

Mgr. Josef Šilhan, Ph.D.
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2, 61137 Brno

Posudek disertační práce Zuzany Vlasákové
“Symmetries of the CR sub-Laplacian”

Laplacův operátor $\Delta = \partial^a \partial_a$ na \mathbb{R}^n je jedním z nejvíce studovaných diferenciálních operátorů v analýze a geometrii. Jeho symetrie jsou zcela klasifikované v práci M. Eastwooda [2]. Tento výsledek byl motivovaný mj. matematickou fyzikou nebo analýzou a svým koncepčním přístupem inicioval výzkum symetrií dalších operátorů. Konstrukce z [2] zejm. odráží fakt, že Δ je konformně (a ne jen Riemannovsky) invariantní.

V CR geometrii, kde místo (pseudo)Riemannovské metriky g_{ab} na \mathbb{R}^n máme Hermiteovskou metriku $g_{\bar{a}\bar{b}}$ na \mathbb{C}^n , existuje analogický operátor $\partial^a \partial_a$ nebo $\partial^{\bar{a}} \partial_{\bar{a}}$. Jiná verze CR geometrie vzniká na vhodné kvadrice $M \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, což je kontaktní varieta, na jejíž kontaktní distribuci se indukuje komplexní struktura. Takto se získá plochý model pro CR geometrie kodimezne 1. Ta je vybavena (pseudo)Hermiteovskou metrikou $g_{\bar{a}\bar{b}}$ (na kontaktní distribuci), která je daná až na násobek. Analogie Laplacianu z \mathbb{R}^n je sub-Laplacian [4] (přesněji třída těchto operátorů [3]), který je CR invariantní (tj. nezávisí na volbě násobku $g_{\bar{a}\bar{b}}$). Příbuznost konformní a CR verze Laplacianu je zdůrazněna tím, že konformní a uvažovaná kontaktní CR struktura spadají do třídy tzv. parabolických geometrií, kde je k dispozici [1] mnoho nástrojů invariantního kalkulu.

Symetrie sub-Laplacian Δ je diferenciální operátor S takový, že existuje operátor S' splňující $\Delta S = S' \Delta$. Cílem práce je popsat všechny takové symetrie. Motivováno přístupem z [2] to znamená dva kroky: nejprve je třeba popsat všechny přípustné symboly operátoru S a pak pro daný (přípustný) symbol sestrojit symetrii s tímto symbolem.

Hodnocená práce je složena z 8 kapitol, přičemž jádro je v kapitolách 6 a zejména 7. První dvě kapitoly obsahují úvod a přehled základní notace. Kapitoly 3 a 4 obsahují přehled výsledků teorie parabolických geometrií, v kapitole 5 je pak definována uvažovaná kontaktní CR struktura jakožto konkrétní případ parabolické geometrie.

V kapitole 6 se buduje kalkulus potřebný ke konstrukci symetrií. Analogicky k postupu ve [2] se uvažuje vnoření $\mathbb{C}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+2}$ s tím, že (pevná) Hermiteovská struktura na \mathbb{C}^{n+2} indukuje CR strukturu na M . Zejména Hermiteovsky invariantní operátory za jistých podmínek zadávají CR invariantní operátory na M . Tímto se ukáže, že diskutovaný sub-Laplacian je CR invariantní (viz Lemma 6.0.4 a Theorem 6.0.1).

V kapitole 7 autorka nejprve přímým výpočtem najde omezující podmínky pro symboly symetrií (Lemma 7.1.3 a 7.2.1 a zejména Theorem 7.2.1, který diskutuje symboly libovolného řádu). Toto omezení spočívá v invariantním diferenciálním operátoru – vhodná irreducibilní komponenta vedoucího symbolu musí být řešením tohoto operátoru. (Tento operátor je přeurčený, což ukazuje, že vektorový prostor symetrií do daného řádu má konečnou dimenzi. Ta se dá spočítat z Theorem 7.2.2.) Theorem 7.2.1 také dává detailní popis některých symbolů nižších řádů. Toho se pak využívá v Theorem 7.2.3, kde se pro každý přípustný symbol (tj. takový symbol, který je řešením daného přeurčeného operátoru) zkonztruuje symetrie s tímto symbolem.

Jedním z nedostatků hodnocená práce je angličtina, která by asi přinesla obtíže rozenému mluvčímu. Například použití určitého členu v "on the CR quadric" v první větě kapitoly 6 je matoucí. (Další příklady jsou chybné větné konstrukce obsahující sloveso "vanish" ve větách 65_4, 80_6 a 81^6. (Výraz 65_4 označuje stranu 65 a 4. řádek zespoda, 81^6 stranu 81 a 6. řádek odshora.) Práci by také prospěla kontrola pravopisu (např. "thisd" 48_8).

Z koncepčního pohledu je nejasná role přehledu teorie parabolických geometrií na stranách 13-47 – k popisu a konstrukci symetrií tato teorie není přímo potřeba. Dále by bylo vhodné zdůraznit, jestli jsou detaily ambientní konstrukce v kapitole 6 vypracovány autorkou nebo převzaty odjinud. Srozumitelnosti textu by také pomohlo, kdyby vektorová pole na různých prostorech by byla označena různými symboly – např. poslední tři řádky na straně 80 nejsou na první pohled srozumitelné. (Symbol V se obecně používá příliš často.) Čtivost textu snižují a chyby v typesettingu, např. v prvních dvou řádcích na straně 67.

V textu se nacházejí chyby v matematických částech, které jsou vesměs lehce opravitelné:

- Znaménka u ρZ^A v (6.2) jsou špatná.
- Ve výrazu 60_7 chybí závorky u integrálu.

- Počítat komutátor v předposledním řádku na straně 64 je matoucí. (Definice symetrie S vyžaduje $\Delta S = S'\Delta$ pro nějaké S' a nikoliv $\Delta S = S\Delta$.)
- Kam vede odkaz na "equations 1" v 74_8 ?
- Označení ∂_a na 56_11 a ∂_e na 66_14 není konzistentní.
- Výrazy na 65_9 a 65_10 nejsou kompatibilní se (7.2).
- Na konci výrazu 60_11 by mělo být $\frac{1}{2}y^a y_a$.
- Věta na 81^8 "To make ... polynomial" (která obsahuje výraz (7.22)) je dlouhá a nesrozumitelná. Přitom je to zásadní úvaha v důkazu Theoremu 7.2.3. Role koeficientů $a_{k+1,i}^s$ si zde zaslouží podrobnější komentář.

Závěr: Hodnocená práce podává ucelené řešení popisu symetrií CR sub-Laplaceova operátoru jakožto vektorového prostoru včetně nástrojů pro jejich další studium. Ve struktuře textu se dobře orientuje, výše zmíněné problémy ale někde ztěžují pochopení detailů. Práce obsahuje původní výsledky (zejm. v kapitole 7) a ukazuje tvůrčí schopnost autorky aplikovat teoretické znalosti na nové problémy. Podle mého názoru tato práce splňuje požadavky na kladené na disertační práci a doporučuji ji k obhajobě.

Reference

- [1] Čap, A., Slovák, J. *Parabolic geometries. I. Background and general theory*. Mathematical Surveys and Monographs, 154. AMS, 2009. x+628 pp.
- [2] Eastwood M.G., *Higher symmetries of the Laplacian*. Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 3, 1645–1665.
- [3] Gover, A.R., Graham, C.R., *CR invariant powers of the sub-Laplacian*. J. Reine Angew. Math. 583 (2005), 1–27.
- [4] Jerison, D., Lee, J.M., *A subelliptic, nonlinear eigenvalue problem and scalar curvature on CR manifolds*. Microlocal analysis (Boulder, Colo., 1983), 57–63, Contemp. Math., 27, 1984.

Mgr. Josef Šilhan, Ph.D., Brno 8. září 2010

