

Disertační práce

**Mgr. Jana Flašková: Ultrafilters and small sets**

Posudek školitele.


Problematika existence ultrafiltrů se speciálními vlastnostmi se v matematice objevuje poprvé roku 1956 v práci Waltera Rudina, kde dokázal nehomogenitu prostoru uniformních ultrafiltrů na přirozených číslech sestavením  $P$ -bodu, využívaje hypotézu kontinua. Další typy na sebe nenechaly dlouho čekat: selektivní, semi-selektivní, různé druhy Frolíkovsky minimálních, dobré ultrafiltry jsou spojeny s řadou velkých jmen v obecné topologii a v teorii množin.

Postupem času se ukázalo, že mnohé z těchto ultrafiltrů lze vtěsnat do obecného schématu: Je-li dán ideál  $\mathcal{J}$  na množině  $X$ , hledáme ultrafiltr  $\mathcal{U}$  na množině  $\omega$  tak, aby pro každé zobrazení  $f : \omega \rightarrow X$  existovala množina  $U \in \mathcal{U}$ , pro kterou platí  $f[U] \in \mathcal{J}$ . Nazvěme takový ultrafiltr  $\mathcal{J}$ -ultrafiltrem. Těmito ultrafiltry se zabýval James Baumgartner při volbě Cantorova diskontinua v roli  $X$ , v roli  $\mathcal{J}$  pak ideály diskrétních množin, rozptýlených množin, množin míry nula a množin řídkých.

Mgr. Flašková se ve své práci soustředila na ideály na množině přirozených čísel: Ideál množin hustoty nula, sumační ideál, ideály generované tenkými a skoro tenkými množinami, množinami skoro disjunktními se všemi (resp. skoro se všemi) posuvy. V práci se dokazuje za předpokladu Martinova axiomu pro spočetná částečná uspořádání existence všech  $\mathcal{J}$ -ultrafiltrů pro uvedené ideály  $\mathcal{J}$ , ale nejen to. Vzhledem k tomu, že pro dva typy ultrafiltrů může a nemusí platit implikace “každý ultrafiltr prvního typu je ultrafiltrem druhého typu”, dává autorka úplný přehled všech platných implikací a dokazuje případnou neplatnost neplatných implikací mezi všemi typy, které zavádí a navíc přibírá do této klasifikace rovněž dobře známé typy jako např. selektivní ultrafiltry,  $Q$ -body, rapid ultrafiltry a další. Věnuje se též otázce, kdy Frolíkovská suma ultrafiltrů daného typu přes ultrafiltr téhož typu má stejný typ. V poslední kapitole pak dává velmi cenný výsledek bez dodatečných předpokladů o teorii množin: Existují ultrafiltry, a je jich plná mohutnost  $2^c$ , že pro každé prosté zobrazení je obraz některé z množin ultrafiltru prvkem sumačního ideálu.

Předložená práce nade vši pochybnost prokazuje, že mgr. Flašková je schopna přinášet nové a kvalitní výsledky ve vysoce aktuální problematice a prezentovat je kultivovanou formou. Doporučuji, aby jí byl na základě této práce přiznán po úspěšné obhajobě titul PhD.

V Praze, 15. března 2006



prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.  
školitel.