

Posudek vedoucího na diplomovou práci
Vlastnosti zobrazení s konečnou distorzí

Autor práce: Daniel Campbell

Vedoucí práce: Stanislav Hencl

V této diplomové práci je studován problém spojitosti zobrazení s konečnou distorzí. Ukazuje se, že tyto třídy zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n mohou sloužit jako vhodné modely v teorii nelineární elasticity pro $n = 3$, a proto je spojitost takovýchto zobrazení nesmírně důležitým pojmem. Z fyzikálního hlediska nám říká, za jakých podmínek se materiál při deformaci netrhá a nevznikají v něm dutiny (tzv. kavitace).

V prvních kapitolách, které mají spíše kompilační charakter, je připomenut důkaz známých tvrzení o spojitosti zobrazení s konečnou distorzí v Sobolevově prostoru $W^{1,n}$ a spojitost zobrazení s exponenciálně integrovatelnou vnitřní distorzí $\exp(\lambda K_O) \in L^1$. Studentovi se podařilo sestavit důkaz obsahující všechny kroky tohoto relativně obtížného důkazu, který obsahuje vlastnosti slabě monotónních funkcí a distribučního jakobiánu.

V další kapitole jsou nalezeny různé protipříklady ukazující nutnost všech podmínek předchozích vět. Dále je zde ukázáno, že podmínka na exponenciální integrovatelnost vnitřní distorze nelze příliš zeslabit. Nejlepších a zcela původních výsledků je dosaženo ve zbývajících kapitolách 6 a 7.

Nedávný výsledek Onnina ukazuje, že pro spojitost stačí i jakási exponenciální integrovatelnost vnější distorze, pokud parametr λ splňuje dodatečnou podmínku $\lambda > (n - 1)^2 - 1$. Tato podmínka je nutná pro techniku důkazu, ale nezdá se být přirozená. Veškeré protipříklady na spojitost v teorii zobrazení s konečnou distorzí jsou homeomorfismy a zobrazují kouli bez středu na mezikouli. Dan Campbell v šesté kapitole ukázal, že libovolné takovéto zobrazení (homeomorfismus zobrazující na mezikouli) už nemůže mít exponenciálně integrovatelnou distorzi pro libovolné $\lambda > 0$. Tedy standartní protipříklad určitě nelze sestavit. Na základě tohoto pozorování nyní věříme a po osobní konzultaci s námi souhlasí i Onninen, že jeho věta platí i bez dodatečného předpokladu. Důkaz takového tvrzení ovšem nelze dostat standartními technikami a je potřeba najít nové nástroje.

Nejdůležitější i když nejkratší kapitolou je kapitola sedmá, která obsahuje publikovatelné výsledky. V sérii nedávných prací Iwaniec, Koskela, Onninen a Zhong zkoumali odhad modulu spojitosti pro zobrazení s exponenciálně integrovatelnou distorzí až nakonec dokázali

následující odhad

$$|f(x) - f(y)| \leq C \frac{C}{\log^{\lambda/n}(1/|x - y|)}.$$

Přesný modul spojitosti bývá většinou podmínka s otevřeným koncem a nejpřirozenější příklad s tímto modulem spojitosti

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \frac{1}{\log^{\lambda/n}(1/|x|)}$$

nesplňuje podmínku na exponenciální integrovatelnost distorze. Proto by se dalo očekávat, že existuje ještě nějaký lepší odhad obsahující nějaké dodatečné log log členy. Po detailní analýze předchozích komplikovaných důkazů se podařilo sestrojít příklad funkce, který má požadovaný modul spojitosti a distorze je exponenciálně integrovatelná. Tedy předchozí odhady již nelze vůbec vylepšit. Toto je velmi překvapivé a překvapilo to i Koskelu, Onninen a Zhonga, kterým jsem výsledek již ukazoval. V navazujících pracích od Koskely a jeho studentů by totiž takový výsledek byl velmi užitečný a Koskela a jeho studenti existenci lepšího odhadu očekávali a hledali jeho důkaz. Poznamenejme ještě, že podobně lze sestrojít příklad na ostrý modul spojitosti i pro zobrazení, jehož distorze splňuje $\exp(\mathcal{A}(K_O)) \in L^1$, pro nějakou vhodnou Orliczovu funkci \mathcal{A} .

Práce jak svou obtížností tak i originalitou bohatě splňuje podmínky kladené na diplomovou práci. Po vědecké stránce se jedná o mimořádně kvalitní práci obsahující mnoho původních výsledků a například poslední sedmou kapitolu jsme spolu sepsali jako článek a tento brzy vyjde v *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Dovolím si také připomenout, že tato práce obsadila druhé místo ve studentské soutěži SVOČ. Na druhou stranu bych uvítal trochu větší samostatnost a preciznost při odlaďování průběžných verzí. Práce je dobře čitelná a snadno se v ní orientuje a nemám k ní žádné připomínky.

V Praze dne 18.4.2011

Stanislav Hencl