzení 2.56, části (iii) Tvrzení 2.57, v Tvrzení 2.58 a v Lemmatu 2.1.4. □

E6 $\Rightarrow$ E5

Věta 3.31. *Funkce e^x je inverzní k funkci g definované limitou* (2.3)*.*

Důkaz. Podle definice inverzní k funkce, definice funkce g, podle části (iii) Tvrzení 2.2.13 a Poznámky 2.2.16 máme dokázat

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e^x}-1\right) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

což je ovšem přesně rovnost (1.121), kterou jsme již dokázali ve Větě 3.30. $\square$

Zbvývající implikace E1 $\Rightarrow$ E5, E3 $\Rightarrow$ E5, E3 $\Rightarrow$ E6 a E6 $\Rightarrow$ E3 se nám nepodařilo dokázat přímo. Jejich důkazy však již máme díky dokázaným implikacím (a díky tranzitivnosti implikace). V některých případech máme hned několik možností na výběr, jak zatím nedokázanou implikaci dokázat, avšak my uvedeme pouze jednu možnost, a to takovou, která podle nás poskytuje nejjednoduší cestu, jak danou implikaci dokázat.

E1 $\Rightarrow$ E5

Věta 3.32. *Pro funkci f splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) platí $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Ihned plyne z dokázaných implikací E1 $\Rightarrow$ E2 a E2 $\Rightarrow$ E5 dokázaných v Lemmatu 1.8 a Větě 3.12 a z tranzitivnosti implikace. $\square$

E3 $\Rightarrow$ E5

Věta 3.33. *Funkce f definované řadou (1.4) platí $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Ihned plyne z dokázaných implikací E3 $\Rightarrow$ E2 a E2 $\Rightarrow$ E5 dokázaných ve Větách 3.7 a 3.12 a z tranzitivnosti implikace. $\square$

E3 $\Rightarrow$ E6

Věta 3.34. *Funkce g, která je inverzní k funkci f definované řadou (1.4), vyhovuje rovnici* (2.1) *a podmínce* (2.2)*.*

Důkaz. Ihned plyne z dokázaných implikací E3 $\Rightarrow$ E1 a E1 $\Rightarrow$ E6 dokázaných ve Větách 3.4 a 3.15 a z tranzitivnosti implikace. $\square$

E6 $\Rightarrow$ E3

Věta 3.35. *Pro funkci f, která je inverzní k funkci g splňující rovnici (2.1) a vyhovující podmínce (2.2), platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Ihned plyne z dokázaných implikací E6 $\Rightarrow$ E1 a E1 $\Rightarrow$ E3 dokázaných ve Větách 3.1 a 3.5 a z tranzitivnosti implikace. □

V tuto chvíli máme dokázaných všech 30 implikací mezi šesti definicemi exponenciály. Všechny definice pro exponenciálu jsou proto ekvivalentní.

Poznámka 3.36. Při důkazu některých implikací (např. E4 $\Rightarrow$ E2) jsme užili následující obrat: nejprve jsme dokázali implikaci $\mathrm{E}_i \Rightarrow \mathrm{E}_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 6, i \neq j)$ a implikaci $\mathrm{E}_j \Rightarrow \mathrm{E}_i$ jsme dokázali pomocí již dokázané implikace $\mathrm{E}_i \Rightarrow \mathrm{E}_j$ a faktu, že je funkce v Definici E_i určená jednoznačně. V případě implikace E4 $\Rightarrow$ E2 jsme tento obrat použili, protože nás jiný důkaz nenapadl. Tento obrat jsme však samozřejmě mohli použít k důkazu celé řady dalších implikací, např. E3 $\Rightarrow$ E1, E4 $\Rightarrow$ E3, atd.

Poznámka 3.37. Celou dobu jsme se snažili o přímé důkazy implikací (ne vždy se nám to povedlo), avšak v některých případech byl důkaz buď obtížný nebo dlouhý. Jak jsme již uvedli, k důkazu implikace A $\Rightarrow$ C je možné použít např. implikace A $\Rightarrow$ B a B $\Rightarrow$ C (a tranzitivitu implikace) a může se stát, že takový důkaz bude snažší nebo kratší než důkaz přímý (viz např. Poznámku 3.10). Nyní uveďme ještě jednu možnost důkazu ekvivalence definic.

Nejprve je potřeba dokázat, že funkce v Definici A existuje. Pak je potřeba vědět, že funkce v dalších dvou Definicích B a C jsou určené jednoznačně a dále je potřeba dokázat implikace A $\Rightarrow$ B a A $\Rightarrow$ C. Z těchto podmínek již nutně plyne, že Definice B a C jsou ekvivalentní. Ukažme si to na konkrétním případě:

Dokázali jsme, že E4 $\Rightarrow$ E2 a E4 $\Rightarrow$ E3 (Věta 3.19 a Věta 3.21), a protože podle Věty 1.13 řešení rovnice $y' = y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ existuje na celém $\mathbb{R}$, musí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platit (funkce z Definic E2 a E3 jsou samozřejmě jednoznačně určené)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

což je tedy jiný důkaz ekvivalence definic E2 a E3, než jaký jsme podali ve Větě 3.7. Nicméně důkaz Věty 3.19 byl velmi náročný (Poznámka 3.20), takže původní důkaz Věty 3.7 je vhodnější než zde navrhovaný důkaz.

Ovšem důkaz ekvivalence Definic E2 a E4, který byl podle Poznámek 3.10 a 3.20 velmi obtížný, se tímto obratem dá provést mnohem jednodušeji: Dokázali jsme, že E1 $\Rightarrow$ E2 a E1 $\Rightarrow$ E4 (Lemma 1.8 a Věta 3.3), dále víme, že funkce v Definici E1 existuje (Věta 1.1), a podle věty o jednoznačnosti limity (Věta D.3) a Věty 1.13 jsou funkce z Definic E2 a E4 určené jednoznačně. Odtud tedy dostáme, že Definice E2 a E4 jsou ekvivalentí. Tak jsme se navíc vyhnuli obtížnému pojmu *stejnoměrná konvergence poslupnosti funkcí*, který jsme jinak potřebovali (v Tvrzení 2.28), avšak za cenu, že zde uvažovaný způsob důkazu je velmi dlouhý.

Kapitola 2

Logaritmus

V celé kapitole budeme postupovat v podstatě úplně stejně jako tomu bylo v případě exponenciály.

Definice L1. Funkci g, která vyhovuje funkcionální rovnici

$$g(xy) = g(x) + g(y), \quad x, y \in (0, +\infty) \tag{2.1}$$

a podmínce

$$g(x) \leq x - 1, \quad x \in (0, +\infty)\,, \tag{2.2}$$

nazýváme logaritmus.

Definice L2. Logaritmem nazýváme funkci definovanou následujícím způsobem

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \quad x \in (0, +\infty)\,. \tag{2.3}$$

Definice L3. Logaritmem nazýváme funkci definovanou následujícím způsobem

$$g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad x \in (0, +\infty)\,. \tag{2.4}$$

Definice L4. Logaritmem nazýváme funkci, která je maximálním řešením diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{x} \tag{2.5}$$

s počáteční podmínkou

$$y\,(1) = 0. \tag{2.6}$$

Definice L5. Inverzní funkci k exponenciále nazýváme logaritmus.

Poznámka. V celé práci budeme pod označením $\log x$ mít na mysli pouze funkci z Definice L5 ve smyslu inverzní funkce k funkci e^x (i když jde o „obecné“ označení logaritmu).

Poznámka. Definice logaritmu jsme řadili tak, aby si odpovídali s definicemi exponenciály. A při prvním pohledu je jasné, že zde chybí definice pomocí mocninné řady, resp. řady Taylorovy. Je to proto, že Taylorova řada pro logaritmus v bodě jedna je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}, \quad 0 < x \leq 2$$

a tedy není definována pro každé $x \in (0, +\infty)$, a proto se nehodí k definici logaritmu. Protože odvození Taylorovy řady v této práci nepotřebujeme, nebudeme jej dělat a čtenáře odkazujeme např. na strany 298 – 299 v [9].

Pro úplnost dodejme, že zde na první pohled chybí definice pomocí obecné mocniny, tak je však skryta v Definici L5.

2.1 Korektnost definic

Korektnost Definice L1

Definice L1 bude korektní, jestliže funkce s požadovanými vlastnostmi existuje a jestliže taková funkce existuje pouze jedna.

Věta 1.1. *Existuje právě jedna funkce $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ vyhovující funkcionální rovnici (2.1) a podmínce (2.2).*

Důkaz. Důkaz je obsažen v Lemmatech 1.2, 1.4, 1.7, 1.8 a 1.9. □

V následujících lemmatech dokážeme Větu 1.1 a při tom odvodíme některé vlastnosti logaritmické funkce (které jsou pro důkaz Věty 1.1 potřeba). Později odvodíme některé další vlastnosti logaritmu.

Lemma 1.2. *Pro každou funkci g splňující rovnici (2.1) platí:*

(i) $g(1) = 0$;

(ii) $g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x)$ *pro všechna* $x \in (0, +\infty)$;

(iii) $g(x^n) = ng(x)$ *pro všechna* $x \in (0, +\infty)$ *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz.

(i) Dosadíme-li $y = 1$ do rovnice (2.1), získáme rovnost $g(x) = g(x) + g(1)$, která má platit pro všechna $x > 0$ a ze které ihned plyne $g(1) = 0$.

(ii) Dosadíme-li $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ do rovnice (2.1), získáme s ohledem na již dokázanou vlastnost (i) rovnost

$$0 = g(1) = g\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (0, +\infty),$$

ze které triviálně vyplývá dokazovaná vlastnost.

(iii) Tuto vlastnost dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ uvedená vlastnost platí triviálně. Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ platí $g\left(x^k\right) = kg(x)$, pak s využitím funkcionální rovnice (2.1) obdržíme

$$g\left(x^{k+1}\right) = g\left(x \cdot x^k\right) = g(x) + g\left(x^k\right) = g(x) + kg(x) = (k+1)\, g(x). \quad \square$$

Poznámka 1.3. Všimněme si, že k důkazu předchozího lemmatu nebyla vůbec potřeba podmínka (2.2). To je rozdíl oproti důkazu Lemmatu 1.1.2, ke kterému podmínka (1.2) byla potřeba.

Lemma 1.4. *Pro každé reálné číslo $x > 0$ existuje vlastní limita*

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right). \tag{2.7}$$

Důkaz. Zvolme pevné $x > 0$ a zkoumejme posloupnost $a_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Použijeme AG-nerovnost (Tvrzení D.2) ve tvaru

$$a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

kde $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt[n]{x}$, $a_{n+1} = 1$. Pak totiž platí

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot 1 &\leq \left(\frac{n\sqrt[n]{x} + 1}{n+1}\right)^{n+1}, \\
x &\leq \left(\frac{n\sqrt[n]{x} + 1}{n+1}\right)^{n+1}, \\
\sqrt[n+1]{x} &\leq \frac{n\sqrt[n]{x} + 1}{n+1}, \\
(n+1)\sqrt[n+1]{x} &\leq n\sqrt[n]{x} + 1, \\
(n+1)\left(\sqrt[n+1]{x} - 1\right) &\leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),
\end{aligned}$$

neboli $a_{n+1} \leq a_n$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy nerostoucí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x > 0$ (volba pevného x byla totiž libovolná). Proto je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená (svým prvním členem).

Pro $x > 1$ je $\sqrt[n]{x} > 1$, a proto je $a_n > 0$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je omezená pro $x > 1$. Podle Věty D.5 tak pro pevně zvolené $x > 1$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$.

Nechť je dále $0 < x < 1$. Definujme $y = \frac{1}{x}$, proto je $y > 1$. Platí

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{y}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}} - 1\right) = \frac{-1}{\sqrt[n]{y}} \cdot n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right). \qquad (2.8)$$

Podle části (iii) Věty D.58 je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} = 1$, takže z Věty D.7 o limitě podílu ihned dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt[n]{y}} = -1$. Již víme, že pro $y > 1$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$, takže z Věty D.6 o limitě součinu aplikované na (2.8) dostáváme existenci vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ i pro $0 < x < 1$.

Zbývá možnost $x = 1$, pro tuto hodnotu je $\sqrt[n]{x} = 1$ a tedy $a_n = 0$ a rovněž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (neboli i pro $x = 1$ je zkoumaná limita vlastní).

Celkově jsme tak dokázali, že pro každé reálné $x > 0$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$, neboť volba pevného x byla zcela libovolná. $\square$

Jiný důkaz monotónie posloupnosti $\{n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\}_{n=1}^{\infty}$ lze nalézt v knize [9], strana 99.

Poznámka 1.5. Existence n-té odmocniny není nikde zaručená, takže před zavedením logaritmu pomocí Definice L1 (a rovněž L2) je potřeba se věnovat n-té odmocnině. Viz Definici D.56, Větu D.57 a Větu D.58.

Poznámka 1.6. Je zajímavé porovnat monotónii posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ z Lemmatu 1.1.5 a monotónii posloupnosti $b_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$, $n \in \mathbb{N}$ z Lemmatu 1.4. Zatímco je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní až od určitého přirozeného čísla n_0 (takového, že pro dané $x \in \mathbb{R}$ je $n_0 > |x|$), je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní pro všechna přirozená čísla. S ohledem na důkaz monotónie posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ještě uveďme, že tato posloupnost je pro $x \geq 0$ monotónní pro všechna přirozená čísla.

Lemma 1.7. *Pro funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *platí*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \quad x \in (0, +\infty). \qquad (2.9)$$

Důkaz. Zvolme $x \in (0, +\infty)$ pevné. Z podmínky (2.2) a části (ii) Lemmatu 1.2 plyne

$$-g\left(x\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1,$$

tuto nerovnost vynásobíme -1 a spolu s podmínkou (2.2) dostaneme dvojici nerovností

$$1 - \frac{1}{x} \leq g\left(x\right) \leq x - 1. \tag{2.10}$$

Do vztahu (2.10) dosaďme $\sqrt[n]{x}$ za x:

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq g\left(\sqrt[n]{x}\right) \leq \sqrt[n]{x} - 1.$$

Předchozí nerovnosti vynásobíme číslem n a ještě použijeme část (iii) Lemmatu 1.2:

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \leq g\left(x\right) \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \tag{2.11}$$

kde jsme navíc použili rovnost $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.

Protože platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ (viz část (iii) Věty D.58), tak ještě s ohledem na Lemma 1.4 jsou splněny předpoklady Věty D.7 o limitě podílu, kterou použijeme pro první výraz v (2.11) a obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)}{\sqrt[n]{x}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nyní můžeme použít Větu D.9 o limitě sevřené posloupnosti, jejíž předpoklady jsou díky (2.12) a díky Lemmatu 1.4 splněny, na nerovnosti (2.11), čímž získáme dokazovanou rovnost (2.9).

Volba pevného x byla zcela libovolná, takže rovnost (2.9) platí pro všechna $x \in (0, +\infty)$. □

Lemma 1.8. *Existuje nejvýše jedna funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici* (2.1) *a podmínce* (2.2).

Důkaz. Na předchozí lemma stačí aplikovat jednoznačnost limity (Věta D.3). □

Lemma 1.9. *Funkce g definovaná předpisem* (2.9) *vyhovuje rovnici* (2.1) *a splňuje podmínku* (2.2).

Důkaz. Pro libovolná čísla $x, y > 0$ podle části (i) Věty D.58 platí

$$n\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) = \sqrt[n]{y} \cdot n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) + n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right),$$

a protože podle části (iii) Věty D.58 je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} = 1$, tak ještě s ohledem na Lemma 1.4 jsou splněny předpoklady Věty D.6 o limitě součtu a součinu, díky které platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) + \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right),$$

což je přesně funkcionální rovnice (2.1).

Dále pro libovolné $x > 0$ použijeme AG-nerovnost (Tvrzení D.2) ve tvaru

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n,$$

kde $a_1 = x$, $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$. Pak totiž platí

$$x \leq \left(\frac{x + n - 1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n,$$

$$\sqrt[n]{x} \leq 1 + \frac{x-1}{n},$$

$$n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leq x - 1.$$

Na poslední nerovnost můžeme díky Lemmatu 1.4 aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti a získáme tak přesně podmínku (2.2). □

V tuto chvíli je důkaz Věty 1.1 dokončen a Definice L1 je korektní.

Korektnost Definice L2

Aby definice L2 byla korektní, je potřeba dokázat, že limita (2.3) existuje a je vlastní pro všechna $x > 0$. Existence vlastní limity však již byla dokázána v Lemmatu 1.4.

Korektnost Definice L3

Aby definice L3 byla korektní, je potřeba dokázat, že určitý integrál (2.4) existuje.

Věta 1.10. *Určitý integrál* (2.4) *existuje.*

Důkaz. Funkce $t \mapsto \frac{1}{t}$ je na intervalu $(0, +\infty)$ zřejmě spojitá, určitý integrál (2.4) proto podle Věty D.37 existuje. □

Korektnost Definice L4

Definice L4 bude korektní, pokud existuje právě jedno maximální řešení diferenciální rovnice (2.5) s počáteční podmínkou (2.6). To dokážeme ve Větě 1.11.

Věta 1.11. *Řešení diferenciální rovnice* (2.5) *s počáteční podmínkou* (2.6) *existuje na intervalu* $(0,+\infty)$ *a je na tomto intervalu určeno jednoznačně.*

Důkaz. Maximální intervaly, na kterých je (reálná) funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$ definována, jsou $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$. Vzhledem k podmínce (2.6) však stačí uvažovat jen interval $(0,+\infty)$, který označme I.

Diferenciální rovnice (2.5) s počáteční podmínkou (2.6) neznamená nic jiného než že hledáme primitivní funkci k funkci $\frac{1}{x}$, která má v nule funkční hodnotu jedna.

Funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$ je na intervalu I zřejmě spojitá, proto k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce podle Věty D.40. Tím jsme dokázali existenci řešení diferenciální rovnice (2.5) na intervalu $(0,+\infty)$ a vzhledem k tomuto intervalu, což je maximální interval, kdy má rovnice (2.5) (s ohledem na počáteční podmínku (2.6)) smysl, je řešení diferenciální rovnice (2.5) maximální.

Řešení diferenciální rovnice (2.5) s počáteční podmínkou (2.6) je jednoznačné, neboť ze všech primitivních funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ stačí vybrat tu, která má v nule funkční hodnotu jedna. □

Poznámka 1.12. Ukažme ještě jiný způsob, jak dokázat jednoznačnost řešení diferenciální rovnice (2.5) s počáteční podmínkou (2.6). Nechť funkce f a g vyhovují rovnici (2.5) a podmínce (2.6). Pak podle Věty D.24 o derivaci rozdílu platí

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Protože je derivace nulová, je rozdíl $f-g$ podle Věty D.26 konstantní funkce na intervalu $(0,+\infty)$. Po jednoduché úpravě proto pro všechna $x \in (0,+\infty)$ platí $f(x) = K + g(x)$, $K \in \mathbb{R}$. Z počáteční podmínky (2.6) získáme hodnotu $K = 0$, a proto platí $f = g$.

Korektnost Definice L5

Definice L5 bude korektní, jestliže je exponenciála prostá na svém definičním oboru. To jsme již ukázali v části (i) Tvrzení 1.2.3, takže Definice L5 je korektní.

2.2 Vlastnosti logaritmu

Odvození vlastností z Definice L1

Připomeňme Lemma 1.2.

Tvrzení 2.1. *Pro funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *platí:*

(i) $g(x) < 0$, $x \in (0,1)$;

(ii) $g(x) > 0$, $x \in (1,+\infty)$.

Důkaz.

(i) Plyne ihned z podmínky (2.2).

(ii) Část (i) je evkivalentní s

$$-g(x) > 0, \quad x \in (0,1)$$

a to je podle části (ii) Lemmatu 1.2 evkivalentní s

$$g\left(\frac{1}{x}\right) > 0, \quad x \in (0,1),$$

což je zřejmě evkivalentní s

$$g(x) > 0, \quad x \in (1,+\infty). \qquad \square$$

V následujícím tvrzení opět nehraje podmínka (2.2) žádnou roli, stejně jako v případě Lemmatu 1.2.

Tvrzení 2.2. *Pro funkci g splňující rovnici* (2.1) *platí:*

(i) $g\left(\frac{x}{y}\right) = g(x) - g(y)$ *pro všechna* $x, y \in (0,+\infty)$;

(ii) $g(x^p) = pg(x)$ *pro všechna* $x \in (0,+\infty)$ *a pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$;

(iii) $g(x^r) = rg(x)$ *pro všechna* $x \in (0,+\infty)$ *a pro všechna* $r \in \mathbb{Q}$.

Důkaz.

(i) Podle části (ii) Lemmatu 1.2 a rovnice (2.1) pro všechna $x, y \in (0, +\infty)$ platí
$$g\left(\frac{x}{y}\right) = g\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = g(x) + g\left(\frac{1}{y}\right) = g(x) - g(y).$$

(ii) Pro $p \in \mathbb{N}$ tvrzení platí podle části (iii) Lemmatu 1.2, pro $p = 0$ dokazovaná rovnost platí triviálně podle části (i) Lemmatu 1.2. Nechť je $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, pak pro $n = -p$ je $n \in \mathbb{N}$ a podle částí (ii) a (iii) Lemmatu 1.2 platí
$$g(x^p) = g\left(x^{-n}\right) = g\left(\frac{1}{x^n}\right) = -g(x^n) = -ng(x) = pg(x).$$

(iii) Zvolme $t = x^{\frac{p}{q}}$, $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, pak s využitím předchozí části (ii) obdržíme
$$qg(t) = g(t^q) = g(x^p) = pg(x),$$
neboli
$$g\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} g(x),$$
takže dokazovaná rovnost platí pro všechna $x \in (0, +\infty)$ a pro všechna $r \in \mathbb{Q}$ ($r = \frac{p}{q}$). □

Tvrzení 2.3. *Funkce g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *je rostoucí na intervalu* $(0, +\infty)$*.*

Důkaz. Protože pro $x > y > 0$ platí $\frac{x}{y} > 1$, tak podle části (ii) Tvrzení 2.1 platí nerovnost
$$g\left(\frac{x}{y}\right) > 0,$$
takže s ohledem na část (i) Tvrzení 2.2 dostáváme pro všechna $x > y > 0$
$$g(x) > g(y).$$
A to je definice rostoucí funkce. □

Tvrzení 2.4. *Funkce g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *je prostá na intervalu* $(0, +\infty)$*.*

Důkaz. Jde o důsledek předchozího Tvrzení 2.3. □

Lemma 2.5. *Pro funkci g vyhovující rovnici* (2.1) *a podmínce*

$$\lim_{x\to 1}\frac{g\left(x\right)}{x-1}=1 \tag{2.13}$$

platí

$$g'\left(x\right)=\frac{1}{x}\quad \textit{pro všechna}\quad x\in\left(0,+\infty\right).$$

Důkaz. Podle části (i) Lemmatu 1.2 pro derivaci funkce g, která je řešením rovnice (2.1), v bodě 1 platí

$$\lim_{x\to 1}\frac{g\left(x\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g\left(x\right)-g\left(1\right)}{x-1}=g'\left(1\right)=1. \tag{2.14}$$

Podmínka (2.13) je díky Větě D.20 o limitě složené funkce (jejíž předpoklady jsou zřejmě splněny) ekvivalentní

$$\lim_{x\to 0}\frac{g\left(x+1\right)}{x}=1. \tag{2.15}$$

Pro pevně zvolené $x\in(0,+\infty)$ platí

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g\left(\frac{h}{x}+1\right)}{\frac{h}{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}=g'\left(x\right),$$

kde první rovnost platí díky (2.15) a díky Větě D.20 o limitě složené funkce (jejíž předpoklady jsou zřejmě splněny), druhá rovnost díky triviálnímu použití Věty D.17 o limitě součinu, třetí rovnost díky části (i) Tvrzení 2.2 a poslední rovnost je přímo definice derivace funkce g v bodě $x\in(0,+\infty)$. A protože volba pevného x byla libovolná, tak předchozí výpočet lze provést pro každé $x\in(0,+\infty)$. □

Tvrzení 2.6. *Pro funkci g vyhovující rovnici* (2.1) *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $g(x)\leq x-1$ *pro všechna* $x\in(0,+\infty)$*;*

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g\left(x\right)}{x-1}=1.$

Důkaz. Nechť platí část (i), můžeme tak použít dvojici nerovností (2.10) (k důkazu byla potřeba část (ii) Lemmatu 1.2 a právě podmínka (i)). Podle (2.10) tedy pro funkci g platí

$$\frac{x-1}{x} \leq g\left(x\right) \leq x-1 \quad \text{pro všechna } x \in \left(0, +\infty\right).$$

Vydělením předchozích nerovností výrazem $x-1$ pro $x > 1$ obdržíme

$$\frac{1}{x} \leq \frac{g\left(x\right)}{x-1} \leq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \left(1, +\infty\right) \tag{2.16}$$

a pro $0 < x < 1$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{g\left(x\right)}{x-1} \geq 1 \quad \text{pro všechna } x \in \left(0, 1\right). \tag{2.17}$$

Podle Věty D.18 o limitě sevřené funkce (která platí i pro jednostranné limity) a (2.16) platí

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g\left(x\right)}{x-1} = 1 \tag{2.18}$$

a podle téže Věty D.18 a (2.17) platí

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g\left(x\right)}{x-1} = 1, \tag{2.19}$$

neboť $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ a totéž platí i pro jednostranné limity v nule (Věta D.21). Limity (2.18) a (2.19) mají stejnou hodnotu a tím je (s využitím Věty D.21) dokázána podmínka (ii).

Nechť dále platí podmínka (ii). Definujme funkci $h(x) = g(x) - (x-1)$ pro $x \in (0, +\infty)$ a zderivujme jí:

$$h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

kde druhá rovnost platí podle Lemmatu 2.5. Zřejmě je $h'(x) > 0$ pro $0 < x < 1$, $h'(x) < 0$ pro $x > 1$, proto podle Věty D.27 je funkce h na intervalu $(0, 1)$ rostoucí, na $(1, +\infty)$ klesající, a protože navíc podle části (i) Lemmatu 1.2 platí $h\left(1\right) = g\left(1\right) - \left(1-1\right) = 0$, nabývá funkce h v bodě 1 svého (globálního) maxima. Proto platí $h(x) \leq 0$, neboli $g(x) - (x-1) \leq 0$ a dokázali jsme tak $g(x) \leq x-1$ pro všechna $x \in (0, +\infty)$.

Celkově jsme tak dokázali platnost implikací (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), neboli obě podmínky jsou ekvivalentní. $\square$

Tvrzení 2.7. *Pro funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *platí*

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{pro všechna} \quad x \in (0, +\infty)\,.$$

Důkaz. Důkaz[10] vyplývá z Lemmatu 2.5 a Tvrzení 2.6. □

Nyní můžeme dokázat Tvrzení 2.3 jiným způsobem než jak jsme to provedli.

Tvrzení 2.8. *Funkce g splňující rovnici (1.1) a podmínku (1.2) je rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 2.7 pro všechna $x \in (0, +\infty)$ platí $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$ (uvedená nerovnost je triviální), takže podle Věty D.27 je funkce g rostoucí na celém $\mathbb{R}$. □

V tuto chvíli můžeme jednoznačnost dokázat ještě jinak, než jak jsme jí dokázali v Lemmatu 1.8.

Tvrzení 2.9. *Existuje nejvýše jedna funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici* (2.1) *a podmínce* (2.2).

Důkaz. Díky části (i) Lemmatu 1.2 a Tvrzení 2.7 lze důkaz provést stejně jako důkaz v Poznámce 1.12. □

Tvrzení 2.10. *Funkce g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *je spojitá na intervalu* $(0, +\infty)$.

Důkaz. Plyne ihned z Tvrzení 2.7 a Věty D.23. □

Podejme jiný důkaz spojitosti, ke kterému není potřeba Věta D.23.

Poznámka 2.11. Funkce g splňující rovnici (2.1) a podmínku (2.2) je spojitá na intervalu $(0, +\infty)$.

Pro všechna $x, a \in (0, +\infty)$ platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \left(g(x) - g(a)\right) &= \lim_{x \to a} g\left(\frac{x}{a}\right) = \lim_{x \to a} \frac{g\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a} - 1} \cdot \left(\frac{x}{a} - 1\right) = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a} - 1} \lim_{x \to a} \left(\frac{x}{a} - 1\right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

[10] Opět bychom měli správně uvést, že důkaz vyplývá z Lemmatu 2.5 a z toho, že funkce g vyhovující rovnici (2.1) a splňující podmínku (ii) Tvrzení 2.6 rovněž splňuje podmínku (i) (téhož tvrzení). V dalším textu to již nebudeme zmiňovat.

kde první rovnost platí díky části (i) Tvrzení 2.2 a poslední rovnost platí díky Větě D.17 o limitě součinu, jejíž předpoklady jsou splněny, neboť platí

$$\lim_{x\to a}\frac{g\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}-1}=1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a}\left(\frac{x}{a}-1\right)=0, \tag{2.21}$$

kde první limita platí díky Větě D.20 o limitě složené funkce (jejíž předpoklady jsou zřejmě spleny) a Tvrzení 2.6 a druhá limita je triviální. Hledaná limita je proto podle (2.20) a (2.21) rovna

$$\lim_{x\to a}\left(g\left(x\right)-g\left(a\right)\right)=1\cdot 0=0$$

a s využitím Věty D.17 o limitě součtu a součinu (jejíž předpoklady jsou splněny) dále platí

$$0=\lim_{x\to a}\left(g\left(x\right)-g\left(a\right)\right)=\lim_{x\to a}g\left(x\right)-\lim_{x\to a}g\left(a\right)=\lim_{x\to a}g\left(x\right)-g\left(a\right).$$

Tím jsme tedy dokázali rovnost $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=g\left(a\right)$, což je definice spojitosti funkce g v libovolném bodě $a\in(0,+\infty)$.

Tvrzení 2.12. *Funkce g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *je ryze konkávní na intervalu* $(0,+\infty)$.

Důkaz. S využitím Tvrzení 2.7 (a definice derivace n-tého řádu) získáme pro všechna $x\in(0,+\infty)$

$$g''\left(x\right)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0,$$

kde nerovnost platí triviálně. Podle Tvrzení 2.10 je g spojitá na $(0,+\infty)$, takže funkce g je podle Věty D.28 ryze konkávní na $(0,+\infty)$. □

Tvrzení 2.13. *Pro funkci g splňující rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2) *platí:*

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$;

(iii) $\mathcal{R}_g=(-\infty,+\infty)$.

Důkaz.

(i) Podle definice $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ máme dokázat, že platí

$$(\forall K \in \mathbb{R})\,(\exists x_0 > 0)\,(\forall x > 0, x > x_0)\,(g(x) > K)\,. \tag{2.22}$$

Zvolme libovolně $K \in \mathbb{R}$ pevné. K němu určitě nalezneme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > 2K$. Z (2.10) dostáváme po dosazení hodnoty $x = 2$ nerovnost $g\,(2) \geq \frac{1}{2}$. Podle Tvrzení 2.3 a části (iii) Lemmatu 1.2 je pro $x > 2^n$

$$g\,(x) > g\,(2^n) = ng\,(2) \geq \frac{n}{2} > K,$$

takže pro dané K jsme nalezli $x_0 = 2^n$ $(n > 2K)$ tak, že pro všechna $x > x_0$ je $g(x) > K$. Protože volba pevného K byla zcela libovolná, je platnost definice (2.22) ověřena.

(ii) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, kde druhá rovnost platí podle části (ii) Lemmatu 1.2 a podle Věty D.17 o limitě součinu a poslední rovnost podle části (i) tohoto tvrzení.

(iii) Plyne z Věty D.30, jejíž předpoklady jsou splněny díky Tvrzení 2.3, díky Tvrzení 2.10 a díky částem (i) a (ii) tohoto tvrzení.

$\square$

Poznámka 2.14. Nyní stručně uveďme v analogii s exponenciálou, jak to je s dodatečnými podmínkami pro funkci splňující rovnici (2.1). V Tvrzení 2.6 jsme ukázali, které podmínky jsou ekvivalentní. Někteří autoři učebnic používají podmínku (i) a jiní podmínku (ii) Tvrzení 2.8, přičemž ve větší míře se používá podmínka (ii). Opět je důvodem snažší odvození dvou důležitých vlastností logaritmu – derivace a spojitosti. I v případě logaritmu jsme však zvolili méně častou podmínku a zdůvodnění je stejné, jako v Poznámce 1.2.16.

Poznámka 2.15. Stojí za povšimnutí, že důkaz Lemmatu 1.2 a všechny důkazy lemmat, tvrzení a poznámek 2.1 až 2.13 vycházejí jen a pouze z původních podmínek na funkci g, a sice (2.1) a (2.2), a vůbec nesouvisí s limitou (2.7). Zmíněné důkazy lze provést aniž víme, zda funkce v požadovanými vlastnostmi vůbec existuje (tak jsme ostatně provedli důkaz Lemmatu 1.2). S ohledem na Poznámku 1.1.4 bychom do znění uvažovaných teorémů akorát přidali slovní spojení „Pro *každou* funkci g…“.

Poznámka 2.16. Odvození vlastností z ostatních definic nebudeme na rozdíl od exponenciály dělat. V následující podkapitole ukážeme, že všechny definice pro logaritmus jsou ekvivalentní, takže pro funkce z Definic L2 až L5 platí tytéž vlastnosti jako pro funkci z Definice L1.

2.3 Ekvivalence definic

L1 $\Rightarrow$ L2

Jedná se o Lemma 1.7.

L1 $\Rightarrow$ L4

Věta 3.1. *Funkce g, která vyhovuje rovnici (2.1) a podmínce (2.2), splňuje diferenciální rovnici* (2.5) *s počáteční podmínkou* (2.5).

Důkaz. Plyne z Tvrzení 2.7 a z části (i) Lemmatu 1.2. □

L1 $\Rightarrow$ L5 a L5 $\Rightarrow$ L1

Jedná se o již dokázané Věty 1.3.4 a 1.3.5.

L2 $\Rightarrow$ L1

Jedná se o Lemma 1.9.

L2 $\Rightarrow$ L5 a L5 $\Rightarrow$ L2

Lemma 3.2. *Pro všechna přirozená čísla n platí nerovnost $n! \geq 2^{n-1}$.*

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ dostáváme $1! \geq 2^0 = 1$, což platí. Nechť pro $k \in \mathbb{N}$ platí $k! \geq 2^{k-1}$, odkud vyplývá

$$(k+1)! = (k+1)\,k! \geq (k+1)\,2^{k-1} \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k,$$

takže uvažovaná nerovnost skutečně platí. □

Lemma 3.3. *Pro všechna přirozená čísla n platí dvojice nerovností*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Důkaz. V Poznámce 1.1.18 jsme ukázali, že platí rovnost

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

a že posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto podle Věty D.15 pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \geq e,$$

speciálně pro $k = n + 1$ (a s ohledem na fakt, že uvažovaná posloupnost je klesající) dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \geq e.$$

Uvažujme nyní posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^k (n+1-k)!} - \frac{n!}{n^k (n-k)!} \right) > 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

kde nerovnost platí, neboť je (viz odvození (1.87))

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)!}{(n+1)^k (n+1-k)!} - \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \\ &\qquad = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) - \\ &\qquad\qquad - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) > 0, \end{aligned}$$

což platí, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $c = 1, 2, \ldots, k-1$ a $1 \leq k \leq n$ je

$$1 - \frac{c}{n+1} > 1 - \frac{c}{n}.$$

Z (2.23) tak dostáváme $a_{n+1} - a_n > 0$, neboli posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Věty D.14 tak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e,$$

speciálně pro $k = n+1$ (a s ohledem na fakt, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí) dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq e.$$

□

Poznámka 3.4. Monotónii posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ z předchozího lemmatu lze dokázat ještě jiným způsobem (v analogii důkazu Lemmatu 1.1.5): Použijeme AG-nerovnost (Tvrzení D.2) ve tvaru

$$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

kde $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1$. Pak totiž platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

neboli $a_n < a_{n+1}$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy rostoucí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To je očividně kratší důkaz než důkaz Lemmatu 3.3, avšak je kratší jen za cenu, že se použije AG-nerovnost. Monotónii posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze dokázat i pomocí Bernoulliovy nerovnosti (Tvrzení D.1), viz stranu 61 v [3].

Lemma 3.5. *Platí*

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = 1.$$

Důkaz. Z dvojice nerovností v Lemmatu 3.3 plyne (n-tou odmocninu můžeme díky Tvrzení 1.1.19 použít)

$$1 < n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) \quad \text{a} \quad n\left(\sqrt[n+1]{e} - 1\right) < 1. \tag{2.24}$$

Dále platí

$$n\left(\sqrt[n+1]{e}-1\right)=(n+1)\left(\sqrt[n+1]{e}-1\right)+\left(1-\sqrt[n+1]{e}\right). \tag{2.25}$$

Podle části (iii) Věty D.58 je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{e}=1$ a zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\sqrt[n+1]{e}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{e}-1\right),$$

přičemž tato limita je podle Lemmatu 1.4 vlastní, takže podle Věty D.6 o limitě součtu a rozdílu a podle rovnosti (2.25) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n+1]{e}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{e}-1\right). \tag{2.26}$$

Díky Lemmatu 1.4 můžeme na nerovnosti (2.24) aplikovat Větu D.8 o limitním přechodu v nerovnosti a s použitím rovnosti (2.26) dostaneme

$$1\leq\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)\leq 1,$$

odkud vyplývá jediná možnost, a sice

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)=1.$$

□

Věta 3.6. *Pro každé $x>0$ platí*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=\log x.$$

Důkaz. Jde přesně o důkaz Věty 1.3.30. □

L3 ⇒ L1

Věta 3.7. *Funkce g definovaná předpisem* (2.4) *splňuje rovnici* (2.1) *a podmínku* (2.2)*.*

Důkaz. Platí

$$\int_1^{xy}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_x^{xy}\frac{\mathrm{d}t}{t},\quad x,y\in(0,+\infty),$$

kde v posledním integrálu zvolme substituci $u=\frac{t}{x}$ (a tedy $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}t}{x}$), takže platí

$$\int_x^{xy}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^{y}\frac{\mathrm{d}u}{u},\quad x,y\in(0,+\infty)$$

a celkově tak dostáváme rovnost

$$\int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u}, \quad x, y \in (0, +\infty)\,,$$

což je přesně funkcionální rovnice (2.1).

Protože na intervalu $[1, \infty)$ je $\frac{1}{t} \le 1$, je podle Věty D.38

$$\int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \int_1^{x} \mathrm{d}t = x - 1, \quad x \in [1, +\infty)\,. \tag{2.27}$$

Na intervalu $(0, 1)$ je $\frac{1}{t} > 1$ a podle Věty D.38 proto platí

$$\int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_x^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le -\int_x^{1} \mathrm{d}t = -(1 - x) = x - 1, \quad x \in (0, 1)\,. \tag{2.28}$$

Celkově z (2.27) a (2.28) dostáváme platnost nerovnosti

$$\int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le x - 1, \quad x \in (0, +\infty)\,,$$

což je přesně podmínka (2.2). $\square$

L3 $\Rightarrow$ L4

Věta 3.8. *Funkce g definovaná předpisem* (2.4) *vyhovuje diferenciální rovnici* (2.5) *a počáteční podmínce* (2.6)*.*

Důkaz. Podmínka (2.6) ihned vyplývá z dosazení hodnoty $x = 1$ do (2.4). Funkce $t \mapsto \frac{1}{t}$ je na intervalu $(0, +\infty)$ zřejmě spojitá, takže z části (ii) Věty D.39 dostáváme pro každé $x \in (0, +\infty)$ rovnost $g'(x) = \frac{1}{x}$, což je přímo diferenciální rovnice (2.1). $\square$

L4 $\Rightarrow$ L3

Věta 3.9. *Pro řešení g diferenciální rovnice* (2.1) *s počáteční podmínkou* (2.6) *platí rovnost* (2.4)*.*

Důkaz. Pro řešení g diferenciální rovnice (2.1) s počáteční podmínkou (2.6) s ohledem na Větu 1.11 platí

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)\,; \quad g(1) = 0,$$

což podle Věty D.40 můžeme přepsat na tvar

$$g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad x \in (0, +\infty)$$

a to je přesně rovnost (2.4). □

L4 ⇒ L5 a L5 ⇒ L4

V případě implikace L4 ⇒ L5 se jedná se o Větu 1.3.24 a v případě implikace L5 ⇒ L4 o Větu 1.3.22.

V tuto chvíli tedy máme dokázáné tyto implikace: L1 ⇔ L2, L1 ⇔ L5, L2 ⇔ L5, L3 ⇔ L4, L4 ⇔ L5, L1 ⇒ L4, L3 ⇒ L1. Protože jsou Definice L3 a L4 v podstatě triviálně ekvivalentní, máme rovněž dokázané tyto implikace (nebudeme je formulovat jako věty):

- L1 ⇒ L3 díky L1 ⇒ L4 a L4 ⇒ L3 (Věty 3.1 a 3.9);
- L3 ⇒ L5 díky L3 ⇒ L4 a L4 ⇒ L5 (Věty 3.8 a 1.3.24);
- L4 ⇒ L1 díky L4 ⇒ L3 a L3 ⇒ L1 (Věty 3.9 a 3.7);
- L5 ⇒ L3 díky L5 ⇒ L4 a L4 ⇒ L3 (Věty 1.3.22 a 3.9).

Chybí nám přímé důkazy implikací L2 ⇒ L3, L2 ⇒ L4, L3 ⇒ L2 a L4 ⇒ L2, avšak s ohledem na triviální ekvivalenci Definic L3 a L4 zbývá ukázat pouze dvě implikace, např. L2 ⇒ L4 a L4 ⇒ L2:

L2 ⇒ L4

Zde by šla dokázat obdobná věta jako je Věta 1.3.9, důkaz by se opět opíral o Větu D.48 o derivaci limitní funkce, podle které bychom mohli provést výpočet (již nebudeme uvádět, podle čeho jednotlivé kroky výpočtu platí)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right)\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{x}}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{x}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

avšak opět by bylo náročné a dlouhé dokázat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\}_{n=1}^{\infty}$. Důkaz provádět nebudeme a stejně jako v případě Věty 1.3.9 je snažší tuto implikaci dokázat následovně:

Věta 3.10. *Funkce g definovaná limitou* (2.3) *splňuje diferenciální rovnici* (2.5) *s počáteční podmínkou* (2.6).

Důkaz. Ihned plyne z dokázaných implikací L2 $\Rightarrow$ L1 a L1 $\Rightarrow$ L4 dokázaných v Lemmatu 1.9 a Větě 3.1 a z tranzitivnosti implikace. $\square$

L4 $\Rightarrow$ L2

Věta 3.11. *Pro řešení diferenciální rovnice* (2.5) *s danou počáteční podmínkou* (2.6) *platí*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \quad x \in (0, +\infty).$$

Důkaz. Plyne z Věty 3.10 a faktu, že řešení diferenciální rovnice (2.5) s počáteční podmínkou (2.6) je podle Věty 1.11 jednoznačně určené. $\square$

V tuto chvíli máme dokázaných všech 20 implikací mezi pěti definicemi logaritmu. Všechny definice pro logaritmus jsou proto ekvivalentní.

Kapitola 3

Porovnání definic

V této kapitole porovnáme jednotlivé definice pro exponenciálu a logaritmus. Budeme si všímat potřebné teorie, náročnosti dokázání korektnosti, obtížnosti důkazů při odvozování vlastností a také budeme diskutovat dokázání ekvivalence všech definic. Rovněž se zamyslíme, která z definic je vhodná pro žáky na střední škole a která pro studenty vysokých škol. Kapitolu ovšem začneme odpovědí na otázku, k čemu exponenciálu a logaritmus vlastně potřebujeme.

Význam exponenciály a logaritmu

Zatím jsme se vůbec nezmínili o významu exponenciály a logaritmu. Obecně exponenciální a logaritmické funkce mají široké uplatnění ve fyzice (absorbce záření, radioaktivní rozpad, intenzita zvuku), demografii (populační modely), chemii (pH roztoků), ekonomii, statistice, biologii (množení bakterií) atd. Jsou to bezesporu velmi důležité funkce, jaký je však význam těchto funkcí pro matematickou analýzu? V této práci se navíc nezabýváme všemi exponenciálními a logaritmickými funkcemi, nýbrž jen těmi o základu e, takže nás především zajímá, jaký je význam exponenciály a logaritmu ve výuce matematické analýzy?

Exponenciálu a logaritmus potřebujeme především k řešení příkladů (výpočet limit, derivací, primitivních funkcí). K čemu by totiž byla teorie, kdybychom její použití nedemonstrovali na příkladech? Navíc jak se pozná, že student nějakou učební látku pochopil? Jednak, že teorii dokáže vysvětlit, a hlavně že teorii dokáže aplikovat při řešení úloh. Samozřejmě, že je možné nějakou chvíli používat jen polynomy, odmocniny a racionální funkce, které se zavedou velmi jednoduše (v porovnání se zavedením exponenciály a logaritmu), ale jen s těmito funkcemi nelze vystačit napořád, jak uvidíme dále.

Z motivačního hlediska jsou obě funkce velmi důležité. Exponenciála proto, že je to jediná spojitá nekonstantní funkce, která je rovna své derivaci. K logaritmu zase vede cesta pomocí integrace: vzorec

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

platí pro kažadé celé číslo n s výjimkou hodnoty $n = -1$. Podle Věty D.40 však $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ existuje na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu $(0, +\infty)$. Na straně 142 v [11] lze nalézt důkaz, že primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na žádném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ není racionální funkce, takže integrace funkce $\frac{1}{x}$ vede k nové funkci, která není racionální. To tedy představuje vcelku přirozenou cestu, proč v matematické analýze potřebujeme logaritmus. A to už je velmi silná motivace k zavedení nové funkce.

Potřebná teorie a průběh studia

Již samotné definice obou funkcí naznačily, které partie matematické analýzy budou pro danou definici potřeba. V případě Definic E2 a L2 jsme mohli očekávat teorii posloupností reálných čísel, v případě Definice E3 teorii číselných a mocninných řad, u Definice L3 partie o určitých integrálech, u Definic E4 a L4 teorii diferenciálních rovnic, u Definice E5 opět teorii posloupností reálných čísel (ta se navíc užívá i u zavedení obecné mocniny) a u Definic E6 a L5 teorii inverzních funkcí. Záměrně jsme vynechali Definice E1 a L1, protože u nich nebylo na první pohled úplně jasné, jaká teorie bude potřeba (na rozdíl od ostatních definic) – samozřejmě jsme očekávali teorii funkcionálních rovnic, ale bylo zřejmé, že pomocí ní rozhodně nedokážeme korektnost definic. Korektnost Definic E1 a L1 jsme dokázali pomocí posloupností reálných čísel, což ovšem není jediná možnost, jak uvidíme dále.

To však jsou pouze okruhy učiva vyplývající přímo z definic. Dále se dalo očekávat, že budou potřeba znalosti o limitách, derivacích a o primitivních funkcích reálných funkcí jedné reálné proměnné.

Podíváme-li se na standardní průběh kurzu matematické analýzy v prvních dvou ročnících např. na Matematicko-fyzikální fakultě, pak se v prvním ročníku začíná posloupnostmi reálných čísel a následují funkce jedné reálné proměnné (pojmy jako limita funkce, derivace funkce a primitivní funkce). Ve druhém ročníku se postupně probírají číselné a mocninné řady, posloupnosti a řady funkcí, obyčejné diferenciální rovnice a funkce více proměnných.

Je jasné, že pokud bychom chtěli použít Definici E4 či L4, museli bychom počkat až do druhého ročníku, stejně jako s Definicí E3. Kdybychom chtěli použít Definici L3, tak bychom čekali na konec prvního ročníku. Ve všech těchto případech to je ovšem celkem pozdě.

Z porovnání potřebné teorie a průběhu studia matematické analýzy k zavedení exponenciály přicházejí v úvahu Definice E1, E2, E5 a E6 a pro logaritmus Definice L1, L2 a L5 (přičemž Definice E6 pouze v případě, že se logaritmus zavede pouze pomocí jedné z Definic L1 a L2, a naopak Definice L5 pouze v případě, že se exponenciála zavede pomocí jedné z Definic E1, E2 nebo E5).

Právě provedené úvahy, že kdybychom chtěli použít Definice E3, E4, L3 a L4, tak by to bylo celkem pozdě, nemusí být úplně pravdivé. Vyučující samozřejmě může volit jiný průběh studia, třeba po tématu posloupnosti reálných čísel zařadí číselné a mocninné řady, takže bude mít Definici E3 plně k dispozici ještě před infinitezimálním počtem. Těžko si však lze představit takový průběh učiva, aby se mohly použít co nejdříve Definice E4, L3 a L4.

Dalším faktem, který je nutno vzít v úvahu, je, že studenti již exponenciálu a logaritmus znají ze střední školy. Pak by se s rigorózní definicí těchto funkcí mohlo počkat libovolně dlouho, třeba až do druhého ročníku na probrání diferenciálních rovnic. To však nedoporučujeme, neboť jak uvidíme v následujícím oddílu, exponenciála a logaritmus jsou na střední škole spíše jako okrajové funkce.

Exponenciála a logaritmus v učebnicích pro gymnázia[11]

Pro gymnázia v podstatě existuje pouze jedna řada učebnic, které vydává nakladatelství Prometheus. Jak je tedy zavedena exponenciála a logaritmus v těchto učebnicích?

V učebnici *Funkce* [19] se používá definice pomocí obecné mocniny, avšak bez některých důkazů (což je samozřejmě vzhledem k matematické úrovni žáků v pořádku). Chybí např. důkaz Věty D.57 a především zavedení mocnin s iracionálním exponentem je pouze informativní. Exponenciální a logaritmické funkce se definují o libovolném základu $a > 0$, $a \neq 1$. Základu e se věnují opět informativně a zavádí jej takto: „Hledáme takové číslo $e > 1$, aby graf exponenciální funkce $y = e^x$ měl s přímkou $y = x + 1$ jediný společný bod.“ Pomocí tabulky

[11]Gymnázia nejsou samozřejmě jediným typem středních škol, nicméně předpokládáme, že v ostatních učebnicích pro jiné typy středních škol je situace velmi podobná (rozhodně však nepředpokládáme, že je v nich exponenciála a logaritmus zpracována více podrobně než v učebnicích pro gymnázia).

hodnot se dojde k závěru, že ani jedna z funkcí 2^x a 3^x nevyhovuje a že na kapesním kalkulátoru lze ověřit, že hledaným číslem je $e \approx 2,718281828$. Dále následuje komentář, že exponenciála má značný význam v teoretické matematice, fyzice, chemii a bilogii a že se číslu e budou věnovat důkladněji v knize *Posloupnosti a řady* [20]. Logaritmus je definován jako inverzní funkce k exponenciále. V [20] je uvedeno, že číslo e lze definovat limitou (1.7) a že se dá dokázat, že posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená[12].

Limitami a derivacemi funkcí se zabývá učebnice *Diferenciální a integrální počet* [8], kde je bez důkazu uvedeno Tvrzení 2.60, pomocí kterého se odvodí vzorec pro derivaci exponenciály a následně pro všechny exponenciální a logaritmické funkce.

Dále musíme upozornit na skutečnost, že ne na všech gymnáziích se žáci seznámí s infinitezimálním počtem. Ten totiž chybí v okruzích učiva *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia* [26], podle kterého v současné době gymnázia vyučují. Infinitezimální počet tak není povinným učivem a záleží na každé škole, zda jej do výuky zařadí.

Z právě popsaného výskytu exponenciály a logaritmu v učebnicích pro gymnázia je jasné, že se jedná spíše o informativní seznámení s těmito funkcemi a totéž se týká čísla e.

Dále se podívejme, jak se exponenciála a logaritmus zavádí v různých učebnicích pro vysoké školy.

Exponenciála a logaritmus v učebnicích pro vysoké školy

Pokud v následujícím textu uvedeme, že se v dané učebnici používá nějaká definice logaritmu, pak to zároveň znamená, že exponenciála se zavádí jako funkce inverzní k logaritmu a naopak. Navíc budeme používat naše značení definic.

Definici L1 používají např. Barner a Flohr [1]. Hájková a kol. [6] používá také Definici L1, avšak korektnost této definice dokáže pomocí ekvivalentní Definice L3 (v [1] ke korektnosti Definice L3 používají Větu 2.1.1, avšak její důkaz je od našeho mírně odlišný).

V učebnicích pro vysoké školy je velmi častou definicí Definice L3, kterou používají např. Protter a Morrey [18] nebo Protter [21]. V těchto dvou učebnicích se ovšem nezabývají korektností této definice (Věta 2.1.10). V následujících dvou knihách používají Definici L3 včetně okomentování existence určitého integrálu (2.4): Ghorpade a Limaye [5], Howie [7].

[12]Zde si však nejsme jisti, že takovou zmínku o čísle e lze považovat za „důkladnější věnování se číslu e“.

Definici E3 používá např. Morgan [17] nebo Malik [15], v některých učebnicích se exponenciála pomocí řady (1.4) definuje rovnou v oboru komplexních čísel, avšak následně se přejde do oboru reálných čísel a logaritmus se definuje jako funkce inverzní k exponenciále uvažované pouze na $\mathbb{R}$. Takovým příkladem je např. Rudin [22]. Stejný postup (definice v $\mathbb{C}$ a následný přechod do $\mathbb{R}$) používá i Dontová [3], která exponenciálu zavádí Definicí E2.

Definici E4 jsme v žádné knize nenalezli, nicméně se touto definicí zabývá internetový článek McGehee [16] (velmi stručně ovšem) a především se jí zabývá článek v časopise Mathematical Spectrum od Gove a Rychtář [4]. Stejně jako v této práci, jsou i v [4] uvedeny různé možnosti, jak je možné exponenciálu definovat (chybí ovšem definice pomocí obecné mocniny). Dále se v tomto článku studuje jen Definice E4. Nejprve se dokáže, že ostatní definice exponenciály splňují diferenciální rovnici (1.5) s počáteční podmínkou (1.6) (přesněji řečeno se dokazují Věty 1.3.9, 1.3.17 a 1.3.24), a následně se odvodí vlastnosti exponenciály z této definice.

Definice E5 je použita např. v Denlinger [2] či v Jarník [9]. Definici E5 rovněž používá Kopáček [12], avšak korektnost obecné mocniny nedokazuje, pouze uvádí, co je třeba dokázat.

Na závěr jsme nechali příklad Definice E1, tu používá např. Veselý [23]. Tuto knihu jsme na závěr nechali proto, protože sice logaritmus definuje jako funkci inverzní k exponenciále, ale zároveň uvádí i postup a potřebné informace k tomu, jak logaritmus zavést Definicí L1. To v ostatních knihách, které zde uvádíme, nenajdeme.

Definice, které jsme v žádné knize ani článku nenalezli, jsou Definice L2 a L4. V případě Definice L4 je vysvětlení jasné, neboť tato definice je triviálně ekvivalentní s Definicí L3. Proč jsme však v žádné učebnici nenalezli Definici L2 nevíme[13], neboť tato definice má ty stejné výhody a nevýhody (viz dále) jako Definice E2.

Nyní začneme jednotlivé definice pro obě funkce porovnávat.

Náročnost dokázání korektností

Pouhým pohledem na jednotlivé důkazy korektnosti definic exponenciály zjistíme, že jako nejdelší se jeví důkaz korektnosti Definice E5 (připomínáme příslušný komentář v Podkapitole 1.1) následovaný důkazem korektnosti Definice E1 a o zbylých důkazech korektností Definic E2, E3, E4 a E6 můžeme říci, že jsou zhruba stejně dlouhé. Totéž v podstatě platí pro definice logaritmu. Nejdelší byl

[13] To samozřejmě neznamená, že žádná taková kniha, kde je použita Definice L2, neexistuje.

důkaz korektnosti Definice L1 a o zbylých důkazech korektností Definic L2, L3, L4 a L5 můžeme říci, že jsou zhruba stejně dlouhé.

Náročnost odvození vlastností

Odvození jednotlivých vlastností exponenciály z jednotlivých definic nebylo až na jednu výjimku nijak obtížné ani dlouhé. Tou výjimkou je důkaz derivace funkce z Definice E2 v Tvrzení 1.2.28, ke kterému bylo navíc potřeba mj. Lemma 1.2.26, jehož důkaz byl velmi náročný a byla k němu potřeba *stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí.* Tento pojem se navíc na MFF standardně probírá až ve druhém ročníku kurzu matematické analýzy a na FSV se dokonce neprobírá vůbec, takže i když Definice E2 na první pohled vyžadovala pouze teorii posloupností reálných čísel (probíranou standardně na začátku 1. ročníku), tak kdyby pedagog volil k zavedení exponenciály Definici E2, tak na důkaz velmi důležité vlastnosti exponenciály – její derivace – by buď musel počkat až do druhého ročníku, nebo by potřebnou teorii neměl k dispozici vůbec. U ostatních definic se tento jev nevyskytl, že by se k důkazu některé vlastnosti muselo čekat až na pozdější dobu, protože potřebná teorie je odlišná od teorie vyžadované definicí (zde neuvažujeme pojmy jako limita či derivace funkce, o kterých předpokládáme, že jsou potřeba u všech definic, a které žádná definice na první pohled nevyžaduje).

V případě logaritmu je situace zcela analogická, tj. odvození vlastností logaritmu z jednotlivých definic by nebylo nijak obtížné ani dlouhé s výjimkou důkazu derivace funkce z Definice L2 (viz výpočet (2.29)). V minulé větě jsme záměrně použili podmiňovací způsob, protože jsme vlastnosti logaritmu odvozovali pouze z Definice L1, nicméně vzhledem k četným podobnostem definic logaritmu s definicemi exponenciály se dá předpokládat, že by příslušné důkazy byly analogické (tak tomu ostatně bylo v případě odvozovaných vlastností z Definic E1 a L1).

Náročnost dokázání ekvivalence definic

Nejdelšími důkazy v Podkapitole 1.3 byly důkazy těchto implikací: E2 $\Rightarrow$ E4, E4 $\Rightarrow$ E2, E2 $\Rightarrow$ E5, E5 $\Rightarrow$ E2, E2 $\Rightarrow$ E6, E6 $\Rightarrow$ E2, E5 $\Rightarrow$ E6, E6 $\Rightarrow$ E5. Rovněž důkazy implikací E1 $\Rightarrow$ E5, E3 $\Rightarrow$ E5, E3 $\Rightarrow$ E6 a E6 $\Rightarrow$ E3 byly dlouhé, neboť se nám je nepodařilo dokázat přímo. Navíc s ohledem na Poznámku 1.3.20 byly důkazy implikací E2 $\Rightarrow$ E4 a E4 $\Rightarrow$ E2 nejen dlouhé, ale rovněž velmi náročné. Samozřejmě není nutné dokazovat všech 30 implikací definic pro exponenciálu abychom ukázali, že definice jsou ekvivalentní. Navíc by to bylo časově velmi náročné. K ukázaní ekvivalence všech definic se jako nejvhodnější jeví dokázat tuto sérii implikací E1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ E3 $\Rightarrow$ E4 $\Rightarrow$ E5 $\Rightarrow$ E6 $\Rightarrow$ E1, avšak díky důkazům všech možných implikací v této práci si čtenář může vybrat jinou, podle něj výhodnější sérii.

Nejdelší důkazy v Podkapitole 2.3 byly důkazy těchto implikací: L2 $\Rightarrow$ L5 a L5 $\Rightarrow$ L2. Rovněž důkazy implikací L1 $\Rightarrow$ L3, L2 $\Rightarrow$ L3, L2 $\Rightarrow$ L4, L3 $\Rightarrow$ L2, L4 $\Rightarrow$ L2, L3 $\Rightarrow$ L5, L4 $\Rightarrow$ L1 a L5 $\Rightarrow$ L3 byly dlouhé, neboť jsme je nedokazovali přímo. Na ukázání ekvivalence všech definic se jako nejvhodnější jeví dokázat tuto sérii implikací L1 $\Rightarrow$ L2 $\Rightarrow$ L3 $\Rightarrow$ L4 $\Rightarrow$ L5 $\Rightarrow$ L1 (čtenář si však opět může vybrat jinou sérii).

Výhody a nevýhody jednotlivých definic

Nyní shrneme výše uvedené poznatky, uvedeme výhody a nevýhody jednotlivých definic a v některých případech navrhneme řešení nalezených nevýhod. Definice E1 a L1 jsou ze všech definic nejjednodušší, alespoň co se týká potřebné teorie k odvození základních vlastností exponenciály a logaritmu. Korektnost těchto definic se ovšem dokazuje celkem obtížně. Již jsme uvedli, že v matematické analýze potřebujeme exponenciálu a logaritmus k řešení příkladů. K tomu samozřejmě potřebujeme mít obě funkce definované a musíme znát jejich vlastnosti, na druhé straně nepotřebujeme ihned vědět, že se jedná o korektně definované funkce. Je tedy možné obě funkce zavést Definicemi E1 a L1 (resp. použít Definice E1 a L5 nebo L1 a E6), odvodit jejich základní vlastnosti a důkaz korektnosti nechat na pozdější dobu. V případě Definice E1 je možné důkaz existence funkce provést pomocí Věty 1.3.1, viz Poznámku 1.3.2. V této poznámce jsme položili otázku, proč se v literatuře k důkazu existence právě jedné funkce z Definice E1 nepoužívá Věta 1.3.1? Důvodem je zřejmě to, že autor, který použije Definici E1, chce rovnou dokázat i korektnost této definice a nechce ji odkládat na pozdější dobu (nicméně je s podivem, že po odvození Taylorovy řady pro exponenciálu nenásleduje alespoň komentář analogický Poznámce 1.3.2). V případě Definice L1 je možné důkaz existence provést pomocí Vět 2.1.10 a 2.3.7, takový postup používá např. Hájková a kol. [6] (jak jsme ostatně již zmínili). Dále je možné korektnost Definice E1 resp. L1 dokázat pomocí Vět 1.1.13 a 1.3.3 resp. Vět 1.1.11 a 1.3.1, avšak zde by se muselo počkat až na teorii diferenciálních rovnic, které se probírají v 2. ročníku, takže by důkazy korektnosti přišly poměrně pozdě, navíc by hrozilo, že studenti už lecos zapomněli a unikly by jim tak některé souvislosti při zavádění exponenciály a logaritmu.

Definice E2 a L2 mají jednu velkou nevýhodu, a sice odvození derivace funkce z těchto definic je velmi náročné. Jejich další nevýhodou je fakt, že se jedná o „hotové" funkce, tj. studentům se předkládá předpis pro exponenciálu či logaritmus. Ale odkud se ten předpis vzal? K limitám (1.3) a (2.3) se jistě nějak došlo, a ne že nejprve někdo zavedl tyto limity a pak je zkoumal. Tyto definice tedy ztrácejí motivační náboj (zatímco Definice E1 a L1 nikoli – v nich se vlastně předepisují vlastnosti, které jsou od exponenciály a logaritmu vyžadovány). Jediná výhoda Definic E2 a L2, patrná na první pohled, teorie posloupností reálných čísel probíraná v úvodu studia matematické analýzy, zdaleka nekompenzuje nevýhody těchto definic.

Definice E3 má dvě nevýhody – potřebnou teorii, která se standardně probírá ve 2. ročníku, a stejně jako v případě Definic E2 a L2, je její nevýhodou již „hotový" předpis. Na druhé straně její výhodou je odvozování vlastností exponenciály z této definice, které je vcelku jednoduché, navíc ukazuje použití důležitých vět o číselných a mocninných řadách (derivace mocninné řady, součin absolutně konvergentních řad). Můžeme říci, že to je celkem elegantní definice, jejíž výhody a nevýhodou jsou vyrovnány.

Celkem elegantní definicí je i Definice L3, vlastnosti logaritmu se z této definice odvodí snadno[14], avšak opět je její nevýhodou potřebná teorie. Mohlo by se zdát, že další nevýhodou je již „hotový" předpis. Není tomu tak, protože o integrálu (2.4) nevíme kromě existence (Věta 2.1.10) vůbec nic. Navíc připomínáme úvahu o potřebě zavést novou funkci při integraci funkce $\frac{1}{x}$, což je další výhoda této definice, tentokrát z hlediska motivace studentů. Jedinou nevýhodu této definice – potřebnou teorii – je možné vynahradit tím, že se pomocí této definice dokáže korektnost Definice L1 (viz zpět), neboli že se logaritmus zavede Definicí L1, odvodí se základní vlastnosti a později se přejde k Definici L3.

Definice E4 a L4 mají opět nevýhodu v podobě teorie, která se probírá až ve 2. ročníku. Důkaz korektnosti Definice E4 nebyl příliš obtížný a navíc jsme se při něm vyhnuli obecným větám o existenci a jednoznačnosti diferenciálních rovnic (viz Poznámku 1.1.16). Odvozování vlastností exponenciály z této definice je poměrně zajímavé, takže to můžeme považovat za výhodu této definice. Definice L4 je na tom velmi podobně. Již jsme diskutovali využití těchto definic při dokázání korektnosti Definic E1 a L1.

Definice E5 je velmi zdlouhavá a poměrně obtížná (ne však náročná na teorii), na druhé straně může být zajímavá, protože k ní vede cesta přes definici obecné mocniny. Když se nejprve zavede exponenciála a pak logaritmus, lze obecnou mocninu definovat takto: $x^a = f(ag(x))$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$, f značí exponenciálu zavedenou např. Definicí E1 a g logaritmus zavedený např. Definicí L5. Studenty

[14] V této práci jsme vlastnosti logaritmu z této definice neodvozovali, proto odkazujeme např. na [18].

jistě napadne otázka, kam se ztratila původní Definice D.55 n-té mocniny ($n \in \mathbb{N}$), tj. definice kterou znají ze střední školy? To naopak postupné zavední obecné mocniny naznačené v Dodatku takovou otázku nevzbudí a nakonec ještě ukáže vztah mezi obecnou mocninou x^a ($x > 0$, $a \in \mathbb{R}$) a exponenciálními funkcemi a^x ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$) – obecná mocnina má základ proměnný a exponent pevný, exponenciální funkce to mají přesně naopak. Nicméně časová náročnost zavedení exponenciály Definicí E5 hovoří proti takovému způsobu zavedení.

Zbývá diskutovat výhody a nevýhody Definic E6 a L5. Potřebná teorie (např. Věta D.33 o derivaci inverzní funkce) se vyučuje v 1. ročníku, takže nepředstavuje žádnou nevýhodu. Vlastnosti funkcí se z těchto definic odvodí snadno, navíc je svým způsobem definování exponenciály (resp. logaritmu) jako inverzní funkce k logaritmu (resp. exponenciále) nevyhnutelné, takže je jedině dobře, že Definice E6 a L5 nemají žádnou nevýhodu.

V tuto chvíli jsme uvedli výhody a nevýhody všech definic a můžeme navrhnout nejvhodnější postup při zavádění exponenciály a logaritmu, a to jak na středních školách, tak na školách vysokých. Zároveň odpovíme na otázku položenou v Úvodu, zda je lepší nejprve zavést exponenciálu a logaritmus pak definovat jako funkci inverzní nebo naopak.

Exponenciála a logaritmus na střední škole

Vzhledem k obsahu učiva matematiky středních škol je patrné, že zavedení exponenciály pomocí mocninných řad či diferenciálních rovnic nepřichází v úvahu. Definice exponenciály pomocí obecné mocniny také není příliš vhodná, neboť je příliš časově náročná. Nevýhody Definice E2 jsme již diskutovali. Touto vylučovací metodou jsme došli k závěru, že k zavedení exponenciály se hodí Definice E1, případně Definice E6, ovšem jen pokud logaritmus zavedeme Definicí L1. Analogicky dospějeme v případě logaritmu k Definicím L1 a L5 (ovšem jen pokud exponenciálu zavedeme Definicí E1). Žákům středních škol však dělá logaritmus často problémy, takže by bylo vhodnější nejprve zavést exponenciálu Definicí E1 a poté logaritmus Definicí L5. Tento způsob zavedení se rovněž doporučuje v [25], kde lze nalézt další cenné komentáře ohledně zavedení exponenciály.

Funkcionální rovnice se často vyskytují v matematické olympiádě a celkově se dají považovat za zajímavou učební látku, kdy se hledá nějaká funkce s požadovanými vlastnostmi, což (podle autorových zkušeností) studenty se zájmem o matematiku baví. To je další argument pro Definici E1.

Navíc je v Definici E1 možné k funkcionální rovnici (1.1) a podmínce (1.2) připojit nějakou další vlastnost (která samozřejmě již z těchto dvou podmínek vyplývá), která je však na odvození těžší, neboť je k tomu potřeba nějaké náročnější tvrzení z matematické analýzy. V souladu s [25] tak lze exponenciálu definovat jako funkci, která splňuje funkcionální rovnici (1.1), podmínku (1.2) a jejímž oborem hodnot je interval $(0, +\infty)$. Tím se navíc neztratí důležité souvislosti.

Další výhodou zavedení exponenciály Definicí E1 na střední škole jsou potřebná tvrzení z matematické analýzy (která navíc uvádíme v Dodatku). Velkou většinu z nich lze totiž dokázat i na střední škole, případně uvést bez důkazu, a to bez ztráty důležitých souvislostí.

Shrneme-li výše uvedené poznatky, pak se k zavedení exponenciály na střední škole jednoznačně hodí jen a pouze Definice E1 a logaritmus se pak zavede Definicí L5.

Exponenciála a logaritmus na vysoké škole

Na rozdíl od střední školy není učitel na vysoké škole omezen učební látkou, ale jak jsme již uvedli, je omezen dobou, kdy se daná látka probírá. Z tohoto hlediska jsme za vyhovující určili Definice E1, E2, E5, E6, L1, L2 a L5 (viz výše). Zavedení Definicí E5 je příliš zdlouhavé a Definice E2 a L2 přinášejí více nevýhod než výhod. Takže v tuto chvíli zbývají Definice E1, E6, L1 a L5. To je již na každém učiteli, zda nejprve zavede exponenciálu či logaritmus a k definování té druhé funkce použije inverzní funkce (na vysoké škole snad logaritmus již nedělá studentům problémy jako tomu je na střední škole).

Definice E1 a L1 mají nevýhodu v podobě dokázání korektnosti, kterému se však lze (na rozdíl od střední školy) vyhnout – viz zpět.

V této práci se vyskytuje celá řada tvrzení, které se ve výuce běžně dokazují. Jmenujme např. Taylorův rozvoj exponenciály dokázaný ve Větě 1.3.1, aplikaci Věty D.52 o derivaci mocninné řady v důkazu Věty 1.2.39, rovněž je jistě zajímavé ukázat, že jednou z metod řešení direferenciálních rovnic je řešení pomocí mocninných řad, což jsme použili k důkazu Věty 1.3.21 apod. Vysokoškolský pedagog tak v průběhu celého kurzu matematické analýzy dokáže celou řadu tvrzení, které jsou potřeba při zavádění exponenciály. Takže i když už má zavedenou exponenciálu (jakýmkoli způsobem), byla by škoda se k zavedení exponenciály nevracet a neupozorňovat na další a další souvislosti. Neměl by (po zavedení exponenciály jedním způsobem) pouze skončit konstatováním, že ekvivalentně lze exponenciálu zavést ještě dalšími způsoby, což je běžná praxe v dostupné literatuře. To také bylo důvodem vzniku této práce, neboť autora po prostudování zavedení exponenciály Definicí E1 zajímalo, jak zavedení vypadá zejména pomocí mocninných řad a diferenciálních rovnic. Pokud tedy bude učitel v průběhu výuky upozorňovat na souvislosti s definováním exponenciály, bude nakonec mít většinu potřebných důkazů pro zavedení exponenciály dalšími způsoby a pokud kdysi uvedl, že se exponenciála dá definovat i jinak (než jak ji definoval), tak nyní to prokáže (v opačném případě by tvrzení o dalších možných definicích exponenciály bylo v podstatě k ničemu). V případě logaritmu je situace odlišná, není moc tvrzení v této práci, které se ve výuce běžně dokazují, takže z tohoto hlediska by možná bylo lepší uvést odkaz na nějakou knihu, kde je logaritmus zaveden jiným způsobem než jaký byl ve výuce proveden. Ostatně když už by učitel tvrdil, že exponenciála se dá zavést i jinak než jak ji definoval a v průběhu další výuky se už k exponenciále nebude vůbec vracet (ve smyslu uvedeném výše), měl by alespoň uvést knihu, kde je nějaký jiný způsob zavedení realizován.

K zavedení exponenciály a logaritmu na vysoké škole tedy doporučujeme Definice E1 (nebo E6) a L1 (nebo L5), zároveň však doporučujeme ukazování souvislostí s dalšími definicemi. Ještě uveďme jeden návrh ohledně Definic E1 a L1.

Kdyby byl dostatek času, bylo by jistě zajímavé zavést exponenciálu Definicí E1 a nezávisle na tom zavést logaritmus Definicí L1 a poté začít zkoumat, zda-li tyto funkce nejsou v nějaké relaci. Dokonce by se mohlo jít ještě dále – vůbec neříkat, že se jedná o exponenciálu a logaritmus, studentům by se mohlo pouze sdělit, že zavádíme zcela nové funkce a že nakonec se možná ukáže, že se jedná o dobře známé funkce[15]. To by určitě nešlo realizovat v běžné výuce, autor si však dokáže velmi dobře představit zavedení výběrového semináře, kde by se mohla podobně zkoumat zavedení i ostatních exponenciálních a logaritmických funkcí o libovolném kladném základu různém od jedné, např. předepsáním jiných hodnot limit (1.37) a (2.13) a samozřejmě ponecháním funkcionálních rovnic (1.1) a (2.1).

Historické souvislosti

Zatím jsme vůbec nezmínili historické souvislosti, které jsou velmi důležité z hlediska motivace. Zde se pouze odkážeme na velmi pěkně zpracovanou historii vzniku a vývoje definic exponenciály a logaritmu v [25].

[15]Samozřejmě by hrozilo riziko, že studenti poznají, že jde o exponenciálu a logaritmus a že to jsou funkce vzájemně inverzní. Pak by mohl vyučující reagovat např. tím, že je dobré, že mají nějakou hypotézu, která se ale musí nyní prokázat nebo naopak vyvrátit.

Další zdroje

Pokud by chtěl čtenář prostudovat další knihy obsahující problematiku zavádění exponenciály a logaritmu, nelze mu nedoporučit seznam literatury na konci práce a rovněž seznam literatury na konci článku v [25].

Náměty k dalšímu zkoumání

V této práci jsme se zabývali definováním exponenciály a logaritmu. Pomocí těchto dvou funkcí se dají definovat všechny exponenciální a logaritmické funkce[16], které se však dají definovat i jinak – už jsme to uvedli – pomocí funkcionálních rovnic (1.1) a (2.1) a limit (1.37) a (2.13), kterým se ovšem předepíší jiné hodnoty. Nabízí se otázka, jestli pak pro tyto „nové" limity neplatí ekvivalentní podmínky, jako tomu je u podmínek (1.2) a (2.2). Další otázky se přímo nabízí - existují pro exponenciální a logaritmické funkce definice pomocí diferenciálních rovnic, mocninných řad, limit posloupností? Pokud ano, opět by se mělo ukázat, že jednotlivé definice jsou ekvivalentní.

Zatím jsme mluvili pouze o exponenciálních a logaritmických funkcích, které ale nejsou jedinými elementárními funkcemi. I pro další elementární funkce existuje několik možných definic a mohla by tak vzniknout podobná práce jako je tato, věnovaná pouze funkcím goniometrickým, další práce studující pouze funkce cyklometrické, jiná zabývající se funkcemi hyperbolickými a konečně i práce zkoumající funkce hyperbolometrické.

A nezapomeňme ani na číslo e. U něj jsou známy především dvě definice, jednu jsme v této práci použili my, a sice definici (1.7), druhá definice je potom pomocí řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Není ale ještě nějaká jiná definice? Odpověď na tuto otázku je kladná, číslo e se dá definovat jako to kladné číslo a, pro které je hodnota limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

rovna jedné. Označíme-li g funkci logaritmus (definovaný kteroukoli z Definic L1-L5), pak musí existovat takové kladné číslo e, že $g(e) = 1$, neboť jsme v Kapitole 2

[16]Exponenciální funkci o základu a, $a > 0$, $a \neq 1$ předpisem $f(xg(a))$ a logaritmickou funkci o tomtéž základu předpisem $\frac{g(x)}{g(a)}$, kde f značí exponenciálu (zavedenou např. Definicí E1) a g logaritmus (zavedený např. Definicí L1).

ukázali, že obor hodnot funkce g je $\mathcal{R}_g = (-\infty, +\infty)$. To je tedy již čtvrtá možná definice čísla e a nevylučujeme, že je možné definovat toto číslo ještě jiným způsobem. V této práci jsme jako „vedlejší produkt“ dokázali, že jsou všechny tyto definice čísla e ekvivalentní.

Dalším námětem je zavedení exponenciály a logaritmu v oboru komplexních čísel. Již jsme uvedli, že někteří autoři učebnic definují exponenciálu rovnou v $\mathbb{C}$ (konkrétně Rudin [22] a Dontová [3]), a to pomocí řady (1.4) nebo limity (1.3). Je možné zavést exponenciálu v $\mathbb{C}$ ještě jiným způsobem? A co logaritmus? Navíc v oboru komplexních čísel exponenciála nějak souvisí se sinem a kosinem…

Závěr

V této práci jsme uvedli 6 definic pro exponenciálu a 5 definic pro logaritmus. Dokázali jsme, že všechny definice pro obě funkce jsou korektní, dále jsme odvodili některé vlastnosti obou funkcí a ukázali jsme, že všechny definice pro danou funkci jsou ekvivalentní. Nakonec jsme porovnali jednotlivé způsoby zavedení exponenciály a logaritmu z hlediska náročnosti teorie a obtížnosti a délky důkazů. Rovněž jsme se zamysleli, jaká definice je nejvhodnější k zavedení exponenciály a logaritmu na střední škole a jaká definice na škole vysoké. Uvedli jsme význam exponenciály a logaritmu a příklady zavádění těchto funkcí v různých učebnicích. Nyní všechny tyto poznatky shrneme.

Definice E1 je asi nejčastěji v literatuře se vyskytující definicí exponenciály, důvodem je potřebná teorie, která je vybudována hned ze začátku studia matematické analýzy na vysokých školách. Tato definice se jako jediná hodí i k definování exponenciály na střední škole, neboť většinu důkazů potřebných tvrzení matematické analýzy lze provést i na střední škole a obtížnější důkazy lze vynechat bez ztráty důležitých souvislostí. Definice E1 se tedy hodí jak k zavedení na vysoké škole, tak i na škole střední. Její nevýhodou je ovšem obtížné dokázání existence funkce z této definice, které je však možné na vysoké škole nechat na pozdější dobu a provést např. pomocí Definice E3. Nevýhodou Definice E2 je již daný předpis pro exponenciálu a vyvstává otázka, odkud se tento předpis vzal. Navíc bylo náročné odvodit derivaci funkce z Definice E2. Nevýhody Definice E3 – již daný předpis a potřebná teorie – jsou kompenzovány snadným odvozením vlastností. Pozdní vybudování teorie se týká i Definice E4, která však poskytuje z motivačního hlediska velmi zajímavé, můžeme dokonce říci elegantní, zavedení exponenciály pomocí diferenciálních rovnic. Zavedení exponenciály pomocí Definice E5 je opět velmi dlouhé a v podstatě k němu není čas ani na vysoké škole, nicméně lze exponenciálu touto definicí zavést velmi brzy. Dále tato definice poskytuje jasnou souvislost mezi exponenciálou a obecnou mocninou. S Definicí E6 souvisí otázka, zda-li je lepší nejprve definovat exponenciálu a pomocí ní a inverzní funkce zavést logaritmus nebo naopak. Jediným kritériem, které jsme nalezli, je pochopení obou funkcí žáky středních škol – větší problémy totiž dělá logaritmus. To neplatí pro studenty vysokých škol, takže je na každém učiteli, zda jako první zavede exponenciálu nebo logaritmus.

S definicemi logaritmu je situace velmi obdobná jako u exponenciály. Definice L1 se hodí jak na střední školu, tak na školu vysokou. Definice L2 dává již hotový předpis a navíc obsahuje jedno velmi obtížné, avšak důležité odvození (derivace funkce), takže jej nedoporučujeme ani pro vysokou školu. Definice L3 a L4 jsou triviálně ekvivalentní a poskytují velmi zajímavý způsob definování logaritmu, který však lze realizovat poměrně pozdě, až po vybudování teorie primitivních funkcí. Definice L5 je definicí pomocí inverzní funkce a jde o častý způsob definování logaritmu a nelze jej nedoporučit, neboť po zavedení exponenciály je zbytečné provádět analogická odvození znovu i pro logaritmus (avšak kdyby k tomu byl dostatek času, bylo by zajímavé obě funkce zavést nezávisle na sobě a pak zkoumat, zda nejsou v nějaké relaci).

Ve 3. kapitole jsme dále uvedli náměty k dalšímu zkoumání a další zdroje zabývající se zaváděním exponenciály a logaritmu.

Exponenciála a logaritmus jsou pro matematiku velmi důležité funkce, které je nutné zavést co možná nejdříve, aby bylo možné řešit příklady s těmito funkcemi. I když se k tomu nejlépe hodí Definice E1 a L5, případně L1 a E6, neměly by být ostatní definice opomenuty a po vybudování potřebné teorie by se mohl naznačit alespoň postup zavedení exponenciály zejména Definicemi E3 a E4 a u logaritmu Definicemi L3 a L4, obzvlášť když se celá řada potřebných tvrzení běžně dokazuje. Tato práce k tomu poskytuje dostatek informací a rovněž je možné se na ni ve výuce odkazovat.

Studentům přejeme úspěšné pochopení zavádění exponenciály a logaritmu a rovněž seznámení se s více než jednou možnou definicí obou funkcí. Učitelům pak přejeme, aby alespoň k několika poznámkám o dalších definicích exponenciály a logaritmu nalezli dostatek času.

Dodatek

V této části práce uvádíme tvrzení a věty matematické analýzy, které jsme v práci při odvozování používali. Některé věty patří k základům vysokoškolského kurzu, nicméně je i přesto uvádíme, neboť jsme se snažili co největší část práce zpřístupnit středoškolákům. Zároveň vždy uvádíme i odkazy na literaturu, kde lze nalézt důkazy následujících tvrzení a vět. Některá znění jsme však zjednodušili či trochu upravili do takové podoby, která byla pro naši potřebu dostačující (např. vzhledem k použití v práci byla znění některých vět příliš obecná).

Tvrzení o reálných číslech

Tvrzení D.1 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna reálná čísla $x \geq -1$ platí*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

přičemž pro $x > 0$ a $n > 1$ je předchozí nerovnost ostrá.[17] ([23], strana 28)

Tvrzení D.2 (Algebraicko-geometrická nerovnost[18])**.** *Pro všechna přirozená čísla n a všechna nezáporná reálná čísla x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, platí*

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n,$$

přičemž rovnost nastává jen v případě, že jsou si všechna čísla x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ rovna. ([23], strana 29)

[17] Uvedená nerovnost platí dokonce pro $x \geq -2$ (což není příliš známo), pro naše účely však postačí obvyklá podmínka $x \geq -1$.

[18] Zkráceně AG-nerovnost.

Věty o posloupnostech reálných čísel

Poznámka. V následujících větách budeme posloupnosti značit zkráceným zápisem $\{a_n\}$, kterým máme na mysli zápis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta D.3. *Každá posloupnost reálných čísel má nejvýše jednu limitu.*
([12], strana 28)

Věta D.4. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

([12], strana 29)

Věta D.5. *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel omezená a exituje-li přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní, pak má posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu.* ([12], strana 30)

Věta D.6 (o limitě součtu, rozdílu a součinu)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

([12], strana 31)

Věta D.7 (o limitě podílu)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a vlastní nenulová $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

([12], strana 31)

Věta D.8 (o limitním přechodu v nerovnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, které mají vlastní limity. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

([12], strana 38)

Věta D.9 (o limitě sevřené posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel. Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna přirozená čísla* $n \geq n_0$ *platí*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Jestliže dále platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}$, *pak existuje i limita posloupnosti* $\{b_n\}$ *a platí pro ni* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. ([12], strana 39)

Věta D.10. *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel. Nechť dále existuje vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$. *Pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné pevné. Pro něj existují přirozená čísla n_1 a n_2 tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_1$ platí $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro $n > n_2$ je $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti pro přirozená čísla $n > \max\{n_1, n_2\}$ tak dostáváme

$$|b_n - a| = |a_n - a + b_n - a_n| \leq |a_n - a| + |b_n - a_n| = |a_n - a| + |a_n - b_n| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Následující důkaz provedeme podle návodu uvedeném na straně 88 v [9].

Věta D.11. *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ *a existuje vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

Důkaz. Z $a_n > 0$ a existence vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ podle Věty D.8 o limitním přechodu v nerovnosti dostáváme ihned $a \geq 0$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Kdyby bylo $\sqrt[k]{a_n} \geq \sqrt[k]{a} + \varepsilon$, tak by po umocnění na k-tou a po použití binomické věty bylo

$$a_n \geq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\sqrt[k]{a}\right)^j \varepsilon^{k-j} \geq a + \varepsilon^k,$$

kde poslední nerovnost platí díky nezápornosti všech členů binomického rozvoje (je totiž $a \geq 0$ a tedy $\sqrt[k]{a} \geq 0$). Nerovnost $a_n \geq a + \varepsilon^k$ však nemůže platit pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$, neboť z definice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro dané ε' a všechna přirozená $n > n_0$ platí dvojice nerovností $a - \varepsilon' < a_n < a + \varepsilon'$ a pro $\varepsilon' = \varepsilon^k$ by to nemohlo platit.

Analogicky nemůže být $\sqrt[k]{a_n} \leq \sqrt[k]{a} - \varepsilon$ pro dost velká n, takže celkově pro dost velká n platí dvojice nerovností

$$\sqrt[k]{a} - \varepsilon < \sqrt[k]{a_n} < \sqrt[k]{a} + \varepsilon,$$

neboli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$. □

Věta D.12. *Má-li posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}$ *vlastní limitu* A*, pak každá posloupnost z ní vybraná má také limitu* A. ([12], strana 40)

Věta D.13. *Má-li monotónní posloupnost* $\{a_n\}$ *reálných čísel nějakou omezenou vybranou podposloupnost, je posloupnost* $\{a_n\}$ *omezená.*

Důkaz. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající pro všechna přirozená $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená číslem $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$. Protože je nějaká vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ omezená, existuje číslo $L > 0$ tak, že $|a_{k_n}| \leq L$ pro všechna $k_n \in \mathbb{N}$. Zvolme pevné $n \in \mathbb{N}$ a rozlišme tyto případy:

1) je-li $n \leq n_0$, pak platí $a_n \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$;

2) je-li $n > n_0$, pak platí $a_n \leq a_{k_n} \leq L$ (je totiž $n \leq k_n$ a posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající).

V obou případech je člen a_n omezený shora číslem $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L\}$. Celkově je tedy posloupnost $\{a_n\}$ omezená.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí, provede se důkaz podobně. □

Věta D.14. *Existuje-li takové přirozené číslo* n_0*, že pro všechna přirozená čísla* $n \geq n_0$ *je posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}$ *neklesající, je* $a_k \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pro každé přirozené* $k \geq n_0$. ([9], strana 95)

Věta D.15. *Existuje-li takové přirozené číslo* n_0*, že pro všechna přirozená čísla* $n \geq n_0$ *je posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}$ *nerostoucí, je* $a_k \geq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pro každé přirozené* $k \geq n_0$. ([9], strana 96)

Věta D.16. *Ke každému reálnému číslu* x *existuje neklesající posloupnost racionálních čísel mající limitu* x. ([9], strana 99)

Věty o limitách reálných funkcí

Poznámka. Ve všech následujících větách budeme uvažovat jen funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a budeme to proto ve znění těchto vět vynechávat.

Věta D.17 (o limitě součtu, rozdílu a součinu)**.** *Nechť* f *a* g *jsou funkce reálné proměnné, které mají limity v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$.[19] *Potom platí:*

[19] $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)+\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right)$
kromě případu, kdy jedna z limit je $+\infty$ *a druhá* $-\infty$*.*

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right).$
kromě případu, kdy jedna z limit je 0 *a druhá* $\pm\infty$*.*

([12], strana 61)

Věta D.18 (o limitě sevřené funkce)**.** *Nechť* f, g, h *jsou funkce reálné proměnné, pro které v nějakém redukovaném okolí bodu* $x_0\in\mathbb{R}$ *platí* $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$*. Jestliže dále platí* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A\in\mathbb{R}$*, pak existuje také limita funkce* g *v bodě* x_0 *a platí* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$*.* ([12], strana 61)

Věta D.19. *Nechť* f, g *jsou funkce reálné proměnné, pro které v nějakém redukovaném okolí bodu* $x_0\in\mathbb{R}^*$ *platí* $f(x)\leq g(x)$*. Je-li* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$*, je také* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$*.* ([12], strana 62)

Věta D.20 (o limitě složené funkce)**.** *Nechť* f *a* g *jsou funkce reálné proměnné,* $x_0\in\mathbb{R}$*. Nechť existuje limita* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\in\mathbb{R}$ *a nechť* g *je taková funkce, že* $\lim\limits_{y\to A}g(y)=B\in\mathbb{R}$*. Jestliže existuje redukované okolí* $U^*(x_0)$ *tak, že* $f(x)\neq A$ *pro* $x\in U^*(x_0)$*, pak funkce* $g\circ f$ *má v bodě* x_0 *limitu a platí*

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=B=\lim_{y\to\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}g(y).$$

([12], strana 68)

Věta D.21. *Nechť* $x_0, A\in\mathbb{R}$ *a* f *je funkce reálné proměnné. Potom rovnice* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

([9], strana 168)

Věta D.22. *Nechť* $x_0\in\mathbb{R}^*$ *a* f *je funkce reálné proměnné, pro kterou platí* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$*. Potom* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$*.* ([9], strana 180)

Věty o derivacích reálných funkcí

Věta D.23. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Má-li f v každém bodě intervalu I vlastní derivaci, je na tomto intervalu spojitá.* ([12], strana 92)

Věta D.24. *Nechť f a g jsou funkce reálné proměnné, které mají vlastní derivace v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, platí též

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

([12], strana 93)

Věta D.25 (o derivaci složené funkce)**.** *Nechť f a g jsou funkce reálné proměnné, které mají vlastní derivace $f'(a)$ a $g'(b)$, $b = f(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Potom složená funkce $g \circ f$ má vlastní derivaci v bodě a a platí*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)\, f'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

([12], strana 94)

Věta D.26. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a jejíž derivace je v každém bodě I nulová. Potom f je konstantní v I.* ([12], strana 111)

Věta D.27. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Je-li na I $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), pak f je na I rostoucí (klesající)*[20]. ([24], strana 248)

Věta D.28. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ spojitá a která má v každém bodě intervalu I druhou derivaci. Je-li $f''(x) > 0$ (< 0) v každém bodě intervalu I, pak f je na I ryze konvexní (ryze konkávní).*

([9], strana 250)

[20] Bez ohledu na to, zda je f v I spojitá; derivace $f'(x)$ může být v některých bodech x nevlastní.

Věty o spojitosti reálných funkcí

Věta D.29. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je spojitá na intervalu $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ a pro kterou platí $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje bod $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) = 0$.* ([23], strana 118)

Věta D.30. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je spojitá a rostoucí na intervalu I s koncovými body a, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Potom $\mathcal{R}_f$ je interval s koncovými body $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Pokud do I patří koncový bod a, patří do $\mathcal{R}_f$ koncový bod A (a je navíc $A = f(a)$) a patří-li do I bod b, patří do $\mathcal{R}_f$ bod B (a je navíc $B = f(b)$).* ([12], strana 71)

Věty o inverzních funkcích

Věta D.31. *Nechť f je funkce reálné proměnné s oborem hodnot $\mathcal{R}_f$, která je rostoucí na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom f^{-1} je na $\mathcal{R}_f$ rostoucí.*
([23], strana 156)

Věta D.32. *Nechť f je funkce reálné proměnné s oborem hodnot $\mathcal{R}_f$, která je spojitá a rostoucí na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom f^{-1} je na $\mathcal{R}_f$ spojitá.*
([23], strana 156)

Věta D.33 (o derivaci inverzní funkce)**.** *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je rostoucí na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Nechť má f v bodě $x_0 \in I$ vlastní nenulovou derivaci. Potom funkce $g = f^{-1}$ má vlastní nenulovou derivaci v bodě $A = f(x_0)$ a platí*

$$g'(A) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

([23], strana 156)

Věta D.34. *Nechť f je funkce reálné proměnné, která je spojitá a rostoucí na intervalu I s koncovými body a, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť je dále $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Potom platí*

$$\lim_{y\to A^+} f^{-1}(y) = a, \quad \lim_{y\to B^-} f^{-1}(y) = b.$$

([12], strana 71)

Věty o Taylorově řadě reálných funkcí

Věta D.35. *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť má funkce f na uzavřeném intervalu I s krajními body x_0 a x derivace až do řádu $(n+1)$. Nechť dále platí*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad a \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Potom existuje vnitřní bod ζ intervalu I tak, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(Lagrangeův tvar zbytku). ([23], strana 189)

Věta D.36. *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Nechť má funkce f na uzavřeném intervalu I s krajními body x_0 a x derivace všech řádů. Potom rovnost*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

platí právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

([9], strana 296)

Věty o primitivních funkcích a určitých integrálech

Věta D.37. *Je-li f reálná funkce, která je spojitá v uzavřeném intervalu $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje.* ([11], strana 51)

Věta D.38. *Nechť f, g jsou reálné funkce, které mají na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál. Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $[a,b]$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

([12], strana 158)

Věta D.39. *Nechť f je reálná funkce, která má Riemannův integrál na každém uzavřeném intervalu $[\alpha, \beta] \subset I \subset \mathbb{R}$. Je-li $c \in I$ libovolný bod, pak funkce*

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I$$

má následující vlastnosti:

(i) je spojitá na I;

(ii) je-li f spojitá v bodě $x_0 \in I$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$.

([12], strana 164)

Věta D.40. *Je-li f reálná funkce, která je spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak má na I primitivní funkci. Pro $c \in I$ je primitivní funkce, která je v bodě c rovná nule, dána předpisem*

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

([12], strana 165)

Věty o řadách reálných čísel

Věta D.41 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

([13], strana 165)

Věta D.42 (limitní d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ([13], strana 172)

Věta D.43. *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

([13], strana 179)

Poznámka. Následující věta je důsledkem dvou vět, proto uvádíme v citovaném zdroji dvě strany.

Věta D.44. *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergentní. Potom platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

([13], strana 167 a 190)

Věta D.45. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, potom každé její přerovnání je absolutně konvergentní řada, která má stejný součet jako původní řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ([13], strana 186)

Věta D.46. *Nechť je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní. Potom ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje číslo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna přirozená* $k \geq n_0$ *je*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

([10], strana 87)

Věty o posloupnostech a řadách reálných funkcí

Poznámka. V následujících větách budeme posloupnosti funkcí značit zkráceným zápisem $\{f_n(x)\}$, kterým máme na mysli zápis $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a budeme uvažovat jen situaci $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, což budeme ve znění vět vynechávat.

Věta D.47 (Bolzanova - Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Posloupnost funkcí* $\{f_n(x)\}$ *definovaných na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ *konverguje stejnoměrně na tomto intervalu právě tehdy, když platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n > n_0)\,(\forall x \in I)\,(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)\,.$$

([14], strana 6)

Věta D.48 (o derivaci limitní funkce)**.** *Nechť* $\{f_n(x)\}$ *je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ *vlastní derivace. Nechť dále posloupnost* $\{f_n(x)\}$ *konverguje alespoň pro jedno* $x_0 \in I$ *a* $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně na* I*. Potom pro všechna* $x \in I$ *platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right).$$

([14], strana 15)

Věta D.49 (o spojitosti limitní funkce)**.** *Nechť* $\{f_n(x)\}$ *je posloupnost funkcí spojitých na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$. *Nechť* $\{f_n(x)\}$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I *k funkci* f. *Potom* f *je spojitá na intervalu* I. ([24], strana 393)

Věta D.50 (Diniho)**.** *Nechť* $\{f_n\}$ *je monotónní posloupnost spojitých funkcí, které na omezeném uzavřeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ *konvergují ke spojité funkci* f. *Pak* $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně k* f *na* I. ([24], strana 399)

Věty o mocninných řadách

Poznámka. V následujících větách bude pro proměnnou x vždy platit, že $x \in \mathbb{R}$, což budeme ve znění vět vynechávat.

Věta D.51. *Součet mocninné řady je funkce, která je spojitá v intervalu konvergence.* ([24], strana 415)

Věta D.52 (o derivaci mocninné řady)**.** *Má-li řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *a označíme-li* f *její součet v intervalu* $(-R, R)$, *pak pro všechna* $x \in (-R, R)$ *platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

([24], strana 416)

Věty o diferenciálních rovnicích

Věta D.53. *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. *Nechť je v rovnici* $y' = g(y)$ *funkce* g *spojitá na* $[a, b)$, *kladná na* (a, b), $g(a) = 0$ *a* $g'_+(a)$ *existuje a je vlastní. Nechť* G *je primitivní funkce k* $1/g$ *na* (a, b). *Pak* $\lim_{y \to a^+} G(y) = -\infty$. ([6], strana 356)

Věta D.54. *Nechť* $a \in \mathbb{R}$. *Nechť je v rovnici* $y' = g(y)$ *funkce* g *spojitá a kladná na intervalu* $(a, +\infty)$ *a* G *je primitivní funkce k* $1/g$ *na tomto intervalu.*

(i) Pokud existuje vlastní limita $\lim_{y \to +\infty} \frac{g(y)}{y}$, *pak* $\lim_{y \to +\infty} G(y) = +\infty$.

(ii) Existuje-li $\alpha > 1$ *takové, že* $\lim_{y \to +\infty} \frac{g(y)}{y^\alpha} > 0$, *pak* $\lim_{y \to +\infty} G(y)$ *je vlastní.*

([6], strana 357)

Obecná mocnina

Všechny následující definice a věty byly převzaty z [9], ze stran 59 – 64, strany 85 a ze stran 105 – 114.

Definice D.55. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x > 0$ definujeme $x^1 = x$, $x^{n+1} = x \cdot x^n$, $x^0 = 1$ a $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Takto definovanou funkci nazýváme n-tá mocnina (s celým exponentem).

Definice D.56. Pro každé $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ definujeme $\sqrt[n]{x}$ jako takové kladné číslo ω, pro které platí $\omega^n = x$. Funkci $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ nazýváme n-tá odmocnina.

Věta D.57. *Pro každé $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno kladné číslo ω, pro které platí $\omega^n = x$.*

Věta D.58 (Vlastnosti n-té odmocniny)**.** *Nechť je $x, y > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

(i) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$;

(ii) je-li $x = y$, je $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ a je-li $x < y$, je $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Definice D.59. Pro každé $x > 0$ a $z \in \mathbb{Q}$ definujeme x^z rovnicí

$$x^z = \sqrt[q]{x^p},$$

kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že $z = \dfrac{p}{q}$.

Věta D.60. *Nechť $x > 0$, $z \in \mathbb{Q}$, $z = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Potom číslo $x^z = \sqrt[q]{x^p}$ závisí pouze na x (tj. nezávisí na vyjádření racionálního čísla z ve tvaru zlomku $\dfrac{p}{q}$) a pro z celé Definice D.59 souhlasí s Definicí D.55.*

Definice D.61. Pro každé $x > 0$, $z \in \mathbb{R}$ definujeme

$$x^z = \lim_{n\to\infty} x^{z_n}, \quad z_n \in \mathbb{Q}, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Takto definovanou funkci nazýváme obecná mocnina.

Věta D.62. *Nechť $x > 0$, $z \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(1) Pro každé $z \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost racionálních čísel $z_1, z_2, \ldots$ konvergující k z, tj. $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

(2) Je-li $z_1, z_2, \ldots$ libovolná posloupnost racionálních čísel, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, potom existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \beta.$$

(3) Číslo β je kladné a závisí pouze na x (tj. nezávisí na volbě posloupnosti racionálních čísel konvergující k z).

(4) Je-li z racionální, pak Definice D.61 souhlasí s Definicí D.59.

Věta D.63 (Vlastnosti obecné mocniny)**.** *Nechť je $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$. Pak platí:*

(i) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;

(ii) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$;

(iii) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;

(iv) $x^\alpha > x^\beta$ *pro* $\alpha > \beta$, $x > 1$;

(v) $x^\alpha > 0$.

Literatura

[1] Barner, M., Flohr, F.: *Analysis I*, Walter de Gruyter, New York, 2000, 5. vydání.

[2] Denlinger, Ch. G.: *Elements of Real Analysis*, Jones & Bartlett Publishers, USA, 2010, 1. vydání.

[3] Dontová, E.: *Matematika pro JCHI, 1. díl*, ČVUT v Praze, Praha, 1994, 1. vydání.

[4] Gove, R. P., Rychtář, J.: *On the natural exponential function*, Mathematical Spectrum, 2009 (**41**), strany 116 – 122.

[5] Ghorpade, S. R., Limaye, B. V.: *A course in calculus and real analysis*, Springer, New York, 2006, 1. vydání.

[6] Hájková, V., John, O., Kalenda, O., Zelený, M.: *Matematika*, matfyzpress, Praha, 2006, 1. vydání.

[7] Howie, J. M.: *Real Analysis*, Springer-Verlag, London, 2005, 3. vydání.

[8] Hrubý, D., Kubát, J.: *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*, Prometheus, Praha, 1997, 1. vydání.

[9] Jarník, V.: *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha, 1984, 7. vydání.

[10] Jarník, V.: *Diferenciální počet (II)*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1956, 2. vydání.

[11] Jarník, V.: *Integrální počet (I)*, Academia, Praha, 1984, 6. vydání.

[12] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*, matfyzpress, Praha, 2004, 4. vydání.

[13] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky (II)*, matfyzpress, Praha, 2003, 1. vydání.

[14] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky (III)*, matfyzpress, Praha, 2002, 2. vydání.

[15] Malik, S. C.: *Principles of real analysis*, New Age International, New Delhi, 1982, 1. vydání.

[16] McGehee, O. C.: *The Properties of the Exponential Function, Derived from its Differential Equation*, článek na internetové adrese: `www.math.lsu.edu/~mcgehee/Exp.pdf`, citováno 27.7.2010.

[17] Morgan, F.: *Real analysis and applications*, American Mathematical Society, USA, 2005, 1. vydání.

[18] Morrey, Ch. B., Protter, M. H.: *A first course in real analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991, 2. vydání.

[19] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Funkce*, Prometheus, Praha, 1999, 3. vydání.

[20] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, Prometheus, Praha, 2002, 2. vydání.

[21] Protter, M. H.: *Basic elements of real analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998, 2. vydání.

[22] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976. 3. vydání.

[23] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele, První díl*, matfyzpress, Praha, 2001, 2. vydání.

[24] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele, Druhý díl*, matfyzpress, Praha, 1997, 1. vydání.

[25] Veselý, J.: *Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu?*, Učitel matematiky, **4**/2(18), strany 65 – 80, **4**/3(19), strany 129 – 145, JČMF, Praha, 1996.

[26] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*, Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007.