UNIVERZITA KARLOVA
MATEMATICKO – FYZIKÁLNÍ FAKULTA
PRAHA

VĚDECKÉ DÍLO BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO

Disertační práce

Mgr. Jana Olejníčková

Školitel: Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.

Praha 2005

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala samostatně a použila pouze pramenů, které cituji a uvádím v seznamu literatury.

V Praze dne 28. října 2005

ÚVODNÍ SLOVO

Tato doktorská disertační práce je věnována vědeckému dílu Bohumila Bydžovského (1880–1969), profesora matematiky na Karlově univerzitě v Praze, který svou prací ovlivnil respektive doplnil dosavadní výsledky dvou matematických disciplin – algebraické a diferenciální geometrie. Větší část své vědecké práce přitom věnoval geometrii algebraické. Tato práce vznikala během mého postgraduálního studia na Matematicko-fyzikální fakultě UK v letech 2000–2005. Navazuje na disertační práci Ladislavy Francové *Život a dílo Bohumila Bydžovského* z roku 2001, ve které jsou podrobně popsány životní osudy této velké osobnosti české matematiky, otázky středoškolské reformy o niž se Bydžovský zasazoval, dále je proveden rozbor jeho středoškolských a dvou vysokoškolských učebnic a stručná charakteristika jeho vědeckých prací, které jsou pak náplní mé disertační práce.

Předložená práce je rozdělena do osmi kapitol, některé z nich jsou dále členěny. První kapitola má čistě biografický charakter, stručně seznamuje čtenáře s životními osudy Bohumila Bydžovského. V dalších šesti kapitolách se postupně věnuji jednotlivým oblastem Bydžovského odborného zájmu. První z nich je věnována algebraickým křivkám, další dvě kapitoly pojednávají o biracionálních transformacích, následuje kapitola o geodetických křivkách na středových rotačních plochách druhého stupně. Předposlední z těchto kapitol zpracovává autorovy práce o konfiguracích a poslední kapitola se věnuje pracím, které nelze zařadit do žádné z kapitol předchozích. V kapitole osmé je proveden rozbor jeho tří učebnic věnovaných studentům vysokých škol. Práce je zakončena seznamem publikovaných prací a dostupných recenzí těchto prací.

Snažila jsem se zachovat časovou chronologii vzniku jednotlivých tematických celků, ale zatímco některých témat se autor ve svých pracích pouze dotkl, jiná sleduje po celou dobu své vědecké činnosti a tedy tuto souslednost nebylo vždy možné dodržet.

V citacích, uvedených v disertační práci, se často setkáváme s pojmy, které se dnes již nepoužívají. Ve vlastním textu disertace se snažím používat názvosloví současné. U některých pojmů je zcela zřejmé, co chtěl autor říci (např. inflekční – inflexní, bod úvratu – bod vratu, čára – křivka), některé však svým dnešním ekvivalentům již příliš podobné nejsou (např. soujemné body – body komplexně sdružené). Rovněž značení bodů malými písmeny a přímek velkými, které u Bydžovského nalézáme v počátcích jeho vědecké tvorby, se dnes již nepoužívá, právě naopak.

Chtěla bych poděkovat všem přátelům a kolegům, kteří se mnou mou disertační práci konzultovali a dali mi řadu cenných nápadů a podnětů. Zvláštní dík patří Janu Labutovi za pomoc při vytváření některých obrázků páté kapitoly za pomoci numerické metody Runge Kutta 4. řádu. Děkuji rovněž pracovníkům archivů a knihoven, kteří mi pomáhali při pátrání po literatuře. V práci byly využity materiály z následujících institucí: knihovna MFF UK, knihovna MÚ AV ČR, Národní knihovna v Praze, Státní technická knihovna v Praze. Řadu potřebných materiálů jsem převzala od již zmiňované Ladislavy Francové, za což jí tímto děkuji.

Velký dík za obětavou pomoc, cenné rady, trpělivost a povzbuzení patří mému školiteli doc. RNDr. Leo Bočkovi, CSc.

Obsah

Kapitola 1

Bohumil Bydžovský

Prof. Bohumil Bydžovský se narodil 14.března roku 1880 v Duchcově. Jeho otec Jan Bydžovský (narozen 1835) byl zaměstnán jako stavební inženýr na stavbě severočeských drah. Mimo jiné se zasloužil o založení české školy v Duchcově. Jeho matka Anastázie, rozená Odvárková, zemřela roku 1883, ve věku pouhých 24 let. Bohumil Bydžovský se narodil jako třetí v pořadí ze čtyř dětí. Měl starší sestru a dva bratry.

Jeho první školní léta byla ovlivněna neustálými změnami pracoviště jeho otce. Do první třídy nastoupil v Duchcově. Její konec a polovinu druhé třídy absolvoval na německé škole v Košťanech u Teplic. Po otcově opětovném přeložení se znovu dostává na českou školu na pražské Vinohrady. Zde dokončil druhou třídu, vystudoval třetí a téměř celou čtvrtou. Zbytek čtvrté a celou pátou třídu pak absolvoval na německé škole v Horním Litvínově. Tato tvrdá životní lekce mu již v útlém věku přinesla nejen schopnost se houževnatě probíjet školní prací, ale i skvělou znalost němčiny.

Roku 1890 nastoupil na akademické gymnázium v Praze. Zde se již naplno rozvinul jeho talent. Až na první pololetí primy měl vždy vyznamenání a od kvarty již neměl horší známky než jedničky. Vynikal nejen v matematice, ale i v ostatních předmětech. Na maturitním vysvědčení, které bylo samozřejmě s vyznamenáním, si odnesl pochvalnou poznámku za soukromou četbu v řečtině. Během svých středoškolských studií se též naučil anglicky, francouzsky a italsky.

Po maturitě roku 1898 nastoupil na filozofickou fakultu Karlovy univerzity (tehdy ještě Karlo-Ferdinandovy), kde až do roku 1902 studoval matematiku a fyziku. Zpočátku se věnoval více filozofii a dějinám literatury. Jeho pozdější zájem o geometrii v něm podnítil až jeho univerzitní učitel Eduard Weyr[1]. Závěrečnou státní zkoušku vykonal u profesorů Studničky[2] a Strouhala[3]. Doktorem filozofie byl promován 30.listopadu 1903 na základě disertace *O integrálech hypereliptických*, jíž mu zadal Karel Petr[4] a vykonání obou rigorosních zkoušek, hlavní z matematiky a fyziky u profesorů Petra, Koláčka[5]

[1]Eduard Weyr (1852–1903), od roku 1881 řádným profesorem matematiky na pražské technice, od roku 1891 přednáší též na české univerzitě v Praze.

[2]F.J.Studnička (1836–1903), od roku 1866 profesorem na pražské polytechnice, od roku 1871 profesorem matematiky na Karlo-Ferdinandově univerzitě.

[3]Čeněk Strouhal (1850–1922), byl profesorem experimentální fyziky na pražské univerzitě.

[4]Karel Petr (1868–1950), od roku 1908 řádným profesorem na Karlo-Ferdinandově univerzitě.

[5]František Koláček (1851–1913), od roku 1891 byl profesorem fyziky na české univerzitě v Praze.

a Strouhala a vedlejší z filozofie u profesorů Masaryka a Drtiny.

Mezitím však již začal pedagogicky působit na středních školách. Nejprve to bylo malostranské gymnázium v Praze, potom reálka v Kutné Hoře, opět reálka v Praze a posléze reálky na Kladně a v Karlíně (ten ještě tenkrát nebyl součástí Prahy), odkud roku 1910 přešel trvale na vysoké školy poté, co se roku 1909 habilitoval na filosofické fakultě Karlovy university.

V tomto období nastává v jeho životě velká změna. Roku 1904 se oženil s PhDr. Marií Komínkovou. Jeho žena pocházela z úřednické rodiny, usazené ve Veselí nad Lužnicí. Vystudovala historii a zvláště pak pomocné vědy historické na filozofické fakultě Karlovy univerzity a stala se profesorkou na pražském dívčím gymnáziu Minerva. Z mladičkého manželství vzešly později dvě děti. Syn Jan (narozen 1906), který vystudoval matematiku a fyziku na pražské přírodovědecké fakultě a roku 1935 byl povolán do Mezinárodního úřadu práce v Ženevě, a syn Ladislav (narozen 1908), který se stal úředníkem na ministerstvu spravedlnosti.

Jako docent působil Bohumil Bydžovský na Karlově univerzitě v Praze a zároveň vypomáhal přednášením i na Českém vysokém učení technickém až do roku 1917, kdy se stal mimořádným profesorem Karlovy university.

Roku 1918 začal pracovat jako ministerský tajemník na nově založeném ministerstvu školství a národní osvěty, avšak vydržel zde pouze rok a opět se vrátil na Karlovu univerzitu, kde byl roku 1920 jmenován řádným profesorem. O tři roky později byl jmenován předsedou reformní komise při ministerstvu školství a národní osvěty. Ačkoli práce této komise nebyla úspěšná a veškeré její návrhy byly zamítnuty dříve, než se dostaly do parlamentu, byl roku1929 za ministra školství Dérera zvolen znovu předsedou této komise. Nově vypracovaná školská reforma (známá pod jménem Dérerova) byla roku 1933 zavedena do škol a hluboce ovlivnila vývoj našeho školství, zejména pak středního.

Vedle řady středoškolských učebnic se Bohumil Bydžovský věnoval také sepsání nových učebnic vysokoškolských. Roku 1923 vyšla jeho učebnice *Úvod do analytické geometrie*, roku 1930 *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*. Vrcholem těchto snah byla rozsáhlá učebnice *Úvod do algebraické geometrie*, která vyšla roku 1948. Za toto své dílo dostal později státní cenu. Zde na téměř sedmiset stranách seznamuje autor čtenáře s algebraickými útvary v rovině a 3-rozměrném prostoru v homogenních projektivních souřadnicích a uvádí jej do teorie algebraických transformací, převážně lineárních. Bohumil Bydžovský byl vynikající pedagog, měl všechny své přednášky důkladně promyšlené, mezi studenty byl velmi oblíben[6].

Po uzavření českých vysokých škol Němci v červenci 1940 byli všichni čeští vysokoškolští profesoři dáni do výslužby. Z tohoto důvodu se Bohumil Bydžovský přestěhoval z Prahy do svého domu ve Veselí nad Lužnicí. V září roku 1942 byl spolu se svou ženou zatčen gestapem a dopraven do internačního tábora ve Svatobořicích u Kyjova na Moravě. Německé úřady totiž podezřívaly jeho syna, jež se zdržoval v cizině, z emigrantství. Pro nedostatek důkazů byli oba v lednu 1943 z tábora propuštěni. Ve skutečnosti Jan Bydžovský opravdu emigrantem byl, neboť od roku 1941 byl ve službách naší zahraniční vlády v Londýně.

Po skončení války byly po šestileté přestávce opět zahájeny přednášky na českých vysokých školách. Bohumil Bydžovský, přestože neměl v Praze byt,

[6] Před každou přednáškou si ve své pracovně celý text zopakoval. Studenti věděli, že ho po tu dobu nemají rušit. Ve chvíli, kdy si začal zpívat písničku *Kdyby sedm kanárů…* již studenti věděli, že skončil, a že mohou vstoupit (z vyprávění prof. Štefana Porubského).

se ihned ujal přednášení na Karlově univerzitě. V roce 1946 byl jednoznačně zvolen rektorem Karlovy univerzity pro rok 1946/47. V jeho rektorském období byla konečně zřízena při univerzitě nová pedagogická fakulta, jež konečně realizovala dávnou touhu učitelstva po vysokoškolském vzdělání.

Jeho nástupce v úřadu rektora prof. Dr. Engliš byl po únorových událostech roku 1948 nucen vzdát se své hodnosti. Jelikož se blížily oslavy 600 let založení university, bylo žádoucí, aby byl zvolen nový rektor. Jednomyslná volba padla na prof.Bydžovského, který se tedy stal podruhé rektorem, což byla věc do té doby nevídaná.

Bohumil Bydžovský byl za svého života členem řady významných matematických i jiných obcí.

V letech 1922–1935 byl hlavním redaktorem *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky*. V letech 1931–1933 se stal předsedou *Jednoty českých matematiků a fysiků* (jejím členem byl od roku 1898 a od roku 1908 byl členem jejího výboru). Tuto funkci přijal pak ještě jednou v letech 1945–1956. Za všestranný přínos pro *Jednotu* byl již roku 1928 zvolen jejím čestným členem, jako vůbec první takový.

Profesor Bydžovský byl dále řádným členem *Královské české společnosti nauk* a od roku 1945 jejím předsedou, až do ukončení její činnosti v roce 1952. Roku 1919 byl zvolen dopisujícím, 1920 mimořádným a 1924 řádným členem *České akademie věd a umění*. V roce 1952 – při vzniku *Československé akademie věd* – byl jmenován jejím akademikem. Ke všem těmto namáhavým funkcím přibyla v červnu 1949 ještě funkce předsedy Č*eskoslovenské národní rady badatelské*.

Zúčastňoval se také téměř všech mezinárodních matematických kongresů (1912, 1920, 1924, 1928, 1936) mimo kongres curyšský (1932) a kongres v USA (1950). Též se zúčastnil sjezdů matematiků slovanských zemí (Varšava 1929, Praha 1933), sjezdu matematiků polských a českých (1949). Mimo to zastupoval Bohumil Bydžovský naše univerzitní a vědecké korporace na různých jiných zahraničních sjezdech, zasedáních a oslavách (např. v Londýně 1946, Nice 1946, Princetonu 1947). Je zhola nemožné podat přesný popis této činnosti profesora Bydžovského, ale již z předešlého náznaku je patrné, kolik času věnoval své práci.

Bohumil Bydžovský byl člověk, který vždy dovedl svému okolí přímo rozdávat svou duševní pohodu a vyrovnanost. Obdivuhodným rysem jeho povahy bylo to, že dovedl žít více ze vzácných úsměvů osudu, než jeho mnohem častějším nepřízním podléhat.

Akademik Bydžovský zemřel dne 6. května 1969, jeho žena Dr. Marie Bydžovská jej následovala o tři týdny později. Jeho zpopelněné ostatky jsou uloženy na Olšanských hřbitovech.

Kapitola 2

Algebraické křivky

2.1 Kubické křivky

První vědecké práce Bohumila Bydžovského jsou věnovány racionálním křivkám, zejména pak kubikám a jejich soustavám. Jedná se o práce [B1], [B2] a [B5], které vyšly v rozmezí let 1906 až 1908. Po letech se Bydžovský k tomuto tématu vrací v pracích [B73] z roku 1930, [B91] z roku 1939 a v práci [B107] ze sklonku jeho tvůrčího období z roku 1950, kdy mu bylo úctyhodných 70 let.

Ačkoliv většina Bydžovského prací patří do algebraické geometrie, první tři výše zmíněné práce patří svým zaměřením spíše do geometrie projektivní. Nenalezneme zde jedinou rovnici, všechny postupy jsou opisovány pouze slovně. Příčinu těchto „projektivních“ začátků Bydžovského je možné hledat v tom, že většina jeho nejbližších učitelů, zejména pak Eduard Weyr, se věnovala právě projektivní geometrii. Snad až Bydžovského pozdější učitel a zadavatel jeho disertační práce Karel Petr, jenž se zabýval převážně algebrou a teorií čísel, jej přivedl ke studiu geometrie algebraické.

Před samotným studiem prací se podívejme na koho Bydžovský navazoval a na jakých výsledcích stavěl své vlastní teorie. V prvních pracích Bydžovský často k ověření svých výsledků používá kvadratických transformací. Jedná se o nejjednodušší případ tzv. Cremonových transformací.

Luigi Cremona (7.12.1830–10.6.1903) byl italský matematik druhé poloviny osmnáctého století. Napsal řadu knih o projektivní i o algebraické geometrii. Jednu z nich, knihu *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných* přeložil Cremonův dobrý přítel, bratr Bydžovského učitele Eduarda Weyra Emil Weyr, do českého jazyka.

Tím podstatným, co z Cremonova díla Bydžovský převzal a dále rozvíjel byla tedy jeho teorie geometrických transformací. Bydžovský používal kvadratické transformace v tzv. Steinerově tvaru. Nikde ve svých prvních pracích tyto rovnice neodvozuje, pouze v práci [B1] nacházíme stručný slovní popis, jak takovou transformaci sestrojit. V ostatních pracích se autor spokojí s konstatováním, že transformace byla použita a jaké má důsledky. Ačkoliv je těmto transformacím věnována v dalším textu celá kapitola, k hlubšímu pochopení prvních prací je třeba alespoň částečně do teorie kvadratických transformací proniknout. Na následujících dvou stranách jsem se pokusila rovnice této transformace odvodit, vycházeje ze zmíněného autorova návodu[1].

Kvadratická transformace mezi dvěma rovinami je příbuznost, v níž souřadnice bodu každé z rovin jsou vyjádřeny jako kvadratické formy jemu odpovídajícího bodu ve druhé rovině.

Zvolme v první rovině tři body $O_1,\ O_2,\ O_3$ a ve druhé rovině rovněž tři body $O_1',\ O_2',\ O_3'$. Přiřaďme nyní projektivně svazku o středu O_1 svazek o středu O_1' (podobně pro body $O_2,\ O_2',\ O_3,\ O_3'$) tak, aby paprsku $\overline{O_1O_2}$ odpovídal paprsek $\overline{O_1'O_3'}$, paprsku $\overline{O_2O_1}$ by odpovídal paprsek $\overline{O_2'O_3'}$. Toto zobrazení velmi zjednodušíme tím, že necháme obě roviny splynout tak, že oba hlavní třírohy padnou na sebe svými vrcholy stejně označenými. Dostaneme tím involutorní kvadratickou transformaci.

Podívejme se nejprve na svazek přímek se středem O_1. Přímka $\overline{O_1O_2}$ se má zobrazit na přímku $\overline{O_1O_3}$ a naopak přímka $\overline{O_1O_3}$ na přímku $\overline{O_1O_2}$. Libovolná přímka tohoto svazku

$$ax_2 + bx_3 = 0,\ (a, b) \neq (0, 0)$$

se zobrazí opět na přímku tohoto svazku

$$\lambda bx_2 + \mu ax_3 = 0,\ \lambda\mu \neq 0.$$

Obdobně se přímka svazku o středu O_2

$$cx_1 + dx_3 = 0,\ (c, d) \neq (0, 0)$$

zobrazí na přímku

$$\rho dx_1 + \sigma cx_3 = 0,\ \rho\sigma \neq 0.$$

A konečně i přímka svazku o středu O_3

$$ex_1 + fx_2 = 0,\ (e, f) \neq (0, 0)$$

se zobrazí na přímku téhož svazku

$$\varepsilon fx_1 + \delta ex_2,\ \varepsilon\delta \neq 0.$$

Předpokládejme dále, že pokud se přímky

$$ax_2 + bx_3 = 0,\ cx_1 + dx_3 = 0,\ ex_1 + fx_2 = 0$$

protnou v jednom bodě, bude totéž platit i pro jejich obrazy a že společný bod prvních tří se zobrazí na společný průsečík obrazů. První tři přímky se protnou v jednom bodě právě tehdy, když bude determinant sestavený z koeficientů jejich rovnic roven nule, tj.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \Rightarrow\ bcf + ade = 0.$$

Totéž vyjádříme pro obrazy přímek:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda b & \mu a \\ \rho d & 0 & \sigma c \\ \varepsilon f & \delta e & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \Rightarrow\ \lambda\sigma\varepsilon bcf + \rho\delta\mu ade = 0.$$

[1] [B1], str. 2, první odstavec. Poněkud odlišný postup lze nalézt v Bydžovského učebnici [B103] str. 612–614, který je prezentován v kapitole o Cremonových transformacích.

Aby mohly být tyto dvě rovnosti splněny zároveň, musí platit:

$$\rho\delta\mu = \lambda\sigma\varepsilon.$$

Společný bod přímek

$$\begin{aligned} 0x_1 + ax_2 + bx_3 &= 0 \\ cx_1 + 0x_2 + dx_3 &= 0 \end{aligned}$$

za předpokladu, že $a, c \neq 0$ má souřadnice $(ad, bc, -ac)$. Kdyby bylo $a = c = 0$, byl by společným průsečíkem přímek bod $(f, -e, 0)$. Společným bodem obrazů

$$\begin{aligned} 0x_1 + \lambda bx_2 + \mu ax_3 &= 0 \\ \rho dx_1 + \ 0x_2 + \sigma cx_3 &= 0 \end{aligned}$$

je bod $(\lambda\sigma bc, \rho\mu ad, -\lambda\rho bd)$. Opět je ovšem nutné určit případ $b = d = 0$, pro nějž je průsečíkem bod $(\delta e, -\varepsilon f, 0)$.

Pokusme se tedy výsledky přehledně shrnout.

$$\begin{aligned} a = c = 0 \ &: \ (f, -e, 0) \to (0, 0, 1) \\ b = d = 0 \ &: \ (0, 0, 1) \to (\delta e, -\varepsilon f, 0) \end{aligned}$$

V ostatních případech platí:

$$(ad, bc, -ac) \to (\lambda\sigma bc, \rho\mu ad, -\lambda\rho bd)$$

A tedy za předpokladu $x_3 \neq 0$ platí :

$$(x_1, x_2, x_3) \to (\lambda\delta x_2, \rho\mu x_1, \lambda\rho\frac{x_1x_2}{x_3}) = (\lambda\delta x_2x_3, \rho\mu x_1x_3, \lambda\rho x_1x_2).$$

Rovnice této transformace tedy nabudou jednoduchého tvaru:

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_2x_3 \\ x_2' &= \beta x_1x_3, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0 \\ x_3' &= \gamma x_1x_2 \end{aligned}$$

Zvolíme-li navíc ve druhé soustavě za jednotkový bod ten, který v transformaci odpovídá jednotkovému bodu první soustavy, bude platit $\alpha = \beta = \gamma$ a rovnice kvadratické transformace se tím takto zjednoduší:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2x_3 \\ x_2' &= x_1x_3 \\ x_3' &= x_1x_2 \end{aligned}$$

Až na výjimky odpovídá každému bodu v této transformaci právě jeden bod. Tyto výjimky tvoří body O_1, O_2, O_3. Každému totiž odpovídá celá přímka a to vždy ta přímka souřadnicového trojstranu, na níž tento bod neleží. Současně se každý bod přímky souřadnicového trojstranu zobrazí na souřadnicový bod na ní neležící.

Prochází-li křivka stupně n například bodem O_1, zobrazí se na křivku stupně $2n$, jež se rozpadne na křivku stupně $2n-1$ a přímku $x_1 = 0$. Kdyby měla tato křivka bod O_1 za r-násobný, rozpadne se její obraz na křivku stupně $2n - r$ a r-násobně počítanou přímku $x_1 = 0$. Jestliže křivka stupně n bodem O_1 neprochází, pak z podmínky, že protíná přímku $x_1 = 0$ obecně v n bodech plyne, že se zobrazí na křivku stupně $2n$, která má bod O_1 za n-násobný. Vhodnou volbou bodů O_1, O_2, O_3 lze tedy docílit snížení stupně dané křivky a tím zjednodušit zkoumání jejích vlastností, čehož Bohumil Bydžovský ve svých pracích mistrně využíval. Důkaz předchozí věty můžeme nalézt v Bydžovského učebnici Úvod do algebraické geometrie. Bydžovský zde algebraickým transformacím vyšších řádů věnuje celou jednu kapitolu, rovněž zde odvozuje rovnice kvadratické transformace, ovšem jiným způsobem, než jsem ukázala výše.

Podívejme se tedy na práce samotné. Vůbec první vědecký článek, který Bohumil Bydžovský publikoval, se nazývá ***Inflekční přímka kubické křivky racionální***.

Kvadratickou transformací kuželosečky

$$ax_2^2 + bx_3^2 + cx_1x_2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 = 0 \tag{2.1}$$

procházející bodem O_1, získáme křivku

$$x_1(ax_1x_3^2 + bx_1x_2^2 + cx_2x_3^2 + dx_2^2x_3 + ex_1x_2x_3) = 0.$$

Je to křivka stupně čtvrtého rozpadající se na kubiku s dvojným bodem v O_1 a přímku $\overline{O_2O_3}$. Z rovnice je patrné, že na kubice leží rovněž body O_2,O_3.

Tuto racionální křivku stupně třetího, o níž Bydžovský tvrdí, že je všeobecně třídy čtvrté, značí symbolem C_4^3. Platí to však skutečně všeobecně? V Bydžovského učebnici algebraické geometrie [B103] nalezneme větu, která říká, že:

Tečny transformované křivky v hlavním bodu jsou přímky, které odpovídají přímkám, jimiž se z příslušného hlavního bodu promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou.[2]

Bude-li se kuželosečka (2.1) dotýkat přímky O_2O_3, obě tečny transformované kubiky v dvojném bodě splynou, a tedy bude mít bod vratu. Podle prvního Plückerova vzorce je tato kubika třídy třetí. Bydžovský ovšem nikde nespecifikuje, že by se jednalo pouze o kubiky s bodem uzlovým.

Racionální křivka třetího stupně má podle druhého Plückerova vzorce 3 reálné inflexní body, je-li dvojný bod bodem isolovaným. Je-li dvojný bod bodem uzlovým, má 1 reálný inflexní bod a 2 imaginární. Je-li dvojný bod bodem vratu, má pouze jeden inflexní bod. Inflexní body kubiky leží na přímce, kterou nazýváme rovněž inflexní.

Poslední větu si pro kubiku s bodem uzlovým snadno dokážeme. Bydžovský ve své učebnici [B103] dokazuje, že všechny kubiky s uzlovým bodem lze při vhodné volbě soustavy souřadnic převést na tvar[3]:

$$x_2^3 + x_3^3 - 6x_1x_2x_3 = 0, \tag{2.2}$$

odkud vyplývá, že každé dvě takové kubiky jsou projektivně ekvivalentní. Snadno určíme inflexní body kubiky jako průsečíky s jejím Hessiánem. Ten má rovnici

$$\begin{vmatrix} 0 & -6x_3 & -6x_2 \\ -6x_3 & 6x_2 & -6x_1 \\ -6x_2 & -6x_1 & 6x_3 \end{vmatrix} = -216(x_2^3 + x_3^3 + 2x_1x_2x_3) = 0.$$

[2] [B103], str. 618.
[3] [B103], str. 450.

Společné body těchto kubik (tj. kubiky a jejího Hessiánu) musí splňovat rovnici

$$x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Pro $x_2 = 0$, nebo $x_3 = 0$ docházíme k uzlovému bodu O_1, všechny tři inflexní body musí tedy ležet na přímce $x_1 = 0$.

Bydžovský se ve svém článku snaží nalézt jednoduchou konstrukci inflexní přímky z prvků, které křivku C_4^3 určují. Využívá k tomu věty:

Dvojice průseků čáry C_4^3 s paprsky svazku, jehož střed x leží na čáře, promítají se z dvojného bodu o_1 paprskovou involucí, jejíž jeden pár jsou obě tečny v dvojném bodě, a paprsky dvojné ty, které promítají dotyčné body obou tečen z bodu x k C_4^3 vedených.[4]

Tato věta byla již dříve dokázána např. Emilem Weyrem[5], ovšem způsobem, který je pro konstrukci inflexní přímky nepoužitelný.

Z předchozí věty ihned vyplývá další věta:

Dotyčné body tečen, vedených postupně z jednotlivých bodů čáry C_4^3 k této čáře, promítají se z dvojného bodu páry paprskové involuce, jejíž dvojné elementy jsou obě tečné v bodě dvojném.[6]

Pod pojmem tečné zde Bydžovský rozumí tečny. První z obou vět byla zřejmě převzata z textu jiného autora, který již používal modernější názvosloví.

Bydžovský na několika stranách dokazuje, že inflexní přímka (označme ji J) kubiky C_4^3 se dotýká všech kuželoseček, jež procházejí dvojným bodem a jednou dvojicí konjugovaných bodů, v nichž mají tečny s čarou společné. Označíme-li tečnový bod příslušné dvojice konjugovaných bodů X, bude bod dotyku inflexní přímky s kuželosečkou ležet na paprsku XO_1. Tento bod dotyku pak spolu s dvojným bodem harmonicky odděluje bod X od průsečíku paprsku XO_1 se spojnicí konjugovaných bodů.

Odtud již snadno vyplývá možná konstrukce inflexní přímky.

Z libovolného bodu x vedeme k čáře tečné; dotyčnými body o_2, o_3 a bodem o_1 vedeme kuželosečku, jež v obou bodech o_2, o_3 má s čarou společné tečny. V průseku p spojnice o_1x s kuželosečkou zřiďme tečnu, která je totožná s přímkou J.[7]

Tuto konstrukci lze však formulovat ještě jinak:

Z libovolného bodu x vedeme obě tečné, spojíme dotyčné body o_2, o_3; na o_1x tím vznikne průsek x_1. Stanovíme bod p harmonicky sdružený s o_1 vzhledem k x, x_1 a najdeme paprsek harmonicky sdružený s o_1p vzhledem k po_2, po_3. Tento paprsek je hledaná přímka J.[8]

V závěru článku autor řeší opačnou úlohu, a to jak pomocí inflexních prvků zkonstruovat křivku C_4^3. Dozvídáme se zde, že vše, co bylo dokázáno pro křivku C_4^3, lze duálním způsobem aplikovat na křivkuC_3^4, tj. na křivku čtvrtého stupně se třemi body vratu.

[4] [B1], str. 3.
[5] Weyr, E., Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde, Leipzig, 1869.
[6] [B1], str. 3.
[7] [B1], str. 8.
[8] [B1], str. 9.

Pro jednoznačné určení kubické křivky je potřeba znát libovolnou obecnou skupinu jejích devíti bodů. Stačí nám ovšem znát i menší počet, mají-li tyto body na kubice specifickou polohu. O dvou bodech kubiky řekneme, že jsou konjugované, leží-li průsečík tečen kubiky v těchto bodech opět na kubice. V následujících odstavcích si ukážeme, že k jednoznačnému určení kubiky stačí tři dvojice takových bodů. Ve svém článku [B5] ***Kubická křivka racionálná jakožto souhrn dvojic konjugovaných bodů*** Bydžovský vychází z následující věty:

Souhrn bodů, z nichž se promítají tři obecně ležící dvojice bodů třemi dvojicemi paprsků v involuci, tvoří obecnou křivku stupně třetího C^3, na níž ony dvojice leží tvoříce dvojice bodů konjugovaných.[9]

Autor uvádí tuto větu bez důkazu. Ve své učebnici [B103] Bydžovský uvádí jiné projektivní zavedení kubiky, jako množiny všech průsečíků projektivně si odpovídajících prvků ve svazku přímek a svazku kuželoseček. Bohužel zde nenajdeme ani zmínku o pojmu dvojice konjugovaných bodů. Naznačím tedy, jak se dá toto tvrzení analyticky odvodit.

Zvolme si dané tři dvojice bodů následujícím způsobem:

$$B(1,0,0) \quad C(0,1,1) \quad A(a_1,a_2,a_3)$$
$$B'(0,1,0) \quad C'(1,0,1) \quad A'(b_1,b_2,b_3).$$

Prochází-li libovolná přímka

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

hledaným bodem $Y(y_1,y_2,y_3)$, změní se její rovnice následovně:

$$\beta(y_1x_2 - y_2x_1) + \gamma(y_1x_3 - y_3x_1) = 0.$$

Je to rovnice svazku přímek o homogenních souřadnicích (β,γ). Souřadnice přímek YA, YA', ..., YC' ve svazku (Y) snadno dopočítáme jako:

$$\begin{aligned}
YB &= (y_3, -y_2)\\
YB' &= (0,1)\\
YC &= (-1,1)\\
YC' &= (y_3-y_1, -y_2)\\
YA &= (y_3a_1 - y_1a_3, y_1a_2 - y_2a_1)\\
YA' &= (y_3b_1 - y_1b_3, y_1b_2 - y_2b_1)
\end{aligned}$$

Involuce ve svazku přímek (Y) je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}
\beta' &= r\beta + s\gamma\\
\gamma' &= t\beta - r\gamma
\end{aligned}$$

Z podmínky, že dvojice přímek YB, YB' a YC, YC' si odpovídají v této involuci získáme vztahy pro r, s a t. Až na nenulový násobek platí:

$$\begin{aligned}
r &= y_2\\
s &= y_3\\
t &= \frac{y_2(y_1-y_2)}{y_3-y_1}.
\end{aligned}$$

[9] [B5], str. 13.

Rovnice involuce tedy nabudou tvaru

$$\begin{aligned}
\beta' &= y_2(y_3 - y_1)\beta + y_3(y_3 - y_1)\gamma \\
\gamma' &= y_2(y_1 - y_2)\beta - y_2(y_3 - y_1)\gamma
\end{aligned}$$

Dosazením souřadnic třetí dvojice přímek YA, YA' do rovnic involuce získáváme podmínku pro bod Y:

$$\begin{gathered}
a_1b_1y_2y_3(y_2 - y_3) + a_1b_3y_1y_2(y_3 - y_2) + a_2b_2y_1y_3(y_3 - y_1) + \\
+ a_2b_3y_1y_2(y_1 - y_3) + a_3b_1y_1y_2(y_3 - y_2) + a_3b_2y_1y_2(y_1 - y_3) + \\
+ a_3b_3y_1y_2(y_2 - y_1) = 0
\end{gathered}$$

Odtud již vidíme, že tři dvojice svazku přímek si budou odpovídat v involuci, pokud střed svazku bude ležet na kubice.

Bydžovský dále píše, že

…souhrn všech bodů konjugovaných promítá se z dvou libovolných konjugovaných bodů čáry involucemi projektivnými v poloze poloperspektivné, takové totiž, že té dvojici involuce v jednom bodu, jejíž jeden paprsek je spojnice obou bodů, odpovídá v druhé involuci dvojice, obsahující týž paprsek.[10]

Dvojný bod můžeme pokládat rovněž za dvojici konjugovaných bodů. Z druhé věty tedy plyne, že z každého bodu křivky C_4^3 se promítají dvojice konjugovaných bodů paprskovou involucí, jejíž jeden dvojný paprsek prochází dvojným bodem křivky. Jelikož je tento bod vždy reálný, je tato involuce nutně hyperbolická. V článku [B5] autor hledá podmínku, kterou musí dané tři páry konjugovaných bodů splňovat, aby hledaná křivka byla racionální. Ne každými třemi páry bodů (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) totiž racionální kubika prochází. V bodech C_1, C_2 jsou známy výše zmiňované involuce o nichž víme, jak jsou si projektivně přidruženy. Víme, že si musí odpovídat paprsky jdoucí body A_1, A_2, resp. B_1, B_2. Dále víme, že dvojice obsahující paprsek $\overline{C_1C_2}$ se zobrazí na dvojici obsahující paprsek $\overline{C_2C_1}$, čímž je tato projektivnost jednoznačně určena. Vzniklá kubika bude racionální pouze v případě, že jeden dvojný paprsek involuce v C_1 bude touto projektivností přidružen jednomu dvojnému paprsku involuce v C_2, což ovšem obecně nenastane.

Pokládejme nyní $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1B_2}$, $\overline{A_2B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ za tečny určující řadu kuželoseček a označme ji (A_1, A_2, B_1, B_2). Vedeme-li z C_1 tečny k těmto elementům řady, dostáváme involuci, která obsahuje také dvojice $\overline{C_1A_1}$ $\overline{C_1A_2}$, $\overline{C_1B_1}$ $\overline{C_1B_2}$. Je tedy shodná s původní involucí. Totéž platí i pro bod C_2.

Bodem C_1 procházejí dvě reálné kuželosečky řady. Jejich tečny v C_1 jsou dvojné paprsky involuce (C_1) (tj. involuce se středem v bodě C_1). V involuci (C_2) jim odpovídají dvojice tečen k těmto kuželosečkám vedených z bodu C_2. Má-li dvojný paprsek přejít opět do dvojného paprsku, musí bod C_2 ležet na jedné z obou kuželoseček.

Toto musí platit obecně pro libovolnou z dvojic A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 a zároveň se musí příslušné tečny stále protínat v jednom bodě. Bydžovský tedy dochází k závěru, že:

Jedna z obou kuželoseček, jdoucích libovolným bodem C_1 na C_4^3 a opírající se o strany úplného čtyřstranu, jehož dvě dvojice protějších rohů jsou dvojice

[10][B5], str. 13.

konjugovaných bodů, protíná čáru v bodu, jenž je k C_1 konjugován. Tečny v obou bodech k této kuželosečce vedené protínají se v bodu dvojném.[11]

Je-li dán bod dvojný a dvě dvojice konjugovaných bodů, sestrojí se snadno libovolný počet dalších bodů kubiky. Zvolme si přímku p procházející dvojným bodem kubiky. Tato přímka protne paprsky $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ v bodech α, resp. β. Sestrojme nyní body α', resp. β' tak, aby platilo $(A_1A_2\alpha\alpha') = -1$, $(B_1B_2\beta\beta') = -1$. Přímka $\alpha'\beta'$ pak protne přímku p v hledaném bodu kubiky P. Snadno nahlédneme, že se z bodu P promítají obě dvojice bodů A_1A_2, B_1B_2 dvojicemi paprsků, jež harmonicky oddělují paprsky p, $\overline{\alpha'\beta'}$.

Podívejme se ještě na případ, kdy bude hledaná kubika singulární. Množinou všech bodů C_2 konjugovaných na racionální kubice k bodu C_1 jsou obě kuželosečky řady (A_1, A_2, B_1, B_2), jež procházejí bodem C_1. Tyto kuželosečky mají nutně ještě jeden reálný průsečík. Zvolme jej tedy za bod C_2. Pak si budou obě involuce v bodech C_1, C_2 projektivně přidruženy tak, že si odpovídají obě dvojice dvojných paprsků. To znamená, že příslušná kubika C_4^3 má dva dvojné body a tedy se nutně rozpadá. Spojnice těchto bodů má s kubikou společné čtyři body a je její součástí. Další součástí singulární kubiky je kuželosečka procházející body C_1, C_2, vytvořená projektivními svazky v těchto bodech. Leží na ní rovněž body A_1, A_2, B_1, B_2.

Tečny kuželosečky v bodech sdružených involucemi (C_1), (C_2) se protínají na spojnici dvojných bodů, tj. vlastnost konjugovaných bodů zůstává zachována.

V práci [B2]***Příspěvek k theorii svazku kubických křivek racionálných*** se Bydžovský zabývá speciálními skupinami bodů ve svazku racionálních kubik. Svazek je jednoznačně určen svým dvojným bodem, označme ho O_1, a pěti dalšími body jednoduchými 1, 2, 3, 4, 5 (jelikož dvojný bod platí za tři určující podmínky pro rovnici kubiky). Bohumil Bydžovský v článku uvádí, že musí platit jedna z následujících možností.

Bod o_1 je buď
a) pro všechny křivky svazku bodem uzlovým, nebo také
b) pro nekonečně mnoho křivek bodem isolovaným; v tom případě dvě z čar svazku jsou třídy třetí majíce v bodu o_1 bod úvratu; nebo
c) pro všechny křivky bodem uzlovým vyjímaje jednu, jež je třídy třetí; v tom případě všechny čáry mají v bodu o_1 jednu tečnu společnou, t. j. jeden bod base splynul s o_1; nebo konečně
d) pro všechny křivky bodem úvratu[12]*; pak mají všechny společnou tečnu úvratu t. j. dva body base splynuly s o_1.*[13]

Jak je uvedeno již v úvodu práce, v citacích ponechávám původní Bydžovského značení bodů a přímek, zatímco ve vlastním textu disertace používám značení opačné, na něž je současný čtenář zvyklý.

Autor uvádí tyto věty bez důkazu, ale poznamenává, že snadno nahlédneme správnost těchto vět, transformujeme-li svazek involutorní kvadratickou transformací. Tyto věty se ovšem rovněž dají dokázat bez použití zmiňované transformace. Podívejme se jak.

[11] [B5], str. 16.
[12] V současné literatuře se častěji používá pojem *bod vratu*.
[13] [B2], str. 6.

Nechť jsou dány dvě kubiky, jež mají bod O_1 za dvojný.

$$Q_1 : x_1(ax_2^2 + 2bx_2x_3 + cx_3^2) + F_3(x_2, x_3) = 0,$$

$$Q_2 : x_1(dx_2^2 + 2ex_2x_3 + fx_3^2) + G_3(x_2, x_3) = 0,$$

kde F_3, G_3 jsou kubické formy o neurčitých x_2, x_3. Alespoň jedna z trojic (a, b, c), (d, e, f) musí být různá od $(0, 0, 0)$. Kdybychom tuto podmínku vynechali, mohl by nastat případ, kdy obě kubiky budou mít bod O_1 za trojnásobný, následkem čehož by se všechny kubiky svazku rozpadly na tři přímky procházející bodem O_1.

Tyto kubiky můžeme nyní považovat za bázi svazku

$$\lambda[x_1(ax_2^2+2bx_2x_3+cx_3^2)+F_3(x_2, x_3)]+\mu[x_1(dx_2^2+2ex_2x_3+fx_3^2)+G_3(x_2, x_3)] = 0,$$

kde $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, což lze rovněž zapsat takto:

$$x_1[(\lambda a + \mu d)x_2^2 + 2(\lambda b + \mu e)x_2x_3 + (\lambda c + \mu f)x_3^2] + \lambda F_3 + \mu G_3 = 0$$

Člen u x_1 reprezentuje tečny v bodě O_1.

I.

Podívejme se, může-li být některá kubika svazku rozložitelná. Je-li hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 1,$$

umíme najít takové ρ pro něž platí

$$\begin{aligned} d &= \rho a \\ e &= \rho b \\ f &= \rho c. \end{aligned}$$

Rovnice svazku kubik nabude tvaru

$$x_1(\lambda + \rho\mu)(ax_2^2 + 2bx_2x_3 + cx_3^2) + \lambda F_3 + \mu G_3 = 0$$

Volbou $(\lambda, \mu) = (-\rho, 1)$ dostáváme kubiku

$$\lambda F_3 + \mu G_3,$$

pro níž je bod O_1 trojnásobným. Tuto možnost Bydžovský ve svém článku vůbec nezmiňuje.

Pro ostatní volby (λ, μ) dostáváme kubiky, pro něž je O_1 bodem dvojným a to bodem vratu, splňují-li koeficienty a, b, c podmínku $b^2 - ac = 0$. V opačném případě se jedná o bod uzlový. Všechny kubiky svazku mají v O_1 stejné tečny, což je patrno z toho, že rovnice tečen nezávisí na parametrech λ, μ.

II.

Bude-li hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2,$$

nebude O_1 pro žádnou kubiku svazku bodem trojnásobným. O_1 bude bodem vratu, bude-li pro některé dvojice (λ, μ) platit rovnost $(\lambda b + \mu e)^2 - (\lambda a + \mu d)(\lambda c + \mu f) = 0$, tj.

$$K := \lambda^2(b^2 - ac) + \lambda\mu(2be - af - dc) + \mu^2(e^2 - df) = 0. \qquad (2.3)$$

IIa.

To může nastat, budou-li se všechny tři výrazy v závorkách rovnat nule.

$$ac = b^2,\ df = e^2,\ 2be = af + dc.$$

Snadno zjistíme, že z toho vyplývá podmínka

$$h\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 1$$

a tudíž se dostáváme do sporu s předpokladem.

IIb.
Nechť platí pouze

$$ac = b^2,\ df = e^2.$$

Pak bude $K = 0$ právě tehdy, když platí $\lambda = 0$ nebo $\mu = 0$. Dostáváme tedy dvě kubiky s bodem vratu O_1, ostatní mají O_1 za bod uzlový. Tečny v bodu uzlovém jsou různé od tečen vratu, jak snadno nahlédneme, zvolíme-li vhodnou soustavu souřadnic.

IIc.
Nechť je nyní $b^2 \neq ac$ ($\Rightarrow \mu \neq 0$). Pak platí

$$\frac{\lambda^2}{\mu^2}(b^2 - ac) + \frac{\lambda}{\mu}(2be - af - dc) + (e^2 - df) = 0.$$

Zkoumejme nyní výraz

$$L := (2be - af - dc)^2 - 4(b^2 - ac)(e^2 - df).$$

Je-li $L = 0$ pak jedna z kubik svazku má v O_1 bod vratu, ostatní bod uzlový, je-li $L \neq 0$ jsou ve svazku dvě kubiky s bodem vratu, ostatní s bodem uzlovým. Pro variantu $L = 0$ dále platí, že všechny kubiky svazku mají jednu tečnu společnou s tečnou vratu.

Pohybujeme-li se v reálných číslech, je třeba dále rozlišovat $L > 0,\ L < 0$ resp.$K > 0,\ K < 0,\ (b^2 - ac) > 0,\ (b^2 - ac) < 0$. Pro kladné hodnoty dostáváme bod uzlový, pro záporné bod izolovaný. V komplexních číslech nemusíme tento problém uvažovat.

Vraťme se k Bydžovského textu. Další část článku je věnována *singulárním kubikám svazku.* Namísto pojmu singulární však autor hovoří o *zvrhlých elementech svazku.*

Vedeme-li kuželosečku bodem O_1 a libovolnými čtyřmi dalšími body báze a zvolíme-li na ní bod X, pak se kubika svazku určená body $O_1, 1, 2, 3, 4, 5, X$ rozpadne na kuželosečku a paprsek spojující bod O_1 se zbývajícím bodem báze. Takto získáme následujících pět kubik.

$$\begin{aligned}
K_5 &\equiv (O_1, 1, 2, 3, 4),\ \overline{O_1 5} \\
K_4 &\equiv (O_1, 1, 2, 3, 5),\ \overline{O_1 4} \\
K_3 &\equiv (O_1, 1, 2, 4, 5),\ \overline{O_1 3} \\
K_2 &\equiv (O_1, 1, 3, 4, 5),\ \overline{O_1 2} \\
K_1 &\equiv (O_1, 2, 3, 4, 5),\ \overline{O_1 1}
\end{aligned}$$

Nepřihlížíme-li nyní k paprskům $\overline{O_1 1}$, ... tvoří tyto singulární elementy zvláštní konfiguraci pěti kuželoseček. Jinak řečeno:

Šesti body je určeno šest kuželoseček takových, že každým z bodů prochází kuželoseček pět; o každé skupině takových pěti platí pak věta:

Každá ze šesti kuželoseček protíná ostatní v pěti bodech, jež tvoří skupinu projektivnou se skupinou těchto pěti kuželoseček.[14]

Každému bodu pak přísluší kuželosečka, která jím neprochází.

Třetí kapitola článku se zabývá *křivkou bodů tečnových.* K této křivce Bydžovský dospěje při řešení otázky, je-li bod báze inflexním pro některou kubiku svazku. Vezměme si například bod 1 a veďme jím tečny ke všem kubikám svazku. Každá tato tečna protne kubiku ještě v tzv. tečnovém bodu.

Bydžovský problém řeší opět použitím kvadratické transformace o hlavních bodech O_1, 1, 2, pomocí níž zobrazí svazek kubik na svazek kuželoseček. Označme tečnové body příslušných kuželoseček (transformovaných kubik) m. Přímky $\overline{1m}$ vytváří svazek projektivní se svazkem kuželoseček, tj. spolu vytvářejí křivku kubickou. Tato kubika se ovšem rozpadá na přímku $\overline{O_1 2}$ a kuželosečku, která prochází body 1, 3, 4, 5. Zobrazíme-li ji opět kubickou transformací, dostaneme křivku, která je obecně stupně čtvrtého, skládá se ovšem z kubiky a přímky. Bydžovský tedy dochází k výsledku:

Geometrické místo tečnových bodů příslušných bodu base je čára stupně třetího, mající v tomto bodu bod dvojný.[15]

Tuto křivku značí T_i^3, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$ se vztahuje k bodu base. Bydžovský k tomu ještě dodává, že body této křivky můžeme projektivně přiřadit křivkám svazku.

Její tečné v bodě dvojném jsou ty tečné v bodě 1, které protínají příslušné čáry po druhé zase v bodě 1, tj. jsou to tečny inflekční.[16]

Odtud vyplývá:

Každý bod base je inflekčním bodem pro dvě čáry svazku.[17]

Opět naznačím řešení úlohy bez použití kvadratických transformací. Mějme dány dvě kubiky procházející body O_1, 1, 2, 3, 4, 5 (pro zjednodušení volme body O_1, 1, 2 za body $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$)

$$Q_1 : x_1(ax_2^2 + 2bx_2x_3 + cx_3^2) + dx_2^2x_3 + ex_2x_3^2 = 0$$

$$Q_2 : x_1(\alpha x_2^2 + 2\beta x_2x_3 + \gamma x_3^2) + \delta x_2^2x_3 + \epsilon x_2x_3^2 = 0.$$

Aby mohly tyto dvě kubiky tvořit svazek, musí mít matice utvořená z jejich koeficientů hodnost dvě. Svazek kubik je pak dán rovnicí $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, neboli

$$x_1[(\lambda a+\mu\alpha)x_2^2+2(\lambda b+\mu\beta)x_2x_3+(\lambda c+\mu\gamma)x_3^2]+(\lambda d+\mu\delta)x_2^2x_3+(\lambda e+\mu\epsilon)x_2x_3^2 = 0. \tag{2.4}$$

Tečna v bodě $1 = (0,1,0)$ ke kubice svazku určené hodnotami (λ, μ) je dána rovnicí

$$(\lambda a + \mu\alpha)x_1 + (\lambda d + \mu\delta)x_3 = 0.$$

[14] [B2], str. 8–9.
[15] [B2], str. 10.
[16] [B2], str. 10.
[17] [B2], str. 10.

Body této přímky lze vyjádřit parametricky

$$\begin{aligned} x_1 &= -(\lambda d + \mu\delta)t \\ x_3 &= (\lambda a + \mu\alpha)t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tečna protne kubiku svazku podruhé v bodě, který získáme dosazením rovnic (2.5) do rovnice (2.4)

$$\begin{aligned} -t(\lambda d + \mu\delta)[2(\lambda b + \mu\beta)x_2(\lambda a + \mu\alpha)t + (\lambda c + \mu\gamma)(\lambda a + \mu\alpha)^2t^2] + \\ +(\lambda e + \mu\epsilon)x_2(\lambda a + \mu\alpha)^2t^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tečna o rovnicích (2.5) bude inflexní, když $t = 0$ bude trojnásobným kořenem rovnice (2.6). To nastává v případě, že

$$x_2(\lambda a + \mu\alpha)[-2(\lambda d + \mu\delta)(\lambda b + \mu\beta) + (\lambda e + \mu\epsilon)(\lambda a + \mu\alpha)] = 0.$$

Výraz $(\lambda a + \mu\alpha)$ je jistě nenulový, v opačném případě by se každá kubika svazku rozpadla na kuželosečku a přímku $x_3 = 0$. Musí se tedy rovnat nule výraz v hranatých závorkách, tj. musí platit

$$\lambda^2(ae - 2bd) + \lambda\mu(e\alpha + a\epsilon - 2(d\beta + b\delta)) + \mu^2(\alpha\epsilon - 2\beta\delta) = 0,$$

což je kvadratická rovnice v μ a λ. Tato rovnice má dva kořeny (μ_1, λ_1) a (μ_2, λ_2), to znamená, že dvě kubiky svazku mají bázový bod 1 za inflexní.

Vraťme se k rovnici (2.6). Vyjádříme-li z ní hodnotu parametru t a dosadíme-li ji do rovnic (2.5), dostaneme až na násobek toto parametrické vyjádření křivky tečnových bodů:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(\lambda d + \mu\delta)[-2(\lambda d + \mu\delta)(\lambda b + \mu\beta) + (\lambda e + \mu\epsilon)(\lambda a + \mu\alpha)] \\ x_2 &= (\lambda d + \mu\delta)(\lambda c + \mu\gamma)(\lambda a + \mu\alpha) \\ x_3 &= (\lambda a + \mu\alpha)[-2(\lambda d + \mu\delta)(\lambda b + \mu\beta) + (\lambda e + \mu\epsilon)(\lambda a + \mu\alpha)] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Všechny tři souřadnice jsou polynomy třetího stupně v proměnných λ, μ, jedná se tedy o křivku třetího stupně. Z rovnice (2.6) je patrné, že bod 1 je pro tuto křivku skutečně bodem dvojnásobným.

Z Bydžovského článku se dozvídáme, jak můžeme využít singulárních kubik svazku pro konstrukci křivky tečnových bodů. Kubika T_i^3 má totiž v bodě O_1 stejnou tečnu jako kuželosečka K_i.

S křivkou bodů tečnových souvisí *křivka bodů dotyčných*, tj. bodů dotyku tečen vedených ke křivkám svazku z bodu báze (různého od O_1). Kubika s uzlovým bodem je křivka třídy čtvrté, lze tedy vést z bodu mimo ni k ní čtyři tečny, leží li bod na křivce, lze z něj vést ke kubice dvě tečny. Kvadratickou transformací se tečnové body zobrazí do průsečíků kuželoseček svazku s příslušnými polárami bodu 1. Dále autor uvažuje takto: kuželosečky, které prochází body O_1, 1, libovolným dalším bodem báze a vždy dvojicí dotyčných bodů tečen vedených z bodu 1, tvoří svazek. Označí p_k čtvrtý bod báze tohoto svazku ($k = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ podle toho, který z těchto bodů jsme zvolili za bod báze).

Každý ze čtyř takových možných svazků je projektivní se svazkem kubik C_4^3. Nyní Bydžovský vezme dva tyto svazky, nechť jsou to například svazky o bázích $(O_1,\ 1,\ 2,\ p_2)$ a $(O_1,\ 1,\ 3,\ p_3)$. Tyto svazky jsou projektivně sdruženy tak, že průsečíky sdružených kuželoseček jsou vždy dva zmíněné tečnové body. Ovšem dva projektivně sdružené svazky kuželoseček, které mají společné dva body báze, vytvoří kvartiku, jež má ve společných bodech body dvojné.

To znamená, že množinou všech bodů dotyku tečen vedených z bodu 1 je křivka čtvrtého stupně, kterou Bydžovský dále označuje D_1^4.

V dalším autor hledá podmínky, jež by usnadňovaly konstrukci křivky D_1^4 a rovněž ukazuje jaký je vzájemný vztah křivek D_i^4 a T_i^3:

Čára T_i^3 je geometrické místo všech bodů, které jsou s i harmonicky sdruženy vzhledem k dvojicím, v nichž D_i^4 protínají paprsky bodem i vedené[18]

Jinými slovy je tedy T_i^3 první polára čáry D_i^4 vzhledem k bodu i. Bodem i se zde samozřejmě rozumí ten bod báze, jemuž přísluší křivky D_i^4 a T_i^3.

V poslední části článku autor ještě podrobně popisuje kuželosečku, kterou obalují tětivy příslušné k bodu báze, zatímco kubika probíhá svazek. Rovněž ukazuje, že i inflexní přímky kubik svazku obalují kuželosečku.

V pozdějších letech se Bohumil Bydžovský vrací k teorii kubických křivek a jejich svazků v pracích [B73], [B91] a [B109]. Práce [B91] a [B109] jsou tematicky podobné, což nelze říci o práci [B73] ***Kolineace kubických křivek harmonických a ekvianharmonických***. Tato práce byla sepsána nezávisle na pracích předchozích, její výsledky o několik let později autor použil ve své učebnici [B103].

Z textu práce je patrné, že období, v němž se zabýval převážně geometrií projektivní, má již za sebou, a na celou problematiku pohlíží z čistě algebraického hlediska.

Zabývá se zde automorfními kolineacemi syzygetických svazků těchto křivek (tj. svazků kubik, jejichž bází jsou inflexní body dané kubiky). Kubika je zde vyšetřována ve tvaru[19]

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3 = 0. \tag{2.8}$$

V článku jsou nalezeny kolineace reprodukující kubiky harmonické (tj. takové, jež jsou totožné se svým druhým Hessiánem; v počtu 36), ekvianharmonické (tj. takové, jejichž druhý Hessián je totožný s prvním Hessiánem, který se rozpadá na inflexní trojstran dané kubiky ;v počtu 54) i tzv. obecné (nejsou harmonické, ekvianharmonické ani singulární; v počtu 18).

Bylo by jistě zajímavé zkoumat nejen počet automorfních kolineací, ale také počty ne obecných kubik svazku a tyto kubiky samotné.

Vezměme si svazek kubik ve tvaru, jenž se od (2.8) liší pouze tím, že obsahuje také souřadnicový trojstran $x_1x_2x_3 = 0$:

$$m(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6nx_1x_2x_3 = 0 \tag{2.9}$$

Singulární kubiky svazku (2.9) jsou 4. Snadno zjistíme, že jejich koeficienty musí splňovat podmínku

$$m = 0 \ \vee \ (m^3 + 8n^3) = 0.$$

[18] [B2], str. 13.

[19] Každou kubickou křivku lze převést na tento tvar, zvolíme-li za souřadnicový trojstran trojstran inflexní a zvolíme-li vhodně jednotkový bod. Viz např. [B103], str. 437.

Jedná se o 4 inflexní trojstrany

$$\begin{aligned}
x_1x_2x_3 &= 0\\
x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 &= (x_1+x_2+x_3)(x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3)(x_1+\alpha^2x_2+\alpha x_3)=0\\
x_1^3+x_2^3+x_3^3-3\alpha x_1x_2x_3 &= (x_1+x_2+\alpha x_3)(x_1+\alpha x_2+x_3)(x_1+\alpha^2x_2+\alpha^2x_3)=0\\
x_1^3+x_2^3+x_3^3-3\alpha^2x_1x_2x_3 &= (x_1+x_2+\alpha^2x_3)(x_1+\alpha x_2+\alpha x_3)(x_1+\alpha^2x_2+x_3)=0,
\end{aligned}$$

kde $\alpha=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, tj. α je třetí odmocnina z jedné. Vždy existuje kolineace, která převádí jeden inflexní trojstran ve druhý.

Hessián kubiky je determinant sestavený z druhých parciálních derivací kubiky a má tedy rovnici

$$(m^3+2n^3)x_1x_2x_3-mn^2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=0$$

Jedná se tedy opět o kubiku daného svazku, pro níž platí

$$\overline{m}=mn^2,\ \overline{n}=-\frac{m^3+2n^3}{6}.$$

Má-li být kubika totožná se svým Hessiánem, musí platit

$$\begin{vmatrix} m & n\\ mn^2 & -\frac{m^3+2n^3}{6}\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}m(m^3+8n^3)=0.$$

Při bližším prozkoumání rovnice zjistíme, že kubiky totožné se svým Hessiánem jsou právě kubiky singulární.

Kdy bude kubika totožná se svým druhým Hessiánem? Hledejme řešení rovnice

$$\begin{vmatrix} m & n\\ \overline{m}\,\overline{n}^2 & -\frac{\overline{m}^3+2\overline{n}^3}{6}\end{vmatrix}=0.$$

Po dosazení za $\overline{m}$, $\overline{n}$ dostáváme následující vztah

$$m(m^3+8n^2)(m^6-20m^3n^3-8n^6)=0.$$

Je to rovnice desátého stupně, 4 z jejích kořenů dávají kubiky singulární. Pro ostatní kořeny, které určují tzv. kubiky harmonické, lze odvodit vztah

$$m=n(1\pm\sqrt{3})\gamma,\ \gamma^3=1.$$

Je tedy patrné, že syzygetický svazek obsahuje celkem šest harmonických kubik, z nichž pouze dvě jsou reálné. Při vhodné volbě souřadnic mají rovnice těchto kubik tvar

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\gamma(\pm\sqrt{3}-1)x_1x_2x_3=0,\ \gamma^3=1.$$

Dále se podívejme na ekvianharmonické kubiky. Pro ně platí, že jejich druhý Hessián je totožný s prvním Hessiánem. Z výše odvozených výsledků je patrné, že křivka je totožná se svým Hessiánem, právě tehdy, když je singulární. Při hledání ekvianharmonických kubik tedy můžeme řešit úlohu kdy je první Hessián křivky rozložitelný. Bude to právě tehdy, když bude mít kubika alespoň jeden singulární bod (přesně řečeno bude mít právě tři singulární body), tedy při splnění podmínky

$$\overline{m}=0\ \vee\ (\overline{m}^3+8\overline{n}^3)=0,$$

respektive po dosazení za $\overline{m}$, $\overline{n}$

$$mn^2 = 0 \ \vee \ (m^3n^6 - 8\frac{(m^3+2n^3)^3}{6^3}) = 0.$$

Po vyloučení singulárních kubik svazku zbývá podmínka

$$n = 0 \ \vee \ (m - n\gamma) = 0, \ \gamma^3 = 1.$$

Je zřejmé že takové kubiky jsou 4, což lze odvodit i z toho faktu, že i rozložitelné kubiky svazku jsou 4. Podobný postup, jaký jsem zde uvedla, nalezneme i v Bydžovského učebnici [B103].

V práci [B107] ***Sur certain points remarquables d'une cubique rationelle plane*** se Bohumil Bydžovský opět věnuje racionálním kubikám s uzlovým bodem. Studuje zde obecnější problém, než je problém inflexních bodů, a to body, v nichž mají křivky n-ho stupně s kubikou dotyk $3n$-bodový.

Vyjděme z rovnice racionální kubiky s uzlovým bodem

$$x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2x_3 = 0. \tag{2.10}$$

Souřadnice jejích bodů lze vyjádřit parametricky ve tvaru

$$x_1 = 6t, \ x_2 = 6t^2, \ x_3 = 1 + t^3 \tag{2.11}$$

Křivka n-ho stupně

$$x_3^n u_0 + x_3^{n-1}u_1 + \ldots + u_n = 0, \tag{2.12}$$

kde u_i jsou formy stupně i v proměnných x_1, x_2, protíná kubiku obecně v $3n$ bodech. Pro parametry těchto bodů $t_1, \ldots, t_{3n}$ musí platit

$$t_1t_2 \ldots t_{3n} + (-1)^{n-1} = 0,$$

což plyne z toho, že v rovnici získané dosazením rovnic (2.11) do rovnice (2.12) je koeficient u t^{3n} stejný jako absolutní člen. Má-li mít křivka n-ho stupně s kubikou dotyk $3n$-bodový, musí platit

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{3n} \Longrightarrow \ t^{3n} + (-1)^{n-1} = 0.$$

Pro $n = 1$ dostáváme rovnici

$$t^3 + 1 = 0$$

jejímž řešením jsou body inflexní. Je vidět, že body inflexní leží na přímce $x_3 = 0$. Jsou to body o parametrech -1, $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{5\pi i}{3}}$.

Pro $n = 2$ dostaneme rovnici

$$t^6 - 1 = (t^3 - 1)(t^3 + 1) = 0.$$

Získáváme tedy jednak inflexní body, jednak body splňující rovnici $t^3 - 1 = 0$, tj. body, v nichž má kuželosečka šestinásobný dotyk s kubikou, které také nazýváme sextaktickými. Parametry těchto bodů jsou 1, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $e^{\frac{4\pi i}{3}}$.

Snadno se ukáže, že vedeme-li tečny ke křivce z bodů inflexních, dostaneme jako body dotyku právě body sextaktické. Ukažme si například, že bod o parametru $t = -1$ je tečnovým bodem bodu o parametru $t = 1$.

Pro $t = -1$ dostáváme bod o souřadnicích $(-1, 1, 0)$, pro $t = 1$ dostáváme bod $(3, 3, 1)$. Spojnice těchto bodů je dána rovnicí

$$x_1 + x_2 - 6x_3 = 0.$$

Společné body této přímky a kubiky (2.10) jsou řešením následující rovnice:

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2) = 0.$$

A tedy pro $x_1 = x_2$ dostáváme dvojnásobný průsečík $(3, 3, 1)$ a pro $x_1 = -x_2$ dostáváme jednoduchý průsečík $(-1, 1, 0)$, což jsme chtěli ukázat.

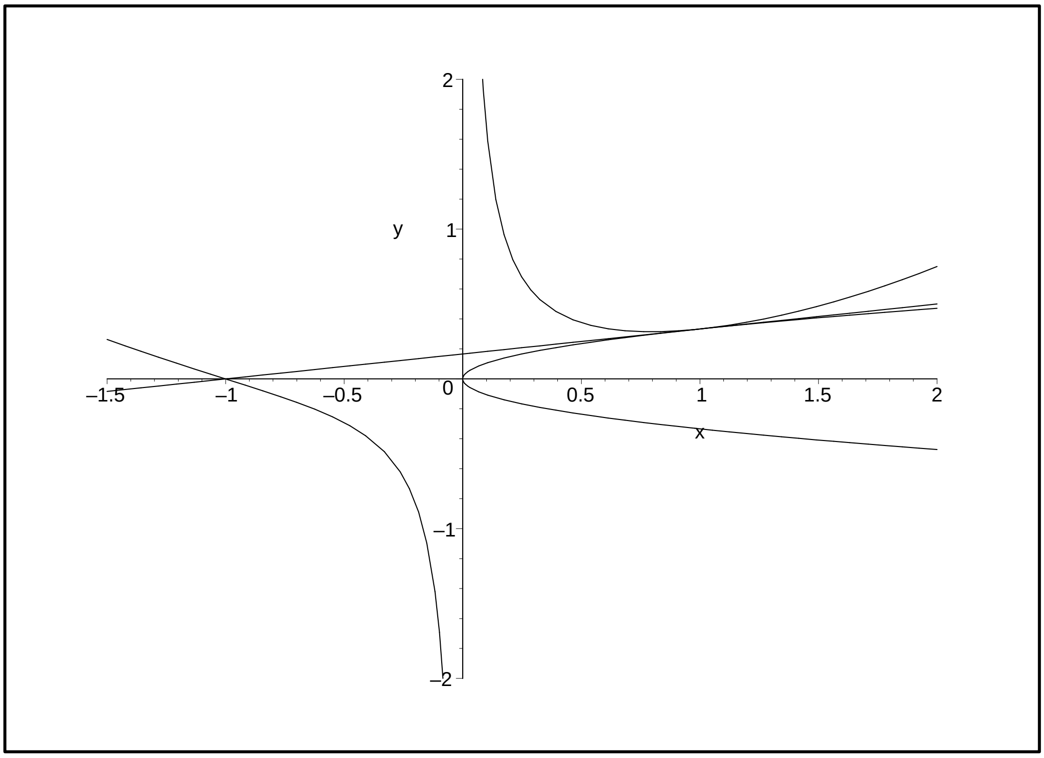
Na obrázku (2.1) je celá situace znázorněna na příkladu kubické křivky o rovnici

$$y = \frac{1 + x^3}{6x},$$

která má šestinásobný dotyk v bodě $[1, \frac{1}{3}]$ s kuželosečkou

$$x = 9y^2.$$

Na obrázku je znázorněna i společná tečna obou křivek procházející inflexním bodem kubiky $[-1, 0]$.



Obrázek 2.1:

Racionální kubika s bodem uzlovým se reprodukuje grupou šesti kolineací

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1',\ x_2 = x_2',\ x_3 = x_3' \\ x_1 &= \alpha x_1',\ x_2 = \alpha^2 x_2',\ x_3 = x_3' \\ x_1 &= \alpha^2 x_1',\ x_2 = \alpha x_2',\ x_3 = x_3' \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2',\ x_2 = x_1',\ x_3 = x_3' \\
x_1 &= \alpha x_2',\ x_2 = \alpha^2 x_1',\ x_3 = x_3' \\
x_1 &= \alpha^2 x_2',\ x_2 = \alpha x_1',\ x_3 = x_3'
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

kde α splňuje rovnici $\alpha^3 = 1$. První tři vyjadřují identitu a dvě ternárně cyklické kolineace. Parametry kubiky se při nich transformují pomocí vztahu $t = t' \sqrt[3]{1}$. Zbylé tři rovnice vyjadřují involutorní kolineace, jejichž středy jsou body inflexní a osy jsou přímky spojující uzlový bod s tím sextaktickým bodem, pro nějž je je daný bod bodem tečnovým.

Kuželosečku $\sum a_{ij} x_i x_j = 0,\ i,j = 1,2,3$ budeme nazývat kovariantní právě tehdy, když se bude reprodukovat týmiž kolineacemi.

Důležitá vlastnost sextaktických bodů je ta, že kovariantní kuželosečka, která je obsahuje, se v nich kubiky dotýká a je zároveň kuželosečkou tětiv kubiky. Počet bodů $3n$-dotykových pro $n > 2$ je vždy dělitelný šesti; tyto body leží po šesti na kovariantních kuželosečkách.

Pro $n = 3$ dostáváme body $3n$-dotykové , jichž je šest. Tyto body jsou vrcholy dvou tečnových trojúhelníků kubiky, tj. trojúhelníků kubice opsaných a zároveň vepsaných.

Zmínku o sextaktických bodech nalezneme již v první Bydžovského práci, kde říká, že každým bodem racionální kubiky lze vést dvě tětivy s výjimkou těch bodů, jež mají za tečnové body inflexní. Nikde je zde ovšem nenazývá sextaktickými. Touto problematikou se autor zabýval již v práci [B109] ***Sur les points et les coniques sextactiques d'une cubique plane***, kde nalezneme odvození rovnic sextaktických kuželoseček. Je zde rovněž zkoumán svazek kubik, majících společné tři inflexní body, ležící v přímce a dále tři body sextaktické.

2.2 Křivky šestého stupně

Algebraické křivky šestého stupně jsou náplní čtyř prací profesora Bydžovského. První dvě z těchto prací byly sepsány v letech 1912–1913 a autor v nich zkoumá sextiky, jejichž jediné singularity jsou body dvojnásobné. Snadno se určí, že sextika může mít maximálně 10 dvojnásobných bodů. Polohu singulárních bodů křivek stupně menšího než šest lze volit zcela libovolně. Není tomu tak u křivek šestého stupně rodu jedna a nula (tj. u křivek s devíti, resp. desíti singulárními body).

V práci [B21] ***Dvojnásobné body křivek šestého stupně*** Bohumil Bydžovský odvozuje podmínky, kterým musí tyto body, ležící na sextice, vyhovovat. Dokazuje, že osm dvojnásobných bodů rovinné sextiky může být voleno libovolně, devátý dvojnásobný bod, nemá-li se křivka rozpadnout, již libovolně volit nelze. Bydžovský v práci dokazuje, že

Všechny deváté dvojnásobné body nerozpadajících se křivek šestého stupně majících daných osm bodů dvojnásobných leží na křivce (J) stupně devátého; obráceně každý bod této křivky může býti dvojnásobným bodem nerozpadající se K^6, mimo dvanáct bodů D.[20]

[20] [B21], str. 9.

Zmíněné body D jsou dvojnásobné body kubických křivek svazku určeného danými osmi body. První část věty odvodil již Cayley[21] ve svém pojednání *A second memoir on quadric surfaces*[22] z roku 1870. Druhou část věty již Cayley nezmiňuje, pouze píše, že každý bod křivky (J) může být devátý dvojnásobný bod křivky K^6, aniž by rozlišoval křivky regulární a složené. Bydžovský v práci několikrát poukazuje na nepřesnosti a neúplné výsledky svých předchůdců Cayleye a Salmona[23].

Dále nalezneme v Bydžovského článku důkaz, že křivka (J) má daných osm bodů za trojnásobné. Tato křivka je těmito body jednoznačně určena. Její tečny v každém tomto bodu jsou totožné s tečnami sextiky, jež má tento bod za trojnásobný a ostatních sedm za dvojnásobné.

Co se týče desátých dvojnásobných bodů, snadno se nahlédne, že tyto body musí ležet rovněž na křivce (J), určené danými osmi dvojnásobnými body. Označme tyto body $A_1, \ldots, A_8$, devátý dvojný bod, vyhovující výše zmíněné podmínce, označme B. Sestrojíme-li křivku (J_1), určenou body $A_2, \ldots, A_8$, B tak, jako je křivka (J) určena body $A_1, \ldots, A_8$, pak na této křivce musí ležet jak bod A_1 tak i desátý hledaný bod C. Lze tedy tyto body hledat jako průsečíky křivek (J) a (J_1). Bydžovský dokazuje větu:

Svazek křivek šestého stupně o společných devíti dvojnásobných bodech obsahuje dvanáct křivek, jež mají desátý dvojnásobný bod; tyto křivky obecně se nerozpadají.[24]

V závěru autor popisuje charakteristickou vlastnost skupiny desíti dvojnásobných bodů, která usnadňuje konstrukci této křivky. Úplnou konstrukcí sextik se zabývá až ve svém dalším článku, vydaném o rok později. Speciálně se zaměřuje na sextiky rodu nula až tři. Má-li taková křivka alespoň jeden trojnásobný bod, lze ji kvadratickými transformacemi převést na křivku stupně 4, za určitých speciálních podmínek i stupně nižšího, čímž lze problém považovat za vyřešený. V případě, že má křivka pouze dvojnásobné body, nelze žádnou Cremonovou transformací snížit její stupeň.

Je tedy třeba postupovat přímými metodami. O to se snaží Bohumil Bydžovský v práci [B26] ***Konstrukce rovinných křivek šestého stupně rodu 0 až 3***, kde postupně rozebírá případy sextiky se sedmi, osmi až deseti dvojnásobnými body.

Obecná metoda konstrukce křivek šestého stupně spočívá v určení dvou svazků křivek, jejichž projektivním přidružením hledaná křivka vznikne. Aby daný bod byl dvojnásobný pro vytvořenou křivku zajistíme tím, že jej zvolíme za společný bod pro oba svazky. To však, podle jedné věty Küpperovy[25], lze udělat pro sextiky mající maximálně šest dvojnásobných bodů. Pro sextiky se sedmi dvojnásobnými body nachází autor konstrukci, vycházející z metody právě popsané, pro křivky s více dvojnásobnými body je konstrukce zcela odlišná. Je založena na tom, že tyto křivky jsou hypereliptické. Kromě konstrukce bodů křivky se Bydžovský věnuje i konstrukci tečen. V závěru popisuje též zajímavou konstrukci sextiky, jež má jeden bod trojnásobný a sedm dvojnásobných.

[21] Arthur Cayley (1821–1895), britský matematik.

[22] Křivku (J) zde nazývá „dianodální“.

[23] Salmon, G., *Treatise on the analytic geometry of three dimensions*, 1862; Bydžovský měl k dispozici francouzský překlad práce: Traité de géométrie analytique.

[24] [B21], str. 12.

[25] Mathematische Annalen 48., str. 410–416.

Další dvě práce o sextikách vznikly s mírným časovým odstupem. V roce 1924 byl profesor Bydžovský spolu s Milošem Kösslerem[26] vyslán jako zástupce československé matematické školy na konferenci do Toronta[27]. Na této konferenci přednesl krátký příspěvek o sextikách s osmi dvojnásobnými body [B56] ***Contribution á la théorie de la sextique á huit points doubles***, který byl poté otištěn ve sborníku konference.

Bydžovský v úvodu připomíná, že sextika s osmi dvojnásobnými body se reprodukuje involucí 17-ho řádu, tzv. Bertiniho involucí. Snaží se pak zjistit, jakou vzájemnou polohu musí mít těchto osm bodů, aby se křivka reprodukovala involucí řádu nižšího. Probírá situace, kdy tři z dvojných bodů jsou kolineární, kdy šest z daných bodů leží na kuželosečce atd. Zajímá se rovněž o případ, kdy tyto body leží na kubické křivce, mající v jednom z nich dvojný bod. Dokazuje, že v tom případě se Bertiniho[28] involuce redukuje na Geiserovu[29] involuci řádu 8. Autor v článku operuje s řadou pojmů, aniž by je vysvětloval a aniž by uvedl odkazy na literaturu, z níž čerpal.

Involucí 17. řádu, kterou se reprodukuje sextika s osmi dvojnásobnými body, se Bohumil Bydžovský zabýval ve své práci [B38], kde ji vyšetřuje v rámci pomocné úlohy k sestrojení jisté jednodvojznačné transformace mezi body dvou rovin, nikde ji však nenazývá Bertiniho involucí.

Série Bydžovského článků o sextikách vyvrcholila v letech 1928 a 1929. Tehdy Bohumil Bydžovský publikoval práci ***Příspěvek k teorii eliptické sextiky***, v níž navazuje na práci [B21]. Podává zde návod, jak sestrojit body výše zmiňované křivky devátého stupně. Jedná se o úlohu kubickou, konstruktivně tedy velmi složitou, proto se Bydžovský snaží najít takové polohy osmi dvojnásobných bodů, pro něž se křivka (J) co nejvíce zjednoduší. Odvozuje výsledek:

Jestliže osm dvojnásobných bodů sextiky je voleno tak, že devátý bod, jenž skupinu těchto osmi doplňuje na basi svazku kubických křivek, je jeden vrchol čtyřrohu, jehož další tři vrcholy i tři vrcholy diagonální náležejí do zvolené skupiny, pak neexistuje žádná nerozpadající se sextika soustavy mající devátý bod dvojnásobný ležící mimo těchto osm bodů.[30]

Ve druhé polovině autor popisuje některé vlastnosti svazků eliptických sextik.

Článek vzbudil pozornost profesora Godeaux z univerzity v Lutychu, mezi nímž a Bydžovským se poté rozvinula bohatá vědecká korespondence. Godeaux na Bydžovského článek navázal prací *Poznámka k teorii eliptické sextiky*, jež vyšla v českém překladu Bohumila Bydžovského roku 1929[31]. Godeaux zde odlišnými metodami ještě jednou odvozuje Bydžovského výsledky.

Na Bydžovského výsledky rovněž navázali jeho studenti. Bohumil Machytka[32] chystal rozsáhlou práci o Bertiniově involuci, zemřel však ještě před jejím dokončením. Posmrtně byla ta část jeho rukopisů, která byla úplně propracována,

[26] Miloš Kössler (1884–1961),od roku 1918 působil na české univerzitě v Praze, roku 1927 jmenován profesorem.

[27] Sedmý mezinárodní matematický kongres, Toronto, 11.–16.8.1924.

[28] Eugenio Bertini (1846–1933), byl profesorem geometrie na univerzitě v Pisse, jeho učitelem byl Luigi Cremonna.

[29] Karl Friedrich Geiser (1843–1934), byl profesorem na polytechnice v Curychu, zabýval se algebraickou geometrií, jeho strýcem byl Jacob Steiner.

[30] [B64], str. 204.

[31] ČPMF 58 (1929), str. 300–303.

[32] Bohumil Machytka (1890–1928), od roku 1926 docent geometrie na Univerzitě Karlově i na Českém vysokém učení technickém v Praze.

publikována pod názvem *Degenerace Bertiniovy involuce*[33]. Jan Bílek[34] studoval vlastnosti sextik s dvojnásobnými body, odvozené pomocí Cremonových transformací[35]. Sextikám je rovněž věnována disertační práce dalšího z Bydžovského studentů Vladimíra Mahela *Sextiky invariantní vůči jedné nebo více kvadratickým inversím*[36].

2.3 Křivky čtvrtého stupně

Mezi prvními pracemi Bohumila Bydžovského zaujímají důležité místo články [B7] a [B8], které vyšly pod stejným názvem ***Gruppa kollineací prostorové křivky bikvadratické prvého druhu***[37]. Pod pojmem bikvadratická křivka se zde rozumí kvartika, která je průnikem dvou kvadratických ploch. Ke studiu těchto křivek je zde využito skutečnosti, že se tato křivka reprodukuje celkem 32 kolineacemi. Bydžovský v první části práce podrobně studuje tuto grupu i její podgrupy po stránce geometrické, v další části se věnuje bodovým skupinám na křivce, které jsou vytvořeny danou grupou, resp. jejími podgrupami. Z vlastností grup kolineací, které zachovávají danou křivku, nebo skupiny bodů na ní pak autor odvozuje řadu výsledků, z nichž některé již byly známy, ovšem ne vždy v tak obecné formulaci. Bydžovský touto prací sjednocuje do té doby známé poznatky o prostorových kvartikách a ukazuje některé nové vnitřní souvislosti.

O kvadratických transformacích, jimiž se reprodukují rovinné algebraické křivky čtvrtého stupně rodu jedna, přednášel Bohumil Bydžovský na mezinárodním matematickém sjezdu konaném ve Štrasburku roku 1920. Již Edgardo Ciani dokázal[38], že se tato křivka reprodukuje devíti transformacemi. Bydžovský tyto transformace studuje po stránce geometrické a vytyčuje si úkol najít takové speciální křivky toho druhu, jež se reprodukují jiným počtem kvadratických transformací, než křivky obecné. Tato předáška byla pod názvem ***Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane*** [B39] publikována ve sborníku konference. První část zmíněného úkolu je vyřešena v práci [B41], kde autor hledá ty kvartiky rodu jedna, které se reprodukují méně než devíti kvadratickými transformacemi. K tomu může dojít dvojím způsobem, buď některé z transformací splynou, nebo se některé z kvadratických transformací redukují v kolineaci. Druhou část pak řeší v pracích [B40] a [B55], kde studuje ty kvartiky rodu jedna, pro něž je počet kvadratických transformací, jimiž se reprodukují, větší než u křivky obecné. Ve všech pracích, zmíněných v tomto odstavci si Bydžovský pomáhá vyjádřením křivky parametricky pomocí eliptických funkcí.

Poslední z prací věnovaných kvartikám a rovněž vůbec poslední Bydžovského prací je článek [B111], který vyšel roku 1963 v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky ***Inflexní body některých rovinných kvartik***. Bydžovskému bylo tehdy již 83 let. Podívejme se na tuto práci podrobněji.

[33] Viz ČPMF 58, 1929, str. 219–225.

[34] Jan Bílek (1907–1972), byl docentem (od roku 1952) a poté profesorem (od roku 1959) matematiky na Vysoké škole chemicko-technologické.

[35] Bílek, J., *Některé vlastnosti sextik s dvojnásobnými body, odvozené pomocí Cremonových transformací*, Věstník Královské české společnosti nauk V, 1947.

[36] Bohumil Bydžovský tuto práci oponoval (ve školním roce 1952/53).

[37] Tato dvě pojednání později autor úspěšně předložil jako svou habilitační práci.

[38] Ciani, E., *Le quartiche piane invertibili*, Gior. di matematiche, vol. LVII, 1917, str. 31–75.

Uvažujme nerozložitelnou křivku stupně n, která má pouze obyčejné uzlové body (v počtu u) a obyčejné body vratu (v počtu k) a nemá dalších singularit. Počet inflexních bodů takovéto křivky udává druhý Plückerův vzorec:

$$i = 3n(n-2) - 6u - 8k.$$

Bydžovský se zabývá pouze těmi kvartikami, jejichž počet inflexních bodů je násobkem stupně křivky. Řeší zde otázku, mohou-li inflexní body být úplným průnikem kvartiky s křivkou vhodného stupně. Jedná se o tyto případy:
kvartika bez singulárních bodů má 24 inflexních bodů,
kvartika s jedním obyčejným bodem vratu má 16 inflexních bodů,
kvartika se dvěma obyčejnými uzly má 12 inflexních bodů,
kvartika se dvěma obyčejnými body vratu má 8 inflexních bodů a konečně
kvartika se dvěma obyčejnými uzly a jedním obyčejným bodem vratu má 4 inflexní body.

Bydžovský v článku rozebírá pouze poslední tři případy. Podívejme se blíže na případ binodální kvartiky, tj. kvartiky jež má 12 inflexních bodů, další dva řeší Bydžovský analogicky. Autor si volí uzly kvartiky za souřadnicové body O_1, O_2 a za bod O_3 volí průsečík přímky oddělující harmonicky spojnici O_1O_2 od tečen kvartiky v bodě O_1 s přímkou oddělující harmonicky tutéž spojnici od tečen kvartiky v bodě O_2. Poté uvádí rovnici kvartiky bez jakéhokoliv vysvětlení ve tvaru:

$$f(x) = ax_3^4 + x_3^3(b_1x_1 + b_2x_2) + x_3^2(c_0x_1^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2) + dx_1^2x_2^2 = 0 \quad (2.15)$$

Tvar rovnice není na první pohled zřejmý, ale snadno si ukážeme, jak k němu autor dospěl. Tečny v bodě O_1 určují koeficient u x_1^2. Ten má tvar

$$\alpha x_2^2 + \beta x_2x_3 + \gamma x_3^2.$$

Tato kuželosečka se skládá ze dvou přímek (tečen kvartiky)

$$(tx_2 + vx_3)(rx_2 + sx_3).$$

Aby tyto dvě přímky byly harmonicky sdruženy s přímkami o rovnicích $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$, musí jejich směrové vektory $[(t, v), (r, s), (1, 0), (0, 1)]$ splňovat rovnici:

$$\frac{\begin{vmatrix} t & v \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} t & v \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -1.$$

Snadným výpočtem dostaneme

$$vr + st = 0.$$

Z čehož plyne, jelikož $\alpha x_2^2 + \beta x_2x_3 + \gamma x_3^2 = (tx_2 + vx_3)(rx_2 + sx_3)$, že koeficient β je roven nule. Obdobný výsledek dostaneme, budeme-li zkoumat tečny v bodě O_2. Nulové budou též koeficienty u x_1^4, x_1^3, x_2^4 a x_2^3.

V dalším Bydžovský určuje Hessián křivky, neboť inflexní body křivky jsou všechny její nesingulární průsečíky s jejím Hessiánem.

$$H(x) \equiv (2c_0x_3^2 + 2dx_2^2)(2c_2x_3^2 + 2dx_1^2)[12ax_3^2 + 6x_3(b_1x_1 + b_2x_2)+$$

$$+2(c_0x_1^2+c_1x_1x_2+c_2x_2^2)]+2(c_1x_3^2+4dx_1x_2)(3b_1x_3^2+4c_0x_1x_3+2c_1x_2x_3)\cdot$$
$$\cdot(3b_2x_3^2+2c_1x_1x_3+4c_2x_2x_3)-(2c_0x_3^2+2dx_2^2)(3b_2x_3^2+2c_1x_1x_3+4c_2x_2x_3)^2-$$
$$-(2c_2x_3^2+2dx_1^2)(3b_1x_3^2+4c_0x_1x_3+2c_1x_2x_3)^2-[12ax_3^2+6x_3(b_1x_1+b_2x_2)+$$
$$+2(c_0x_1^2+c_1x_1x_2+c_2x_2^2)](c_1x_3^2+4dx_1x_2)^2=0 \tag{2.16}$$

Bydžovský uvažuje soustavu křivek

$$H+Qf=0, \tag{2.17}$$

kde Q je kvadratická forma o koeficientech a_{ij}. Všechny tyto křivky procházejí inflexními body křivky f. Při vhodné volbě koeficientů Q ($a_{11}=24c_0d,\ a_{22}=24c_2d,\ a_{12}=12c_1d,\ a_{13}=36b_1d,\ a_{23}=36b_2d,\ a_{33}$ je libovolný) lze z levé strany rovnice (2.17) vytknout x_3 ve druhé mocnině a sextika $H+Qf=0$ se tedy rozpadá na dvojnásob počítanou přímku O_1O_2 a křivku čtvrtého stupně, jež bude jednoduše procházet body O_1 a O_2.

$$H+Qf\equiv x_3^2K^4. \tag{2.18}$$

A tedy Bydžovský dochází ke stejnému výsledku, jaký již před ním publikoval A. Brill[39], tj. že:

12 inflexních bodů binodální kvartiky je vytínáno kvartikami svazku, k jehož bázi náleží oba uzly. Kvartiky tohoto svazku mají v každém uzlu společnou tečnu.[40]

To si snadno dokážeme, když si uvědomíme, že přímka $x_3=0$ nemůže být tečnou kvartiky K^4. Kdybychom pak uvažovali, že každá kvartika svazku bude mít v uzlech jiné tečny, zákonitě by pro některou kvartiku musela být tečnou i přímka $x_3=0$.

Dále se Bydžovský zabývá otázkou, za jakých podmínek budou inflexní body kvartiky f ležet na kubice.

K tomu stačí, aby se jedna z kvartik nalezeného svazku rozpadla na tuto kubiku a na přímku $x_3=0$. To znamená, že pro tuto kvartiku musí být koeficient u x_3^2 identicky nulový. A to je splněno pouze pokud je $c_0=c_2=0$ nebo pokud je $c_1=0$. První případ by ovšem znamenal, že oba dvojnásobné body jsou body vratu a tudíž ho musíme vyloučit. Druhý vede ke kvartice o rovnici

$$ax_3^4+x_3^3(b_1x_1+b_2x_2)+x_3^2(c_0x_1^2+c_2x_2^2)+dx_1^2x_2^2.$$

Tato kvartika má zajímavou geometrickou vlastnost. Kvartika o rovnici (2.15) má v uzlových bodech tečny dány rovnicemi

$$dx_2^2+c_0x_3^2=0,\ dx_1^2+c_2x_3^2=0.$$

Průsečíky kvartiky skládající se z těchto tečen s kvartikou (2.15) leží na kuželosečce

$$(ad-c_0c_2)x_3^2+dx_3(b_1x_1+b_2x_2)+c_1dx_1x_2=0.$$

Tato kuželosečka se rozloží na přímku $x_3=0$ a další přímku jen tehdy, když $c_1=0$. Tato další přímka protne kvartiku ještě v dalších čtyřech bodech různých od $O_1,\ O_2$. Dostáváme se tedy k výsledku:

[39] Brill, A., *Über die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten*, Math. Annalen 17, 1880.

[40] [B111], str. 225.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby inflexní body binodální kvartiky byly na ní vyťaty kubikou, je ta, aby tečny v uzlech proťaly křivku mimo uzly ve čtyřech bodech přímky.[41]

Nabízí se otázka, mohou-li inflexní body kubiky být na ní vyťaty též kuželosečkou. Bydžovský ve svém článku ukazuje, že pokud jsou oba uzly křivky inflexní, pak má tato křivka rovnici

$$ax_3^4 + x_3^2(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) + dx_1^2x_{2^2} = 0, \ b_1 = b_2 = c_1 = 0. \tag{2.19}$$

Spočítáme-li Hessián křivky a dosadíme-li do rovnice (2.17), zjistíme, že z levé strany lze vytknout x_3^4, a tedy sextika se rozpadne na čtyřnásob počítanou přímku $x_3 = 0$ a kuželosečkou o rovnici $Q' = 0$.

$$Q' \equiv 72(ad - c_0c_2)[3(c_0x_1^2 + c_2x_2^2) + 2ax_3^2].$$

Výraz $(ad - c_0c_2)$ je jistě nenulový, jinak by kvatrika 2.19 byla rozložitelná. Protože i $c_0c_2 \neq 0$ a $a \neq 0$ dostává Bydžovský následující výsledek:

Binodální kvartika, jejíž oba uzly jsou inflexní, má dalších 8 inflexních bodů, které jsou z kvartiky vyťaty regulární kuželosečkou.[42]

Úvahy vedoucí k řešení případu kvartiky bikuspidální jsou obdobné, pro kvatriku se čtyřmi inflexními body je v článku ukázáno, že nemohou její inflexní body ležet na přímce.

Zřídka se v Bydžovského pracích setkáme i s problematikou křivek pátého stupně. Připomeňme alespoň práci [B46] ***Užití principu promítání v teorii geometrických příbuzností***, kde jako jeden z vedlejších výsledků autor studuje prostorovou kvintiku rodu 2 (nejvyšší možný) a nachází transformace, kterými se tato křivka reprodukuje. o

[41][B111], str. 226.
[42][B111], str. 228.

Kapitola 3

Kolineace

Druhé téma, které lze vysledovat v Bydžovského pracích, navazuje a úzce souvisí s tématem prvním, jedná se o *teorii rovinných a prostorových kolineací a jejich grup.*

Jde celkem o šest prací, z období 1907–1914, které vycházely převážně v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky, respektive jako výroční zprávy reálek na Kladně či v Karlíně, v nichž tehdy mladý Bydžovský pedagogicky působil. Jedna z prací byla publikována ve francouzštině.

Jedná se o práce [B4], [B6], [B10], [B17], [B28], [B31] a [B36].

Věnujme nyní větší pozornost první z těchto prací, tj. práci ***Podrobnosti k theorii ternárně cyklické kollineace***. Článek je rozdělen do čtyř kapitol (I. Věty základní, II.Útvary invariantní, III. Invariantní křivky kubické, IV. Závěrek), které jsou ještě dále členěny.

V úvodní kapitole Bydžovský „definuje“ základní pojmy. Uvozovky používám proto, že definice v jeho pojetí není to, s čím se dnes běžně setkáváme v učebnicích. Jedná se spíše o obšírný výklad pojmu většinou bez použití formálního zápisu.

Má slova potvrzuje hned první definice celého článku:

Kollineace ternárně cyklická je taková, jež třikráte opětována jsouc, dá totožnost. Užitím této kollineace sdruží se body roviny v trojice bodové, a to tak, že každému bodu se přidruží bod s ním sdružený v kollineaci dané a mimo to bod s ním sdružený v kollineaci inversní, čili což je totéž, v kollineaci jež je dvakráte opětovanou kollineací danou.[1]

Jedním z nejjednodušších příkladů takové kolineace je otočení v rovině o 120° (respektive o 240°).

Pracujeme tedy s ternárně cyklickým rovinným polem, které má následující vlastnosti:

Obsahuje-li pole jedinou trojici sdružených bodů, je ternárně cyklické.[2]

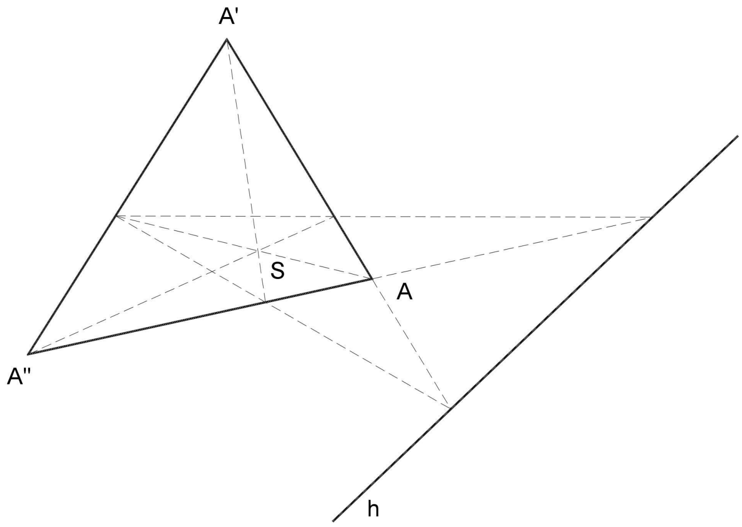
Dnes bychom asi řekli: obsahuje-li pole alespoň jednu trojici sdružených bodů, pak jich obsahuje nekonečně mnoho a je tedy ternárně cyklické. Ovšem není to zcela přesné. Věta neplatí, pokud jsou tyto tři sdružené body kolineární.

[1] [B4], str. 5.
[2] [B4], str. 5.

Ternárně cyklické pole obsahuje jediný reálný bod dvojný a jediný reálný paprsek dvojný, tento paprsek je harmonikálou onoho bodu vzhledem ke každému trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří trojici bodovou.[3]

V současné terminologii by slovo dvojný nahradil výraz samodružný, trojicí bodovou je zde myšlena trojice bodů sdružených v dané kolineaci. Připomeňme si ještě význam pojmu harmonikála.

Harmonikála (respektive harmonická polára) daného bodu S vzhledem k trojúhelníku o vrcholech A, A', A'' je přímka, jejíž tři body získáme následovně: promítneme daný bod z vrcholů trojúhelníku na protější strany a ke každému průmětu sestrojíme čtvrtý harmonický bod vzhledem k dalším dvěma vrcholům trojúhelníku. Daný dvojný bod S nesmí ležet na žádné straně trojúhelníku (obr. č. 3.1).



Obrázek 3.1:

Ve druhé části první kapitoly Bydžovský ukazuje jak z daných dvou trojic bodových získat trojici třetí, zavádí pojem tří konjugovaných trojic bodových. Využívá k tomu následující věty, která je v článku i poměrně jasně dokázána:

Jsou-li 1, 2, 3; *a*, *b*, *c dvě trojice cyklického pole rovinného, protínají se paprsky* $\overline{2c}$, $\overline{3b}$ *na* $\overline{1a}$ *(a podobně* $\overline{1c}$, $\overline{3a}$ *na* $\overline{2b}$*;* $\overline{1b}$, $\overline{2a}$ *na* $\overline{3c}$*).*[4]

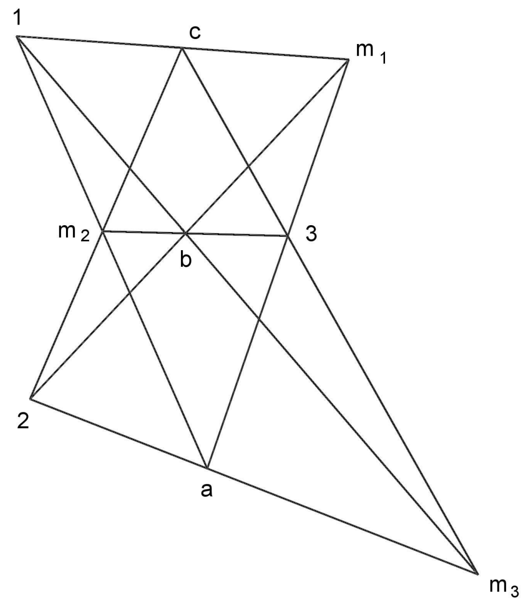
Konjugovaná trojice se pak určí následujícím způsobem (obr. 3.2):
$m_1 = (1a \bigcap 3b\ resp.\ 2c)$
$m_2 = (3a \bigcap 2b\ resp.\ 1c)$
$m_3 = (2a \bigcap 1b\ resp.\ 3c)$

V závěru první kapitoly Bohumil Bydžovský připomíná, že ke stejným výsledkům bychom dospěli, kdybychom místo trojic bodových (sdružených ternárně cyklickou kolineací) uvažovali trojice paprsků.

Druhá kapitola se zabývá zkoumáním invariantních útvarů pro danou cyklickou kolineaci.

Neproměnné body jsou tři : O_1, O_2, O_3*. Z nich jeden, např.* O_1 *reálný, druhé dva immaginárné s reálnou spojnicí* $I_1 \equiv \overline{O_2O_3}$*. Neproměnné paprsky jsou tři,*

[3] [B4], str. 5.
[4] [B4], str. 6.



Obrázek 3.2:

jediný z nich I_1 reálný, druhé dva immaginárné, jejich průsek $O_1 \equiv (I_2, I_3)$ reálný. V každém neproměnném bodu, resp. paprsku vzniká ternárně cyklická projektivnost paprsková resp. bodová.[5]

Vrátíme-li se zpět k našemu konkrétnímu příkladu otočení o 120°, bude O_1 středem otáčení $S = (1,\ 0,\ 0)$ a body $O_2,\ O_3$ budou ležet na nevlastní přímce, budou to tzv. isotropické body (někdy nazývané též kruhové, či ve starší literatuře cirkulární), jejichž souřadnice jsou $(0,\ 1,\ i)$ a $(0,\ 1,\ -i)$.

Dále autor bez důkazu tvrdí, že všechny kuželosečky, jež jsou v této kolineaci samodružné, tvoří tři svazky.

...base svazku S_k jsou body $O_i,\ O_h$ a v nich pevné tečny $\overline{O_kO_i}$ a $\overline{O_kO_h}$ tj. O_k a O_iO_h pol a polára. Jen svazek S_1, jehož společný pol a polára jsou reálné, obsahuje reálné kuželosečky; druhé dva svazky takových kuželoseček neobsahují.[6]

Proč pouze tyto tři svazky? Snadno si ukážeme, že žádné další svazky invariantní nejsou.

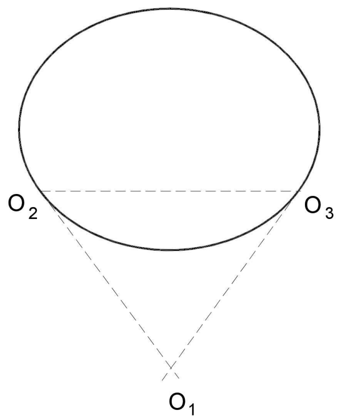
Je-li totiž kuželosečka invariantní, musí např. přímku $\overline{O_2O_3}$ protínat v bodech O_2 a O_3. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. kuželosečka $Q \cap \overline{O_2O_3} = A$, $(A \neq O_2,\ A \neq O_3)$. Protože $\overline{O_2O_3}$ je samodružná, platí $A'(\neq A) \in \overline{O_2O_3} \wedge A''(\neq A,\ \neq A') \in \overline{O_2O_3}$. Průnik kuželosečky s přímkou však může být nejvýše dvoubodový, čímž se dostáváme do sporu.

Pozorný čtenář může namítnout, že invariantní kuželosečka se může přímky $\overline{O_2O_3}$ pouze dotýkat např. v bodě O_2. Pak ovšem nastává případ, kdy kuželosečka v bodě O_2 protíná přímku $\overline{O_1O_2}$, tudíž ji protíná ještě v bodě O_1. Cyklická záměna indexů nemá žádný vliv na geometrické vlastnosti svazku invariantních kuželoseček.

Ještě je třeba ukázat, že invariantní kuželosečka protínající $\overline{O_2O_3}$ v bodech $O_2,\ O_3$ má za tečny paprsky $\overline{O_1O_2},\ \overline{O_1O_3}$ (obr. 3.3). Avšak tečny v samodružných bodech musí být samodružné přímky a jediné samodružné přímky

[5] [B4], str. 7.
[6] [B4], str. 7.

jdoucí body $O_2,\ O_3$, jsou právě $\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_1O_3}$.



Obrázek 3.3:

V dalším Bydžovský vysvětluje, že každou sdruženou trojicí bodovou prochází jediná invariantní kuželosečka, stejně tak každá trojice sdružených přímek určuje jedinou invariantní kuželosečku.

V pátém odstavci II. kapitoly se autor vrací k již citované větě *...Jsou-li 1, 2, 3; a, b, c dvě trojice cyklického pole rovinného...*. Uvažuje nyní dvě trojice bodové ležící na kuželosečce (1, 2, 3; a, b, c), tj. šestiroh 1a,2b,3c. Dle Pascalovy věty pak body $m_1 = (1a \cap 3b)$, $m_2 = (3a \cap 2b)$, $m_3 = (2a \cap 1b)$ jsou kolineární. Protože ternárně cyklické pole obsahuje jediný reálný dvojný paprsek (tj. paprsek obsahující trojice bodové), platí následující věta (resp. věta duální):

Nutná a postačující podmínka pro to, aby dvě trojice bodové ležící v ternárně cyklickém poli náležely téže kuželosečce, jest ta, aby třetí trojice bodová, s danými konjugovaná ležela na dvojné přímce.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby dvě trojice paprsků ležící v ternárně cyklickém poli náležely téže kuželosečce, jest ta, aby třetí trojice paprsků, s danými konjugovaná procházela dvojným bodem. [7]

Závěr druhé kapitoly obsahuje jakýsi návod, kterak získat libovolné další body invariantní kuželosečky. Je-li totiž jedna trojice bodová pevná na kuželosečce a druhá probíhá dvojný paprsek, třetí trojice probíhá kuželosečku.

Třetí kapitola článku je věnována invariantním kubikám, a to pouze těm, jež mají tři reálné body inflexní (všechny reálné křivky stupně třetího třídy šesté a ty racionální, jež mají izolovaný bod dvojný).

Pokusme se nezávisle na Bydžovském odvodit rovnici invariantní kubiky pro naši konkrétní kolineaci (otočení o 120°).

Rovnice otočení v rovině o úhel α (střed otáčení v počátku soustavy souřadnic) zní:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

[7] [B4], str. 8.

Pro $\alpha = 120°$ platí $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Po dosazení dostáváme :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-x' - y'\sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vezměme si rovnici obecné kubiky :

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky + L = 0 \tag{3.2}$$

Aplikujeme-li kolineaci na tuto kubiku, musíme dostat znovu kubiku o rovnici (3.2). Dosaďme tedy nyní za x, y z rovnic (3.1) do rovnice (3.2). Porovnáváním koeficientů u stejných mocnin x, y dostáváme podmínky

$$C = -3A,\ B = -3D,\ E = G,\ F = H = K = 0.$$

A tedy rovnice hledané invariantní kubiky zní :

$$Ax^3 - 3Dx^2y - 3Axy^2 + Dy^3 + E(x^2 + y^2) + L = 0. \tag{3.3}$$

Zajímavý návod, jak určit rovnici invariantní kubiky nacházíme v další části Bydžovského textu.

Budiž C_3 obecná křivka stupně třetího, mající tři reálné body inflexní. Máli býti invariantní, musí spojnice jejích reálných inflexních bodů býti o sobě invariantní, tj. musí to býti reálný dvojný paprsek I1 dané kollineace; reálné inflexní body musí na tomto paprsku tvořiti trojici bodů a tečny v těchto bodech trojici paprsků.[8]

Pomocí tohoto návodu si můžeme zkontrolovat, zda předchozí výpočet rovnice invariantní kubiky byl správný. Máme tedy kubiku o rovnici (3.3). Přejděme k homogenním souřadnicím. Rovnice potom nabude tvaru :

$$Ax_1^3 - 3Dx_1^2x_2 - 3Ax_1x_2^2 + Dx_2^3 + Ex_0(x_1^2 + x_2^2) + Lx_0^3 = 0 \tag{3.4}$$

Můžeme zvolit soustavu souřadnic tak, aby kubika procházela bodem $(0, 1, 0)$ na nevlastní přímce. Dosazením do (3.4) zjistíme, že $A = 0$. Dále si můžeme rovnici zjednodušit volbou $D = 1$ na tvar

$$x_2^3 - 3x_1^2x_2 + Ex_0(x_1^2 + x_2^2) + Lx_0^3 = 0 \tag{3.5}$$

Má-li být $X = (0, 1, 0)$ inflexním bodem kubiky, musí platit, že tečna v něm má ho za průsečík alespoň trojnásobný. Tečna v bodě X má rovnici (koeficient u x_1^2)

$$Ex_0 - 3x_2 = 0. \tag{3.6}$$

Dosaďme nyní z (3.6) do rovnice (3.5).

$$\begin{gathered} (\frac{Ex_0}{3})^3 - 3x_1^2\frac{Ex_0}{3} + Ex_0(x_1^2 + (\frac{Ex_0}{3})^2) + Lx_0^3 = 0 \\ \Rightarrow x_0^3(4E^3 + 27L) = 0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

[8] [B4], str. 10.

Jelikož obecně neplatí $27L = -4E^3$, pouze v případě, kdy je přímka (3.6) součástí kubiky, která se pak rozpadá na tuto přímku a kuželosečku, musí být

$$x_0^3 = 0 \Rightarrow x_2^3 = 0.$$

Bod X tedy odpovídá trojnásobnému kořenu rovnice (3.7). Dále bychom mohli určit zbylé dva průsečíky nevlastní přímky ($x_0 = 0$) s kubikou (3.5) a stejným způsobem bychom dokázali, že jsou inflexní.

Výše zmíněná podmínka, jak poměrně jasně v článku Bydžovský dokazuje, je pro invariantnost křivky nejen nutná, nýbrž také dostačující.

V další části třetí kapitoly se autor věnuje svazkům kubických křivek. Dokazuje, že:

Třemi trojicemi bodů v obecné poloze je určena jediná křivka stupně třetího, která je invariantní; tři trojice jen tehdy určují svazek, jsou-li to trojice konjugované. Jednotlivé křivky tohoto svazku jsou invariantní.

Sestrojíme-li k libovolným dvěma trojicím na invariantní křivce trojici konjugovanou, leží i tato trojice na křivce.

Každé dvě invariantní křivky stupně třetího procházející dvěma trojicemi bodů protínají se v trojici s oběma konjugované.

Promítneme-li z libovolného bodu invariantní křivky body trojice, protnou paprsky promítací křivku podruhé zase v bodech trojice. Onen bod pak náleží do trojice s oběma konjugované.[9]

Díky těmto výsledkům jsme schopni sestrojit libovolný počet bodů křivky určené třemi nekonjugovanými trojicemi bodů.

Závěr třetí kapitoly obsahuje důkaz, že se mezi invariantními křivkami též vyskytují křivky racionální, jež mají O_1 za reálný dvojnásobný bod.

V poslední části článku autor shrnuje poznatky z předchozích kapitol. Dochází k následujícímu závěru:

Všechny věty, jež byly vysloveny o jednotlivých invariantních křivkách, platí o každé křivce kubické, ježto každou lze pokládati za invariantní vzhledem k určité ternárně cyklické kolineaci (a k ní inversní).[10]

Článek obsahuje nutný, ale ne nezajímavý podklad pro čistě geometrickou teorii transformací kubické křivky. Škoda, že práce neobsahuje více konkrétních příkladů, jež by celou teorii udělaly mnohem přístupnější. Jelikož je každá ternárně cyklická kolineace až na izomorfizmus shodná s otočením o 120°, dala by se celá teorie vysvětlit právě na tomto příkladu.

Roku 1911 vyšel v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky článek ***Příspěvek k theorii cyklických projektivností***.

Na rozdíl od předchozí práce se zde Bydžovský věnuje obecnějšímu tématu, a to cyklickým projektivnostem n-tého stupně.

Řeší zde následující úlohu: *Nalézti podmínky, jimž musí vyhovovati skupina n elementů, aby tvořila cyklus v cyklické kollineaci.* Aby toho dosáhl, snaží se dokázat platnost následujícího tvrzení:

---

[9] [B4], str. 13.
[10] [B4], str. 17.

Tvoří-li n elementů cyklus v cyklické projektivnosti n-tého stupně, existuje právě n involucí, jimiž se tento cyklus reprodukuje.[11] (1)

Bydžovský zde použil důkaz, jež provedl Jakob Lüroth[12] v článku *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen*[13]. Důkaz vychází z této věty:

Je-li na kuželosečce dána bodová projektivnost $XYZU... \barwedge X'Y'Z'U'...$*, leží body* $(XY', X'Y)$*,* $(XZ', X'Z)$*,* $(YZ', Y'Z)$ *atd. na téže přímce, tzv. ose projektivnosti.*[14] (2)

Lürothův důkaz tedy tiše předpokládá, že n bodů tvoří cyklus v n-árně cyklické kolineaci, leží-li tyto body na kuželosečce. Bydžovského článek důkaz tohoto neobsahuje. Podívejme se na Lürothův důkaz.

Mějme dánu cyklickou projektivnost n-tého stupně, speciálně jeden její cyklus $A_0,\ A_1,\ A_2, \dots,\ A_{n-2},\ A_{n-1}$. Body tohoto cyklu jsou řazeny tak, že každý přejde projektivností v bod následující. Bod A_{n-1} přejde v bod A_0. Použijeme-li danou projektivnost k-krát, dostaneme se do bodu o k míst vzdálenějšího. Lüroth ve svém důkazu připouští libovolně velké indexy, ovšem s podmínkou, že dva elementy jsou různé pouze tehdy, nejsou-li jejich indexy kongruentní modulo n.

Při jednom použití dané projektivnosti přejde řada bodů

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \dots,\ A_{n-2},\ A_{n-1}$$

v řadu

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \dots,\ A_{n-1},\ A_0.$$

Věta (2) říká, že přímky A_0A_{n-1} a A_1A_{n-2} se protínají na ose projektivnosti. Označme tento průsečík S_{n-1}. V témže bodě na ose projektivnosti se ovšem protínají i A_1A_{n-2} a A_2A_{n-3}, atd. Obecně spojnice všech bodových dvojic, jejichž součet indexů je $n-1$ protínají osu projektivnosti v S_{n-1}.

To však znamená, že tyto dvojice tvoří dvojice involuce indukované na kuželosečce bodem S_{n-1}*; tím je nalezena jedna involuce, kterou se reprodukuje cyklus n elementů.*[15]

Stejně tak spojnice bodů, jejichž součet indexů je $n-2$ procházejí týmž bodem S_{n-2}. Získáváme tím další involuci, jíž se cyklus reprodukuje. Takto získáme celkem n involucí, ježto A_0 můžeme spojovat s body $A_0, \dots,\ A_{n-1}$.

V další části článku doplňuje Bohumil Bydžovský Lürothův důkaz určením samodružných bodů těchto involucí.

Je třeba rozlišovat případy, kdy je n sudé a kdy liché. Involuce příslušná k součtu indexů k nechť je označena J_k.

Klademe si otázku, existuje-li index h pro nějž platí $A_h \equiv A_{k-h}$. Postupným odvozováním získává Bydžovský pro n lichá následující výsledek:

Cyklus n elementů, příslušný n-árně cyklické projektivnosti pro n liché vyznačuje se tou vlastností, že vytkneme-li libovolný jeho element, lze zbývající

[11] [B17], str. 281.

[12] Jakob Lüroth (1844–1910), německý matematik, působil na technikách v Heidelbergu, Karlsruhe, Mnichově a Freiburgu.

[13] Mathematische Annalen, sv. 11, 1877, str. 84–110.

[14] [B17], str. 281., v rozšířeném znění nalezneme větu např. též v K. Havlíček : *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, str. 79, resp. E. Weyr : *Projektivná geometrie*, str. 110.

[15] [B17], str. 282.

seskupiti ve dvojice, jež všechny oddělují tento element harmonicky od téhož pevného elementu, ležícího mimo cyklus.[16]

Tj. jeden samodružný element každé involuce J_k je obsažen v cyklu, druhý leží mimo cyklus.

Pro n sudé dostáváme:

Cyklus n elementů, příslušný n-árně cyklické projektivnosti pro n sudé vyznačuje se tou vlastností, že lze jej seřaditi ve dvojice takové, že jedna z nich odděluje harmonicky všechny ostatní; to lze učiniti $\frac{n}{2}$ *způsoby. Právě tolika způsoby lze cyklus rozvrhnouti ve dvojice harmonicky sdružené dle téže pevné dvojice, ležící mimo cyklus.*[17]

Pro n sudé je každý element cyklu samodružný v jedné z n involucí J_k*; a sice je* A_h *samodružný v involuci* J_{2h}*. Naopak jen taková involuce* J_k*, pro niž k je sudé má samodružné elementy v cyklu , a to oba; samodružné elementy involuce* J_k *pro k liché leží mimo cyklus.*[18]

Je tedy zřejmé, že pro sudé a liché n nabýváme rozdílných výsledků. Pro n liché dostáváme pouze jeden druh involucí, zatímco pro n sudé dva.

Involucí prvého druhu nazýváme tu, jež má samodružné elementy v cyklu, involuci mající samodružné elementy mimo cyklus nazýváme involucí druhého druhu.

Druhá část Bydžovského článku se zabývá zkoumáním podmínek postačujících pro to, aby skupina n elementů tvořila cyklus.

Opět je třeba uvažovat n sudé a n liché. Snadno zde odvozuje, že existence n involucí je postačující podmínkou pro náš případ. Více se autor zabývá obecnější otázkou: zda k tomu, aby skupina tvořila cyklus, stačí i existence libovolných dvou involucí, jimiž se reprodukuje.

Pro n liché dostáváme výsledek:

Jestliže skupina n elementů se reprodukuje dvěma involucemi, z nichž jedna převádí samodružný element druhé (a to ten, jenž leží ve skupině) v element o k míst vzdálenější (v daném cyklickém uspořádání), tvoří tato skupina cyklus v n-árně cyklické projektivnosti tehdy a jen tehdy, když čísla k a n nemají – mimo 1 – společné míry.[19]

A tedy:

Je-li n prvočíslo, stačí vždy existence kterýchkoliv dvou involucí skupinu reprodukujících, k tomu aby tato skupina tvořila cyklus.[20]

Oddíl je zakončen třemi názornými příklady.

Pro n sudé je situace komplikovanější v tom, že je třeba rozeznávat involuce prvého a involuce druhého druhu. Řešíme tedy tři případy a to: obě involuce jsou prvého druhu, obě involuce jsou druhého druhu, jedna involuce je prvého a jedna druhého druhu.

V prvních dvou případech se snadno ukáže, že existence těchto dvou involucí nestačí. Pro třetí případ platí následující věta.

[16] [B17], str. 284.
[17] [B17], str. 284–285.
[18] [B17], str. 284.
[19] [B17], str. 288.
[20] [B17], str. 288.

Jestliže skupina n elementů se reprodukuje dvěma involucemi, z nichž jedna má samodružné elementy ve skupině, druhá nikoliv, a tato převádí samodružný element prvé v element o k míst vzdálenější (v daném cyklickém uspořádání), tvoří tato skupina cyklus v n-árně cyklické projektivnosti tehdy a jen tehdy, když čísla k a n nemají – mimo 1 – společné míry.[21]

Pokud je $n = 2m$, kde m je libovolné prvočíslo, stačí vždy existence dvou involucí (pokud není $m = k$).

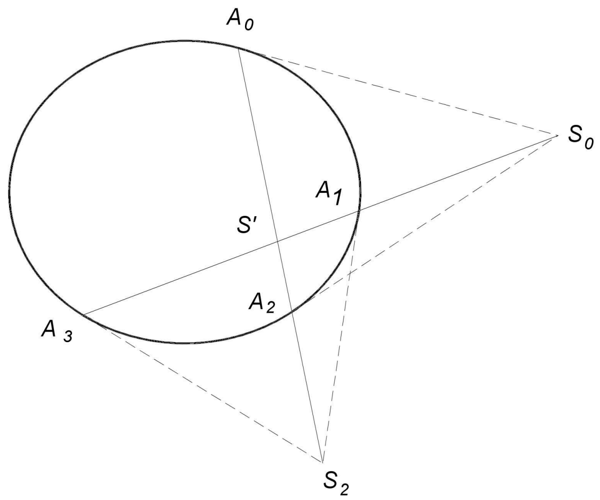
Opět je tato část doplněna názornými příklady.

Poslední část tohoto článku je věnována shrnutí předchozích výsledků a obsahuje náhled do problematiky vyšších dimenzí. Nalézáme zde tvrzení:

Jsou tedy dostatečné podmínky pro to, aby n bodů tvořilo cyklus v n-árně cyklické kollineaci rovinné, tyto:
a) tyto body musí ležet na kuželosečce
b) na této kuželosečce (tj. útvaru prvého řádu) hověti podmínkám v předchozím nalezeným.[22] (3)

První část věty platí pouze pro cykly reálných kolineací. Bydžovský ji nedokazuje, pouze odkazuje na již zmiňovaný článek Lürothův.

Výše zmíněné podmínky jsou vždy splněny pro $n = 4$, jelikož je čtyřmi dvojicemi bodů kolineace určena. Danými čtyřmi body lze pak jediným způsobem proložit kuželosečku tak, aby se tyto čtyři body reprodukovaly nějakou involucí prvého druhu.



Obrázek 3.4:

Budiž to involuce označená J_0, její samodružné body A_0, A_2. Spojme A_0, A_2; A_1, A_3. K průsečíku S' obou těchto paprsků sestrojme (viz. obr. 3.4 [23]*) čtvrtý harmonický bod vzhledem k A_1, A_3; označme jej S_0. Kuželosečka, mající v A_0 a A_2 tečny A_0S_0, resp. A_2S_0 a procházející bodem A_1, prochází ovšem také bodem A_3. Jsou pak A_1, A_3 body sdružené v involuci, indukované bodem S_0 na této kuželosečce, a A_0, A_2 její samodružné body. Je pak pouhý následek*

[21] [B17], str. 291.
[22] [B17], str. 292.
[23] Obrázek je vytvořen podle vzoru z Bydžovského práce.

polárné vlastnosti kuželosečky, že tytéž body se reprodukují involucí o středu S_2, takže skutečně existují dvě involuce prvého druhu, jež polohu čtyř bodů nijak neomezují, nýbrž určují jen polohu příslušné kuželosečky.[24]

Při přechodu od rovinných cyklických kolineací k prostorovým se situace poněkud komplikuje. Přesto lze až do $n = 6$ nalézt prostorové kubiky, které příslušný cyklus obsahují a jsou invariantní pro danou cyklickou kolineaci.

Bydžovský se zabývá případem pro $n = 5$, neboť prostorová kolineace je jedním jejím cyklem určena. Je zde vyřešena úloha:

...je dáno 5 libovolných bodů prostoru, z nichž žádné 4 neleží v rovině. Těmito body jest položiti křivku kubickou tak, aby na ní se skupina bodů reprodukovala dvěma involucemi.[25]

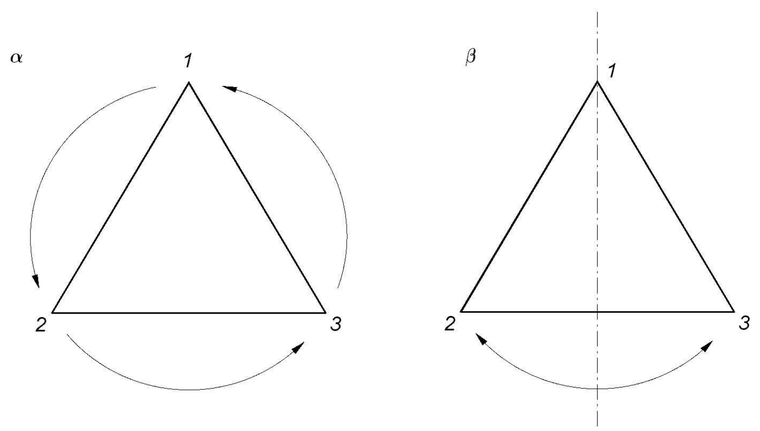
Pomáhá si tím, že kubickou křivku promítne z jednoho bodu cyklu do roviny v kuželosečku. Promítnutím bodů cyklu dostaneme opět 5 bodů, jež musí tvořit cyklus na kuželosečce. Čímž se úloha poněkud zjednoduší.

Zároveň je zde vyřešen problém, jak *určiti rovinnou kollineaci kvinárně cyklickou, jsou-li dány čtyři body jednoho cyklu.*

Závěrem se autor snaží motivovat studenty k pokračování v započatém studiu n-árně cyklických kolineací. Udává konkrétní příklad, jež by bylo zajímavé rozřešit.

Reálnými cyklickými kolineacemi se ve své disertační práci zabýval i jeden z Bydžovského žáků Karel Šindelář[26]. K 80. narozeninám prof. Bydžovskému věnoval článek *Reálné cyklické korelace v rovině a trojrozměrném prostoru*, v němž provádí analytickou metodou klasifikaci cyklických korelací.

V dalších pracích se Bohumil Bydžovský věnuje grupám kolineací, jimiž se reprodukují obecné kubické křivky. Zkoumá různé bodové skupiny na křivce a popisuje jejich vlastnosti. Tak je tomu například v práci ***Grupa šesti kollineací rovinných nebo prostorových***. Tato práce je rozdělena do tří částí. V úvodu se autor zabývá čistě algebraickou teorií grup.



Obrázek 3.5:

[24][B17], str. 292.
[25][B17], str. 293.
[26]Šindelář, K., *Reálné cyklické kolineace*, 1949; Bohumil Bydžovský byl společně s prof. Čechem oponentem této práce.

Má-li šest elementů tvořit grupu, musí tato grupa být buď cyklická (tj. tvaru $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5$) nebo metacyklická (tj. tvaru $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta,\ \beta\alpha,\ \beta\alpha^2$, kde $\alpha,\ \alpha^2$ jsou elementy stupně třetího, $\beta,\ \beta\alpha,\ \beta\alpha^2$ stupně druhého).

Grupa cyklická je všeobecně známa a proto se Bydžovský věnuje pouze grupě metacyklické.

Nejlépe si Bydžovského teorii, která bude následovat, přiblížíme na konkrétním příkladě. Asi nejjednodušším a nejlépe představitelným příkladem takovéto grupy kolineací je grupa permutací tří prvků. Vezmeme-li za tyto prvky vrcholy rovnostranného trojúhelníku, dostáváme grupu shodností tohoto trojúhelníku (obr. 3.5)[27]. α nechť je otočení o 120° kolem těžiště trojúhelníku (trojice bodů 123 se zobrazí na 231), β osová symetrie s osou určenou bodem 3 a středem strany $\overline{12}$ ($123 \rightarrow 213$).

Pak je α^2 otočení o 240° ($123 \rightarrow 312$), $\beta\alpha$ je osová symetrie, jejíž osa je spojnice bodu 1 se středem strany $\overline{23}$ ($123 \rightarrow 132$), $\beta\alpha^2$ je osová symetrie, jejíž osa je spojnice bodu 2 se středem strany $\overline{13}$ ($123 \rightarrow 321$).

Snadno nahlédneme, že pro skládání těchto zobrazení platí následující tabulka:

	1	α	α^2	β	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$
1	1	α	α^2	β	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$
α	α	α^2	1	$\beta\alpha^2$	β	$\beta\alpha$
α^2	α^2	1	α	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$	β
β	β	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$	1	α	α^2
$\beta\alpha$	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$	β	α^2	1	α
$\beta\alpha^2$	$\beta\alpha^2$	β	$\beta\alpha$	α	α^2	1

tab. 1

Z tabulky je zřejmé, že grupa obsahuje komutativní podgrupu stupně třetího. To je známý výsledek, Bydžovský jej ve svém článku rovněž uvádí. Dále zde odvozuje podmínku, jíž musí elementy grupy splňovat, a to $\alpha\beta\alpha = \beta$.

V dalších dvou částech článku se autor snaží nalézt všechny takovéto grupy kolineací s omezením na prostor dvou a třírozměrný.

Základ grupy tvoří ternárně cyklická kolineace α, což může být pouze ternárně cyklická homologie, nebo neperspektivní ternárně cyklická kolineace. První případ za použití podmínky $\alpha\beta\alpha = \beta$ vede ke sporu.

Musí tedy kolineace α mít tvar

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= x_1' \\ \rho x_2 &= \varepsilon x_2' \\ \rho x_3 &= \varepsilon^2 x_3' \end{aligned} \tag{3.8}$$

kde $\varepsilon^3 = 1$. Bydžovský to sice nikde v textu nezdůrazňuje, ale z kontextu je opět patrné, že se pohybuje v oboru komplexních čísel.

[27] Jedná se o dvě izomorfní grupy (tj. obecná grupa metacyklická a grupa shodností trojúhelníku), celá teorie by se tedy dala vyložit na tomto konkrétním případě.

Má-li nyní kolineace β

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3'\\ \rho x_2 &= b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3'\\ \rho x_3 &= b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3'\end{aligned}$$

splňovat rovnici $\alpha\beta\alpha = \beta$, můžeme ji zvolit následujícími třemi způsoby:

$$\begin{array}{lll}\rho x_1 = b_{11}x_1' & \rho x_1 = b_{12}x_2' & \rho x_1 = b_{13}x_3'\\ \rho x_2 = b_{23}x_3' & \rho x_2 = b_{21}x_1' & \rho x_2 = b_{22}x_2'\\ \rho x_3 = b_{32}x_2' & \rho x_3 = b_{33}x_3' & \rho x_3 = b_{31}x_1'\end{array}$$

Na první pohled je patrné,že všechny tři případy jsou analogické, proto se autor zabývá pouze případem prvním. Víme, že β je involuce, musí tedy platit:

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= b_{11}^2x_1'\\ \rho x_2 &= b_{23}b_{32}x_2'\\ \rho x_3 &= b_{32}b_{23}x_3'\end{aligned}$$

Volme $b_{23} = 1$ a dostaneme podmínku $b_{32} = b_{11}^2$. A tedy involuce β má rovnice:

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= b_{11}x_1'\\ \rho x_2 &= x_3'\\ \rho x_3 &= b_{11}^2x_2'\end{aligned}$$

Osou této involuce je přímka $x_3 = b_{11}x_2$, středem bude průsečík přímek $x_1 = 0$ a $x_3 = -b_{11}x_2$.

Bydžovský tyto výsledky shrnuje:

…rovnici $\alpha\beta\alpha = \beta$ hoví při daném α involuce β, jejíž osa prochází jedním dvojným bodem kollineace α, je však libovolná, a jejíž střed leží na spojnici druhých dvou dvojných bodů a odděluje od těchto bodů průsečík osy harmonicky.[28]

Pod pojmem dvojný bod je zde, stejně jako v předchozích textech, míněn bod samodružný. Vrátíme-li se zpět k našemu konkrétnímu příkladu a zvolíme-li vrcholy trojúhelníku za souřadnicové body O_1, O_2, O_3, jsou kolineace α a β dány rovnicemi:

$$\begin{array}{rl}\alpha: \rho x_1 = x_2' & \qquad \beta: \ \rho x_1 = x_1'\\ \rho x_2 = x_3' & \qquad \rho x_2 = x_3'\\ \rho x_3 = x_1' & \qquad \rho x_3 = x_2'\end{array}$$

Osou involuce β je přímka $x_2 = x_3$, střed získáme jako průsečík přímek $x_2 = -x_3$ a $x_1 = 0$, což odpovídá Bydžovského výpočtům.

[28] [B6], str. 5.

Dále Bydžovský odvozuje, že všechno, co platí pro β, platí i pro $\beta\alpha$ a $\beta\alpha^2$, a dochází k závěru (ponechávám zde Bydžovského značení bodů (malými písmeny) a přímek (velkými písmeny)):

Obě kollineace ternárně cyklické mají týž samodružný tříroh $o_1,\ o_2,\ o_3$. Všechny involuce grupy mají své středy $s_1,\ s_2,\ s_3$ na téže straně tohoto třírohu např. na $O_1 \equiv o_2 o_3$; tyto středy tvoří trojici bodů sdruženou podgrupou $1,\ \alpha,\ \alpha^2$ a každé dva se vyměňují užitím involuce příslušné ku třetímu středu. Osy involucí $S_1,\ S_2,\ S_3$ procházejí všechny bodem o_1 a oddělují s příslušnými středy harmonicky body $o_2,\ o_3$. Středy s_i a průsečíky os S_i se stranou O_1 tvoří tři dvojice téže involuce, jejíž dvojné body jsou $o_2,\ o_3$.[29]

Nyní už si autor připravil všechny náležitosti, aby mohl zkoumat racionální kubiky, jež se libovolnou grupou šesti rovinných kolineací reprodukují. Takových kubik je nekonečně mnoho, všechny mají společný dvojný bod O_1, v něm tečny O_1O_2, O_1O_3 a tři inflexní body $S_1,\ S_2,\ S_3$, tvoří tedy tyto kubiky svazek.

Bydžovský zde uvádí racionální kubiku ve tvaru

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \tag{3.9}$$

s podmínkou

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0.$$

Poté vyjadřuje křivku parametricky (u...parametr, ω...perioda)

$$x = -\frac{\pi^2}{12\omega} + \frac{\pi^2}{4\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}} \ ; \quad y = -\frac{\pi^3}{4\omega^3} \cdot \frac{\cos \frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^3 \frac{\pi u}{2\omega}} \tag{3.10}$$

Vhodnou volbou periody ($2\omega = \pi$) a pomocí afinity ($3y = 2y',\ 3x = x'$) lze kubiku převést do tvaru

$$3y^2 = x^3 - 3x - 2, \tag{3.11}$$

resp.:

$$\begin{aligned} x &= -1 + \frac{3}{\sin^2 u} \\ y &= -3\frac{\cos u}{\sin^3 u} \end{aligned}$$

Podmínka kolineárnosti tří bodů o parametrech $u_1,\ u_2,\ u_3$ zní:

$$u_1 + u_2 + u_3 = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vzájemně jednoznačná zobrazení mezi body křivky, která zobrazí tři kolineární body opět na tři kolineární body, budou potom námi hledané kolineace reprodukující křivku. Autor dochází k následující metacyklické grupě:

$$\begin{aligned} u &= \pm u' \\ u &= \pm u' + \frac{\pi}{3} \\ u &= \pm u' + \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Touto grupou jsou vyčerpány všechny kolineace, jimiž se křivka (3.11) reprodukuje.

[29] [B6], str. 6.

Dále autor nachází body inflexní (jejich parametry jsou $u = 0$, $u = \frac{\pi}{3}$, $u = \frac{2\pi}{3}$) a body sextaktické. Promítneme-li libovolný bod kubiky z inflexních bodů na křivku, dostaneme další tři body ($-u$, $-u+\frac{\pi}{3}$, $-u+\frac{2\pi}{3}$). Z nich jeden můžeme opět promítnout ze všech tří inflexních bodů, čímž získáme opět tři body kubiky (u, $u+\frac{\pi}{3}$, $u+\frac{2\pi}{3}$). Opakováním tohoto postupu však již další nové body nezískáme.

...pormítneme-li libovolný bod křivky z bodů inflexních, a některý z promítnutých rovněž, obdržíme dalších pět bodů, jež s původním dávají skupinu šestibodovou (G_6), tj. skupinu bodů vznilkou užitím kollineací grupy G_6.[30]

Jelikož součet argumentů bodů skupiny (G_6) je roven nule, leží tyto body na kuželosečce. Autor tuto kuželosečku hledá následujícím způsobem. Ví, že ji reprodukuje kolineace α. Vezme tedy obecnou rovnici kuželosečky:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

a zobrazí ji kolineací α:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}\varepsilon^2x_2^2 + a_{33}\varepsilon x_3^2 + 2a_{12}\varepsilon x_1x_2 + 2a_{13}\varepsilon^2x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

Mají-li obě rovnice určovat tutéž kuželosečku, musí mít tato kuželosečka jednu z následujících rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 &= 0 \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 &= 0 \\ a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Všechny tyto kuželosečky lze charakterizovat následující větou:

...pro ternárně cyklickou kollineaci jsou invariantní kuželosečky, jež procházejí dvěma jejími dvojnými body a v nich se dotýkají dvojných paprsků.[31]

Je-li libovolná kuželosečka invariantní pro α (tj. v bodech O_2, O_3 se dotýká paprsků O_1O_2, O_1O_3) je invariantní i pro β (S_1 a s_1 jsou pól a polára této kuželosečky) a tedy:

...jsou všechny kuželosečky svazku, určeného body o_2, o_3 a tečnami $\overline{o_1o_2}$, $\overline{o_1o_3}$, invariantní pro G_6.[32]

Poslední kapitola článku je věnována kolineacím prostorovým. Postup je zcela analogický jako u rovinných kolineací s tím rozdílem, že v prostoru získáváme více možných kombinací. α může být homologie, dvouosá kolineace, resp. planární ternárně cyklická kolineace. První případ opět vede ke sporu.

Je-li α dvouosá kolineace (tj. má dvě samodružné osy) ukáže se, že β pak musí být také dvouosá kolineace.

Je-li α planární ternárně cyklická kolineace (tj. má dva dvojné paprsky, z nichž jeden má všechny body dvojné, druhý jen dva), může β být buď dvouosá kolineace, jejíž osy se opírají o obě osy kolineace α, nebo může být centrální involucí, jejíž rovina prochází paprskem samodružných bodů kolineace α.

[30] [B6], str. 9.
[31] [B6], str. 9.
[32] [B6], str. 9.

Kolineacemi, jimiž se reprodukuje kubická křivka, se Bohumil Bydžovský zabývá rovněž v práci [B10] ***O jisté grupě rovinných kollineací***.

Autor tentokrát studuje grupu 18-ti kolineací G_{18}, jimiž se obecná kubická křivka reprodukuje. Kubiku parametrizuje pomocí eliptických funkcí, zmíněné transformace pak popisuje vztahy mezi parametry eliptické funkce:

$$u' = \pm u + \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2). \tag{3.12}$$

Zmíněná grupa se skládá z transformací druhého a třetího stupně, Bydžovský ukazuje, že obsahuje podgrupy stupně druhého, třetího, šestého a devátého. Dle jedné věty Frobeniovy pak odvozuje, že se jedná o grupu metacyklickou[33].

Podstatnou část článku tvoří vyšetřování bodových skupin na kubice, které jsou sdruženy kolineacemi grupy. Užitím kolineací na bod kubiky lze totiž získat dalších sedmnáct bodů křivky. Spolu s bodem daným tedy získáváme skupinu osmnácti bodů, invariantní vzhledem ke grupě G_{18} , jež mohou být všechny navzájem různé, nebo mohou některé z těchto bodů splynout.

Při hledání skupin bodů, jež nejsou navzájem různé, autor využívá eliptické parametrizace. Snadno odvozuje výsledek, že jediné takto význačné skupiny bodů tvoří devět bodů inflexních a 27 bodů sextaktických, jež se rozpadají na tři skupiny devítibodové, z nichž každá je vzhledem ke grupě invariantní.

Bydžovský rovněž zkoumá vzájemné vztahy mezi body osmnáctibodové skupiny. Budeme-li brát v úvahu pouze substituce libovolné podgrupy grupy G_{18}, sdruží se body skupiny ve skupiny tříbodové či šestibodové. Autor pak tyto skupiny vyšetřuje, stále za pomoci eliptických funkcí odvozuje řadu tvrzení, které jsou z části původní, z části se jedná o tvrzení již známá, avšak vyjevená z nového úhlu pohledu.

Poněkud odlišná od ostatních je práce [B28] ***Řešení zvláštního problému projektivnosti a jeho užití***. Bohumil Bydžovský zde nejprve připomíná *Chaslesův problém projektivnosti*[34]:

Dáno v rovině sedm bodů $a_1,\ \ldots,\ a_7$ a sedm jiných bodů $b_1,\ \ldots,\ b_7$; stanoviti body $o,\ o'$ tak, aby paprsky, jimiž se body a_ν promítají z bodu o, tvořily projektivný svazek se svazkem sedmi paprsků, jež promítají body b_ν z bodu o'.

Řešení tohoto problému je známé[35]. Bydžovský tento problém zobecňuje tím, že hledané svazky paprsků nahrazuje svazky kuželoseček. Problém pak lze formulovat následovně:

V útvaru prvého řádu je dána skupina prvků $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k$; v rovině je dána skupina stejného počtu prvků $A_1,\ \ldots,\ A_k$. Jest určiti svazek kuželoseček o basi $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$ tak, aby byla vyplněna projektivnost vyjádřená vztahem

$$[X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4](A_1,\ \ldots,\ A_k) \mathrel{\overline{\wedge}} (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)^{36}.$$

Pod pojmem útvar prvního řádu má autor na mysli svazek. Symbol na levé straně rovnosti značí kuželosečky svazku určené body $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$

[33]Jelikož stupeň grupy G_{18} se dá zapsat ve tvaru $p^n q$, kde $p,\ q$ jsou prvočísla. Viz např. Weber, V., *Lehrbuch der Algebra II.*, 2. vydání str. 33 a 145.

[34]Viz např. Weyr, E., *Projektivná geometrie základných útvarů prvého řádu*, 1898, str. 97.

[35]Viz např. Sturm, S., *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, svazek I., str. 348–366. Eduard Weyr řeší problém pouze pro 5 bodů.

[36][B28], str. 273.

a dalším z bodů $A_1, \ldots, A_k$. Úloha má smysl pro $4 \leq k \leq 11$. Pro $k = 4, \ldots, 9$ tuto úlohu řešil již Herman Kortum[37], který za svou knihu, věnovanou nejen této problematice, získal Steinerovu cenu[38]. Bydžovský nalézá ve své práci jednodušší řešení pro všechny přípustné hodnoty k. V závěru je poukázáno i na možnost aplikace nalezených výsledků na konstrukci rovinné křivky pátého stupně.

Podívejme se alespoň ve stručnosti na případ $k = 5$. Pro tento případ lze výše uvedenou úlohu formulovat takto:

Je dáno pět pevných bodů $A_1, \ldots, A_5$ a skupina prvků $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ v útvaru prvního řádu; ke třem daným bodům E, F, X je určiti bod X' tak, aby platil vztah

$$[E,\ F,\ X,\ X'](A_1,\ \ldots,\ A_5)\,\overline{\wedge}\,(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_5)^{39}.$$

Bydžovský při řešení úlohy, využívá pomocný bod P, jež splňuje vztah

$$[P](A_1,\ \ldots,\ A_5)\,\overline{\wedge}\,(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_5).$$

Odvolává se při tom na již zmiňovanou učebnici Eduarda Weyra, v níž je konstrukce tohoto bodu popsána. Musí pak rovněž platit

$$[E,\ F,\ X,\ X'](A_1,\ \ldots,\ A_5)\,\overline{\wedge}\,[P](A_1,\ \ldots,\ A_5).$$

Vezmeme-li nyní v úvahu projektivní vytvoření kubiky za pomoci svazku kubik projektivního se svazkem přímek, musí body

$$E,\ F,\ X,\ P,\ A_1,\ \ldots,\ A_5,\ X'$$

ležet na kubické křivce. Kubika je určena devíti svými body. Bod X' lze pak sestrojit z podmínky, že bod P je koresiduální s body E, F, X, X'. Tj. sestrojíme např. bod A_1' jako průsečík kubiky se spojnicí $\overline{PA_1}$. Šestý průsečík kuželosečky určené body E, F, A_1, A_1', X pak bude hledaný bod X'.

Ostatní případy, tedy $k = 6, \ldots, 11$ jsou komplikovanější v tom, že namísto kubické křivky je třeba pracovat s křivkou stupně čtvrtého resp. se svazkem takových křivek.

O tři roky později Bydžovský tuto problematiku ještě více zobecnil v práci [B36] ***Řešení zvláštního problému projektivnosti pro svazek kubických křivek***. Autor zde hledá konstrukci svazku kubických křivek o bázi $[X_1, \ldots, X_9]$, tak aby kubiky svazku určené postupně body $A_1, \ldots, A_k$ (ležícími v rovině), byly projektivní se skupinou prvků $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ v útvaru prvního řádu.

Tato úloha má smysl pro $k = 4, \ldots, 19$. V práci jsou nalezeny konstrukce zvlášť pro hodnoty $k = 4, \ldots, 7$, ostatní případy jsou pak řešeny obecnou metodou.

Poslední z prací zařazených do této kapitoly je článek [B31] ***Remarque sur les points d'inflexion d'une cubique á point double***, publikovaný roku 1914 v švýcarské Ženevě. Tuto práci se bohužel nepodařilo dohledat.

[37] Kortum, H. L., *Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades*, Bonn, 1869, str. 34–58.
[38] Tuto cenu udělovala Berlínská akademie věd.
[39] [B28], str. 279.

Kapitola 4

Cremonovy transformace

Dalším tématem, které se na několik let stalo středem zájmu profesora Bydžovského, jsou *biracionální transformace*. Jedná se o takové transformace mezi dvěma křivkami, v nichž lze souřadnice jedné křivky vyjádřit jako racionální funkce souřadnic křivky druhé a současně souřadnice křivky druhé jsou racionálními funkcemi souřadnic křivky první. Speciálním případem takových transformací jsou transformace Cremonovy, jejichž zkoumáním se Bydžovský intenzivně zabýval především v letech 1920-1937.

V předchozích kapitolách jsme se poměrně podrobně seznámili s nejjednodušším typem Cremonovy transformace, konkrétně s jedním typem involutorní kvadratické transformace (v rovině).

Cremonova rovinná transformace T je až na výjimky vzájemně jednoznačné zobrazení mezi body P, P' dvou rovin S, S'.

Nechť P jsou dány svými homogenními souřadnicemi x_1, x_2, x_3; potom souřadnice x'_1, x'_2, x'_3 bodů P' jsou jimi jednoznačně určeny, a existuje množina vztahů

$$x'_1 : x'_3 : x'_3 = \phi_1 : \phi_2 : \phi_3, \tag{4.1}$$

kde ϕ_i jsou homogenní polynomy proměnných x_1, x_2, x_3, stejného stupně (řekněme n) bez společného faktoru. Rovnice tohoto tvaru ovšem neurčují nutně Cremonovu transformaci, protože jsme doposud vytvářeli transformaci jednoznačnou pouze v jednom směru.

Kdybychom naopak znali P' a tedy i x'_1, x'_2, x'_3, dostaneme z rovnice (4.1) vztahy

$$x'_1\phi_3 - x'_3\phi_1 = 0,\ x'_2\phi_3 - x'_3\phi_2 = 0.$$

Jedná se o rovnice dvou křivek stupně n v rovině S, které se protínají v n^2 bodech. Ty jsou všechny libovolné, pokud nejsou formy ϕ_i nijak specializovány. O vzájemně jednoznačné zobrazení se tedy jedná pouze v triviálním případě, kdy $n = 1$.

Má-li být transformace Cremonovou, musí být jednoznačná v obou směrech. Chceme tedy, aby se spolu s měnícím se bodem P' měnil pouze jeden z n^2 bodů. Což znamená, že křivky určené formami ϕ_i musí mít právě $n^2 - 1$ bodů společných, počítaných i s jejich násobností.

V případě kvadratické transformace, tedy transformace druhého stupně, určují formy ϕ_i kuželosečky, které se protínají ve třech bodech.

Hledáme-li tedy rovnice kvadratické Cremonovy transformace v rovině, vycházíme z předpokladu, že souřadnice bodů roviny S' lze vyjádřit jako kvadratické formy v souřadnicích bodů roviny S,

$$x'_i = Q_i(x).$$

Úpravou těchto rovnic získáme pro daná x'_1, x'_2, x'_3 rovnice dvou kuželoseček

$$x'_1 Q_3(x) - x'_3 Q_1(x) = 0, \; x'_2 Q_3(x) - x'_3 Q_2(x) = 0,$$

které se protínají ve čtyřech bodech. Chceme, aby pro libovolnou trojici x'_1, x'_2, x'_3 měly tyto kuželosečky tři body společné, tedy např. i pro $x'_1 = 0, \; x'_2 = 0$, což znamená, že tyto tři pevné body obsahuje také kuželosečka Q_1. Obdobně lze ukázat, že tyto tři pevné body leží na všech kuželosečkách Q_i. Zvolíme-li je za souřadnicové vrcholy, vypadnou v rovnicích (4.1) všechny kvadratické členy.

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 \\ x'_2 &= b_1x_2x_3 + b_2x_1x_3 + b_3x_1x_2 \\ x'_1 &= c_1x_2x_3 + c_2x_1x_3 + c_3x_1x_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Kdyby byl tento determinant roven nule, byly by kuželosečky Q_i lineárně závislé a tedy by náležely do téhož svazku, což není pravda. Vyjádřeme nyní x_ix_j z rovnic (4.3).

$$\begin{aligned} x_2x_3 &= A_1x'_1 + B_1x'_2 + C_1x'_3 \\ x_1x_3 &= A_2x'_1 + B_2x'_2 + C_2x'_3 \\ x_1x_2 &= A_3x'_1 + B_3x'_2 + C_3x'_3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

A_i, B_i, C_i jsou doplňky prvků v determinantu D. Jelikož $D \neq 0$, jsou i lineární formy na pravých stranách rovnic lineárně nezávislé, jedná se tedy o rovnice tří přímek neprocházejících týmž bodem. Zvolíme-li je za souřadnicové osy v druhé rovině v daném pořadí, nabudou rovnice (4.3) tvaru:

$$\begin{aligned} x'_1 &= k_1x_2x_3 \\ x'_2 &= k_2x_1x_3 \\ x'_1 &= k_3x_1x_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Budeme-li navíc požadovat aby se jednotkový bod jedné roviny zobrazil na jednotkový bod roviny druhé, budou všechny konstanty k_i stejné a rovnice kvadratické transformace můžeme tedy psát takto:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2x_3 \\ x'_2 &= x_1x_3 \\ x'_3 &= x_1x_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Snadno se odvodí, že rovnice zobrazení, které naopak bodům první roviny přiřazuje body roviny druhé, má stejný tvar:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_2x'_3 \\ x_2 &= x'_1x'_3 \\ x_3 &= x'_1x'_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

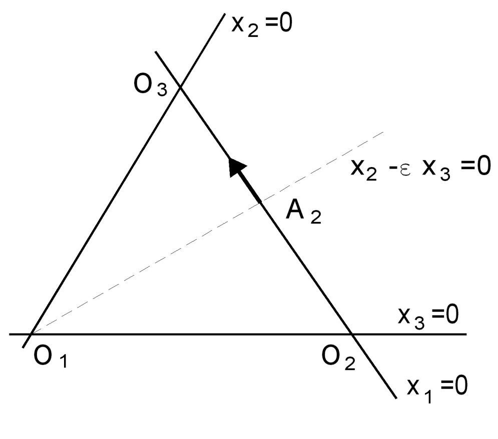
Jedná se o vzájemně jednoznačné zobrazení až na konečný počet výjimek, které tvoří vrcholy souřadnicového trojúhelníku. Jim by totiž podle předchozích rovnic neodpovídal žádný bod. Zato je patrné, že se každý bod ležící na libovolné souřadnicové ose zobrazí na protilehlý souřadnicový vrchol. Má-li být vztah mezi body obou rovin vzájemný, musí tedy bodu O_i odpovídat každý bod přímky O_jO_k.

Libovolná přímka roviny S se zobrazí na kuželosečku v rovině S', která prochází každým z hlavních bodů transformace. Všechny tyto kuželosečky tvoří tzv. *homaloidní síť transformace.*

Kvadratická transformace má mezi ostatními Cremonovými transformacemi jakési výjimečné postavení: všechny ostatní transformace lze totiž rozložit do řady transformací kvadratických[1] . Toho se hojně využívá pro studium řady subjektů, zdaleka nejvíce však jsou aplikovány na studium vlastností křivek vyšších stupňů z již známých vlastností křivek stupňů nižších a rovněž k vyšetřování vyšších singularit rovinných křivek.

Bydžovský ve své učebnici *Úvod do algebraické geometrie*, resp. ve svých vědeckých pracích rozebírá pouze jeden případ kvadratické transformace, a to ten, kdy jsou všechny bázové body sítě homaloidních kuželoseček různé. Rovněž může nastat situace, kdy dva resp. všechny tři tyto body splynou. Podívejme se pro zajímavost na první z nich.

V případě splynutí dvou bázových bodů je homaloidní síť určena dvěma body a tečnou v jednom z nich. Označme si bázové body $A_1,\ A_2,\ A_3$. Nechť má např. splynout bod A_2 s bodem A_3. Souřadnicový trojúhelník zvolme tak, aby $O_1 = A_1$ a $O_3 = A_3$. Bod O_2 zvolme libovolně na spojnici A_2, A_3 (obr. 4.1). Bod A_2 pak bude mít souřadnice $(0, \varepsilon, 1)$ a přímka $x_3 = 0$ přejde do přímky $x_2 - \varepsilon x_3 = 0$. Platí, že $A_2 \to A_3$ pro $\varepsilon \to 0$. Rovnice (4.5) určují tři lineárně nezávislé kuželosečky homaloidní sítě ($x_ix_j = 0$). Přejde-li bod A_2 do bodu A_3, kuželosečky tuto vlastnost ztratí, je tedy třeba hledat nové tři lineárně nezávislé kuželosečky.



Obrázek 4.1:

Jedno řešení tohoto problému můžeme najít v knize *Cremona transformations* od Hildy P. Hudsonové. Za lineárně nezávislé homaloidy volí 3 kuželosečky

[1]Viz např. Nöther, M., *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, Math. Annalen 5, Göttingen Nachrichten, 1872.

singulární, složené z přímek $O_1A_2,\ O_1O_3$; $O_1O_3,\ O_3O_2$ a $O_1O_2,\ O_2O_3$. Pro ε nenulové dostáváme rovnice

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2(x_2 - \varepsilon x_3) : x_1x_2 : x_1 : x_3 \tag{4.7}$$

A tedy pro limitní případ, kdy A_2 splyne s A_3 dostáváme rovnice následující:

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2^2 : x_1x_2 : x_1 : x_3 \tag{4.8}$$

Daly by se odvodit i rovnice kvadratické Cremonovy transformace, v níž by měly homaloidy pouze jeden společný bod, bylo by to však již mnohem složitější.

S jedním typem involutorní kvadratické transformace, kterou Bydžovský stručně nazývá kvadratickou involucí, jsme se již seznámili dříve. Podívejme se ještě na druhý typ involutorní kvadratické transformace, tzv. kvadratickou inversi, jíž se Bydžovský rovněž zabývá ve své učebnici [B103].

V kvadratické involuci odpovídala každému hlavnímu bodu protilehlá hlavní přímka, u kvadratické inverse odpovídá pouze jednomu hlavnímu bodu protilehlá hlavní přímka, zbývajícím dvěma odpovídají hlavní přímky jimi procházející.

Zvolíme-li bod, jemuž odpovídá protilehlá hlavní přímka za O_3, snadno nahlédneme, že rovnice kvadratické inverse budou mít tvar

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1x_3 \\ x_2' &= x_2x_3 \\ x_3' &= x_1x_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

V inverzi si odpovídají vždy páry bodů konjugované vzhledem ke kuželosečce, určené tečnami $O_3O_1,\ O_3O_2$ s body dotyku $O_1,\ O_2$, a jsou kolineární s bodem O_3. Na této kuželosečce leží všechny samodružné body transformace. Tyto body totiž musí splňovat rovnice

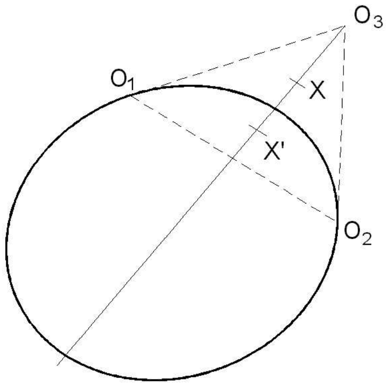
$$\begin{aligned} \rho x_1 &= x_1x_3 \\ \rho x_2 &= x_2x_3 \\ \rho x_3 &= x_1x_2 \end{aligned}$$

a tedy po vyloučení ρ např. z první a třetí rovnice, resp. ze druhé a třetí rovnice dostáváme rovnici výše zmiňované kuželosečky:

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0. \tag{4.10}$$

Kuželosečka samodružných bodů se nazývá základní kuželosečka inverse, hlavní bod na ní neležící středem inverse. Spojnice zbývajících dvou hlavních bodů je polárou středu inverse vzhledem k dané kuželosečce. Je-li tato kuželosečka kružnicí, střed inverse jejím středem, dostáváme známou kruhovou inversi. Zbývající hlavní body, ježto leží na poláře středu inverse, musí být kruhové neboli isotropické body.

Jelikož je ovšem každá kuželosečka (4.10) až na kolineaci ekvivalentní s kružnicí, můžeme každou kvadratickou inversi převést na inversi kruhovou (obr. 4.2). Ačkoliv to Bydžovský opět nikde neuvádí, z textu je patrné, že se pohybuje v komplexních číslech, není tedy třeba rozlišovat kuželosečky reálné a imaginární.



Obrázek 4.2:

Bydžovský napsal celkem 13 článků věnovaných tomuto tématu, 6 v českém jazyce a 7 ve francouzštině. Některé z prací se tematicky překrývají, nebo jsou překladem z jednoho jazyka do druhého. Větší část z nich je věnována kvadratickým involucím v n-rozměrném prostoru. V řadě dalších prací pak Bydžovský transformace pouze požívá jako nástroj ke zkoumání jiných objektů[2]. A právě tak, jako je na biracionálních transformacích založeno vyšetřování algebraických křivek rovinných a prostorových, je na algebraických křivkách založeno vyšetřování těchto transformací a jejich grup, především, pokud jde o důkazy úplnosti, jak je tomu v pracích [B68] a [B69]. Z přednášek o grupách Cremonových transformacích na mezinárodním matematickém kongresu v Bologni a na sjezdu československých přírodozpytců a lékařů v Praze vznikly práce [B66] a [B67].

Asi nejpodstatnější je práce [B74] z roku 1931 nazvaná ***Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném***, v níž Bydžovský odvozuje nutné podmínky pro homaloidní soustavu kvadratických nadploch a z toho vyvozuje rovnice nejobecnější kvadrokvadratické Cremonovy transformace při vhodně zvolené soustavě souřadnic.

Autor vychází z obecných rovnic, které musí splňovat kvadratická transformace dvou projektivních n-rozměrných prostorů

$$x_i = Q_i(x'),\ i = 1, \ldots, n+1, \tag{4.11}$$

kde Q_i jsou kvadratické formy proměnných $x'_1 \ldots, x'_{n+1}$. Má-li být tato transformace Cremonova a zároveň kvadratická v obou směrech, musí se dát předchozí soustava řešit racionálně podle proměnných x'_i a toto řešení musí mít stejný tvar jako soustava (4.11). Bydžovský odvozuje, že všechny nadkvadriky homaloidní soustavy S'_n, resp. S_n musí mít společnou kvadratickou varietu $(n-2)$-rozměrnou a kromě ní ještě jeden pevný bod. Tuto varietu pak nazývá varietou hlavní a podobně zmíněný bod nazývá hlavním bodem. $(n-2)$-rozměrná kvadratická varieta určitě leží v nějaké nadrovině, zvolíme-li ji za souřadnicovou nadrovinu v druhé soustavě, můžeme psát rovnice variety následovně

$$x'_1 = 0,\ Q(x'_2, \ldots, x'_{n+1}) = 0,$$

kde Q je kvadratická forma. Společný další bod všech homaloidních kvadrik vezměme za bod $O'_1(1, 0, \ldots, 0)$ Vhodnou volbou transformací soustavy

[2] Většinou však bez použití algebraického aparátu, pouze s konstatováním, že transformace byla použita a jaké má to má důsledky.

souřadnic Bydžovský převádí rovnice transformace (4.11), jejíž homaloidy splňují výše zmíněnou nutnou podmínku, na tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= Q(x') \\ x_i &= x'_1 x'_i,\ i = 2, \ldots, n+1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Stejné rovnice dostaneme i pro transformaci v opačném směru.

Je zajímavé se podívat jak se zobrazí hlavní bod resp. hlavní varieta. Podle rovnic (4.12) je patrné, že každému bodu, pro který je $x'_1 = 0$ a zároveň $Q(x') \neq 0$, odpovídá bod O_1, tomuto bodu tedy obráceně odpovídá každý bod roviny $x'_1 = 0$ (až na body kvadratické variety $Q(x') = 0$). Než ukážeme, které body jsou přidruženy kvadratické varietě

$$x'_1 = 0,\ Q(x'_2, \ldots, x'_{n+1}) = 0,$$

ukažme, že jsou si v transformaci projektivně přidruženy $(n-1)$-rozměrné svazky o středech O_1, O'_1. Z rovnic (4.12) totiž plyne

$$x_2 : x_3 : \ldots : x_{n+1} = x'_2 : x'_3 : \ldots : x'_{n+1},$$

což vyjadřuje kolineaci mezi dvěma $(n-1)$-rozměrnými prostory. Zobrazí se tedy na sebe i oba nadkužele, které z těchto bodů promítají obě hlavní kvadratické variety. Bod na přímce spojující O'_1 s libovolným bodem hlavní variety y_i má rovnice

$$x'_1 = \lambda + \mu y'_1,\ x'_i = \mu y'_i,\ i = 2, \ldots, n+1.$$

Dosadíme-li je do rovnic (4.12), dostáváme bod o souřadnicích

$$x_1 = 0,\ x_i = (\lambda + \mu y'_1) \cdot \mu y'_i,$$

ježto je $Q(x') = \mu^2 Q(y') = 0$. Platí pak $Q(x) = \mu^2(\lambda + \mu y'_1)^2 Q(y') = 0$. A tedy libovolnému bodu uvedené přímky odpovídá bod na hlavní varietě. V opačném směru pak bodu na hlavní varietě odpovídá celá přímka procházející izolovaným hlavním bodem, konkrétně je to ta přímka, jíž ve výše zmíněné kolineaci odpovídá přímka protínající hlavní varietu v uvažovaném bodě.

Bydžovský se rovněž zabývá případem, v němž oba sobě odpovídající prostory splynou. Má-li taková transformace býti involutorní, musí splynout oba izolované hlavní body, obě hlavní variety a tedy i obě hlavní nadroviny. Oba hlavní nadkužele jsou rovněž soumístné a výše zmíněná kolineace, v níž si odpovídají, se stává involutorní. Zvolíme-li soustavu souřadnic stejně jako v předchozím případě, lze nejobecnější kvadratickou Cremonovu involuci psát ve tvaru

$$x_1 : \ldots : x_{n+1} = Q(x'_2, \ldots, x'_{n+1}) : x'_1 x'_2 : \ldots : x'_1 x'_h : -x'_1 x'_{h+1} : \ldots : -x'_1 x'_{n+1}$$

Počet záporných znamének určuje různé typy kvadratických involucí. Bydžovský se jimi podrobně nezabývá, neboť každá taková involuce se dá složit z kvadratické involuce o rovnicích

$$x_1 : \ldots : x_{n+1} = Q : x'_1 x'_2 : \ldots : x'_1 x'_{n+1} \tag{4.13}$$

a lineární involuce

$$x_1 : \ldots : x_{n+1} = x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_h : -x'_{h+1} : \ldots : -x'_{n+1}.$$

Rovnice (4.13) vyjadřují kvadratickou inversi. V dalším autor dokazuje, že

...k dané inverzi vždy existuje nekonečně mnoho inversí takových, že jsou s ní záměnné a složeny s ní dávají kvadratickou involuci[3].

V řadě dalších prací, které vyšly převážně ve francouzském jazyce, Bydžovský na tyto výsledky navazuje a rozšiřuje je. Jedná se hlavně o práce [B81], [B86], [B87].

V již zmiňované práci Hildy P. Hudsonové můžeme najít odkaz na Bydžovského článek [B12] ***O jisté nekonečné grupě Cremonových transformací***, v níž autor zkoumá, zda vzájemně jednoznačným transformacím v rovině, které reprodukují kubickou křivku C, neodpovídají vzájemně jednoznačné transformace celé roviny.

Za zmínku jistě stojí i práce [B38], v níž Bydžovský konstruuje *jednodvojznačnou transformaci* mezi dvěma rovinami ξ, ξ'. Jelikož tato transformace není jednoznačná v obou směrech, nejedná se o příklad Cremonovy transformace, úzce však s jistou Cremonovou transformací souvisí. Bydžovský totiž vychází z involutorní Cremonovy transformace 17. stupně, označme ji J. Poté konstruuje vztah mezi rovinami ξ, ξ', v němž bodům ξ' přiřazuje dvojice involuce J v rovině ξ a obráceně, každým dvěma bodům roviny ξ, sdruženým v involuci J přiřazuje tento jediný bod v rovině ξ'. Bydžovský dále vyšetřuje hlavní body a hlavní křivky obou rovin, odvozuje věty o stupni transformované křivky. Výsledky pak aplikuje na studium křivky 6-ho stupně s osmi dvojnásobnými body, která se transformací převádí na dvojnásob počítanou racionální křivku stupně čtvrtého s trojnásobným bodem. Z teorie těchto jednodušších křivek pak odvozuje závěry o teorii křivek šestého stupně.

Na závěr této kapitoly se podívejme trochu do historie této problematiky. První zmínky o vzájemně jednoznačných zobrazeních mezi body dvou rovin lze nalézt u Ponceleta, v jeho díle *Traité des propriétés projectives des figures* z roku 1822. Zde pracuje jakoby mimochodem se vzájemně jednoznačným vztahem mezi páry konjugovaných bodů vzhledem ke dvěma kuželosečkám (obecná kvadratická involuce prvního typu). Ke stejné transformaci dochází i Bobillier ve své práci *Recherches sur les lois genérales qui régissent les lignes et surfaces algébriques* z let 1827–27. Došel k ní jako ke speciálnímu případu vícenásobné relace mezi bodem a grupou průsečíků jeho prvních polár vzhledem ke svazku křivek libovolného stupně. Rovněž nalezl i odpovídající prostorové transformace. Tyto dva francouze lze považovat za první průkopníky teorie rovninných resp. prostorových transformací.

Algebraická linie přístupu se odvíjí od bilineárních rovnic. Roku 1830 při popisu homogenních souřadnic v práci *Über ein neues Coordinatensystem* dává Plücker rovnice v rovině do jejich nejjednoduššího tvaru $xx' = a^2$, atd. což jest obecná kvadratická involuce prvního typu. Konstrukce rovinné kvadratické transformace ve smyslu projektivně si odpovídajících svazků byla poprvé provedena italským matematikem Belavitiem v knize *Saggio di geometria derivata.* Jacobi ve své práci z let 1841–1842 a stejně tak ale poněkud rozsáhleji Bataglini konstruují kvadratickou transformaci jako kombinaci dvou korelací.

Celá řada významných matematiků tak či onak přispěla k řešení rovinných i vícerozměrných transformací, z těch nejznámějších jmenujme ještě Steinera,

[3] [B74], str. 224.

Liouvilla nebo Möbia. Nejvýznamějším badatelem v této oblasti však byl Luigi Cremona, podle nějž je celá teorie pojmenována. V roce 1863 vytvořil Cremona obecnou teorii rovinných transformací v první z řady velkých monografií *Sulla transformacioni geometriche delle figure piane*. Řada geometrů brzy přinesla podstatné přídavky, z nichž daleko nejdůležitější je Nötherův článek *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*. V něm nalezneme důkaz tvrzení, že každá Cremonova rovinná transformace může být rozložena na kvadratické transformace. Ten se provádí tak, že se ukáže, že každá homaloidní síť může být transformována na síť přímek sérií kvadratických transformací aplikovaných na vhodně zvolené trojice základních bodů.

Kapitola 5

Geodetické křivky

Mezi Bydžovského pracemi můžeme nalézt i dvě, které se věnují diferenciální geometrii. Jedná se o práci [B20] ***O vytvoření geodetických křivek na rotačních ellipsoidech*** a na ni navazující práci [B32] ***O vytvoření geodetických křivek na rotačních plochách centrálních druhého stupně***, které byly publikovány v letech 1912 a 1915 v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky.

V první z prací Bydžovský vyšetřuje geodetické křivky na protáhlém a zploštělém rotačním elipsoidu a průměty těchto křivek do roviny rovníku. Vychází při tom z práce G.H.Halphena[1]. Ten ve své knize *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*[2] celou situaci popsal, ale pouze pro elipsoid protáhlý.

Připomeňme, že lokálně jsou geodetické křivky nejkratší spojnice dvou bodů na ploše. Definují se jako křivky, jež mají v každém bodě buď křivost nulovou (inflexní bod), nebo je oskulační rovina křivky v daném bodě kolmá na tečnou rovinu plochy. Pro rozvinutelné plochy pak platí, že každý oblouk geodetické křivky po rozvinutí přejde do úsečky.

Již Halphen o geodetických křivkách na protáhlém rotačním elipsoidu vyslovil a dokázal větu,

> *…že každá tato křivka se promítá do roviny rovníku v křivku, kterou lze vytvořiti elipsou, jejíž střed je pevný a jež se kotálí po této rovině.*[3]

Halphenův důkaz byl založen na tom, že rovnice průmětu geodetické křivky jsou formálně shodné s rovnicemi *herpolhodie*, t.j. křivky, která vznikne kotálením plochy druhého stupně o pevném středu po rovině. Tato shoda vede k reálnému výsledku pouze pro protáhlý elipsoid, a to v tom speciálním případě, kdy kotálející se plocha přejde v elipsu.

Bydžovský se pokusil vyřešit problém bez použití *herpolhodie*, přičemž zjistil, že lze tytéž výpočty použít i na případ elipsoidu zploštělého. Dále dochází k závěru, že je možné výpočty aplikovat nejen na projekce geodetických křivek,

[1] Georges Henri Halphen (1844–1889), francouzský matematik; za svou vědeckou činnost získal řadu mezinárodních ocenění (např. 1880 ocenila francouzská *Académie des Sciences* jeho práce o lineárních diferenciálních rovnicích, roku 1882 získal Steinerovu cenu, udělovanou berlínskou akademií věd, za své práce o algebraických křivkách).

[2] Paris, 1888, II. díl ze tří, str. 239–250. První díl této učebnice (vyšel roku 1886) obsahuje teorii eliptických funkcí a jejich rozvinutí v řadu, druhý díl učebnice je věnován aplikacím eliptických funkcí v mechanice, fyzice, geodesii, geometrii a integrálním počtu. V posledním díle (1891) je uvedeno několik aplikací v algebře, konkrétně v teorii rovnic 5. stupně, dále pak aplikace z teorie čísel. Bydžovský se na tuto práci často odvolává, nejen co se týče geodetických křivek.

[3] viz. Halphen, str. 250.

ale i na křivky samy. Formuluje věty, jež ukazují, jak lze kotálením vytvořiti geodetické křivky na rotačním elipsoidu.

Bydžovský uvažuje rovnici rotačního elipsoidu ve tvaru:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{b^2}. \tag{5.1}$$

Geodetické křivky stejně jako Halphen popisuje pomocí eliptických funkcí. Aby bylo toto zavedení zřejmé, podívejme se nyní na rovnici geodetických křivek, jak k ní dospěl Halphen. Ten vychází z předpokladu, že tečný vektor geodetické křivky $f'(t)$, vektor $f''(t)$ a vektor normály plochy F jsou lineárně závislé. Bereme-li za parametr oblouk, je vektor $f''(t)$ kolmý na tečný vektor geodetické křivky (ten leží v rovině kolmé na vektor normály plochy) a tedy můžeme uvažovat, že vektor $f''(s) = (\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2})$ je násobkem vektoru $F = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{b^2})$. To vede k podmínce

$$x''y - xy'' = 0,$$

kterou lze zjednodušit na tvar

$$x'y - xy' = c, \tag{5.2}$$

kde c je konstanta. Je-li křivka parametrizována obloukem, musí být velikost jejích tečných vektorů jednotková a tedy

$$(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 + (\frac{dz}{ds})^2 = 1,$$

stručněji zapsáno

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \tag{5.3}$$

Derivováním rovnice (5.1) získáme vztah

$$\frac{xx'+yy'}{a^2} + \frac{zz'}{b^2} = 1. \tag{5.4}$$

S využitím identity

$$(x'^2+y'^2)(x^2+y^2) - (xy'-x'y)^2 = (xx'+yy')^2$$

a rovnic (5.1), (5.2), (5.3) a (5.4) docházíme po několika snadných úpravách k hledané rovnici

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}[\frac{d(z^2)}{ds}]^2 = \frac{4z^2(z^2+\frac{b^4}{a^2-b^2})(\frac{a^2-c^2}{a^2}b^2 - z^2)}{(z^2+\frac{b^4}{a^2-b^2})^2}. \tag{5.5}$$

Nyní Bydžovský hledá eliptickou funkci $\wp$ proměnné u. Používá pro nás nezvyklého zápisu $\wp u$ namísto $\wp(u)$. Toto nezvyklé značení však nacházíme již u Halphena a řady dalších autorů. Je zřejmé, že Bydžovský pod pojmem eliptické funkce rozumí *Weierstrassovu eliptickou funkci.* Ta se definuje jako inverzní funkce k prvnímu Weierstrassovu kanonickému typu eliptických integrálů:

$$z(s) = \int_s^\infty \frac{dr}{\sqrt{4r^3 - g_2 r - g_3}},$$

kde $g_2,\ g_3$, jsou konstanty. Tento integrál lze též zapsat ve tvaru

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

kde e_i jsou kořeny výrazu pod odmocninou a platí $e_1+e_2+e_3=0$ (čehož lze docílit vhodnou substitucí i v případě, že polynom pod odmocninou obsahuje člen r^2).

Pro Weierstrassovu eliptickou funkci $\wp(u)$ platí identita

$$[\wp'(u)]^2 = 4[\wp(u)]^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

neboli

$$\wp'^2(u) = 4(\wp(u)-e_\alpha)(\wp(u)-e_\beta)(\wp(u)-e_\gamma), \tag{5.6}$$

kde $e_\alpha,\ e_\beta,\ e_\gamma$ je známé značení kořenů rovnice $\wp'^2(u)=0$ a stejně jako v předchozím případě platí $e_\alpha+e_\beta+e_\gamma=0$. Konstanty $g_2,\ g_3$ jsou tzv. invarianty eliptické funkce $\wp(u)$. V našem konkrétním případě (viz rovnice (5.5)) potřebujeme, aby platilo

$$\wp'^2(u) = 4z^2(z^2+\frac{b^4}{a^2-b^2})(\frac{a^2-c^2}{a^2}b^2-z^2).$$

Odtud můžeme odvodit

$$\begin{aligned} z^2 &= \tau^2(e_\beta-\wp(u)), \\ z^2+\frac{b^4}{a^2-b^2} &= \tau^2(e_\alpha-\wp(u)), \\ -z^2+\frac{a^2-c^2}{a^2}b^2 &= \tau^2(\wp(u)-e_\gamma), \end{aligned} \tag{5.7}$$

kde τ je vhodně zvolená konstanta.

Zavedeme-li na křivku $\wp$ jako parametr oblouk (tj. $u=u(s)$) a dosadíme-li výše uvedené vztahy pro parametry eliptické funkce do rovnice (5.5) dostáváme vztah, který musí splňovat element oblouku geodetické křivky,

$$\frac{ds}{du} = \tau\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}(e_\alpha-\wp u). \tag{5.8}$$

Zde by bylo možné Bydžovského práci vytknout absenci podmínky $a^2>b^2$. Autor totiž nikde nezdůrazňuje, že tento výpočet provádí pro elipsoid zploštělý.

Konstanta c má pro zploštělý i protáhlý elipsoid jednoduchý geometrický význam. Každá geodetika se totiž nekonečněkrát dotýká dvou rovnoběžkových kružnic o poloměru c, které jsou souměrně sdružené podle roviny rovníku.

Doposud uvedené rovnice jsou všechny převzaté od Halphena, Bydžovský jejich zavedení nevysvětluje, pouze se odkazuje na zmíněnou knihu.

Po zavedení rovnice geodetických křivek se Bydžovský věnuje průmětům geodetických křivek na rovinu rovníku. Vychází z jednoduchého vztahu, který musí splňovat element oblouku (s_1) průmětu geodetiky.

$$ds_1^2 = ds^2 - dz^2.$$

Použitím vztahů (5.6), (5.7), (5.8) převádí předchozí rovnici na tvar:

$$ds_1 = \tau du\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}(e_\alpha-\wp(u))^2+\tau^2(\wp(u)-e_\alpha)(\wp(u)-e_\gamma)}. \tag{5.9}$$

Po přepočítání výsledku však dostaneme výraz, který již pod odmocninou neobsahuje τ^2. Tato chyba u Bydžovského vznikla při pomocném výpočtu dz z rovnice (5.7), v dalším však již autor pracuje se správným výsledkem.

Pomocí řady dalších úprav pak autor uvádí rovnici průmětu geodetických křivek do roviny rovníku do konečného tvaru:

$$ds_1 = \frac{a}{b}\tau(\wp_1 v - \varepsilon_\alpha)dv. \tag{5.10}$$

Nově zavedená eliptická funkce $\wp_1 v$ se od původní funkce $\wp u$ liší pouze o konstantu

$$\wp_1 v = \wp u + \frac{b^2}{3a^2}(e_\alpha - e_\gamma),$$

Kořeny ε_α, ε_β a ε_γ rovnice $\wp_1'^2 v = 0$ souvisí s hodnotami e_α, e_β a e_γ následovně:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{3a^2}[e_\alpha(3a^2 - 2b^2) + 2b^2 e_\gamma] \\
\varepsilon_\beta &= -\frac{1}{3a^2}[e_\alpha(3a^2 - b^2) + e_\gamma(3a^2 + b^2)] \\
\varepsilon_\gamma &= \frac{1}{3a^2}[b^2 e_\alpha + e_\gamma(3a^2 - b^2)].
\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že je opět splněna rovnost $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0$.

Po odvození rovnice (5.10) Bohumil Bydžovský začíná z druhého konce a zkoumá elipsu o parametrických rovnicích

$$\begin{aligned}
x &= a' \cos\varphi \\
y &= b' \sin\varphi.
\end{aligned}$$

Oblouk této elipsy označuje s_2 a snaží se nalézt vztah pro ds_2, jež by byl formálně shodný s rovnicí (5.10). Opět si vypomáhá eliptickými funkcemi a po řadě výpočtů dochází k rovnici

$$ds_2 = \sqrt{\mu} \cdot (\overline{\wp_1} v - \overline{\varepsilon_\alpha})dv.$$

Mají-li být obě rovnice shodné pro všechna v, musí být splněna podmínka

$$\mu = \frac{a^2}{b^2}\tau^2,$$

dále musí být totožné obě eliptické funkce $\wp_1 v$ a $\overline{\wp_1} v$, což vyžaduje rovnost invariantů a také musí platit $\varepsilon_\alpha = \overline{\varepsilon_\alpha}$. Z poslední podmínky a rovnosti invariantů pak plyne $\varepsilon_\beta = \overline{\varepsilon_\beta}$, $\varepsilon_\gamma = \overline{\varepsilon_\gamma}$, respektive $\varepsilon_\beta = \overline{\varepsilon_\gamma}$, $\varepsilon_\gamma = \overline{\varepsilon_\beta}$, což ovšem vede ke stejnému výsledku.

Z těchto vztahů pak Bydžovský určuje poloosy a', b' elipsy, jež má stejný element oblouku (ds_2) s projekcí geodetiky (ds_1). Dále pak porovnává velikosti průvodičů průmětu geodetiky (r) a elipsy (ρ), odvozuje vztah

$$\rho^2 - r^2 = \frac{c^2}{a^2}(b^2 - a^2) \tag{5.11}$$

a své závěry poté shrnuje do následujících vět:

I. Pro ellipsoid protáhlý je $b^2 > a^2$, tj. $\rho^2 - r^2 > 0$, $\rho^2 = r^2 + k^2$, kde k^2 je veličina kladná. Je pak zřejmo, že naše ellipsa, je-li její střed pevně umístěn *ve vzdálenosti k od středu ellipsoidu kolmo k rovině rovníku, kotálením vytvoří projekci geodetiky, neboť pak skutečně je stále vyplněn vztah (5.11). To je věta Halphenova.*

II. Pro ellipsoid sploštělý je $a^2 > b^2$*, tj.* $r^2 - \rho^2 > 0$*, tedy* $r^2 = \varrho^2 + k^2$*, kde* k^2 *je veličina kladná. I lze z délek* r*,* ρ*,* k *zase sestrojiti pravoúhlý trojúhelník, s tím rozdílem, že v tomto případě je* r *jeho přeponou. I vznikne průmět geodetiky sploštělého ellipsoidu na rovinu rovníku kotálením ellipsy, jejíž střed má od středu ellipsoidu stálou vzdálenost, měřenou kolmo k rovině ellipsy. Jestliže tedy do středu elliptické desky zabodneme kolmo tyčinku délky k a kotálíme elipsu tak, že volný konec tyčinky stále spočívá ve středu ellipsoidu, vytvoří obvod desky projekci geodetiky. Jinak lze si věc představiti takto: přímý kužel elliptický o výšce k, jehož vrchol tkví ve středu ellipsoidu, kotálí se po rovině rovníku; tím se jeho plášť rozvíjí do roviny a ellipsa, jeho řídící křivka, do projekce geodetiky.*

Věty právě dokázané ukazují, jaký je tvar obou projekcí geodetik. Tyto křivky probíhají v nekonečně mnoha shodných elliptických závitech mezi dvěma kružnicemi soustřednými (o poloměrech a, c), jichž se každý závit dvakráte dotkne. Při ellipsoidu protáhlém oba konce téhož závitu přes sebe přesahují, při ellipsoidu sploštělém k sobě nedosahují, tak že závit je otevřen.[4]

Bohumil Bydžovský se poté od projekcí geodetiky vrací zpět ke geodetikám samotným a dokazuje, že i je lze vytvořit kotálením elipsy po elipsoidu:

III. Geodetická čára na sploštělém ellipsoidu vznikne kotálením ellipsy po ellipsoidu. Střed této ellipsy má od středu ellipsoidu pevnou vzdálenost, měřenou kolmo k rovině ellipsy. Jinak a názorněji: přímý kužel elliptický, jehož vrchol tkví ve středu ellipsoidu, kotálí se pro ellipsoidu; jeho řídící křivka se při tom rozvíjí do geodetiky. Je však zřejmo, že lze také nejprve vytvořiti rovinnou křivku kotálením ellipsy – jako v případě projekce geodetiky dle věty II., – střed této křivky umístiti ve středu ellipsoidu a kotáleti ji po ellipsoidu; tak vznikne geodetika.

Pro ellipsoid protáhlý přímý vznik kotálením ellipsy po ploše je málo názorný (střed ellipsy má stálou – nikoliv kolmou – vzdálenost od středu plochy, její průvodič je stále přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jež se pohybuje zároveň s ellipsou). Lépe je představiti si – jako v případě III. – že se vytvoří rovinná křivka kotálením ellipsy, jako pro projekci geodetiky (případ I.), střed této křivky se umístí ve středu plochy a křivka kotálením po ellipsoidu vytvoří geodetiku.[5]

Podobný postup nalezneme již u Karla Schweringa[6] v článku *Neue Geometrische Darstellung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid*[7].

Schwering uvažuje rovnici rotačního elipsoidu ve tvaru

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha} + \frac{z^2}{\beta} = 1. \tag{5.12}$$

Dále autor pravděpodobně používá *Clairautovy věty*, která říká, že kosinus úhlu α, který svírá v daném bodě rotační plochy tečna k rovnoběžkové kružnici

[4] [B20], str. 327–328.

[5] [B20], str. 329–330.

[6] Karl Schwering (1846–1925), německý matematik.

[7] *Zeitschrift für Mathhematik und Physik*, 1879, str. 405–407. Na tento článek mě upozornil prof. Zbyněk Nádeník, za což mu tímto děkuji.

s tečnou geodetické křivky, násobený poloměrem rovnoběžkové kružnice ρ je konstantní.

$$\rho \cdot \cos\alpha = k.$$

Uvažujeme-li tedy plochu o rovnici (5.12), pak je $(x, y, 0)$ vektor určující směr spojnice bodu plochy se středem příslušné rovnoběžkové kružnice. Tečný vektor rovnoběžkové kružnice pak je $(-y, x, 0)$, a je-li geodetická křivka dána parametrickými rovnicemi $q(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, je její tečný vektor (x', y', z'). Geodetické křivky tedy splňují rovnici:

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{x \cdot y' - x' \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = k. \tag{5.13}$$

Schwering používá parametrizaci obloukem, platí tudíž:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Dále snadno nahlédneme, že platí již jednou zmiňovaná identita:

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) - (xx'+yy')^2 = (xy'-x'y).$$

Derivováním rovnice (5.12) získáme vztah

$$\frac{x \cdot x'}{\alpha} + \frac{y \cdot y'}{\alpha} + \frac{z \cdot z'}{\beta} = 0.$$

Dosazením těchto výsledků do rovnice (5.13) docházíme k výsledné diferenciální rovnici geodetické křivky, kterou Schwering předkládá bez předchozího odvození.

$$(1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta} \cdot \frac{z^2}{\beta})dz^2 = (1 - \frac{k^2}{\alpha} - \frac{z^2}{\beta})ds^2. \tag{5.14}$$

Stejně snadno se ukáže, že každá geodetická křivka daná touto rovnicí se bude dotýkat rovnoběžkové kružnice procházející bodem o souřadnicích $x = 0$, $y = k$, $z = \sqrt{\beta(1 - \frac{k^2}{\alpha})}$. Poté tato křivka protne rovník a dotkne se odpovídající shodné rovnoběžkové kružnice, opět protne rovník, dotkne se původní rovnoběžkové kružnice atd. Geodetická křivka leží tedy mezi dvěma symetricky položenými rovnoběžkovými kružnicemi elipsoidu, jichž se nekonečně krát dotýká.

Promítneme-li křivku do roviny rovníku a zavedeme na ní polární souřadnice, dostaneme rovnici:

$$d\varphi = k\frac{\sqrt{\alpha^2-(\alpha-\beta)\varrho^2}}{\sqrt{\alpha}\varrho\sqrt{\varrho^2-k^2}\sqrt{\alpha-\varrho^2}}\, d\varrho. \tag{5.15}$$

Dostáváme rovnice křivky, která se nekonečněkrát dotýká kružnic o poloměrech k a $\sqrt{\alpha}$.

V další části článku Schwering začíná z druhého konce. Uvažuje elipsu o poloosách a a b, jejím středem vede kolmici k rovině elipsy a na ní sestrojí bod ve výšce c. Tento bod pak spojí se všemi body elipsy, čímž dostává přímý eliptický kužel. Nyní tento kužel rozvine do roviny. Snadno se ukáže, že elipsa, která je hranicí podstavy se rozvine do křivky, která celá leží mezi dvěma soustřednými kružnicemi o poloměrech $\sqrt{a^2+c^2}$ a $\sqrt{b^2+c^2}$. Položme

$$x = a\cos\psi, y = b\sin\psi.$$

Vzdálenost středu bázové elipsy od tečny v bodě x, y je dána vztahem

$$p^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}.$$

Vzdálenost vrcholu kužele od této tečny je pak

$$\sqrt{c^2 + p^2}.$$

Po rozvinutí bázové elipsy kužele do roviny a po zavedení polárních souřadnic dostáváme rovnici:

$$d\varphi = \frac{\sqrt{(c^2 + a^2)(c^2 + b^2) - c^2 \varrho^2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2 - c^2} \sqrt{a^2 + c^2 - \varrho^2}} d\varrho \tag{5.16}$$

Chceme ukázat, že za jistých podmínek je tato rovnice formálně shodná s rovnicí (5.15). Porovnáním obou rovnic získáme podmínky

$$b^2 + c^2 = k^2, \quad a^2 + c^2 = \alpha, \quad (c^2 + a^2)(c^2 + b^2) = c^2 \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}.$$

Odtud plyne

$$c^2 = k^2 \frac{\alpha - \beta}{\alpha}, \quad b^2 = k^2 \frac{\beta}{\alpha}, \quad a^2 - b^2 = \alpha - k^2.$$

Schwering zde automaticky předpokládá, že $\alpha > \beta$, což ovšem lze pouze pro případ elipsoidu zploštělého. Nikde v textu však není zmínka o tom, že by byl výpočet provázen pouze pro tento případ.

V závěru shrnuje Schwering své výsledky do věty:

Je-li na rotačním elipsoidu dána libovolná geodetická křivka, pak můžeme vždy sestrojit omezený eliptický kužel, jehož rozvinutá okrajová křivka pláště je identická s projekcí geodetické křivky do roviny rovníku.[8]

Pokusme se dosavadní výsledky shrnout. Nejstarší z těchto prací je Schweringův článek, v němž autor ukazuje, že průměty geodetických křivek na zploštělém elipsoidu na rovinu rovníku lze vytvořit kotálením eliptického kužele. Zřejmě byl přesvědčen o tom, že tak lze vytvořit průměty geodetických křivek na všech typech rotačních elipsoidů. Poté vznikla práce Halphenova, v níž autor za pomoci eliptických funkcí ukazuje, že průměty geodetik na elipsoidu protáhlém lze vytvořit kotálením elipsy. Na něj pak navázal Bohumil Bydžovský, který sice podstatnou část výpočtů převzal od Halphena, ale na rozdíl od svých předchůdců již jasně odlišuje případ elipsoidu protáhlého a zploštělého a navíc vyšetřuje nejen průměty geodetických křivek, ale i křivky samotné.

Bydžovského přístup k řešení problému se však zdá být poněkud komplikovaný, diferenciální rovnici geodetických křivek na rotačním elipsoidu lze snadno nalézt i bez pomoci eliptických funkcí ještě jiným způsobem, než k ní došel Schwering. Vezměme si rovnici rotačního elipsoidu ve zjednodušeném tvaru

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad c > 0. \tag{5.17}$$

[8] Geometrische Darstellung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid, Zeitschrift für Mathhematik und Physik, 1879, str. 407.

„Horní“ polovina elipsoidu má pak parametrické vyjádření

$$p(x, y) = (x, y, c\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Je-li křivka křivkou na ploše, budou oba její původní parametry závislé na novém parametru t, tj. $x = x(t), y = y(t)$. Geodetickou křivkou plochy nazýváme tu její křivku, jejíž oskulační rovina v každém bodě prochází příslušnou normálou plochy. A tedy křivka $p(t)$ na ploše je geodetickou, jestliže vektory $p'(t), p''(t), F$ jsou lineárně závislé.

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \lambda F = (cx, cy, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Pro zpřehlednění výpočtů budu místo $p(t)$ psát pouze p apod.

$$p' = (x', y', c\frac{-xx' - yy'}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}})$$

$$p'' = (x'', y'', c\frac{-(xx' + yy')^2 - (1 - x^2 - y^2)(x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'')}{(1 - x^2 - y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}}).$$

Dostáváme tak podmínku pro to, aby $p(t)$ byla geodetickou křivkou ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x' & y' & c\frac{-xx'-yy'}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ x'' & y'' & c\frac{-(xx'+yy')^2-(1-x^2-y^2)(x'^2+y'^2+xx''+yy'')}{(1-x^2-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ cx & cy & \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{vmatrix} = 0$$

Vynásobíme třetí sloupec $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a poté k němu přičteme cx násobek prvního sloupce a cy násobek druhého sloupce. Determinant se zjednoduší na tvar:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & -c\frac{(xx'+yy')^2}{1-x^2-y^2} - c(x'^2 + y'^2) \\ cx & cy & 1 + (c^2 - 1)(x^2 + y^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud již dostáváme rovnici geodetických křivek na rotačním elipsoidu:

$$\begin{aligned} (1 - x^2 - y^2)[1 + (c^2 - 1)(x^2 + y^2)](x'y'' - x''y')+ \\ +c^2[(x'^2 + y'^2) - (xy' - yx')^2](x'y - y'x) = 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Pro $c = 1$, tedy pro případ kulové plochy, dostaneme integrací hlavní polokružnice.

K podobné rovnici, jako je rovnice (5.18) bychom dospěli i za pomoci již zmiňované *Clairautovy věty*. Napíši zde již jen konečný výsledek:

$$\begin{aligned} (xx' + yy')[(1 - x^2 - y^2)[1 + (c^2 - 1)(x^2 + y^2)](x'y'' - x''y')+ \\ +c^2[(x'^2 + y'^2) - (xy' - yx')^2](x'y - y'x)] = 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že tímto postupem dostáváme navíc podmínku $xx' + yy' = 0$, neboli (po integraci) x^2+y^2 je konstantní, která ovšem neříká nic jiného, než že křivka, splňující tuto rovnici je rovnoběžkovou kružnicí plochy. Snadno nahlédneme, že rovnoběžkové kružnice rovněž splňují podmínku udanou Clairautovou větou.

Je-li křivka na ploše poledníkem, je rovněž křivkou geodetickou. Snadno nahlédneme, že poměr $x(t)$ a $y(t)$ je pro tyto křivky konstantní, což vede k podmínce $xy' - x'y = 0$. Vyloučíme-li poledníky z našich úvah, můžeme rovnici (5.18) násobit výrazem $xy' - x'y$ (který je nenulový). Dostaneme tak rovnici ekvivalentní s původní rovnicí, která je však navíc symetrická v proměnných x, y.

$$\begin{gathered}(1 - x^2 - y^2)[1 + (c^2 - 1)(x^2 + y^2)](x'y'' - x''y')(x'y - xy')+ \\ +c^2[x'^2 + y'^2 - (xy' - x'y)^2](x'y - xy')^2 = 0\end{gathered}$$

Tuto rovnici lze po úpravách převést na tvar

$$\begin{gathered}(1 - x^2 - y^2)[1 + (c^2 - 1)(x^2 + y^2)][(x'^2 + y'^2)(xx'' + yy'')- \\ -(xx' + yy')(x'x'' + y'y'')] + c^2[x'^2 + y'^2 - (x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2)+ \\ +(xx' + yy')^2][(x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2) - (xx' + yy')^2]^2 = 0\end{gathered} \tag{5.19}$$

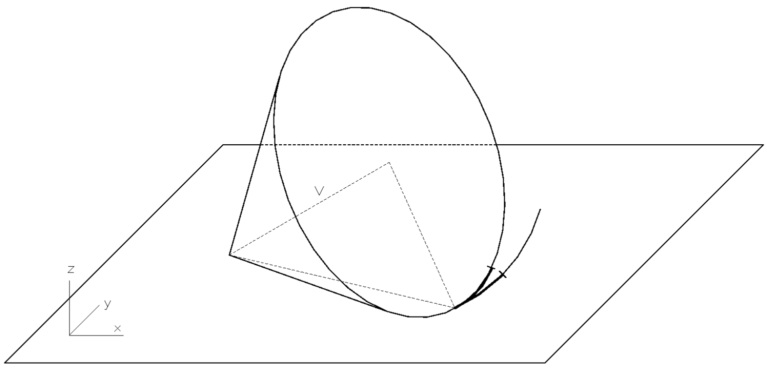
Začněme nyní stejně jako Bydžovský i Schwering z druhého konce. Elipsa o parametrickém vyjádření $[a \cos t, b \sin t]$, kde $a, b > 0$, má tečný vektor $(-a \sin t, b \cos t)$. Druhá mocnina vzdálenosti bodu elipsy od jejího středu je rovna

$$a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t.$$

Pro element ds oblouku elipsy pak platí

$$(\frac{ds}{dt})^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t.$$

Tytéž dvě rovnice splňuje i elipsa, kterou dostaneme otočením elipsy původní okolo počátku.



Obrázek 5.1:

Podívejme se nejprve na případ valení přímého eliptického kužele o výšce v s vrcholem v počátku po rovině xy (obr. 5.1). Vztah pro vzdálenost bodu dotyku podstavné elipsy kužele (nechť se jedná o elipsu právě zmíněnou) s rovinou xy od vrcholu kužele snadno určíme z Pythagorovy věty[9]

$$x^2 + y^2 = v^2 + a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$$

Element oblouku kotálející se elipsy musí být stejný jako element oblouku vytvořené křivky, musí tedy platit

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t.$$

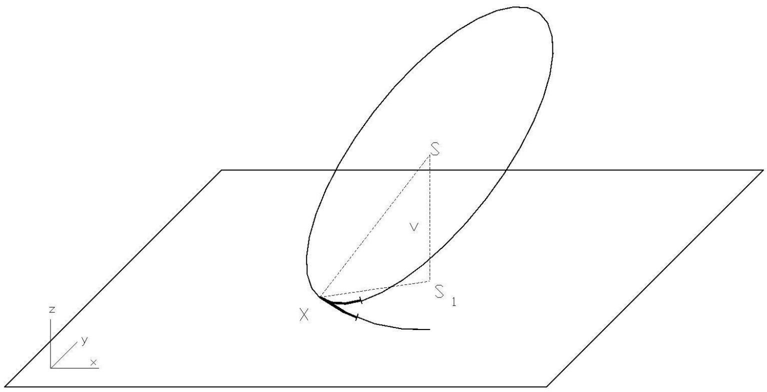
[9] Jedná se o druhou mocninu průvodiče vytvořené křivky.

Podobné vztahy odvodíme i pro případ kotálení elipsy (obr. 5.2), jejíž střed leží na ose z ve vzdálenosti v od roviny xy. Vzdálenost bodu dotyku elipsy s rovinou xy od počátku je[10]

$$x^2 + y^2 = -v^2 + a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t.$$

Pro oblouk odvalené křivky bude stejně jako v předchozím případě platit

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t.$$



Obrázek 5.2:

Abychom mohli obě tyto varianty vyšetřovat najednou, zavedeme místo v^2, resp. $-v^2$ novou proměnnou m ($m \in R$).

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= m + a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t \\ x'^2 + y'^2 &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Z těchto rovnic lze odvodit následující vztahy

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= (b^2 - a^2) \sin t \cos t, \\ x'x'' + y'y'' &= (a^2 - b^2) \sin t \cos t, \\ xx'' + yy'' &= -a^2 \cos^2 t - b^2 \sin^2 t. \end{aligned}$$

Nyní se ptáme, zda můžeme zvolit hodnoty a, b a m tak, aby se křivky vzniklé jedním z výše popsaných pohybů shodovaly s projekcemi geodetických křivek.

Dosazením těchto pěti rovnic do rovnice (5.19) dostáváme podmínky

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)^2[(c^2 - 1)a^2 b^2 + c^2(1 - m)m] = 0 \\ a^2(m + b^2 - 1)[b^2 + (m + b^2)(b^2 c^2 - b^2 - c^2 a^2)] = 0 \\ a^2(a^2 - b^2)(m + b^2 - 1)(b^2 c^2 - b^2 + c^2 m) = 0 \end{aligned}$$

Proveďme nyní diskusi těchto rovnic. Varianta, kdy a nebo b je nulové, vede k poledníkům, není ji tedy třeba blíže vyšetřovat.

I. $a^2 = b^2 \neq 0$. První a třetí rovnost jsou tím splněny, ze druhé rovnosti dostáváme vztah

$$a^2 b^2 (m + b^2 - 1)^2 = 0.$$

[10] Opět se jedná o druhou mocninu průvodiče.

Platí tedy $a = b$ a $m = 1 - b^2$. Dosazením do první z rovnic (5.20) vidíme, že se v tomto případě jedná o rovník

$$x^2 + y^2 = 1 - b^2 + b^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = 1.$$

II. Uvažujme nyní $a^2 \neq b^2 \ \wedge \ m + b^2 - 1 = 0$. Vidíme, že druhá a třetí rovnice jsou splněny automaticky, z první rovnice dostáváme po úpravách

$$c^2 m = a^2(1 - c^2).$$

Jelikož je $c^2 > 0, \ a^2 > 0$, závisí znaménko m na znaménku výrazu $1 - c^2$. A tedy platí

$$m > 0 \Leftrightarrow c < 1,$$
$$m < 0 \Leftrightarrow c > 1,$$

První případ vede k elipsoidu zploštělému a můžeme tedy nahradit $m = v^2$. Ve druhém případě se jedná o elipsoid protáhlý a lze psát $m = -v^2$.

III. $a^2 \neq b^2 \ \wedge \ m + b^2 - 1 \neq 0$ Vyšetřováním tohoto případu bychom dospěli ke stejným závěrům jako ve II., stačí zaměnit hodnoty a a b.

Na obrázcích (5.3) jsou zobrazeny části průmětů geodetických křivek na rovinu rovníku na zploštělém elipsoidu pro různě hodnoty $a, \ b, \ m$.

Vrátíme-li se ještě k případu II., snadno nahlédneme, že v případě $c = 1$ dostáváme $m = 0$. Zde můžeme krásně sledovat přechod od elipsoidu protáhlého, resp. zploštělého ke kulové ploše. Bude-li se hodnota c blížit k jedné, bude se hodnota m blížit k nule. Pro případ elipsoidu zploštělého se tedy bude zmenšovat výška eliptického kužele, až tento kužel přejde v elipsu se středem v počátku, ležící v rovině xy. Podobně pro případ elipsoidu protáhlého se bude postupně zmenšovat vzdálenost středu kotálející se elipsy od roviny xy, až přejde v elipsu ležící v této rovině.

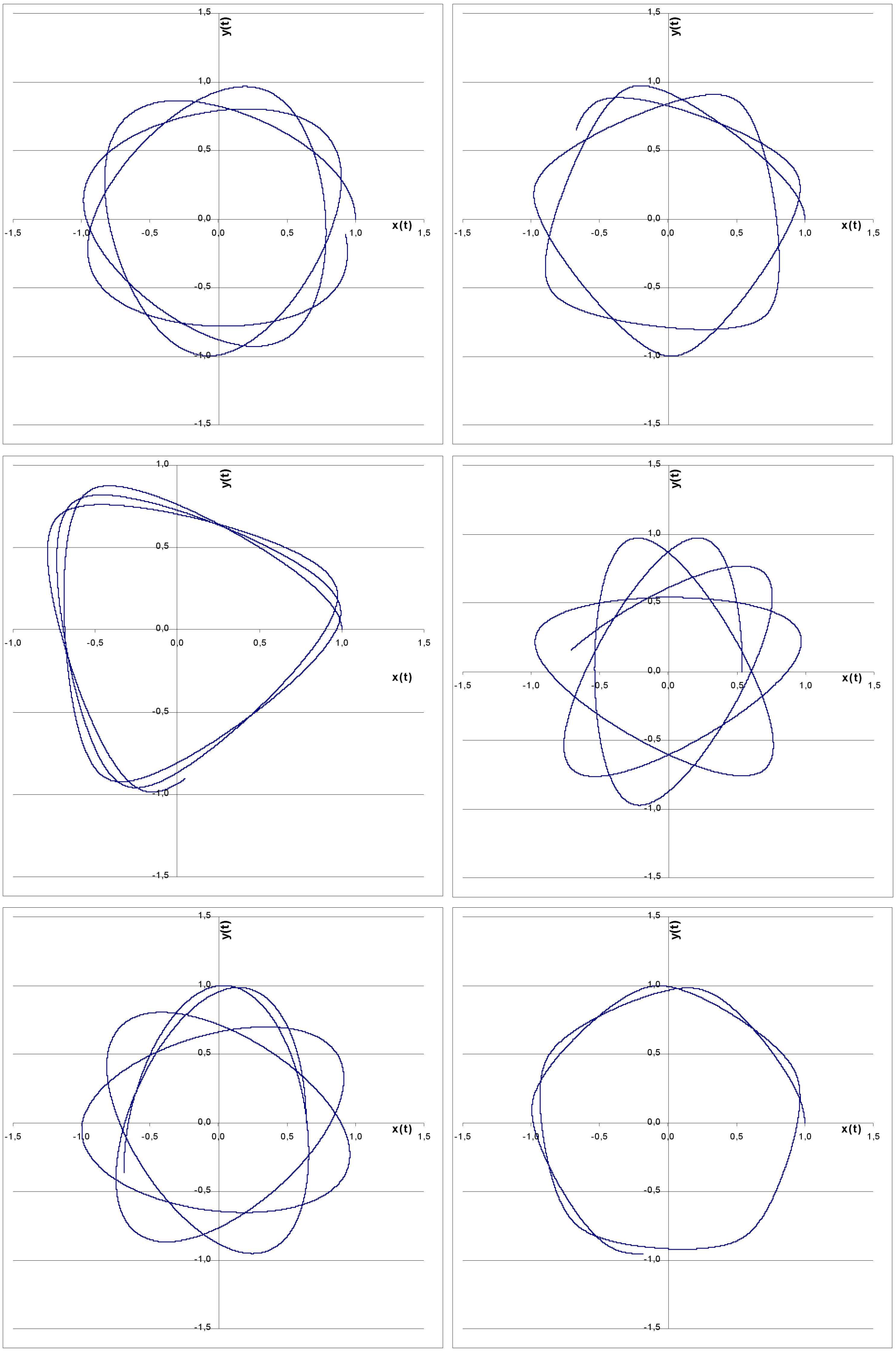
Podařilo se nám tedy bez použití Weierstrassovy funkce odvodit stejný výsledek, k němuž dospěl Bydžovský. A tedy, že kotálením elipsy o pevném středu ve vzdálenosti v od roviny rovníku, resp. kotálením přímého eliptického kužele o výšce v s vrcholem ve středu plochy, lze vytvořit projekce geodetických křivek na protáhlém, resp. zploštělém elipsoidu.

Zde je ještě potřeba dodat, že každá geodetická křivka je jednoznačně určena počátečními podmínkami, tj. jedním svým bodem a tečným směrem v tomto bodě. Lze tedy tímto způsobem určit průměty všech geodetických křivek na rotačních elipsoidech.

S řešením problému geodetických křivek na zploštělém rotačním elipsoidu se můžeme setkat i v učebnici *Deskriptivní geometrie II* od autorů Kadeřávka, Klímy a Kounovského[11]. Nacházíme zde návod ke konstrukci geodetické křivky procházející bodem ležícím na rovníku, určené tečným vektorem v tomto bodě, při níž se autoři odvolávají na Bydžovského výsledky. Na rozdíl od všech dosud zmiňovaných prací se zde jedná se o postup syntetický, nikoliv analytický.

Ve své druhé práci věnované této problematice Bohumil Bydžovský navazuje na své předchozí výsledky a snaží se problém řešit obecně pro středové rotační

[11]str. 909–911.



Obrázek 5.3:

plochy druhého stupně. Opět si klade za cíl určit křivky, jejichž kotálením lze vytvořit projekce geodetických křivek resp. tyto křivky samotné, přičemž kotálení je stejně jako v první práci toho druhu, při němž rozdíl čtverců průvodičů kotálející se křivky a křivky vytvořené je konstantní.

Element oblouku hledané křivky (označuje ho narozdíl od předchozí práce σ) musí být shodný s elementem oblouku křivky vytvořené, musí tedy, vrátíme-li se k vzorci (5.10), platit

$$d\sigma = \frac{a}{b}\tau(\wp_1 v - \varepsilon_\alpha)dv. \tag{5.21}$$

Pro průvodič projekce geodetiky autor v předchozí práci odvodil vztah:

$$\rho_1^2 = \frac{a^2\tau^2}{b^2}\wp_1 v + \frac{2a^4 + c^2(a^2+b^2)}{3a^2}.$$

Má-li být rozdíl čtverců průvodičů konstantní, musí průvodič hledané křivky splňovat rovnici

$$r^2 = \frac{a^2\tau^2}{b^2}(\wp_1(v) - k), \tag{5.22}$$

kde k je konstanta. Hledaná křivka musí vyhovovat rovnicím (5.21) a (5.22). K jejich řešení Bydžovský využívá polárních souřadnic. Polární úhel v rovině hledané křivky označuje ϑ, pro stručnost dále zavádí značení $\wp_1 v = \omega$, $\wp_1' v dv = d\omega$. Po řadě úprav pak převádí rovnici (5.21) do tvaru

$$d\vartheta = \frac{d\omega}{2(\omega - k)}\sqrt{\frac{k\ \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma - \omega(2\varepsilon_\alpha + k)}{(\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma)}}. \tag{5.23}$$

Jelikož výraz $2\varepsilon_\alpha + k$ obecně není roven nule, může zavést „pohodlnější“ konstantu ε vztahem

$$\varepsilon = \frac{k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma}{2\varepsilon_\alpha + k}$$

Po úpravě dostává

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2(\omega - k)}\frac{(\omega - \varepsilon)d\omega}{\sqrt{(\omega-\varepsilon)(\omega-\varepsilon_\beta)(\omega-\varepsilon_\gamma)}}, \tag{5.24}$$

kde $\Delta = -(2\varepsilon_\alpha + k)$. Pro další výpočty pak zavádí do vztahu Weierstrassovu funkci ω' (později ji označuje $\wp u$ (tato funkce je jiná než ta, s níž pracuje v prvním článku)), která se od funkce ω liší pouze o konstantu m, volenou tak, aby součet kořenů rovnice $d\omega'^2 = 0$ (ε_α', ε_β', ε_γ') byl nulový. Po integraci a několika dalších úpravách pak dochází ke konečné rovnici

$$\begin{aligned}\tfrac{\vartheta-\vartheta_0}{\sqrt{\Delta}}\wp'(u_0) &= -u[\wp'(u_0) + 2(\wp(u_0) - \varepsilon_\alpha')\zeta(u_0)] + \\ &+ (\wp(u_0) - \varepsilon_\alpha')\log\tfrac{\sigma(u_0+u)}{\sigma(u_0-u)},\end{aligned} \tag{5.25}$$

kde

$$\wp(u_0) = m + k = \frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon}{3} + k$$

a ζ značí funkci známou z teorie eliptických funkcí[12]. Rovnici (5.22) pak snadnou úpravou převádí na tvar

$$r^2 = \frac{a^2\tau^2}{b^2}(\wp u - \wp u_0).^{13} \tag{5.26}$$

Rovnice (5.25) a (5.26) vyjadřují parametricky polární souřadnice bodu hledaných křivek, úkol vytyčený v úvodu je tedy tímto splněn. Bydžovský k tomu dodává, že

...lze k vždy voliti tak, aby pro každou geodetickou křivku odpovídalo tomuto analytickému řešení reálné řešení geometrické.[14]

Vhodnou volbou konstanty k se může nalezená křivka výrazně zjednodušit. Bohumil Bydžovský věnuje další, velice podstatnou část článku hledání takových možností, kdy eliptické funkce, které se v řešení vyskytly, degenerují. Vrátíme-li se zpět k rovnici (5.23), vidíme, že pro $2\varepsilon_\alpha + k = 0$ nebude zde obsažený integrand obecně eliptický (zůstává zde odmocnina pouze z kvadratického trojčlenu). Z rovnice (5.24) je zase patrné, že pokud hodnota ε splyne s některou z hodnot ε_β, ε_γ, nebudou kořeny příslušné eliptické funkce různé, což pro obecnou geodetiku nenastává. Bydžovský se tedy podrobně věnuje těmto třem případům:

I. $k = -2\varepsilon_\alpha$
II. $\varepsilon = \varepsilon_\beta$
III. $\varepsilon = \varepsilon_\gamma$

I. Pro první variantu snadno odvozuje, že tyto křivky lze vhodnými úpravami převést na tvar

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

kde

$$a'^2 = \frac{b^2c^2}{a^2},\ b'^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} + a^2 - c^2.$$

Jedná se o kuželosečku, jejíž poloosy jsou vyjádřeny konstantami , určujícími geodetiku. Pro rozdíl druhých mocnin průvodičů platí vztah

$$r^2 - \rho_1^2 = \frac{c^2}{a^2}(b^2 - a^2).$$

Poté provádí diskusi řešení vzhledem k velikosti c a vzhledem ke znaménku a^2, b^2 (bereme-li $a,\ b \in \mathbf{C}$). Své závěry shrnuje následovně:

Projekce geodetik rotačních ellipsoidů a jednoho druhu geodetik rotačního hyperboloidu jednoplochého na rovinu rovníku lze vytvořiti kotálením kuželoseček; pro ellipsoidy ellipsy, pro hyperboloidy hyperboly. Při ellipsoidu protáhlém je střed kotálející se ellipsy pevný; v obou zbývajících případech běží o valení přímého kužele, majícího příslušnou kuželosečku za základnu, po rovině.[15]

[12]Jde o jednu z Weierstrassových funkcí. S funkcí $\wp(u)$ souvisí následujícím vztahem $\wp = -\zeta'(u)$. Bydžovský ve své práci používá vztah známý z teorie eliptických funkcí

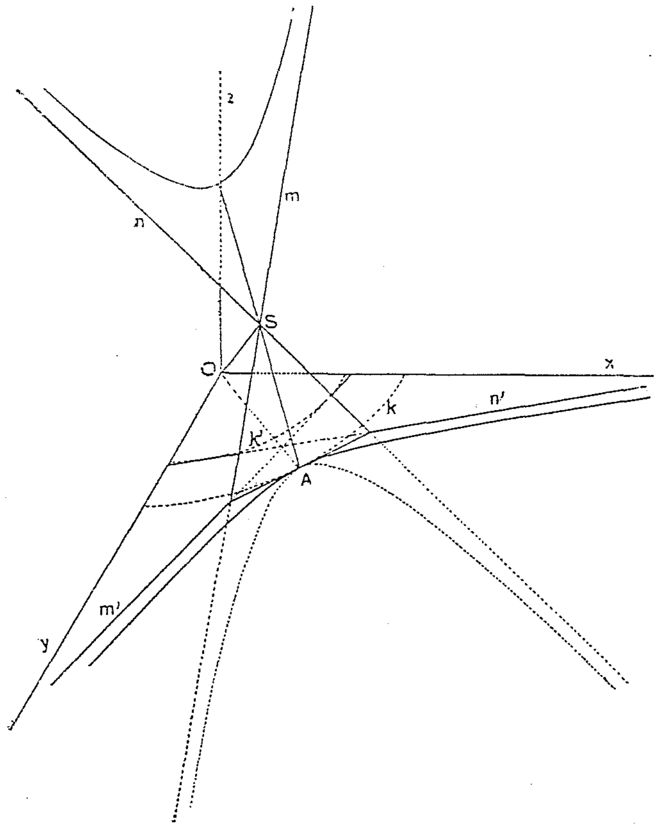
$$\frac{\wp'(u_0)}{\wp(u_0) - \wp(u)} = \zeta(u_0 + u) + \zeta(u_0 - u) - 2\zeta(u_0).$$

[13]Za povšimnutí stojí Bydžovského nejednotnost ve značení Weierstrassovy eliptické funkce. Ve dvou po sobě následujících vzorcích používá jednou zápis bez závorek $\wp u_0$ (viz vzorec (5.25)), podruhé se závorkami $\wp(u_0)$ (viz (5.26)).

[14][B32], str. 158.

[15][B32], str. 161.

Rotačním elipsoidům je věnována celá předchozí práce, Bydžovský se proto dále soustřeďuje pouze na případ jednodílného hyperboloidu. Podrobně popisuje průběh kotálení, vychází při tom z takové polohy, v níž se kotálející se hyperbola dotýká roviny rovníku svým vrcholem A (obr. 5.4 [16]).



Obrázek 5.4:

V této poloze jedna větev hyperboly, na př. ta, jež se roviny dotýká, je pod rovinou rovníku, druhá nad ní; střed hyperboly S a tedy i spojnice jeho se středem plochy nad rovinou. Když nastane kotálení některým směrem, vzdaluje se dotyčný bod od kružnice rovníkové; střed hyperboly se sklání k rovině rovníku. Střed tento octne se v rovině rovníku, když dotyčný bod vzdálí se do nekonečna; pak rovina hyperboly protíná rovinu rovníku kolmo v jedné asymptotě hyperboly. Ježto každá tečna kotálející se hyperboly v bodě dotyčném s rovinou je zároveň tečnou křivky vytvořené, je asymptota hyperboly v této poloze zároveň asymptotou projekce geodetiky.

Další kotálení děje se tak, že druhá větev hyperboly se počne dotýkati roviny; střed hyperboly klesá pod rovinu, dostoupí nejnižšího místa, když se roviny dotkne druhý vrchol hyperboly, a stoupá pak k rovině, v níž se ocitne současně s druhou asymptotou hyperboly. Pak opět kotálení přejde na první větev hyperboly a tak se věc stále opakuje. Tímto způsobem vznikne nekonečně mnoho shodných větví tvaru hyperbolického, vytvořených střídavě jednou a druhou větví hyperboly.[17]

Každé dvě takto po sobě vytvořené větve mají společnou asymptotu a leží

[16]Obrázek byl převzat z Bydžovského práce.
[17][B32], str. 163.

po téže její straně. Bydžovský dokazuje větu, že úhel dvou asymptot kotálející se hyperboly je menší, než úhel obou asymptot téže větve křivky, která kotálením vzniká. Poté zkoumá, jak se mění projekce geodetiky, když c nabývá všech přípustných hodnot od 0 do $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

II.+III. Vyšetřováním případů, kdy $\varepsilon = \varepsilon_\beta$, resp. $\varepsilon = \varepsilon_\gamma$, Bydžovský dochází k velice podobným rovnicím, a to pro II.:

$$r[e^{(\vartheta-\vartheta_0)\sqrt{\frac{a^2(c^2-a^2)}{b^2c^2+a^4-a^2c^2}}} - e^{-(\vartheta-\vartheta_0)\sqrt{\frac{a^2(c^2-a^2)}{b^2c^2+a^4-a^2c^2}}}] = 2\sqrt{a^2-c^2}, \tag{5.27}$$

resp. pro případ III.:

$$r[e^{(\vartheta-\vartheta_0)\sqrt{\frac{a^2(c^2-a^2)}{b^2c^2}}} - e^{-(\vartheta-\vartheta_0)\sqrt{\frac{a^2(c^2-a^2)}{b^2c^2}}}] = 2\sqrt{a^2-c^2}, \tag{5.28}$$

Rozdíl čtverců průvodičů $r^2 - \rho_1^2$ je pak v prvním případě roven $-a^2$, ve druhém $-c^2$. Bydžovský pak pro oba případy provádí podrobnou diskusi podle toho, zda a^2-c^2 je číslo kladné, resp. záporné. Vesměs dochází k různým typům geodetik na jednodílném či dvojdílném hyperboloidu.

Zajímavá je geometrická interpretace těchto výsledků. Obě rovnice (5.27) a (5.28) jsou téhož tvaru, každá z nich ovšem určuje dvě podstatně odlišné křivky, podle toho, je-li exponent reálný, nebo ryze imaginární.

V prvním případě jsou obě rovnice tvaru

$$r[e^{A(\vartheta-\vartheta_0)} - e^{-A(\vartheta-\vartheta_0)}] = 2B, \tag{5.29}$$

kde A, B jsou reálná čísla. Podrobným zkoumáním tohoto případu však Bydžovský dochází k závěru, že

...že užitím křivky (5.29) nelze sledovati vznik projekce geodetiky kotálením, ježto některým bodům této křivky bychom se blížili jen asymptoticky,[18]

a dále se případem nezabývá. Ve druhém případě mají rovnice (5.27) a (5.28) tvar

$$r[e^{Ai(\vartheta-\vartheta_0)} - e^{-Ai(\vartheta-\vartheta_0)}] = 2iB, \tag{5.30}$$

kde A a B jsou opět čísla reálná. Tuto rovnici lze též psát v jednodušším tvaru

$$r \sin A(\vartheta - \vartheta_0) = B.$$

Bydžovský dokazuje, že kotálením křivky o této rovnici, při němž je rozdíl čtverců průvodiče kotálející se křivky a průvodiče křivky vytvořené stálý, lze vytvořit projekce všech geodetik rotačních hyperboloidů.

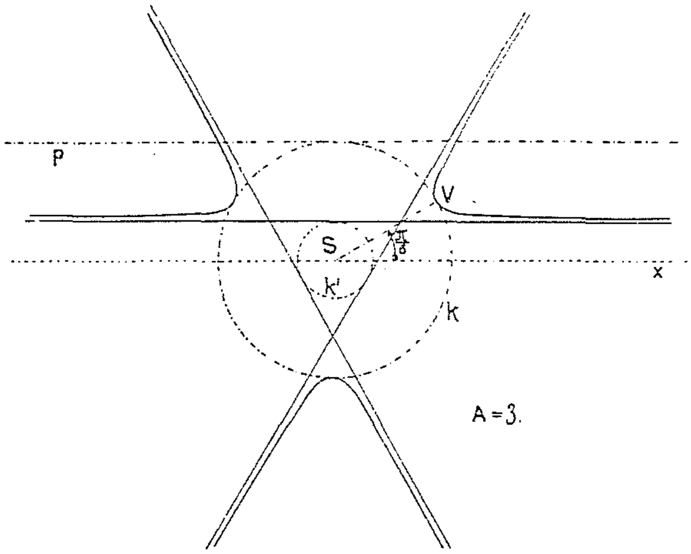
Jelikož změna konstanty ϑ_0 znamená pouze otočení křivky, stačí uvažovat pouze případ $\vartheta_0 = 0$, tedy křivku o rovnici

$$r \sin A\vartheta = B.$$

Z této rovnice hned poznáme, pro které hodnoty úhlu bude průvodič nekonečný ($0, \frac{\pi}{A}, \frac{2\pi}{A}, \ldots$) a pro které bude minimální, tedy roven B ($\frac{\pi}{2A}, \frac{3\pi}{2A}, \frac{5\pi}{2A}, \ldots$).

Když ϑ se mění od 0 do $\frac{\pi}{A}$, proběhne bod souměrnou větev sahající do nekonečna, jež se dotýká kružnice o poloměru B*; když ϑ roste dále od $\frac{\pi}{A}$ do $\frac{2\pi}{A}$, změní* r *znaménko a bod proběhne větev s předchozí shodnou, položenou ve vedlejším úseku roviny, avšak opačně orientovanou.*[19]

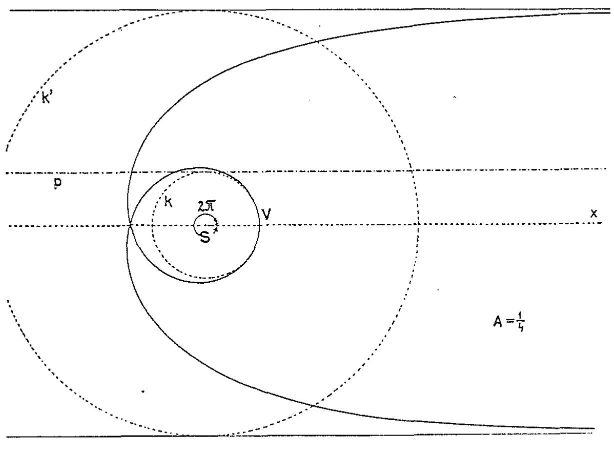
[18] [B32], str. 172.
[19] [B32], str. 173.



Obrázek 5.5:

Každá větev křivky má dvě asymptoty, které spolu svírají úhel $\frac{\pi}{A}$. Dvě po sobě jdoucí větve mají vždy jednu asymptotu společnou a leží po téže její straně.

Je zajímavé sledovat, jak se mění průběh větví křivky v závislosti na hodnotě A. Pro $A > 1$ bude úhel asymptot jedné větve menší než π a křivka se bude kružnice o poloměru B dotýkat vně. S klesajícím A se bude úhel asymptot zvětšovat až pro $A = 1$, přejde vytvořená křivka v přímku. Pro $A < 1$ bude úhel asymptot větší než π a kružnice o poloměru B se bude křivky dotýkat uvnitř. Pro $A = \frac{1}{2}$ budou asymptoty křivky navzájem rovnoběžné. Pro hodnoty menší než $\frac{1}{2}$ bude větev křivky sama sebe protínat. Na vložených obrázcích[20] (5.5) a (5.6) je celá situace znázorněna pro $A = 3$ a $A = \frac{1}{4}$.



Obrázek 5.6:

Počet větví této křivky je konečný, je-li A racionální číslo, v opačném případě je nekonečný.

[20] Obrázky jsou převzaty z Bydžovského práce.

Bohumil Bydžovský v dalším textu postupně rozebírá jednotlivé případy geodetik na jednodílném i dvojdílném hyperboloidu, popisuje jejich vznik kotálením právě popsaných křivek. Co se týče hyperboloidů jednodílných, jedná se vždy o ten druh kotálení, kdy střed kotálející se křivky není pevný, má však konstantní vzdálenost od středu plochy (valení přímého kužele po rovině rovníku, jehož řídící křivka je křivka právě zmíněná a jehož vrchol leží ve středu plochy). V případě hyperboloidu dvojdílného se jedná vždy o kotálení křivky, jejíž rovnice v polárních souřadnicích má tvar $r \sin A\vartheta = B$ $(A < 1)$, po rovině rovníku, při němž je střed kotálející se křivky pevný. Jeho vzdálenost od středu plochy, kolmo k rovině rovníku, je rovna vedlejší poloose hyperboloidu.

V posledních odstavcích článku, stejně jako v práci předchozí, se autor vrací zpět od průmětů geodetik ke geodetikám samotným a zkoumá křivky jejichž kotálením lze geodetiky vytvořit a dochází k velice podobným závěrům.

Bydžovský v těchto dvou článcích opět ukázal další z možných aplikací eliptických funkcí, tentokráte v geometrii diferenciální.

Kapitola 6

Teorie rovinných konfigurací

Kdybychom měli posuzovat Bydžovského výsledky podle počtu lidí, kteří na něj navázali, pak daleko nejúspěšnější by byl v oblasti rovinných konfigurací. Díky jeho podnětům se dokonce rozhořela soutěž mezi studenty Bohumila Bydžovského a berlínského matematika Maxe Zachariase, ve které nakonec jasně zvítězili naši matematici, jak se ještě později zmíním.

O tomto tématu sepsal Bohumil Bydžovský celkem 5 prací v rozmezí let 1927 až 1954. První z jeho prací se tematicky odlišuje od ostatních, dá se říci, že vážněji se touto problematikou začal zabývat až v roce 1939, kdy vyšel jeho první článek o rovinných konfiguracích typu $(12_4, 16_3)$.

Soustavu bodů a přímek v rovině nazýváme konfigurací, jestliže na každé přímce soustavy leží více než dva body soustavy a každým bodem soustavy prochází alespoň dvě přímky soustavy. Konfigurace obsahující m bodů a n přímek se značí (m_p, n_q), jestliže každým z těchto bodů prochází p přímek a na každé z těchto přímek leží q bodů. Je zřejmé, že pak platí

$$mp = nq.$$

Abychom se mohli s konfiguracemi blíže seznámit, je potřeba ještě zavést několik pojmů. Říkáme, že dva konfigurační body A, B jsou spojeny, leží-li na jedné konfigurační přímce. Neleží-li na jedné konfigurační přímce, říkáme, že takovéto dva body jsou odděleny. První případ zapisujeme $A - B$, druhý $A : B$. Přímka, na které leží q konfiguračních bodů, nemusí být nutně konfigurační, pro takovou přímku byl zaveden pojem *cizí přímka.*

Velký zájem Bydžovského poutaly právě konfigurace typu $(12_4, 16_3)$, jejichž body v některých případech leží na kubické křivce. Sám prof. Max Zacharias konstatuje, že

> *... až do zásahu Bydžovského panoval obecný názor, že jsou možné jen dvě různé konfigurace tohoto typu, z nichž jednu objevil Hesse a druhou de Vries ...* [1]

Tradičně byly tyto konfigurace označovány AI a AII a někdy jsou též obě nazývány de Vriesovy [2], ačkoliv první z nich znali již matematici Hesse [3], Sal-

[1] Viz článek Metelka, J., *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie 5, 1960, str. 606.

[2] De Vries, J., *Über gewisse ebene Konfigurationen*, Acta mathematica 12, 1889, str. 67.

[3] Hesse, O., *Über Curven dritter ordnung ...*, J. reine angew. Math. 36, 1848, str. 153–176, a řada dalších prací.

mon [4] a Reye [5]. Konfiguraci AI objevil tedy již roku 1848 německý matematik Ludwig Otto Hesse (1811–1874). Lze ji popsat následovně: vedeme-li ze tří bodů kubiky rodu jedna, které leží na přímce, tečny k této křivce, dostaneme dvanáct dotykových bodů, z nichž vždy tři leží na přímce a každým z těchto bodů prochází 4 přímky, obsahující ještě další dva z těchto bodů. Označíme-li konfigurační body malými písmeny u_i, v_i, w_i $(i = 1 \dots 4)$, lze schema této konfigurace zapsat následovně, přičemž každý sloupeček tabulky reprezentuje jednu konfigurační přímku:

u_1	×	×	×	×												
u_2					×	×	×	×								
u_3									×	×	×	×				
u_4													×	×	×	×
v_1	×				×				×				×			
v_2		×				×				×				×		
v_3			×				×				×				×	
v_4				×				×				×				×
w_1	×					×					×					×
w_2		×			×							×			×	
w_3			×					×	×					×		
w_4				×			×			×			×			

tab. 1

Takovýto popis konfigurace se nazývá úplné schéma. Konfigurace může být definována i několika úplnými schématy. Ta však mají tu vlastnost, že přechází jedno na druhé při použití některé permutace bodů $u_1, \dots w_4$. Takovým schématům pak říkáme ekvivalentní.

S Hesseovým jménem bývá spojována ještě jiná konfigurace bodů ležících na kubické křivce. Této konfiguraci se Bohumil Bydžovský věnuje ve své učebnici Úvod do algebraické geometrie. Jedná se o konfiguraci inflexních bodů kubiky rodu jedna, která je typu $(9_4, 12_3)$. Bydžovský zde mimo důkazu, že tyto body skutečně tvoří zmíněnou konfiguraci rovněž dokazuje, že:

> *. . . každá konfigurace* $(9_4, 12_3)$ *je skupinou devíti inflexních bodů a dvanácti inflexních přímek kubiky rodu jedna.* [6]

Roku 1889 uvedl J. de Vries konfiguraci odlišnou od AI, která na rozdíl od Hesseovy konfigurace může ležet i na kubice rodu nula [7]. Obě konfigurace se skládají ze tří čtveřic bodů takových, že body čtveřice jsou navzájem odděleny. De Vriesouvu konfiguraci lze popsat schématem uvedeným v tabulce tab. 2.

[4] Salmon, G., *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 1873, čl. 151, 152.
[5] Reye, T., *Konstruction der Konfigurationen*, Acta mathematica 1, 1882, str. 97.
[6] [B103], str. 434.
[7] Důkaz můžeme nalézt např. v Bydžovského článku [B106], str. 251.

u_1	×				×				×				×			
u_2		×			×					×				×		
u_3			×			×			×						×	
u_4				×		×				×						×
v_1	×	×	×	×												
v_2					×	×	×	×								
v_3									×	×	×	×				
v_4													×	×	×	×
w_1	×						×				×					×
w_2		×						×			×				×	
w_3			×				×					×		×		
w_4				×				×				×	×			

tab. 2

Lze snadno nahlédnout, že tři čtveřice navzájem oddělených bodů jsou u_1, u_4, w_2, w_3; u_2, u_3, w_1, w_4 a body v_i. Tabulkový způsob zápisu, který zde používám, převzal ve svých pozdějších pracích Bohumil Bydžovský z prací Maxe Zachariase.

Bohumil Bydžovský a hlavně pak jeho následovníci objevili celou řadu dalších konfigurací tohoto typu a podrobili je velice detailnímu zkoumání.

Vraťme se ale na začátek. První práce, v níž se Bydžovský zabývá rovinnými konfiguracemi, vyšla roku 1927 ve Věstníku královské české akademie, a nese název ***Příspěvek k teorii Brianchonovy konfigurace***. Jak jsem již zmínila výše, tato práce se od ostatních liší. Bydžovský zde vychází ze známé Brianchonovy věty, která říká, že tři spojnice protilehlých vrcholů šestiúhelníku opsaného kuželosečce se protínají v jednom bodě. Každých pět ze šesti vrcholů Brianchonova šestirohu určuje kuželosečku. V každém vrcholu pak uvažujme tečnu té kuželosečky, jež neobsahuje protilehlého vrcholu. Bydžovský v článku dokazuje, že:

...každou trojicí vrcholů, z nichž žádné dva nejsou protilehlé, prochází pak kuželosečka, jež se v nich dotýká přímek sestrojených v těchto bodech způsobem právě uvedeným.[8]

Tečny vedené ve vrcholech Brianchonova šestirohu nám vytváří šestiroh nový, který autor stručně nazývá sdruženým opsaným šestistranem. Vrcholy Brianchonova šestirohu označuje Bydžovský číslicemi 1, 2, 3, $1'$, $2'$, $3'$ (kde 1, $1'$ a pod. jsou vrcholy protilehlé), zatímco vrcholy sdruženého šestistranu označuje římskými číslicemi I, II, III, I', II', III'. O tomto šestistranu pak dokazuje, že si s Brianchonovým šestirohem odpovídá v polaritě tak, že

...každému vrcholu odpovídá strana procházející vrcholem protilehlým.[9]

Z polarity těchto dvou útvarů vyplývá, že průsečíky přímek (I, I'), (II, II'), (III, III') leží na téže přímce, která v polaritě odpovídá průsečíku přímek $1, 1'$, $2, 2'$, $3, 3'$. Přímky I, II, III, I', II', III' tedy tvoří šestistran Pascalův.

V dalším textu pak Bydžovský ukazuje, že:

Vrcholy Brianchonova šestirohu prochází kubická křivka, které je příslušný sdružený opsaný Pascalův šestistran opsán.[10]

[8] [B62], str. 3.
[9] [B62], str. 8.
[10] [B62], str. 9.

K důkazu, jak je již u něj zvykem, využívá eliptických funkcí, aby pak mohl ukázat souvislost celé práce se zmiňovanou Hesseovou konfigurací AI.

Z dvanácti bodů Hesseovy konfigurace lze sestaviti 12 způsoby Brianchonovy šestirohy; protilehlé vrcholy každého z nich jsou vždy dvojice sdružených bodů téže soustavy na příslušné kubické křivce.[11]

Pod pojmem sdružené body téže soustavy má autor na mysli body, jejichž parametry $u,\ v$ splňují rovnost

$$u \equiv v + \omega,$$

kde ω je poloperiodou zmiňované eliptické funkce. Takovými body jsou v našem případě dvojice protilehlých vrcholů Brianchonova šestirohu.

Od roku 1939 se pozornost Bohumila Bydžovského zaměřila již výhradně na hledání nových konfigurací typu $(12_4, 16_3)$. První takovou konfiguraci představil světu v německy psaném článku ***Über eine ebene Konfiguration*** $\boldsymbol{(12_4, 16_3)}$.

Procházejí-li každým bodem konfigurace čtyři přímky, je tento bod spojen s dalšími 8 body, jelikož každá konfigurační přímka obsahuje tři konfigurační body. Tento bod je tedy od zbývajících tří konfiguračních bodů oddělen. Do té doby známé konfigurace byly toho typu, že jejich dvanáct bodů bylo možno rozdělit do tří čtveřic takových, že každý bod jedné čtveřice je spojen s body zbylých dvou čtveřic a oddělen od bodů téže čtveřice. Bydžovský ve své práci vytváří konfiguraci novou, která tuto podmínku nesplňuje. Tato nová konfigurace leží na kubické křivce rodu 1, kterou autor parametrizuje pomocí eliptických funkcí tak, že kolineárnost tří bodů o parametrech $u,\ v,\ w$, křivky je vyjádřena podmínkou:

$$u + v + w \equiv 0.$$

Předpokládáme-li tedy, že tři body B, C, D, oddělené od daného bodu A, nejsou navzájem oddělené, mohou pro jejich vzájemnou polohu nastat ještě čtyři možnosti. Buď leží tyto body na jedné konfigurační přímce, nebo jsou pouze dva z těchto bodů odděleny a ostatní spojeny, nebo jsou pouze dva z nich spojeny a ostatní odděleny, nebo jsou všechny spojeny, neleží však na jedné přímce. Bydžovský v článku nachází a vyšetřuje poslední ze zmíněných případů. Nachází konfiguraci, jež obsahuje pouze jednu skupinu bodů navzájem oddělených, zatímco pro ostatní nastává výše zmiňovaný případ. Označíme-li $u_i,\ v_i,\ w_i,\ i = 1, 2, 2, 4$ parametry konfiguračních bodů, lze tuto konfiguraci popsat schematem:

$$\begin{array}{cccc}
u_1v_1w_1 & u_1v_2w_2 & u_1u_2v_3 & u_1u_3v_4 \\
u_2v_1w_2 & u_2v_2w_1 & u_3u_4v_3 & u_2u_4v_4 \\
u_3v_1w_3 & u_3v_2w_4 & v_3w_1w_3 & v_4w_1w_2 \\
u_4v_1w_4 & u_4v_2w_3 & v_3w_2w_4 & v_4w_3w_4
\end{array}$$

kde $u_1v_1w_1$ znamená, že body o parametrech u_1, v_1, w_1 leží na jedné konfigurační přímce. Snadno nahlédneme, že skupinu navzájem oddělených bodů tvoří body v_i. Dále můžeme nahlédnout, že body $u_1 \dots v_4$ jsou po řadě odděleny od trojic bodů

$$u_4w_3w_4,\ u_3w_3w_4,\ u_2w_1w_2,\ u_1w_1w_2,\ u_3u_4w_4,\ u_3u_4w_3,\ u_1u_2w_2,\ u_1u_2w_1.$$

[11] [B62], str. 13.

V každé z těchto trojic jsou každé dva z bodů spojeny, všechny tři však spojeny nejsou.

Bydžovský se snaží dokázat, že i tato nová konfigurace, podobně jako konfigurace AI a AII leží na kubické křivce rodu 1 [12]. Za tímto účelem přepisuje předchozí schéma pomocí kongruencí:

$$\begin{aligned}
1.\quad & u_1 + v_1 + w_1 \equiv 0 \\
2.\quad & u_2 + v_1 + w_2 \equiv 0 \\
3.\quad & u_3 + v_1 + w_3 \equiv 0 \\
& \dots \\
16.\quad & v_4 + w_3 + w_4 \equiv 0,
\end{aligned}$$

Bydžovský tedy vychází z předpokladu, že body $u_1, \dots, w_4$ leží na kubické křivce rodu 1. Jednoduchými úpravami rovnic $1, \dots, 16$ dochází k závěru, že tyto body skutečně tvoří výše zmiňovanou konfiguraci. Popisuje dokonce i postup, jakým lze tuto konfiguraci zkonstruovat. Zjišťuje totiž, že body u_i mají společný tečnový bod $-2u_1$, body w_i mají společný tečnový bod $-2u_1 + \omega_3$, kde ω_3 definuje kongruencí

$$2\omega_1 + 2\omega_2 + 2\omega_3 = 0,$$

v níž $2\omega_1,\ 2\omega_2$ jsou obě periody používané eliptické funkce. Tečnovým bodem společným pro body $v_1,\ v_2$ je pak $4u_1 + \omega_3$, pro body $v_3,\ v_4$ je to bod $4u_1$. Body $-2u_1,\ -2u_1 + \omega_3$ mají rovněž společný tečnový bod a to bod $4u_1$, body $4u_1,\ 4u_1 + \omega_3$ mají společný tečnový bod $-8u_1$.

Konstrukci konfigurace lze tedy popsat následovně: z libovolného bodu ležícího na kubické křivce veďme k ní dvě tečny, jejich body dotyku označme $B_1,\ B_2$. Z bodu B_1 veďme ke křivce všechny čtyři tečny, jejich dotykové body označme $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ a sice tak, že $C_1,\ C_2$ (a následně body $C_3,\ C_4$) patří do stejného systému jako body $B_1,\ B_2$. Z bodu C_1 veďme ke křivce všechny 4 tečny s body dotyku $D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4$; z bodu C_2 veďme rovněž čtyři tečny s body dotyku $D'_1,\ D'_2,\ D'_3,\ D'_4$. Nakonec veďme z bodu B_2 ke křivce dvě tečny takové, že jejich dotykové body $C'_1,\ C'_2$ patří do jiného systému, než body $B_1,\ B_2$. Potom tvoří body $D_i,\ D'_i$ a dále pak body $C_1,\ C_2,\ C'_1,\ C'_2$ hledanou konfiguraci. Je třeba ještě poznamenat, že body patřící do stejného systému se liší o tutéž půlperiodu zvolené eliptické funkce.

V závěru článku pak autor konstruuje tuto kolineaci, aniž by předpokládal, že leží na kubické křivce a ukazuje, že jejími body lze proložit jedinou kubickou křivku. Vychází z toho, že žádné tři body v_i nejsou kolineární, může tedy volit jejich souřadnice

$$\begin{aligned}
v_1 &\quad (1,0,0) \\
v_2 &\quad (0,1,0) \\
v_3 &\quad (0,0,1) \\
v_4 &\quad (1,1,1).
\end{aligned}$$

Dále píše, že totéž, co pro body v_i platí i pro body $v_2,\ v_3,\ v_4,\ u_1$, což je zcela patrné ze schématu konfigurace. Bod u_1 popisuje souřadnicemi (a, b, c) a doplňuje podmínkou $abc \neq 1$. Zde se zřejmě jedná o přepis. Tato podmínka

[12] Jak jsem uvedla již dříve, konfigurace AII může ležet i na kubické křivce rodu nula.

totiž nemá žádný geometrický význam. Vzhledem, k tomu, že vyjadřujeme body v homogenních souřadnicích, lze vždy dosáhnout vhodným násobkem souřadnic bodu u_1 aby platilo $abc = 1$. Skutečnost, že bod u_1 neleží na žádné z přímek $v_i v_j$, lze vyjádřit podmínkami

$$abc \neq 0,\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c.$$

Pokud chtěl autor pouze poznamenat, že bod u_1 neleží na žádné ze souřadnicových os, stačila by podmínka

$$abc \neq 0.$$

Pomocí bodů $u_1,\ v_1 \dots v_4$ pak Bydžovský odvozuje souřadnice všech ostatních bodů konfigurace a poznamenává, že konfigurace je pěti svými body určena. Bydžovský sice nepíše, že konfigurace je určena každou pěticí svých bodů, bylo by však správné poznamenat, že pro některé volby toto tvrzení neplatí. Snadno nahlédneme, že například ze souřadnic bodů $u_1,\ v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2$ lze odvodit již jen souřadnice bodu u_2 jakožto průsečíku přímek v_1w_2 a v_2w_1. Dá se tedy říci, že autor ukázal, že konfigurace je určena pěti svými body, z nichž žádné tři nejsou kolineární.

Dále Bydžovský volí dvě trojice přímek konfigurace, určené týmiž devíti body, které prohlásí za bázi svazku kubických křivek. Dosazením libovolného ze zbývajících tří konfiguračních bodů do rovnice svazku získává rovnici hledané kubiky ve tvaru:

$$\begin{aligned} &a'(cx_2 - bx_3)(c'x_1 + ax_3)[(a'b - ac)x_1 + a(c - a')x_2 + a'(a - b)x_3] - \\ &\quad a(ac'x_2 + a'bx_3)(cx_1 - a'x_3)[(b - c)x_1 + (c - a)x_2 + (a - b)x_3] = 0, \end{aligned}$$

kde $a',\ c'$ splňují rovnice

$$(a + a')b = (a + b)c, \quad (a - b)c' = 2ab - (a + b)c.$$

Tím tedy autor dokazuje, že každá konfigurace popsatelná výše uvedeným schématem leží na kubické křivce.

Bydžovský v článku poznamenává, že nemůže tvrdit, že by nalezená konfigurace byla jedinou konfigurací daných vlastností, tj. taková, že dvanáct konfiguračních bodů lze rozdělit do tří čtveřic takových, že pouze body jedné čtveřice jsou navzájem odděleny a body oddělené od libovolného z osmi zbývajících bodů tvoří trojúhelník.

Naskýtala se tedy otázka, zda existují ještě další konfigurace daného typu a kolik dalších typů konfigurací ještě je realizovatelných? Válečné období na čas přerušilo veškerou autorovu snahu, avšak hned po návratu z internačního tábora se autor opět začal problematikou konfigurací typu $(12_4, 16_3)$ zabývat. V té době se začala rozvíjet plodná korespondence mezi Bydžovským a jeho žákem Josefem Metelkou, který výsledky své práce shrnul v článku ***O jistých konfiguracích*** $\boldsymbol{(12_4, 16_3)}$ ***v rovině***. [13]

Metelkovi se podařilo nalézt novou konfiguraci odlišnou od předchozích tří. K bodům $u_i,\ v_i,\ w_i$, kde $i = 1 \dots 4$, tvořícím Bydžovského konfiguraci, kterou autor v textu označuje BI, přidává ještě body v_5, v_6, které rovněž leží na kubice. Bod v_5 navíc splňuje kongruence

$$u_1 + v_5 + w_3 \equiv 0$$

[13] Věstník královské české společnosti nauk, 1944, článek 21, 8 stran.

$$u_2 + v_5 + w_4 \equiv 0$$
$$u_3 + v_5 + w_1 \equiv 0$$
$$u_4 + v_5 + w_2 \equiv 0 \quad .$$

Bod v_6 splňuje kongruence

$$u_1 + v_6 + w_4 \equiv 0$$
$$u_2 + v_6 + w_3 \equiv 0$$
$$u_3 + v_6 + w_2 \equiv 0$$
$$u_4 + v_6 + w_1 \equiv 0 \quad .$$

K původním šestnácti přímkám Bydžovského konfigurace Metelka přidává osm nových, v níže uvedeném schématu jsou to přímky ve sloupcích V a VI.

I	II	III	IV	V	VI
$u_1v_1w_1$	$u_1v_2w_2$	$u_1u_2v_3$	$u_1u_3v_4$	$u_1v_5w_3$	$u_1v_6w_4$
$u_2v_1w_2$	$u_2v_2w_1$	$u_3u_4v_3$	$u_2u_4v_4$	$u_2v_5w_4$	$u_2v_6w_3$
$u_3v_1w_3$	$u_3v_2w_4$	$v_3w_1w_3$	$v_4w_1w_2$	$u_3v_5w_1$	$u_3v_6w_2$
$u_4v_1w_4$	$u_4v_2w_3$	$v_3w_2w_4$	$v_4w_3w_4$	$u_4v_5w_2$	$u_4v_6w_1$

Vynecháme-li libovolné dva z těchto sloupců a tedy libovolné dva body v_i, dostaneme vždy přímky, resp. body tvořící konfiguraci $(12_4, 16_3)$. Těchto konfigurací je celkem 15, ale ne všechny jsou navzájem různé. Označme si jednotlivé varianty:

(I II III IV)	(1)	(I II V VI)	(6)	(II III IV V)	(11)
(I II III V)	(2)	(I III IV V)	(7)	(II III IV VI)	(12)
(I II III VI)	(3)	(I III IV VI)	(8)	(II III V VI)	(13)
(I II IV V)	(4)	(I III V VI)	(9)	(II IV V VI)	(14)
(I II IV VI)	(5)	(I IV V VI)	(10)	(III IV V VI)	(15)

Metelka ve své práci nalézá bodové transformce, které převádějí jednotlivá schémata na sebe. Dochází k závěru, že z 15 schémat jsou pouze 4 rozdílné, a to schéma (1) (a s ním ekvivalentní schémata (7), (12) a (15)), schéma (2) (a s ním ekvivalentní schémata (3), (4), (5), (9), (10), (13) a (14)), schéma (6) a schéma (8)(s ním je ekvivalentní schéma (11)).

Dále ukazuje, že schémata (6) a (8) popisují De Vriesovy konfigurace AI a AII, schéma (1) popisuje Bydžovského konfiguraci BI, zbývá tedy ještě jedna dosud neznámá konfigurace (BII), popsaná schématem (2), tj. konfigurace:

I	II	III	V
$u_1v_1w_1$	$u_1v_2w_2$	$u_1u_2v_3$	$u_1v_5w_3$
$u_2v_1w_2$	$u_2v_2w_1$	$u_3u_4v_3$	$u_2v_5w_4$
$u_3v_1w_3$	$u_3v_2w_4$	$v_3w_1w_3$	$u_3v_5w_1$
$u_4v_1w_4$	$u_4v_2w_3$	$v_3w_2w_4$	$u_4v_5w_2$

Metelka ve své práci dokazuje, že konfigurace BI i BII leží na téže kubické křivce. V závěru poznamenává :

O konfiguracích typu A je známo, že existují jen dva druhy AI a AII. Naším předešlým vyšetřováním jsme ukázali, že konfigurace typu B se vyskytují také alespoň ve dvou druzích BI a BII, ale nerozhodli jsme, zda neexistují další druhy tohoto typu. Autor hodlá v nejbližší době podat v samostatném článku *odpověď na obecnější otázku: Které jsou vůbec možné typy a druhy konfigurací* $(12_4, 16_3)$ *v rovině, jež mají právě jednu čtveřici navzájem oddělených bodů.*[14]

Je vidět, že s každým novým objevem se vynořily nové a nové otázky. Touto problematikou se začal zabývat i berlínský profesor matematiky Max Zacharias, který roku 1948 podal prostorovou konstrukci nové konfigurace $(12_4, 16_3)$ [15]. Pro tutéž konfiguraci pak podal i její rovinnou konstrukci [16] a v téže práci provedl i rovinné konstrukce všech do té doby známých konfigurací $(12_4, 16_3)$. Prof. Zacharias značí konfigurační body velkými písmeny A_i, B_i, C_i (kde $i = 1, 2, 3$) a konfigurační přímky značí malými písmeny a, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i ($i = 1, 2, 3$). Jeho konfiguraci, často označovanou jako konfigurace Z, lze popsat schématem:

	a	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	e_1	e_2	e_3
A_1	×				×	×	×									
A_2	×							×	×	×						
A_3	×										×	×	×			
B_1		×						×			×			×		
B_2		×							×			×			×	
B_3		×								×			×			×
C_1			×		×			×								×
C_2			×			×			×					×		
C_3			×				×			×					×	
D_1				×	×						×				×	
D_2				×		×						×				×
D_3				×			×						×	×		

tab .3

Bydžovský se touto konfigurací podrobně zabývá ve své práci ***O dvou nových konfiguracích*** $(\mathbf{12_4}, \mathbf{16_3})$, která vyšla v němčině a rovněž v krátkém českém překladu. Autor zde popisuje jednoduchou souvislost této konfigurace s konfigurací Hesseovou.

Na kubické křivce rodu jedna existuje konfigurace odpovídající této konfigurační tabulce, její body jsou: tři inflexní body ležící v přímce a dotykové body tečen vedených ke křivce z těchto tří inflexních bodů.[17]

Těmito inflexními body jsou body A_i. B_i jsou body dotyku tečen vedených ke kubice z bodu A_1. Body dotyku tečen vedených z A_3 jsou body C_i, z bodu A_2 pak D_i. Trojice bodů A_i, B_i, C_i jsou kolineární, což plyne ze známých vlastností inflexních bodů kubiky.

Těchto dvanáct bodů však tvoří zároveň již zmiňovanou konfiguraci Hesseovu, v tom případě, že tři kolineární body, z nichž vedeme tečny ke křivce jsou právě body inflexní. Je tedy nutné k devíti dotykovým bodům připočítat i inflexní body samotné, jako body dotyku inflexních tečen. Hesseova konfigurace však neobsahuje přímky $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, jelikož tyto body v obecném případě kolineární nejsou. Hesseova konfigurace obsahuje navíc přímky $B_1C_3D_2$, $B_2C_1D_3$ a $B_3C_2D_1$, které neobsahuje konfigurace Z. Bydžovský své závěry shrnuje do věty :

[14] Metelka, J., *O jistých konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *v rovině*, str. 8.
[15] Zacharias, M., Mathematische Nachrichten, 1948, str. 332.
[16] Zacharias, M., Mathematische Nachrichten, 1952.
[17] [B108], str. 220.

Tři inflexní body kubické křivky rodu jedna, ležící v přímce, a devět bodů dotykových tečen položených ke křivce z těchto tří bodů tvoří skupinu dvanácti bodů, které leží po třech na devatenácti přímkách. Vynecháme-li z nich vhodně volené tři, dostaneme buď konfiguraci Hesseovu nebo konfiguraci Z.[18]

Konfigurace Z však není jediným řešením incidenční tabulky tab. 3. Bydžovský v článku dokazuje, že kromě reálného řešení, jež popisuje konfigurace Z, má tato tabulka ještě jedno imaginární řešení, jehož konfigurační body lze souřadnicově popsat následujícím způsobem, v němž y je reálné číslo, α imaginární třetí odmocnina z jedné.

$$
\begin{array}{lll}
A_1(1+\alpha y, 1+\alpha y, 1-\alpha^2-y) & A_2(y, -\alpha^2-\alpha y, y) & A_3(0, 1+\alpha y, -y) \\
B_1(0,1,0) & B_2(y,1,0) & B_3(-\alpha y, 1, 0) \\
C_1(1,1,1) & C_2(-\alpha-\alpha^2 y, 1, 1) & C_3(y,1,1) \\
D_1(0,0,1) & D_2(1+\alpha y, 0, 1) & D_3(-\alpha-\alpha^2 y, 0, 1)
\end{array}
$$

Snadno se ukáže, že tyto body splňují incidenční tabulku. Také lze nahlédnout, že neplatí $B_1C_3D_2$, $B_2C_1D_3$, $B_3C_2D_1$, tedy že se tyto tři přímky neprotínají v jednom bodě. To má za následek, že body této konfigurace neleží na kubické křivce. Jednalo se v té době o první známou konfiguraci této vlastnosti. Tato konfigurace je zajímavá ještě jinou svou vlastností. Na rozdíl od konfigurace Z neobsahuje žádné cizí přímky, obsahuje však cizí bod. Dá se ukázat, že konfigurační přímky $B_1C_2D_3$, $B_2C_3D_1$, $B_3C_1D_2$ se protínají na konfigurační přímce $A_1A_2A_3$, tento průsečík však, přestože jím procházejí čtyři konfigurační přímky, ke konfiguraci nepatří.

Reálné (konfigurace Z) i imaginární řešení incidenční tabulky tab. 3 se od dosud známých konfigurací liší tím, že obsahují tři body takové, že trojice bodů oddělená od každého z nich je kolineární. Ani jedna z nich však není čistá v tom smyslu, že by neobsahovala cizí přímky, resp. cizí body. Bydžovský ve své práci tuto závadu odstranil a sestrojil „čistou“ konfiguraci tohoto typu, jejíž schéma lze popsat pomocí tabulky tab. 4.

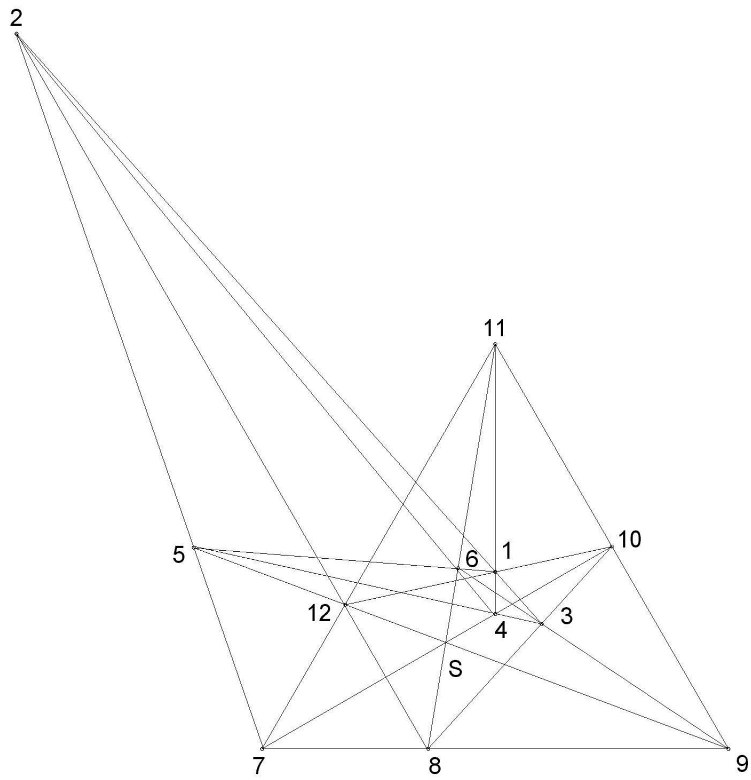
1	×	×	×	×												
2	×				×	×	×									
3	×							×	×	×						
4		×			×			×			×					
5			×			×		×				×				
6			×		×				×				×			
7						×					×			×		×
8							×			×			×	×		
9									×			×		×	×	
10				×						×	×				×	
11		×											×		×	×
12				×			×					×				×

tab. 4

Pro body 1,2,3 leží body od nich oddělené na přímce, body oddělené od ostatních bodů tvoří vždy trojúhelník. Tato tabulka poskytuje celkem tři reálná a jedno imaginární řešení. Bydžovský v článku podává i návod, jak konfiguraci pro jedno z jejích reálných řešení jednoduše nakreslit (viz obr. 6.1[19]).

[18] [B108], str. 221.

[19] Obrázek je vytvořen podle vzoru z Bydžovského práce.



Obrázek 6.1:

Problematikou rovinných konfigurací typu $(12_4, 16_3)$ se v dalších letech zabývala skupina Bydžovského žáků, mezi nimiž vynikali již zmiňovaný Josef Metelka, jeho bratr Václav a Jiří Novák. Obdobná skupina se vyvinula kolem berlínského profesora Maxe Zachariase. Ve svém projevu u příležitosti 80. narozenin akademika Bydžovského Josef Metelka mimo jiné pronesl:

Po jistou dobu se vyvinula dokonce jakási soutěž okolo konfigurací $(12_4, 16_3)$ *mezi pražskou školou prof. Bydžovského a berlínskou školou prof. Zachariase, soutěž, v níž velmi záhy prokázala pražská škola svou naprostou převahu. Měl jsem štěstí, že jsem byl účastníkem tohoto závodu, ba stál jsem u samého jeho vzniku, neboť už v druhé polovině války jsem mohl vyměnit s profesorem Bydžovským bohatou vědeckou korespondenci o těchto konfiguracích, korespondenci, která obsahuje některé dodnes nepublikované výsledky.* [20]

Jak jsem již zmínila dříve, prvním úspěchem Josefa Metelky na poli této problematiky bylo objevení konfigurace BII, publikované roku 1944.

Z výše zmíněného projevu se dozvídáme, že k sedmdesátým narozeninám, tj. roku 1950, studenti svému učiteli neoficiálně slíbili, že problém konfigurací definitivně rozřeší a uzavřou. Jejich cílem bylo sestavit úplnou tabulku všech možných konfigurací typu $(12_4, 16_3)$, které se dají v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel realizovat. K tomu však bylo zapotřebí vnést do značení druhů konfigurací $(12_4, 16_3)$ jistý řád. Označíme-li si konfigurační body číslicemi $1, \ldots, 12$, a považujeme-li body $1, 2, 3$ za body oddělené od bodu 4,

[20] Metelka, J., *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie 5, 1960, str. 606.

můžeme zavést následující značení.

Říkáme, že bod 4 je typu

A, jestliže body $1, 2, 3$ jsou navzájem odděleny,

B, jestliže body $1, 2, 3$ jsou navzájem spojeny, ale neleží na jedné konfigurační přímce

C, jsou-li jen dva z bodů $1, 2, 3$ odděleny,

D, jsou-li jen dva z bodů $1, 2, 3$ spojeny a

E, leží-li body $1, 2, 3$ na jedné konfigurační přímce.

Podle tohoto značení bychom například řekli, že konfigurace je typu $B_3C_6E_3$, jestliže obsahuje tři body typu B, šest bodů typu C a tři body typu E. Tuto klasifikaci je zapotřebí v případě bodů typu B, C, E ještě zjemnit, uvedu jen, že jsou dále rozlišovány body typů $B^1, \ldots, B^4$, body typů C^1, C^2 a body typů E^1, E^2.

Z článku Josefa Metelky z roku 1955 [21] se dozvídáme, že bylo v té době známo již kolem 50 konfigurací. V článku jeho bratra Václava ***O jistých rovinných konfiguracích*** $(\mathbf{12_4}, \mathbf{16_3})$ ***které obsahují alespoň jeden bod typu D*** z téhož roku nalezneme metodu, jakou používali pro hledání nových konfigurací, přičemž úplný výčet všech realizovatelných schémat konfigurací, které obsahují bod typu D publikuje až o dva roky později [22].

Ve své další práci z roku 1962 [23] hledá Václav Metelka ty konfigurace, které leží na kubické křivce rodu jedna. Jeho výsledky lze shrnout do následující věty:

Jen osm rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$ *má tu vlastnost, že jejich body leží na kubice rodu jedna. jsou to dvě konfigurace De Vriesovy AI a AII, dále konfigurace BI akademika Bydžovského, konfigurace BII mého bratra a konečně čtyři konfigurace typů* $B_8C_3E_1$, B_{12}, $E_3^2C_6^1C_3^2$, $E_3^2C_9^2$, *uvedené v této práci.*[24]

Dá se říci, že veškeré úsilí bratří Metelků a Jiřího Nováka, jež přispěl především tím, že ve svých pracích popsal nové, lepší metody třídění konfigurací, bylo završeno v článku Václava Metelky ***O jistých rovinných konfiguracích*** $(\mathbf{12_4}, \mathbf{16_3})$ ***obsahujících B, C a E–body a konfiguracích singulárních.*** [25] V této práci popisuje celkem 104 schémat těchto konfigurací, u patnácti z nich však dokazuje, že jsou nerealizovatelná pomocí bodů a přímek v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel. Schémata konfigurací obsahujících alespoň jeden bod typu A, resp. D byly popsány ve výše zmiňované literatuře.

Na závěr této kapitoly bych měla zmínit ještě jednoho z pozdějších Bydžovského žáků, který na toto téma výrazně navázal, kterým byl Jaromír Krys. Jeho pozornost se na rozdíl od bratří Metelků nesoustředila na hledání konfigurací typu $(12_4, 16_3)$, věnoval se této problematice v obecnějším měřítku. V letech 1969–1978 napsal o konfiguracích celkem 8 článků, které vycházely vesměs v Časopise pro pěstování matematiky a které lze tematicky rozdělit do dvou částí. V první

[21] Metelka, J., *O rovinných konfiguracích* $(12_4, 16_3)$, ČPM 80, 1955, str. 134.
[22] Metelka, V., *Rovinné konfigurace* $(12_4, 16_3)$*, které obsahují D body*, ČPM 82, 1957, str. 385–438.
[23] Metelka, V., *Zbývající čtyři rovinné konfigurace* $(12_4, 16_3)$*, jejichž body leží na kubice rodu jedna*, 1962.
[24] Tamtéž, str. 52.
[25] ČPM 105, 1980.

se věnuje konfiguracím bodů rovinné kubiky, kde rovinou rozumí projektivní rovinu nad tělesem komplexních čísel, druhá část jeho prací je zaměřena na konfigurace v afinních prostorech nad tělesem reálných čísel dimenze n. Jeden z článků, věnovaný památce Bohumila Bydžovského, se specializuje na konfigurace typu $(3n_n, n_3^2)$, jejímž speciálním případem je pro $n = 4$ konfigurace $(12_4, 16_3)$.

Kapitola 7

Ostatní práce

Vedle již dříve zmiňovaných prací napsal Bohumil Bydžovský několik, které nelze jednoznačně zařadit do žádné z předchozích kapitol. Jednou z nich je i práce [B3] ***Teorie maxim a minim***. Autor ji napsal na začátku svého tvůrčího období v roce 1907, kdy ještě působil jako středoškolský učitel.

Článek je úvodem do diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné. Autor zde vychází z velice jednoduché úlohy:

Kladné číslo a jest rozložiti ve dva sčítance tak, aby součet jednoho sčítance a polovičního čtverce sčítance druhého byl co nejmenší (minimální)[1],

což lze stručně zapsat takto: určete minimum funkce

$$y = x + \frac{1}{2}(a - x)^2. \tag{7.1}$$

Jednoduše by se dala tato úloha řešit úpravou pravé strany rovnice (7.1) na čtverec:

$$y = \frac{1}{2}(x + (1 - a))^2 + a - \frac{1}{2},$$

odkud je již vidět, že pro $x = a - 1$ dostáváme minimální součet $a - \frac{1}{2}$.

Bydžovskému ovšem nejde až tolik o to určit řešení této konkrétní úlohy, nýbrž chce nalézt obecný princip pro řešení úloh vedoucích na rovnice vyšších stupňů. Autor řeší rovnici (7.1) podle neznámé x

$$x_{1,2} = (a - 1) \pm \sqrt{2y - (2a - 1)}.$$

Má-li být x reálné, musí být výraz pod odmocninou nezáporný a tedy minimální hodnota, jíž může y nabývat je $a - \frac{1}{2}$.

Bydžovský se však nespokojuje s tímto zjištěním a pro konkrétní hodnotu $a = 3$ se zabývá otázkou:

…když x roste od jisté dané hodnoty k jiné, jak se mění y? t. j. roste také hodnota y či klesá?[2]

Pro tento účel zavádí přírůstky Δx a Δy. Do upravené rovnice (7.1)

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}, \tag{7.2}$$

[1] [B3], str. 169.
[2] [B3], str. 170.

kde $a = 3$, dosazuje za x, y hodnoty $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

$$y + \Delta y = \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + \frac{9}{2}.$$

Tuto rovnici lze zjednodušit dosazením (7.2) za y na tvar

$$\Delta y = \Delta x(x - 2 + \frac{1}{2}\Delta x)$$

Bydžovský zjišťuje, že pro vhodně volené malé kladné hodnoty Δx závisí znaménko Δy pouze na znaménku výrazu $(x - 2)$. Sleduje, kdy je Δy kladné, kdy záporné, a v souvislosti s tím kdy y roste a kdy klesá a tedy že y nabývá svého minima pro hodnotu $x = 2$. Tento postup pak zobecňuje pro libovolnou kvadratickou rovnici

$$y = ax^2 + 2bx + c,$$

kde platí

$$\Delta y = \Delta x(2ax + 2b + a\Delta x)$$

Funkce tedy nabývá extremální hodnoty pro $x = -\frac{b}{a}$.

V dalším Bydžovský řeší podobnou úlohu, která vede na rovnici třetího stupně. Výraz, který rozhoduje o znaménku Δy zde již označuje y'. Autor zde provádí stejné úvahy jako v předchozí úloze, jež vedou k nalezení dvou extremálních hodnot. Předchozí nalezená pravidla pak shrnuje do následující věty:

Když nezávisle proměnná roste (např. od $-\infty$ do $+\infty$), funkce její buď roste nebo klesá; a sice lze najíti jistý výraz y', jenž je rovněž funkcí x, té vlastnosti: pro ty hodnoty x, pro něž $y' > 0$ roste y, pro ty hodnoty x, pro něž $y' < 0$, klesá y; jestliže pak x je tak voleno, že $y' = 0$, přechází klesání ve stoupání nebo naopak a y nabývá hodnoty minimální nebo maximální.[3]

Pro oba příklady, které Bydžovský v práci rozebírá, tj. funkce

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}, \; y = 3\sin x + 2\cos x,$$

výše uvedená věta skutečně platí. Obecně to ovšem tvrdit nelze. Nejjednodušším protipříkladem je funkce $y = x^3$. Tato funkce je v celém svém definičním oboru rostoucí, neplatí tedy poslední část věty, která říká, že se v bodě, pro který je $y' = 0$, mění funkce z rostoucí na klesající, respektive naopak. Dnes bychom tuto větu doplnili podmínkou: *... jestliže pak x je tak voleno, že $y' = 0$ a zároveň $y'' \neq 0$, přechází klesání ve stoupání ...*

V poslední části článku Bydžovský vysvětluje význam výrazů

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Druhý z výrazů, který označuje $\frac{dy}{dx}$, pak nazývá *differenciálným kvocientem* funkce y podle proměnné x, nebo stručněji *derivací* funkce y podle x a popisuje její geometrickou souvislost s tangentou úhlu, který svírá tečna v příslušném bodě s kladným směrem osy x. Dále autor odvozuje derivační formule některých jednodušších funkcí, např. $y = c$, $y = x$, $y = x^n$, $y = \sin x$, rovněž i pravidla pro derivování součtu, součinu, resp. podílu dvou funkcí a funkce složené.

[3] [B3], str. 185.

Zmiňuje se i o druhé derivaci funkce, vysvětluje její význam při vyšetřování typů lokálních extrémů. Na závěr řeší řadu zajímavých úloh na využití diferenciálního počtu a to nejen v geometrii, ale i ve fyzice.

Další z těchto prací se nazývá ***O imaginárných bodech***[4]. Bydžovský v ní řeší konstrukční geometrické úlohy, jejichž řešení nejsou reálná, resp. k jejichž řešení využívá imaginárních elementů.

Autor se zde speciálně věnuje geometrickým úlohám kvadratickým, tj. takovým, jejichž analytické řešení vede ke kvadratické rovnici. Jelikož v oboru komplexních čísel má každá kvadratická rovnice vždy dvě řešení, ať již různá, nebo splývající, zabývá se Bydžovský otázkou, zda má rovněž každá kvadratická geometrická úloha dvě řešení. Nejjednodušší kvadratickou úlohou je určení průsečíků přímky a kružnice. Bydžovský proto zavádí imaginární body tímto způsobem:

Je-li v rovině dána kružnice a přímka mimoběžná, pravíme, že tato přímka a kružnice mají společné dva body imaginárné. Dle obdoby kvadratických rovnic, u nichž imaginárná řešení jsou sdružená, nazýváme tyto body imaginárnými sdruženými.[5]

Dále se zabývá otázkou, jak poznáme, zda dvě dvojice takových bodů jsou totožné nebo různé, neboli zda dvě různé kružnice protnou tutéž přímku v téže dvojici imaginárních bodů. K tomu, aby si mohl na tuto otázku odpovědět, dokazuje řadu pomocných vět. Zabývá se vztahem mezi kružnicemi protínajícími se kolmo, zavádí svazek kružnic prvního druhu, jakožto svazek, jehož všechny kružnice mají dva body společné a svazek druhého druhu, jehož kružnice se neprotínají. Nebo jinak:

…kružnice sekoucí kolmo dvě kružnice, jež se neprotínají, tvoří svazek prvého druhu atd.…[6]

Na základě řady dokázaných tvrzení dochází k závěru, že:

…dvojice imaginárných bodů sdružených jsou totožné, jsou-li vytínány na téže přímce kružnicemi téhož svazku, jež má tuto přímku za společnou chordálu.

…dvě kružnice, které se neprotínají v bodech reálných, protínají se ve dvojici imaginárních bodů sdružených, které leží na chordále těchto kružnic.[7]

Dnes bychom svazky prvního respektive druhého druhu nazvali eliptickým, resp. hyperbolickým. Z textu je patrné, že parabolický svazek bychom nemohli zařadit do žádné z těchto kategorií, ale tento je pro zkoumání našeho problému zcela nepodstatný, jak za chvíli ukáži.

Bydžovský v závěru první části článku nastiňuje projektivní řešení úlohy, podívejme se na něj podrobně.

Nechť je tedy dána přímka p a kružnice k. Zvolíme-li na přímce p libovolný bod X, jeho polára vzhledem ke kružnici k protne přímku p v dalším bodě x'. O této dvojici bodů pak říkáme, že jsou polárně sdruženy vzhledem ke kružnici k. Všechny dvojice takových bodů pak tvoří na p tzv. involuci sdružených pólů, ovšem s výjimkou případu, kdy se přímka p kružnice k dotýká.

Podívejme se tedy na jednotlivé případy (obr. 7.1):

[4] V ČPMF byla první část tohoto článku chybně vytištěna pod názvem *O immaginárných bodech.*
[5] [B14], str. 319.
[6] [B14], str. 325.
[7] [B14], str. 327.

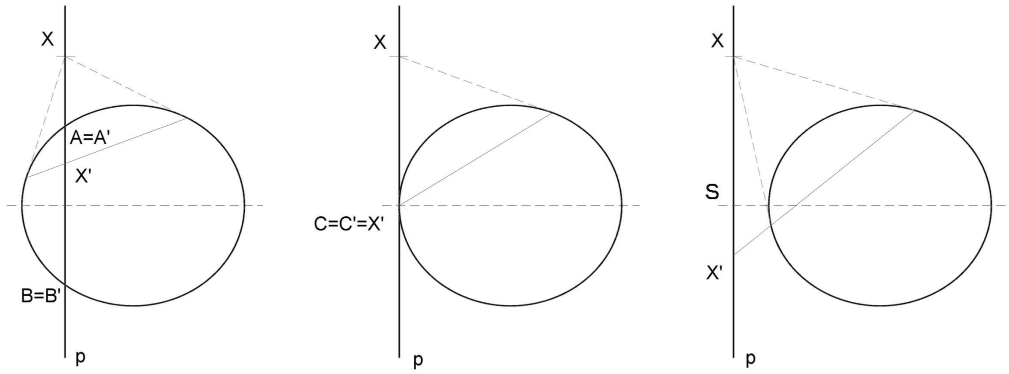
Protíná-li přímka kružnici ve dvou reálných bodech A, B, jsou tyto dva body ve výše zmiňované involuci samodružné, neboť jejich poláry vzhledem ke k jsou tečnami ke kružnici v těchto bodech a protínají tedy p v bodech $A' \equiv A$, $B' \equiv B$. Vzhledem k známé vlastnosti poláry platí, že harmonicky oddělují každou involutorní dvojici X, X'.

V případě dotyku mají k a p jediný reálný průsečík C. Pro libovolný bod $X \in p$ platí $X' \equiv C$. V tomto případě se tedy nejedná o involutorní zobrazení, neboť všechny body přímky p se zobrazí do jediného bodu.

V případě, že kružnice k neprotne p, dostáváme případ podobný první variantě s tím rozdílem, že neumíme najít žádné reálné samodružné body involuce. Ale jelikož platí věta [8]:

...každá involuce má vždy dva vzájemně různé samodružné prvky...,

má tato involuce 2 samodružné body imaginárně sdružené. Ve shodě s prvním případem, můžeme i tyto dva samodružné body považovat za průsečíky přímky p a kružnice k. V prvním případě se tato involuce nazývá hyperbolická, v posledním eliptická.



Obrázek 7.1:

Uvažujme nyní všechny kružnice, které vytínají na přímce p tutéž eliptickou involuci. Nechť je tato involuce dána středem, tj. obrazem nevlastního bodu ($S \longleftrightarrow S'_\infty$), a jednou další dvojicí odpovídajících si bodů X, X'. Polára nevlastního bodu na p vzhledem ke k je průměr této kružnice kolmý k p, procházející bodem S. Všechny kružnice, které vytínají na p tuto involuci, musí mít střed na této přímce. Polára bodu X vzhledem k libovolné kružnici svazku prochází bodem X'. Mají-li tyto kružnice tvořit svazek, musí mít libovolný bod přímky p ke všem těmto kružnicím stejnou mocnost, a tedy musí být délky tečen z tohoto bodu vedených ke všem kružnicím svazku stejně dlouhé.

Dokažme to tedy pro již zadaný bod X, pro libovolný jiný bod by byl postup stejný. Nechť k_1 je jedna z uvažovaných kružnic. Bod 1 je průsečík přímky XO_1 s polárou bodu X vzhledem k této kružnici. Označme dále T bod dotyku tečny ke kružnici k_1 vedené z bodu X. Z Eukleidovy věty o odvěsně můžeme odvodit:

$$|XT|^2 = |X1||XO_1|$$

[8] Viz např. Havlíček, K., *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, Praha, 1956, str. 57.

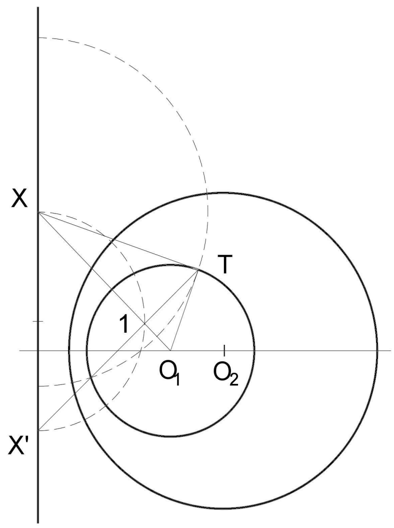
Snadno nahlédneme, že trojúhelníky $\triangle XX'1$ a $\triangle XO_1S$ jsou podobné. Platí tedy pro poměry jejich stran vztah:

$$\frac{|XS|}{|XO_1|} = \frac{|X1|}{|XX'|}$$

a tedy

$$|X1||XO_1| = |XS||XX'|.$$

Odtud již vidíme, že vzdálenost $|XT|$ vůbec nezávisí na námi zvolené kružnici svazku, nýbrž pouze na vlastnostech dané involuce. A tedy každá kružnice vytínající na p stejnou involuci, tj. protínající p ve stejných imaginárně sdružených bodech, náleží do svazku určeného jednou takovou kružnicí a přímkou p, jakožto chordálou tohoto svazku (obr. 7.2).



Obrázek 7.2:

Uvažujme nyní svazek kružnic určený libovolnou kružnicí a chordálou p. Můžeme naopak dokázat, že všechny kružnice svazku vytínají na p tutéž involuci, tj. že pro libovolný bod X a libovolnou kružnici k_i paltí, že polára bodu X vzhledem ke k_i protne p vždy v bodě X'. Z výše uvedených vztahů vyplývá rovnost

$$|XS||XX'| = |XT|^2.$$

Vzdálenost $|XT|$ je pro všechny kružnice svazku stejná a tedy poloha bodu X' nezávisí na volbě kružnice k_i.

V druhé polovině článku pak autor ukazuje, jakým způsobem lze např. zkonstruovat kružnici určenou jedním reálným a dvěma imaginárními body, nebo tečnou a dvěma imaginárními body. V závěru řeší i úlohu sestrojit elipsu danou středem, směrem jedné osy a dvojicí imaginárních bodů.

Podobné úlohy, jako zde řeší Bydžovský lze nalézt i v publikaci *Imaginární elementy v geometrii* z roku 1941, jejímž autorem je Ladislav Seifert. Narozdíl od Bydžovského zde ovšem řeší úlohy nejen geometricky, ale i analyticky. V úvodu této knihy, kde Seifert zavádí základní věty geometrie polohy, lze nalézt odkaz na jednu z Bydžovského středoškolských učebnic aritmetiky [9].

[9]Bydžovský, B., Teplý S., Vyčichlo, F., *Aritmetika pro VI.–VII. tř. stř. škol*, JČMF, Praha 1935.

Jednou z mála čistě algebraických prací Bohumila Bydžovského je článek ***Sur les matrices orthogonales symétriques***, který vyšel roku 1936 v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky. Od té doby došlo k menším změnám v názvosloví. To, čím byla dříve nazývána ortogonální matice dnes častěji nazýváme maticí ortonormální. Ortogonální maticí dnes nazýváme matici, pro níž platí, použijeme-li Bydžovského značení [10], $CC' = k^2 J$ pro nějaké nenulové reálné k[11], zatímco ortonormální matice splňuje rovnost $CC' = J$. Můžeme se dnes setkat ale i s původním Bydžovského názvoslovím.

Autor se tedy v článku věnuje ortonormálním symetrickým maticím, tj. maticím, pro něž platí jednak $C = C'$, jednak $C' = C^{-1}$. Z těchto dvou rovností již rovnou vyplývá třetí $C^2 = J$.

Bydžovský v článku odvozuje, že každá taková matice C je ekvivalentní s maticí J_p, která vznikne z matice jednotkové změnou znamének u $(n-p)$ posledních prvků, přičemž n značí řád matice, p značí hodnost matice $(J+C)$. Existuje tedy ortonormální matice $A = (a_{i,j})$ taková, že

$$C = A' J_p A$$

Díky této znalosti pak Bydžovský dokazuje, že každá ortonormální symetrická matice C, pro níž $(C + J)$ má hodnost p, je součinem $(n - p)$ ortonormálních symetrických matic ve tvaru $(J - 2aa')$, kde a jsou sloupce ortonormální matice A.

Výsledky Bydžovského práce se dají pěkně aplikovat na skládání geometrických zobrazení v prostorech n-rozměrných. Předpokládejme, že ve vektorovém prostoru V_n jsou dány dvě různé báze

$$\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\} \qquad \{\overrightarrow{d_1}, \dots \overrightarrow{d_n}\}$$

Matici přechodu mezi jednotlivými bázemi nazvěme A. Pro její prvky a_{ir} musí platit vztah:

$$\overrightarrow{d_i} = \sum_r a_{ir} \overrightarrow{e_r} \tag{7.3}$$

Uvažujme nyní libovolný automorfismus φ prostoru V_n. Vzhledem k výše zmiňovaným bazím je φ reprezentován různými maticemi. Označme si matici automorfismu φ vzhledem k první bázi $C = (c_{ij})$ a vzhledem k druhé bázi $B = (b_{ij})$.

$$\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \sum_s c_{is} \overrightarrow{e_s} \qquad \varphi(\overrightarrow{d_j}) = \sum_t b_{jt} \overrightarrow{d_t} \tag{7.4}$$

Nyní můžeme snadno odvodit vztah, který platí pro matice C, B a A. Dosazením vztahu (7.3) do druhého ze vztahů (7.4) získáváme rovnost

$$\varphi(\sum_r a_{jr} \overrightarrow{e_r}) = \sum_{t,s} b_{jt} a_{ts} \overrightarrow{e_s} \tag{7.5}$$

Upravíme-li levou část rovnice podle prvního ze vztahů (7.4), dostáváme

$$\sum_{r,s} a_{jr} c_{rs} \overrightarrow{e_s} = \sum_{t,s} b_{jt} a_{ts} \overrightarrow{e_s} \tag{7.6}$$

[10] C' označuje matici transponovanou, J označuje matici jednotkovou.

[11] Můžeme se též setkat s dalším způsobem definice, v němž matice C je ortogonální, pokud matice CC' má na hlavní diagonále kladná čísla a mimo ni nuly.

Odkud již vyplývá vztah

$$\sum_r a_{jr}c_{rs} = \sum_t b_{jt}a_{ts} \tag{7.7}$$

který lze maticově zapsat $AC = BA$, neboli $C = A^{-1}BA$.

Předpokládejme, že V_n je vektorový prostor se skalárním součinem a že $\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\}$ je jeho ortonormální báze. Matice C bude ortonormální maticí právě tehdy, jestliže zobrazení φ zachovává skalární součin, tj. φ je unitární automorfismus prostoru V_n. Platí pak vztah

$$CC' = J \quad \Rightarrow \quad C' = C^{-1}.$$

Je-li matice C navíc symetrická, platí již výše zmiňovaný vztah $C = C'$ neboli $C^2 = J$ a tedy automorfismus φ je navíc involutorní. Každému takovému automorfismu lze přiřadit jedinou shodnost euklidovského prostoru, jejíž počátek je samodružný bod. V našem případě tedy φ reprezentuje souměrnost podle nějakého podprostoru $V_{n-p} \subset V_n$. Ortogonální doplněk tohoto podprostoru označme V_p. Ortonormální bázi $\{\overrightarrow{d_1}, \dots \overrightarrow{d_n}\}$ pak lze volit tak, že

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{d_i}) &= \overrightarrow{d_i} \in V_{n-p} \quad i = 1, 2, \dots n-p \\ \varphi(\overrightarrow{d_i}) &= -\overrightarrow{d_i} \in V_p \quad i = n-p+1, \dots n. \end{aligned}$$

Matice B automorfismu φ má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Automorfismus φ můžeme dostat též složením p automorfismů φ_j (kde $j = n-p+1, \dots, n$), pro které platí

$$\begin{aligned} \varphi_j(\overrightarrow{d_j}) &= -\overrightarrow{d_j}, \\ \varphi_j(\overrightarrow{d_i}) &= \overrightarrow{d_i}, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

přičemž je můžeme složit v jakémkoliv pořadí. Automorfismus φ_j je tedy reprezentován maticí, která má na místě j-tého řádku a j-tého sloupce -1, jinak jsou na hlavní diagonále jedničky a mimo ni nuly. Jaká je však matice automorfismu φ_j v bázi $\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\}$? Je to matice

$$C_j = A^{-1}B_jA = A^{-1}(J - 2D_j)A,$$

kde D_j je matice, která má v j-tém řádku a j-tém sloupci číslo 1, všechny její ostatní prvky jsou nulové. Proto

$$C_j = J - 2A^{-1}D_jA$$

a její prvek $c_{j,ik}$ v i-tém řádku a k-tém sloupci je

$$c_{j,ik} = \delta_{ik} - 2\sum_{r,s} a_{ri}d_{j,rs}a_{sk} = \delta_{ik} - 2a_{ji}a_{jk}.$$

Tedy $C_j = J - 2a'_j a_j$, kde $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$. Podobně jako jsme zobrazení φ získali složením $n-p$ zobrazení φ_j, je matice C rovna součinu $n-p$ symetrických matic $C_{n-p+1}, C_{n-p+2}, \ldots, C_n$, přičemž opět nezáleží na jejich pořadí.

Veškeré zde provedené úvahy a výpočty shrnuje následující schéma:

$$\begin{array}{ccl} \varphi & = & \varphi_{n-p+1} \circ \varphi_{n-p+2} \circ \ldots \circ \varphi_n \\ C & = & C_{n-p+1} \cdot C_{n-p+2} \cdot \ldots \cdot C_n \\ \downarrow & & \quad\uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad\qquad\quad \uparrow \\ B & = & B_{n-p+1} \cdot B_{n-p+2} \cdot \ldots \cdot B_n \end{array}$$

Z předchozích odstavců vyplývá, že ortonormální matice C reprezentuje libovolné involutorní shodné zobrazení. Jelikož lze každou takovou matici C rozložit na výše zmíněný součin, lze tedy i každou involutorní shodnost složit z konečného počtu souměrností podle nadrovin.

Ověřme si tyto výsledky pro elementární případ. Mluvíme-li o involutorních shodnostech v rovině, jedná se vždy o středovou nebo osovou souměrnost. Každá středová souměrnost v rovině je reprezentována maticí

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $(C + J)$ je 0, matice J_p je tedy totožná s maticí C. Matice přechodu A je pak maticí jednotkovou. Středovou souměrnost lze složit z osových souměrností podle os x, y, které jsou reprezentovány po řadě maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

První z matic ale získáme také jako matici $(J - 2aa')$, kde a je druhý sloupec matice jednotkové. Druhou z matic pak získáme jako matici $(J - 2bb')$, kde b je první sloupec matice jednotkové. Součinem obou matic získáme původní matici C.

Většího smyslu nabývají Bydžovského výsledky až pro zobrazení v prostorech dimenze alespoň 3. Vezměme si například symetrii podle přímky v trojrozměrném euklidovském prostoru. Nechť tato přímka prochází počátkem a je dále určena nenulovým vektorem $\overrightarrow{u} = (u, v, w)$.

Matice tohoto zobrazení má tvar:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2-w^2}{u^2+v^2+w^2} & \frac{2uv}{u^2+v^2+w^2} & \frac{2uw}{u^2+v^2+w^2} \\ \frac{2uv}{u^2+v^2+w^2} & \frac{-u^2+v^2-w^2}{u^2+v^2+w^2} & \frac{2vw}{u^2+v^2+w^2} \\ \frac{2uw}{u^2+v^2+w^2} & \frac{2vw}{u^2+v^2+w^2} & \frac{-u^2-v^2+w^2}{u^2+v^2+w^2} \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $(C + J)$ je 1, je tedy ekvivalentní s maticí

$$J_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tato matice odpovídá matici B, použijeme-li značení zavedené na předchozích stranách. K matici J_p bychom mohli dospět i tím způsobem, že bychom soustavu souřadnic zvolili tak, aby daná přímka splynula s osou x, přičemž hledaná matice A je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} & \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{-uw}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{-vw}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že matice A je ortonormální, tedy, že platí $AA^{-1} = J$.

Symetrie podle osy x se dá složit ze symetrií podle rovin $y = 0$ a $z = 0$. Symetrie podle roviny $z = 0$ je reprezentována maticí

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odpovídající matice C_1, neboli matice, reprezentující tentýž automorfismus, ovšem vzhledem k původní bázi, je pak dána vztahem $C_1 = A^{-1}B_1A$ nebo též $C_1 = J - 2A^{-1}D_1A$, kde D_1 je matice, která má na místě třetího řádku a třetího sloupce 1, jinak všude 0.

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{u^4+2u^2v^2+v^4+v^2w^2-u^2w^2}{(u^2+v^2)(u^2+v^2+w^2)} & \frac{-2uvw^2}{(u^2+v^2)(u^2+v^2+w^2)} & \frac{2uw}{(u^2+v^2+w^2)} \\ \frac{-2uvw^2}{(u^2+v^2)(u^2+v^2+w^2)} & \frac{u^4+2u^2v^2+v^4+u^2w^2-v^2w^2}{(u^2+v^2)(u^2+v^2+w^2)} & \frac{2vw}{(u^2+v^2+w^2)} \\ \frac{2uw}{(u^2+v^2+w^2)} & \frac{2vw}{(u^2+v^2+w^2)} & \frac{w^2-u^2-v^2}{(u^2+v^2+w^2)} \end{pmatrix}.$$

Symetrii podle roviny $y = 0$ lze vyjádřit maticí

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v předchozím případě je matice C_2 rovna součinu matic $A^{-1}B_2A$, a tedy

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{-u^2+v^2}{(u^2+v^2)} & \frac{2uv}{(u^2+v^2)} & 0 \\ \frac{2uv}{(u^2+v^2)} & \frac{-u^2+v^2}{(u^2+v^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno se ověří, že součinem matic C_1 a C_2 je matice C a tedy že se nám podařilo nalézt rozklad ortonormální matice C na součin elementárních matic reprezentujících souměrnosti podle nadrovin.

Dalo by se ve stručnosti říci, že Bydžovský v této práci ukázal, že každá involutorní shodnost se dá složit ze souměrností podle nadrovin, i když to takto jednoduše neformuloval, dokonce ani nezmínil souvislost maticového počtu s jednoduchými geometrickými zobrazeními, i když si můžeme být téměř jisti, že o ní věděl.

Poslední prací, kterou zde zmíním, je článek ***Reálné body hyperoskulační algebraických křivek rovinných***, který vyšel v časopise *Rozpravy české akademie* roku 1916. Bydžovský se v této práci snaží některé věty platící pro inflexní body kubických křivek v jistém směru zevšeobecnit pro body křivek vyšších stupňů. Inflexní bod je pro kubiku bodem hyperoskulačním, t.j. takovým, v němž má tečna s křivkou stupně n dotyk n-bodový. Práce se omezuje pouze na reálné hyperoskulační body.

Bydžovský vychází z jednoduššího případu, kdy má křivka n-ho stupně 3 reálné hyperoskulační body. Soustavu souřadnic volí tak, že první dvě hyperoskulační tečny splynou se souřadnicovými osami

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,$$

jim odpovídající hyperoskulační body definuje podmínkami

$$x_2 - x_3 = 0,\ x_3 - x_1 = 0.$$

Třetí hyperoskulační bod pak Bydžovský volí na ose

$$x_3 = 0.$$

Je-li navíc

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

rovnice třetí hyperoskulační tečny, je hledaná křivka dána rovnicí

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) u_{n-1}(x_1, x_2, x_3) + x_3^n = 0, \tag{7.8}$$

kde $u_{n-1}(x_1, x_2, x_3)$ je forma $(n-1)$-ho stupně. V dalším textu pak autor zjišťuje, jaké podmínky musí daná křivka splňovat, aby měla skutečně přímku $x_1 = 0$, resp. $x_2 = 0$, za hyperoskulační tečnu, tj. aby se rovnice křivky po dosazení dané podmínky redukovala na n-tou mocninu dvojčlenu $x_2 - x_3$, resp. $x_3 - x_1$.

Dochází k tomuto závěru:

Má-li reálná křivka tři reálné body hyperoskulační, leží tyto body na přímce, je-li stupeň křivky lichý; je-li sudý, leží buď na přímce, nebo na kuželosečce, jež se v těchto bodech křivky dotýká.[12]

Leží-li hyperoskulační body na přímce (n sudé nebo liché), lze rovnici křivky vyjádřit následovně. Je-li tato přímka dána rovnicí $p = 0$ a tečny v těchto bodech $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0$, je její rovnice

$$p^n + p_1 p_2 p_3 u_{n-3}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Leží-li tyto body na kuželosečce (n sudé) o rovnici $k = 0$, jejíž tečny v těchto bodech jsou dány rovnicemi $t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ t_3 = 0$, je podle Bydžovského křivka dána rovnicí

$$k^{\frac{n}{2}} + t_1 t_2 t_3 u_{n-2}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Zde se zřejmě jedná pouze o přepis, protože je-li forma u stupně $n-2$, tečny t_1, t_2, t_3 každá stupně prvního, tato křivka by byla stupně $(n+1)$. Správně má být forma u z předchozího vztahu stupně $(n-3)$, podobně jako v předchozím případě.

Bude-li počet hyperoskulačních bodů větší než 3, lze z předchozích pravidel snadno odvodit nová pravidla pro tyto body:

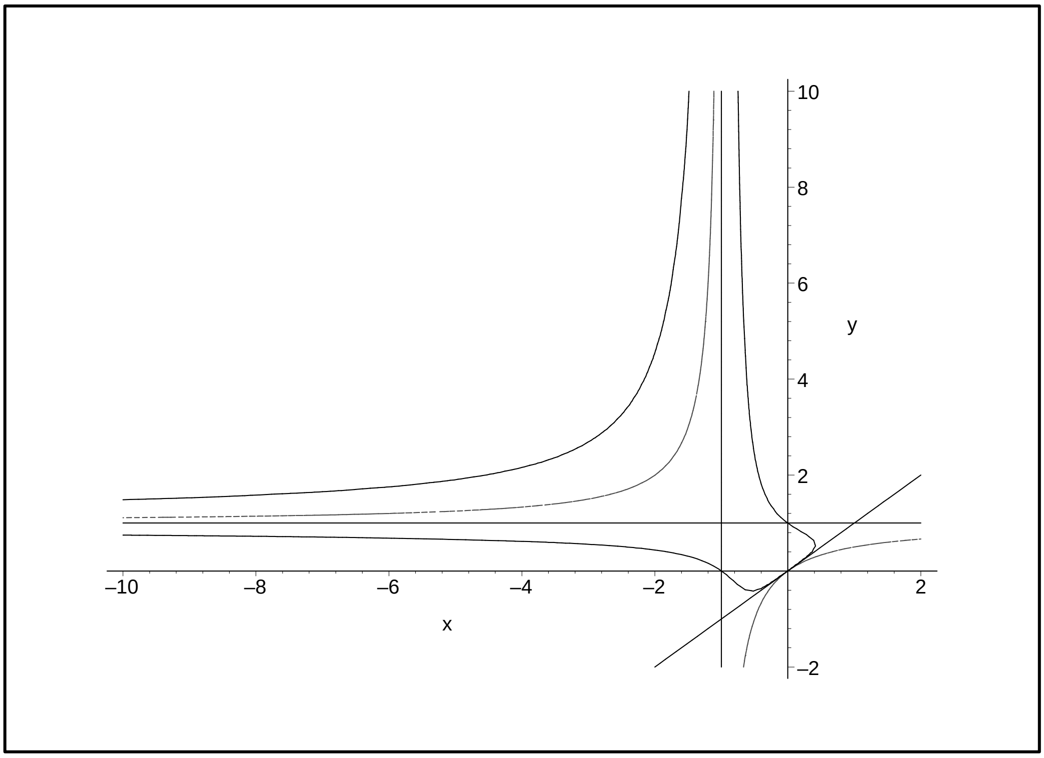
…pro n liché leží všechny na přímce, ježto každý čtvrtý leží na přímce určené dvěma z původních tří.[13]

[12] [B33], str. 7.
[13] [B33], str. 8.

Z čehož vyplývá, že každá křivka n-ho stupně pro n liché může mít nejvýše n hyperoskulačních bodů. Pro křivky sudého stupně lze pak odvodit větu následující.

Jestliže tři reálné body hyperoskulační křivky stupně sudého leží na přímce, leží na této přímce všechny ostatní. Neleží-li žádné tři reálné body hyperoskulační na přímce, pak leží na kuželosečce, jež se dotýká v nich křivky.[14]

A tedy i pro n sudé může mít křivka maximálně n hyperoskulačních bodů. Jsou to totiž opět buď průsečíky výše zmíněné přímky s křivkou, nebo všechny body dotyku kuželosečky s křivkou, jichž může být nejvýše n, neboť je každý počítán s násobností alespoň 2.



Obrázek 7.3:

Ukažme si vše alespoň na jednom konkrétním případu. Vezměme si křivku čtvrtého stupně se třemi hyperoskulačními body ležícími na kuželosečce

$$x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0, \tag{7.9}$$

tečny v nich nechť jsou dány rovnicemi

$$x_2 = x_3,\ x_3 = x_1,\ x_2 = -x_1. \tag{7.10}$$

Forma $u_{n-3}(x_1, x_2, x_3)$ nechť je tvaru

$$x_2 = 0.$$

Kvartika je pak dána rovnicí

$$(x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)^2 + (x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 + x_2)(x_2) = 0. \tag{7.11}$$

[14][B33], str. 9.

Souřadnice hyperoskulačních bodů, ležících na této kvartice, jsou $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Křivky (7.11), (7.9) a (7.10) jsou znázorněny na obrázku 7.3.

Kapitola 8

Vysokoškolské učebnice

Profesor Bohumil Bydžovský se během svého dlouhého působení na akademické půdě věnoval nejen vědě, ale také, a to především, svým studentům. Napsal pro ně řadu učebnic, z nichž většina je věnována žákům vyšších tříd reálných škol a reálných gymnázií, tři jsou věnovány studentům vysokých škol, respektive nadanějším studentům škol středních.

Roku 1909 proběhla na českých školách Marchetova [1] reforma učebních osnov. V jejím rámci byla přijata rovněž nová osnova pro matematiku, která reagovala na evropské reformní návrhy [2] modernizovat matematické vzdělání.

Jednota českých matematiků a fyziků tehdy pověřila několik svých zástupců sepsáním nových učebnic. Na Bohumila Bydžovského připadl úkol sepsat učebnice aritmetiky a algebry pro vyšší třídy středních škol.

Nové učebnice se od starších lišily hlavně snahou autorů o vysvětlení podstaty veškeré předkládané problematiky. Látka je zpracována do logicky uspořádaného systému.

Žák se během studia setkává s jednotlivými matematickými pojmy několikrát, přičemž při každém novém návratu k problematice byla látka metodicky i koncepčně vykládána s větší obecností, při využití předchozích zkušeností, tj. na kvalitativně vyšší úrovni. Tak mohla být dána úroveň abstrakce učiva mnohem lépe do souladu s věkem žáků. [3]

Bohumil Bydžovský tedy v letech 1910 až 1912 sepsal celkem šest učebnic [4], které jsou vesměs věnovány aritmetice, pouze *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol* ([B24]), kterou autor napsal společně s Janem Vojtěchem, se věnuje aritmetice a geometrii [5]. Všechny tyto učebnice se dočkaly řady dalších vydání, někdy nezměněných, jindy mírně nebo zcela přepracovaných.

Jedním z motivů pro pozdější přepracování učebnic byly další změny osnov výuky matematiky na středních školách z roku 1933. Spoluautory těchto nových vydání [6] byli vesměs Stanislav Teplý, František Vyčichlo a již zmiňovaný

[1] Gustav Marchet byl v období 2.6.1906–15.11.1908 českým ministrem kultu a vyučování v rámci Habsburské monarchie.

[2] Roku 1905 byl na shromáždění německých přírodovědců v Meranu přijat tzv. *meranský program* jehož obsahem byl návrh reformy matematicko-fyzikálního vzdělávání.

[3] Potůček, J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945 II.díl*, Pedagogická fakulta ZČU v Plzni, 1993, str. 17.

[4] Jedná se o práce [B15],[B16],[B18],[B19], [B22] a [B24].

[5] Bydžovský je autorem aritmetické části, Vojtěch je autorem geometrické části.

[6] [B79],[B80],[B88].

Jan Vojtěch. Tehdejší reforma školství se snažila o unifikaci studijních plánů všech typů středních škol, a tedy z učebnic pro reálné školy, gymnázia a reálná gymnázia vznikaly jednotné učebnice. Obsahová náplň nezaznamenala výrazných změn, ty se projevily spíše v uspořádání učiva.

Těmto středoškolským učebnicím se podrobně věnuje již zmiňovaná disertace Ladislavy Francové *Život a dílo Bohumila Bydžovského*, ve které je rovněž proveden rozbor prvních dvou učebnic vysokoškolských. Z důvodu úplnosti své práce jsem do této kapitoly zařadila rozbor všech tří vysokoškolských učebnic Bohumila Bydžovského, tedy nejen učebnice *Úvod do algebraické geometrie*, jejímž podkladem byla řada Bydžovského vědeckých článků.

8.1 Úvod do analytické geometrie

První Bydžovského učebnice, zaměřená svým obsahem na studenty vysokých škol, vyšla roku 1923 a její náplní jsou základní partie z analytické geometrie. Tato učebnice byla vydána s úpravami ještě dvakrát a to v letech 1946 a 1956. Učebnice je poměrně rozsáhlá, její první vydání má 408 stran, třetí dokonce 491 stran. Práce je rozdělena do dvou dílů, analytické geometrie v rovině a analytické geometrie v prostoru, které jsou dále členěny do kapitol, paragrafů a odstavců. Bydžovský byl původně připraven napsat pouze úvod do analytické geometrie v prostoru, výbor Jednoty čsl. matematiků a fyziků jej však požádal, zda by podobný úvod nesepsal i pro rovinnou analytickou geometrii.

Bydžovský o podstatě analytické geometrie píše:

Analytická geometrie studuje vlastnosti geometrických útvarů prostředky početními (analytickými) opírajícími se o zavedení souřadnic.

Důležitá část analytické geometrie je t. zv. geometrie diferenciální (č. infinitesimální), k níž vede důsledné užití infinitesimálního počtu na geometrické úvahy. Obyčejně se však názvu „analytická geometrie“ užívá – a tak je tomu také v této knize – ve smyslu užším, tak totiž, že se z ní úvahy infinitesimální (úplně nebo velkou většinou) vylučují, takže početní prostředky, jichž se využívá, jsou omezeny na algebru. [7]

První díl učebnice je rozdělen do sedmi kapitol, které jsou dále členěny do paragrafů a odstavců. První z nich nese název **Úlohy základní**. Bydžovský zde zavádí souřadnice v orientované přímce, vysvětluje pojem dělicí poměr, přičemž upozorňuje, že jeho hodnota nezávisí ani na zvolené orientaci přímky, ani na zvolené jednotce. Za pomoci dělicího poměru a matematické indukce odvozuje vzorec pro výpočet těžiště soustavy n hmotných bodů ležících na přímce:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \tag{8.1}$$

kde x_i, respektive m_i jsou souřadnice jednotlivých bodů soustavy, respektive hmoty, soustředěné v jednotlivých bodech.

Dále autor zavádí pojem dvojpoměr čtyř kolineárních bodů a dokazuje, že jeho hodnota se nemění lineární substitucí. Autor má na mysli substituci

[7] [B47], str. 9.

vyjádřenou rovnicí

$$X = \frac{ax+b}{cx+d},$$

kterou bychom dnes nazvali substitucí lineárně lomenou. V dalším textu definuje souřadnice bodu v rovině, osu x nazývá *osou úseček*, osu y *osou pořadnic*. Rozlišuje souřadnice *pravoúhlé* a *kosoúhlé*, podle toho, zda *dutý* úhel ϑ, jež svírají osy x a y je či není pravý. Častěji než s pojmem dutý úhel se v dnešních učebnicích setkáme s názvem konvexní, úhel konkávní se v tehdejší terminologii nazýval vypuklý. Dále hovoří o orientaci soustavy podle vzájemné polohy os x a y.

Ve druhé části první kapitoly nazvané směrové úhly, Bydžovský definuje úhel dvou orientovaných přímek v orientované rovině $(\widehat{pq})$, jako

...ten úhel menší než 2π, o který je nutno otočiti ve smyslu kladném přímku p kolem jejího průsečíku s přímkou q, aby s touto přímkou splynula i co do smyslu. [8]

Bydžovský zde odvozuje známý vzorec, který říká, že délka pravoúhlého průmětu úsečky o délce a na přímku, s níž tato úsečka svírá úhel φ, se rovná $a\cos\varphi$. Nahradíme-li úsečku lomenou čárou, lze tuto větu zobecnit následujícím způsobem:

Součet průmětů stran lomené čáry rovná se průmětu spojnice počátečního bodu lomené čáry s bodem koncovým. [9]

Kosiny úhlů α a β, jež svírá orientovaná přímka se souřadnicovými osami, autor nazývá *směrovými kosiny* a ukazuje, že dvěma směrovými kosiny je určen právě jeden směr. Bydžovský odvozuje vzájemný vztah mezi směrovými úhly α, β dané orientované přímky a úhlem ϑ kosoúhlých souřadných os x, y.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\vartheta \\ \cos\beta & \cos\vartheta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

V poslední části první kapitoly se autor podrobně věnuje transformacím souřadnic, přičemž postupuje od jednodušších příkladů ke složitějším a postupně celou problematiku zobecňuje. Začíná transformací posunutím a přes transformaci pravoúhlých souřadnic v kosoúhlé o stejném počátku, respektive kosoúhlých souřadnic v kosoúhlé o stejném počátku se dostává až k transformaci zcela obecné, tj. takové v níž se změní jak počátek soustavy souřadnic, tak směry os. Ve všech případech odvozuje rovnice transformací v obou směrech a ukazuje, že

Obecná transformace souřadnic v rovině je vyjádřena celistvou lineární substitucí proměnných; modul této substituce je roven $\pm\sin\vartheta' : \sin\vartheta$, kde ϑ je úhel původních, ϑ' úhel nových os souřadných, při čemž znaménko + platí, když orientace obou soustav jsou stejné, znaménko −, jsou-li opačné. [10]

Modul substituce je determinant sestavený z koeficientů při nových proměnných v substitučních rovnicích. Ten je roven ± 1 v případě, že navzájem transformujeme pravoúhlé souřadnice se společným počátkem. Autor dále vysvětluje

[8] [B47], str. 10.
[9] [B47], str. 12.
[10] [B47], str. 24.

souvislost se základními transformacemi roviny, tj. s posunutím, otáčením, či obecným pohybem roviny. Pro bližší přiblížení látky Bydžovský ukazuje možnost aplikace transformace souřadnic na výpočet obsahu trojúhelníku. Označíme-li souřadnice vrcholů trojúhelníku (x_i, y_i), $(i = 1, 2, 3)$, lze jeho obsah vyjádřit jako determinant

$$\Delta = \frac{1}{2} \sin \vartheta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bydžovský ještě doplňuje, že tento výraz bude kladný resp. záporný, podle toho v jakém smyslu obíháme zadaný trojúhelník.

Dále se autor věnuje rovněž polárním souřadnicím a zcela obecným křivočarým souřadnicím.

Zvolíme v rovině dvě soustavy čar takové, aby každá čára jedné soustavy protínala každou čáru druhé a aby mimo to každým bodem roviny procházela jak čára jedné, tak druhé soustavy. Každý bod je pak určen jako průsečík dvou těchto čar, jedné z každé soustavy. Jestliže pak dovedeme nějak určiti a vyjádřiti každou čáru těchto soustav číslem, lze pokládati čísla, jimiž jsou vyjádřeny ty dvě křivky, jež se v daném bodu protínají za souřadnice tohoto bodu v širším smyslu. [11]

Kapitola je zakončena šestatřiceti úlohami k procvičení látky. Svou náročností úlohy odpovídají studentům prvních ročníků vysokých škol, pro něž byla učebnice převážně určena.

Druhá kapitola se jmenuje **Přímka**. Autor se v úvodu vrací k úloze o obsahu trojúhelníku, leží-li totiž třetí vrchol $P(x, y)$ na spojnici vrcholů $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_1, y_2)$, je obsah trojúhelníku PP_1P_2 roven 0.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y_2) + y(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y - 1) = 0.$$

Bydžovský poukazuje na geometrický význam koeficientů této rovnice:

…koeficienty při proměnných jsou průměty úsečky omezené danými body do obou os; člen absolutní je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku OP_1P_2. [12]

Výše uvedenou rovnici pak přepisuje do tvaru

$$Ax + By + C = 0,$$

kde $(A, B) \neq (0, 0)$, v opačném případě by totiž body P_1, P_2 byly totožné. Jelikož je přímka dvěma svými body jednoznačně určena, lze tedy každou přímku vyjádřit výše uvedenou rovnicí. V dnešních učebnicích se již s takovýmto zavedením rovnice přímky nesetkáme. Autor se poté speciálně věnuje tvarům této rovnice pro přímky procházející počátkem či rovnoběžné s některou ze souřadnicových os. Pro přímky neprocházející počátkem, které nejsou rovnoběžné s některou ze souřadnicových os, pak definuje tzv. úsekový tvar rovnice přímky a upozorňuje na výhodnost tohoto tvaru pro sestrojení přímky.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}.$$

[11] [B47], str. 31.
[12] [B47], str. 34.

Dále autor zavádí parametrické rovnice přímky a odvozuje vzorec pro vzdálenost bodu od přímky. Hledá rovněž průsečík dvou přímek a jejich úhel. Veškeré výpočty provádí v kosoúhlých souřadnicích, které si čtenář snadno sám může převést na souřadnice pravoúhlé.

Dále zavádí pojem svazek přímek a uvádí nutnou podmínku pro to, aby tři přímky L_1, L_2, L_3 o koeficientech $A_i, B_i, C_i, (i = 1, 2, 3)$, náležely svazku:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

V tom případě, lze pak rovnici třetí přímky vyjádřit jako $k_1 L_1 + k_2 L_2 = 0$, kde alespoň jedno z čísel k_1, k_2 je nenulové.

V další části se autor věnuje nevlastním bodům, které zavádí jako společný bod dvou rovnoběžných přímek. Zamýšlí se nad tím, jak nevlastní body číselně vyjádřit, jelikož na rozdíl od bodů vlastních je nelze vyjádřit kartézskými [13] souřadnicemi.

Nevlastní bod spojnice dvou bodů je číselně vystižen tím, že má vzhledem k těmto dvěma bodům dělící poměr roven 1.

Tento dělící poměr zůstane týž, i když volíme na přímce jiné dva body základní.

Přímka má jediný nevlastní bod; v tomto bodu ji protínají všechny přímky s ní rovnoběžné. [14]

Bydžovský dále zavádí homogenní souřadnice, čímž odstraňuje nedostatek dvojího číselného vyjádření bodů vlastních a nevlastních. Vyjadřuje rovnici přímky v homogenních souřadnicích a popisuje výhody takového zápisu. Autoři dřívějších učebnic analytické geometrie, Gustav Skřivan [15] a František Josef Studnička [16], používali homogenních souřadnic jen zřídka. Dá se říci, že v tomto směru je Bydžovského učebnice o krok dále, její výsledky jsou kompaktnější.

V závěru kapitoly se autor zabývá bodovými řadami a svazky přímek. Definuje dvojpoměr v bodové řadě a ukazuje, že je invariantní vůči promítání svazkem přímek o libovolném středu. Rovněž zavádí dvojpoměr ve svazku přímek a poukazuje na jeho souvislost s dvojpoměrem v řadě. Závěr kapitoly je doplněn dvaašedesáti úlohami na procvičení látky. Vesměs se jedná o úlohy zadané obecně, ne pomocí konkrétních číselných parametrů.

Dalších pět kapitol prvního dílu učebnice je věnováno kuželosečkám. Jejich **základní vlastnosti** popisuje kapitola třetí. V úvodu Bydžovský definuje algebraickou křivku, stupeň algebraické křivky a ukazuje, že se stupeň nemění transformací souřadnic. Obecnou rovnici kuželosečky zapisuje ve tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kde a_{ij} jsou reálná čísla. Účelnost způsobu značení koeficientů vysvitne teprve, pokud převedeme rovnici do souřadnic homogenních, kde index 1 odpovídá proměnné x, index 2 proměnné y a index 3 proměnné z.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \qquad (8.2)$$

[13] Bydžovský používá starší název Descartesovy souřadnice.
[14] [B47], str. 51.
[15] Skřivan, G., *Základové analytické geometrie v rovině*, Praha, 1864.
[16] Studnička, F. J., *Úvod do analytické geometrie v rovině*, Praha, 1902.

Dále Bydžovský vyšetřuje průsečíky kuželosečky s přímkou. Pro případ, že přímka kuželosečku neprotne v reálných bodech, zavádí body imaginární a hovoří též o imaginárních přímkách. Podrobněji se zabývá též případem, kdy přímka kuželosečku protíná ve dvou splývajících bodech a je tedy její tečnou. Bydžovský uvažuje i případ, kdy má přímka s kuželosečkou všechny body společné a je tedy její součástí. Zavádí kuželosečku složenou, odvozuje její rovnici jako součin dvou lineárních mnohočlenů popisujících přímky, z nichž se kuželosečka skládá. Dále definuje diskriminant kuželosečky jako determinant sestavený z koeficientů rovnice (8.2), popisuje význam hodnosti diskriminantu a zabývá se singulárními body kuželoseček.

V další části této kapitoly se věnuje polárním vlastnostem kuželoseček. Definuje poláru bodu vzhledem ke kuželosečce zvlášť pro body mimo kuželosečku a zvlášť pro body ležící na kuželosečce. Odvozuje rovnici poláry, vysvětluje souvislost mezi tečnami kuželosečky vedenými bodem neležícím na kuželosečce a polárou tohoto bodu a rovněž se věnuje konstrukci poláry pro kuželosečku složenou.

Teprve v další kapitole provádí **třídění kuželoseček** podle počtu průsečíků s nevlastní přímkou, jež má v homogenních souřadnicích rovnici $z = 0$. Definuje pojem střed kuželosečky a rozlišuje kuželosečky středové a nestředové. V dalším textu seznamuje čtenáře s pojmy osy a hlavní směry kuželosečky, vhodnou volbou souřadnicové soustavy převádí rovnici kuželoseček všech typů do tzv. normálního tvaru. V závěru této kapitoly shrnuje předchozí výsledky do přehledné tabulky, která nám podává jednoduchý návod, jak zjistit „jakost“ kuželosečky. Písmenem A označuje diskriminant kuželosečky, A_{ij} značí subdeterminanty A.

A. Kuželosečky jednoduché: $A \neq 0$.

a) $A_{33} > 0$*; elipsa (kružnice, jestliže* $a_{12} = 0, a_{11} = a_{22}$*); elipsa je reálná, jestliže* $a_{11}A < 0$ *(nebo* $a_{22}A < 0$*); imaginární, jestliže* $a_{11}A < 0$ *(nebo* $a_{22}A < 0$*).*

b) $A_{33} < 0$*; hyperbola (jež je vždy reálná).*

c) $A_{33} = 0$*; parabola (jež je vždy reálná).*

B. Kuželosečky jednoduché: $A = 0$.

a) $A_{33} > 0$*; dvě přímky imaginární sdružené, různoběžné.*

b) $A_{33} < 0$*; dvě přímky reálné různoběžné.*

c) $A_{33} = 0$*; dvě přímky rovnoběžné. Je-li* $a_{11} \neq 0$ *jsou přímky reálné různé, když* $A_{22} < 0$*,imaginární sdružené, když* $A_{22} > 0$*, reálné totožné, když* $A_{22} = 0$*. Je-li* $a_{11} = 0$ *(je vždy* $A_{22} = 0$*), rozhoduje se zcela stejně podle hodnoty* A_{11}*.* [17]

Následují dva řešené příklady, na nichž autor vysvětluje probranou teorii, a dalších třiasedmdesát příkladů neřešených, které jsou uvedeny bez výsledků.

V další kapitole se Bohumil Bydžovský věnuje **kružnici**. Uvádí různé tvary její rovnice, rozlišuje kružnice reálné , imaginární a kružnici nulovou. Ukazuje, že nulová kružnice, jejíž rovnice ve středovém tvaru je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = 0,$$

[17][B47], str. 113–114.

je složena ze dvou imaginárních přímek, lze ji totiž zapsat ve tvaru

$$[(x-m)+i(y-n)][(x-m)-i(y-n)]=0.$$

Jedná se tedy o kuželosečku složenou. Bydžovský kružnice složené zkoumá podrobněji a dokazuje větu:

Kružnice může se rozpadnouti dvojím způsobem: buď reálně, totiž ve dvě přímky reálné, z nichž (alespoň) jedna je nevlastní ; nebo imaginárně, totiž ve dvojici přímek isotropických. [18]

Autor rovněž definuje pojem kruhový bod, isotropickou přímkou pak nazývá spojnici libovolného bodu s bodem kruhovým. V dalším hledá společné tečny dvou kružnic a příslušné středy stejnolehlosti. Definuje svazek kružnic rovnicí

$$k_1K_1+k_2K_2=0,$$

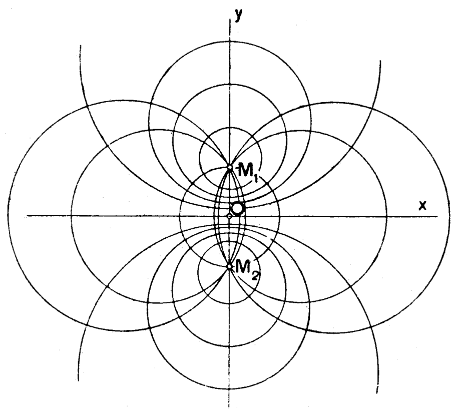
kde $K_1(x,y,z)=0$, $K_2(x,y,z)=0$ jsou rovnice dvou základních kružnic svazku, poměr $\frac{k_2}{k_1}$ nazývá parametrem svazku. Z následující definice je patrné, že rozlišuje čtyři typy svazků, první tři z nich bychom dnes nazvali eliptický, hyperbolický a parabolický svazek.

Souhrn kružnic procházejících danými dvěma body reálnými; nebo dvěma imaginárními body sdruženými; nebo bodem daným, v němž mají všechny společnou tečnu; nebo konečně souhrn kružnic o daném středu je svazkem kružnic. [19]

V dalším Bydžovský vyšetřuje vlastnosti svazku kružnic, definuje pojmy centrála a chordála svazku, zkoumá za jakých podmínek je daná kružnice kolmá ke dvěma kružnicím svazku a dokazuje věty:

Kružnice ortogonální ke dvěma daným jsou ortogonální ke všem kružnicím svazku určeného těmito dvěma danými.

Kružnice ortogonální ke všem kružnicím svazku tvoří rovněž svazek, jehož chordálou je centrála a centrálou chordála svazku. [20](obr. 8.1)[21]



Obrázek 8.1:

[18] [B47], str. 124.
[19] [B47], str. 133.
[20] [B47], str. 138.
[21] Obrázek byl převzat z Bydžovského práce.

Velice podrobně se zde autor věnuje také kruhové inverzi. Bod P' je inverzní vzhledem k bodu P v kruhové inverzi se středem O (O, P, P' kolineární), jestliže je splněna podmínka

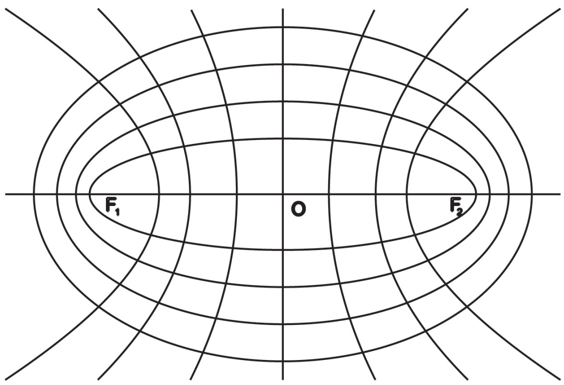
$$|OP| \cdot |OP'| = |k|,$$

kde k je daná nenulová konstanta. Tato konstanta je kladná, leží-li bod P' na polopřímce OP, v opačném případě je k záporné. Bydžovský odvozuje vztahy mezi souřadnicemi libovolné dvojice bodů P, P'. Zdůrazňuje, že až na tři výjimky odpovídá každému bodu v inverzi jediný bod. Tyto výjimky tvoří střed inverse a kruhové body, jimž odpovídají celé přímky. Podrobně rozebírá, jak se v inverzi zobrazí přímka, resp. kružnice a hledá samodružné kružnice inverze.

Předposlední kapitola prvního dílu učebnice nese název **Průměrové a ohniskové vlastnosti kuželoseček**. Bydžovský zde definuje sdružené průměry kuželosečky jako střední příčky rovnoběžníku kuželosečce vepsaného. Dnes je obvyklejší definovat sdružené průměry jako dva průměry, z nichž každý je polárně sdružen se směrem druhého. Je zajímavé, že se Bydžovský o této možnosti nezmiňuje, ačkoli polární vlastnosti kuželoseček jsou v učebnici vysvětleny. V dalším textu pak nalézáme souvislost sdružených průměrů s osami elipsy a je podán návod jak osy zkonstruovat pomocí tzv. Rytzovy konstrukce. Bydžovský v textu název konstrukce neuvádí, ačkoliv byl v jeho době jistě známý. Autor dále zkoumá, za jakých podmínek jsou dvě kuželosečky stejnolehlé, definuje pojem ohnisko kuželosečky a podrobně zkoumá jeho vlastnosti. Zabývá se rovněž kuželosečkami konfokálními (viz obr. 8.2)[22]:

Každým bodem roviny procházejí dvě kuželosečky o daných (reálných) ohniscích; jedna je elipsa, druhá hyperbola.

Středové kuželosečky navzájem konfokální jsou všechny vepsány do téhož čtyřstranu, jehož strany jsou dvě dvojice isotropických přímek. Obráceně souhrn kuželoseček vepsaných do takového čtyřstranu je totožný se soustavou kuželoseček konfokálních; reálné průsečíky oněch dvojic jsou společná reálná ohniska. [23]



Obrázek 8.2:

Všechny takové kuželosečky lze psát pomocí následující rovnice, kde k je

[22]Obrázek byl vytvořen podle originálu z Bydžovského práce.
[23][B47], str. 185.

proměnný parametr, a a b jsou poloosy některé elipsy soustavy ($a > b$).

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1. \tag{8.3}$$

Když k stoupá od $-\infty$ je kuželosečka nejprve elipsa, jejíž poloosy stále klesají, při čemž délka hlavní osy se blíží délce $2e$, až se elipsa smrští na dvojnásobnou úsečku omezenou oběma ohnisky (pro $k = b^2$); pak přejde v hyperbolu, jež se nejprve těsně přimyká ke dvojnásobné zbývající části osy hlavní, jejíž hlavní osa je menší než zmíněná úsečka a stále se zmenšuje, kdežto osa vedlejší roste, až – pro $k = a^2$ – hyperbola přejde ve dvojnásobnou osu vedlejší.(viz. obr.) [24]

Budeme-li řešit rovnici (8.3) pro konkrétní bod roviny (x_0, y_0) vzhledem k neznámé k, snadno nahlédneme, že po úpravě tato rovnice

$$k^2 + k(x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2) + a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0$$

má s výjimkou ohnisek vždy dva reálné různé kořeny, z nichž jeden leží v intervalu $(-\infty, b^2)$, druhý v intervalu (b^2, a^2). Přísluší tedy ke každému takovému bodu jediná dvojice konfokálních kuželoseček, elipsa a hyperbola, které se v tomto bodě protínají. Bydžovský v učebnici tímto způsobem zavádí eliptické souřadnice bodu, podobně odvozuje i parabolické souřadnice pomocí dvou opačně orientovaných souosých konfokálních parabol.

V poslední kapitole části věnované rovinné geometrii, která se nazývá **Podrobnější vlastnosti kuželoseček**, se autor věnuje projektivnímu vytvoření kuželoseček. Dokazuje, že kuželosečka je jednoznačně určena pěti body a podává několik návodů (např. pomocí Pascalovy věty), jak z daných pěti bodů sestrojit neomezený počet dalších bodů. Dále zkoumá vlastnosti tečen kuželosečky v souvislosti s polaritou. Ukazuje, že kuželosečka je určena rovněž pěti svými tečnami a dokazuje větu duální k Pascalově větě, takzvanou větu Brianchonovu.

Věty, které v této kapitole Bohumil Bydžovský dokazuje, jsou základem tzv. projektivní geometrie kuželoseček. Jak sám autor píše, podrobné studium této partie geometrie se však vymyká rámci této knihy. Právě z tohoto důvodu je Bydžovský v pozdějších dvou vydáních učebnice vynechal.

V závěru kapitoly se ještě věnuje křivosti kuželoseček, odvozuje vzorce pro určení poloměru a středu křivosti zvlášť pro kuželosečky středové a pro parabolu, definuje pojem evoluta křivky. Dále řeší úlohu sestrojení normály k dané kuželosečce vedené z bodu na ní neležícím.

Druhý díl učebnice je věnován geometrii v trojrozměrném prostoru. Je stejně rozsáhlý jako díl první a je rozčleněn do osmi kapitol. V úvodní kapitole nazvané **Úlohy základní** Bydžovský definuje souřadnice bodu a vysvětluje jejich geometrický význam, zavádí orientaci soustavy souřadnic. Na rozdíl od prvního dílu používá výhradně souřadnice pravoúhlé, kosoúhlým je věnován pouze jeden paragraf poslední kapitoly. Dále definuje směrové úhly a směrové kosiny přímky, resp. směru a dokazuje, že součet čtverců směrových kosinů téhož směru je roven jedné. Určuje vzdálenost dvou bodů, hledá odchylku dvou směrů, zjišťuje za jakých podmínek jsou kolmé, resp. rovnoběžné. Na

[24] [B47], str. 186.

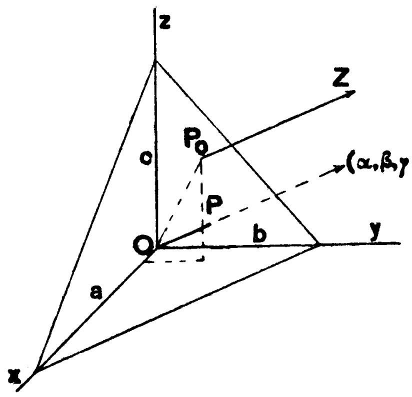
základě toho pak hledá směrové kosiny směru, jež je současně kolmý ke dvěma směrům, určuje tedy vlastně směr nejkratší příčky dvou mimoběžek.

Podrobně se věnuje také transformacím soustavy souřadnic. Nejprve se zabývá jednoduššími případy, tj. transformací posunutím, resp. transformací změnou směru os, teprve poté přechází k úloze obecné.

Ve druhé kapitole se autor věnuje **rovině** v prostoru trojrozměrném. Zajímavým, avšak poměrně komplikovaným způsobem, se kterým se v dnešních učebnicích nesetkáme, odvozuje její rovnici. Vychází z rovnice roviny xy

$$z = 0.$$

Na libovolnou rovinu ρ, jejíž rovnici hledá, spustí z počátku O kolmici, jejíž patu označí P, její směrové úhly pak značí α, β, γ. Libovolný bod (x_0, y_0, z_0) roviny ρ zvolí za nový počátek soustavy souřadnic, rovinu ρ za rovinu XY a za osu Z kolmici k této rovině ve zvoleném bodě, která je rovnoběžná a shodně orientovaná s původně zkonstruovanou kolmicí (obr. 8.3)[25].



Obrázek 8.3:

V této nové soustavě má rovina ρ rovnici

$$Z = 0.$$

Nyní Bydžovský do této rovnice dosadí za Z výraz, kterému se Z rovná podle transformačních rovnic odvozených v předchozí kapitole a dostává rovnici ρ v původních souřadnicích:

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0$$

Tuto rovnici pak přepisuje do tvaru

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

který nazývá normální rovnicí roviny a vysvětluje význam jednotlivých koeficientů:

Koeficienty při proměnných v rovnici roviny jsou úměrné směrovým kosinům normály této roviny; absolutní člen dělený druhou mocninou ze součtu čtverců těchto koeficientů, při níž volíme znaménko takové, jako má tento absolutní člen, rovná se vzdálenosti roviny od počátku. [26]

[25] Obrázek byl převzat z Bydžovského práce.
[26] [B47], str. 248.

Kromě normálního tvaru uvádí Bydžovský ještě úsekový tvar rovnice roviny a parametrické rovnice roviny. Odvozuje vzdálenost bodu od roviny pomocí transformace souřadnic, při níž tento bod posune do počátku soustavy souřadnic. Definuje rovněž pojmy svazek a trs rovin. Hledá vztah, který platí mezi obsahem rovinného obrazce a obsahem jeho průmětu do roviny. Dále počítá objem čtyřstěnu určeného svými vrcholy jako jednu šestinu determinantu sestaveného ze souřadnic vrcholů doplněného o sloupec jedniček, odkud vyvozuje podmínku pro to, aby čtyři body ležely v jedné rovině:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí kapitola se jmenuje **Přímka**. Bydžovský nejprve vyjadřuje obecné rovnice přímky, jakožto rovnice libovolných dvou navzájem různých rovin, v nichž daná přímka leží. Z těchto rovnic dopočítává směrové kosiny přímky a určuje podmínky, za nichž je daná přímka rovnoběžná s některou ze souřadnicových rovin. Dále odvozuje parametrické rovnice přímky. Zkoumá vzájemný vztah přímky a roviny, počítá jejich odchylku, průsečík, odvozuje podmínky pro rovnoběžnost, resp. kolmost přímky a roviny a tuto kapitolu doplňuje dvěma řešenými příklady. Dále se autor zabývá nevlastními útvary v prostoru, tj. nevlastními body, nevlastními přímkami a nevlastní rovinou. Stejně jako v prvním díle učebnice zavádí homogenní souřadnice, které umožňují jednotný popis vlastních i nevlastních bodů. Některé z předchozích výsledků pak přepisuje pomocí těchto souřadnic. Dále vyšetřuje vzájemnou polohu dvou přímek, počítá vzdálenost dvou mimoběžek a vzdálenost bodu od přímky.

Další kapitola nese název **Obecné vlastnosti ploch druhého stupně**. Bydžovský si nejprve klade otázku, jaká je množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$f(x, y, z) = 0.$$

Dochází k závěru, že se jedná o rovnici plochy v obvyklém názorném slova smyslu. Speciálně se věnuje případu, kdy tato rovnice obsahuje jen dvě proměnné a vyvozuje, že se jedná o válcovou plochu, jejíž površky jsou rovnoběžné s osou vyloučené proměnné. Zabývá se také rovnicí prostorové křivky, která je obecně dána rovnicemi dvou ploch, které se v této křivce protínají. Hovoří o křivce rovinné, je-li jedna z těchto ploch rovina, v opačném případě se jedná o křivku prostorovou. V dalším textu se již věnuje pouze plochám druhého stupně, jejichž rovnici v obyčejných (nehomogenních) souřadnicích lze zapsat

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0.$$

Zkoumá průnik kvadratické plochy s rovinou a dokazuje následující věty:

Rovina protne plochu kvadratickou v kuželosečce

Plocha je proťata dvěma rovinami rovnoběžnými v kuželosečkách téhož druhu a tak položených, že dvojice směrů sdružených jsou rovnoběžny. Tyto kuželosečky jsou podobné, jsou-li obě jednoduché, vyjma případ, že jsou to hyperboly, z nichž jedna je podobna hyperbole sdružené s druhou.

Protne-li plochu rovina v kuželosečce středové, protnou ji v takových kuželosečkách všechny roviny s ní rovnoběžné; středy všech těchto kuželoseček leží na přímce. [27]

Dále počítá průsečíky přímky a plochy a zjišťuje kdy je přímka resp. rovina součástí plochy.

V další části kapitoly se věnuje polárním vlastnostem kvadratických ploch. Obdobně jako v rovině definuje polární rovinu bodu, resp. pól dané roviny vzhledem ke kvadrice, zabývá se polárně sdruženými body, rovinami či přímkami. Dále definuje pojem diskriminant a vysvětluje jeho význam pro určování regularity kvadriky. Věnuje se také průměrovým vlastnostem kvadrik.

V páté kapitole Bydžovský podrobně rozebírá **Jednotlivé druhy ploch kvadratických**. Začíná u plochy kulové, kterou všude v textu nazývá koulí. V dnešní terminologii mají tyto dva pojmy odlišné významy. Poté autor popisuje různé tvary rovnice kulové plochy, věnuje se jejímu průniku s rovinou. Jakousi obdobou isotropických bodů, které jsou společné všem kružnicím v rovině je tzv. absolutní kružnice, kterou Bydžovský hledá jako průnik kulové plochy s nevlastní rovinou, a ukazuje, že tuto imaginární kružnici obsahuje každá kulová plocha. Dále definuje pojmy mocnost bodu ke kulové ploše, svazek kulových ploch a potenční rovina dvou kulových ploch.

Dále se autor věnuje rotačním kvadratickým plochám, přičemž vychází z rotačních ploch obecně, určuje velice obecně rovnici rotační plochy a pak za rotující křivku volí kuželosečku. Rotační plochu kvadratickou s osou rotace v ose z v nejobecnějším tvaru zapisuje pomocí následující rovnice:

$$A(x^2 + y^2) + Bz^2 + 2Cz + D = 0.$$

Podle hodnot koeficientů A, B a C pak provádí třídění rotačních kvadratických ploch. Velice podrobně se věnuje plochám singulárním a to nejen u ploch rotačních. Třídí je nejprve podle hodnosti diskriminantu na plochy obsahující jediný samodružný bod, plochy obsahující přímku samodružných bodů a plochy obsahující rovinu samodružných bodů. Poté provádí podrobnější třídění ploch s jedním samodružným bodem podle hodnosti subdeterminantu A_{44}.

Další část této kapitoly je věnována elipsoidu a hyperboloidům. Z rovnic rotačních elipsoidů, vzniklých rotací kolem jednotlivých souřadnicových os, Bydžovský odvozuje obecnější rovnici elipsoidu trojosého. Hovoří o hlavních rovinách, neboli o rovinách souměrnosti plochy, pomocí nich pak definuje osy a vrcholy plochy, zabývá se rovněž průnikem plochy s rovinou. Stejně tak i u jednodílného či dvoudílného hyperboloidu odvozuje obecnou rovnici z rovnic rotačních hyperboloidů a u obou ploch vyšetřuje totéž co u elipsoidu, navíc tu nacházíme definici asymptotického kužele. Bydžovský dále upozorňuje na některé společné vlastnosti těchto ploch.

Poté se stejným způsobem věnuje i eliptickému paraboloidu. Dokazuje, že na této ploše neleží žádné hyperboly a rovněž poukazuje na možnost vytvořit tuto plochu posouváním paraboly ležící v hlavní rovině takovým, při němž vrchol této paraboly se pohybuje po parabole ležící ve druhé hlavní rovině. Záměnou jednoho znaménka v rovnici eliptického paraboloidu

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

[27] [B47], str. 292–293.

získává plochu hyperbolického paraboloidu

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

O této ploše pak ukazuje, že na ní neleží žádné elipsy a že ji lze rovněž vytvořit jako plochu translační. V závěru se opět věnuje společným vlastnostem obou ploch.

Šestá kapitola má název **Rozbor rovnice druhého stupně**. Bydžovský se zde zabývá otázkou určení počtu a polohy hlavních rovin plochy dané obecnou rovnicí druhého stupně. Tento problém souvisí s hledáním os plochy druhého stupně, jelikož každá osa je průsečnicí dvou hlavních rovin. Bydžovský odvozuje, že pro řešení tohoto problému je nutné studovat následující kubickou rovnici pro hlavní směry (tak nazývá směr kolmý k hlavní rovině):

$$-\rho^3+\rho^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})-\rho[(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)+(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)]+A_{44}=0,$$

kde A_{44} je známý subdeterminant diskriminantu. Jedná se vlastně o rovnici pro určení vlastních čísel matice A plochy druhého stupně. Bydžovský o kořenech této rovnice dokazuje, že jsou všechny reálné a že jsou to tzv. ortogonální invarianty, tj. že se nemění při změně souřadnicové soustavy. Řešením předchozí rovnice Bydžovský nachází následující souvislost mezi kořeny rovnice a počty hlavních směrů:

a) Kubická rovnice má jeden kořen trojnásobný; každý směr je hlavní. (Plocha je koule.)

b) Rovnice má jeden kořen jednoduchý, jeden dvojnásobný. Plocha má nekonečně mnoho směrů hlavních, totiž všechny směry kolmé k určitému jednomu, jenž je rovněž hlavní.

c) Rovnice má všechny tři kořeny různé. Plocha má tři směry hlavní, jež jsou navzájem kolmé. [28]

Snadno se nahlédne, že pro každou plochu existuje alespoň jedna trojice navzájem kolmých hlavních směrů. Autor dále dokazuje, že každému hlavnímu směru přísluší jedna hlavní rovina, není-li příslušný kořen nulový. Není těžké pak např. odvodit, že variantě b) odpovídají plochy rotační, jež mají nekonečně mnoho rovin souměrnosti, které jsou rovnoběžné s daným směrem. V dalším textu Bydžovský šikovně využívá hlavních směrů ke zjednodušení rovnice kvadratické plochy. Kromě neřešených příkladů, jež jsou v závěru každé kapitoly, je tato kapitola doplněna také čtyřmi řešenými příklady.

Předposlední kapitola knihy se zabývá **podrobnějšími vlastnostmi ploch druhého stupně**. Autor se zde zabývá otázkou, jakou polohu musí mít rovina, která protíná kvadratickou plochu v kružnici, resp. ve dvojici přímek. Již v předchozích kapitolách Bydžovský dokázal, že protne-li rovina plochu v kružnici (tzv. cyklická rovina), protnou ji v kružnici i všechny roviny s ní rovnoběžné. Vyšetřuje tedy, které kvadriky, mimo kvadrik rotačních, obsahují soustavu, resp. soustavy navzájem rovnoběžných kružnic. Dochází k závěrům:

Každá nerotační plocha druhého stupně – mimo paraboloid hyperbolický, válec hyperbolický a parabolický – má dvě reálné soustavy cyklických rovin, jež

[28] [B47], str. 360.

jsou kolmé k té hlavní rovině, jež odpovídá prostřednímu kořenu rovnice pro ρ a souměrně položeny vzhledem ke druhým dvěma.

...U Plochy rotační splynou tudíž obě soustavy kružnic v jedinou; ta je nám známa, je to soustava rovnoběžek této plochy. [29]

Podobně jako v případě kružnice hledá řešení pro dvojici přímek. Dochází k závěru, že z jednoduchých kvadrik pouze dvě – jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid – mají tu vlastnost, že každým jejich bodem procházejí právě dvě reálné přímky plochy. Bydžovský uvádí jejich rovnice a dokazuje, že žádné dvě přímky téže soustavy se neprotínají a naopak každá přímka jedné soustavy protíná každou přímku soustavy druhé. Hledané roviny jsou tedy tečné roviny těchto dvou ploch. V závěru této kapitoly se autor věnuje průměrovým vlastnostem středových kvadratických ploch.

Poslední, osmá kapitola této učebnice se nazývá **Doplňky** a najdeme v ní látku, která nebyla nezbytná pro předchozí výklad, přesto však není nezajímavá a učební text vhodně doplňuje. Jedná se především o transformaci pravoúhlých souřadnic do souřadnic kosoúhlých. transformační vzorce autor doplňuje výčtem výsledků, které po transformaci zůstávají v platnosti a těch, které se změní, u některých popisuje jak. Dokazuje, že diskriminant rovnice kvadriky je invariantem v každé kartézské soustavě souřadnic.
V závěru učebnice nalézáme stručný historický přehled, v němž popisuje vývoj analytické geometrie od jejího vzniku až do konce devatenáctého století. Poté se věnuje speciálně vývoji studia kuželoseček, za jejichž objevitele je řadou autorů pokládán Menaichmos (kolem roku 350 před Kr.), sleduje jejich vývoj až do jeho současnosti a zmiňuje se rovněž o studiu ploch druhého stupně. V úplném závěru autor studenty, jež chtějí do analytické geometrie proniknout hlouběji nabádá k dalšímu studiu v několika konkrétních oborech a připojuje seznam literatury, kterou lze k tomuto doplnění studia použít. Jedná se o literaturu, z níž, jak sám píše, také při sepisování učebnice čerpal.

Recenzi k této učebnici sepsal Václav Hlavatý. Kromě velice stručného shrnutí obsahu v ní nalezneme ocenění Bydžovského učebních metod:

V obou částech seznamuje autor svým osvědčeným způsobem čtenáře se základními problémy analytické geometrie. Zde je nejlépe dokumentováno přísloví, že podle volby a výběru poznáme mistra. Není jistě snadné stanoviti vhodnou kvantitu látky pro učebnici analytické geometrie, ale autoru podařilo se vybrati z rozsáhlé látky této discipliny právě to, co jest k jejímu studiu potřebné. Přitom však postup volen takový, že čtenář postupně získává i znalosti početních metod analytické geometrie...Způsob podání jest právě týž, kterého autor používal ve svých přednáškách. To jest, myslím, nejlepším doporučením knihy pro ty, kteří byli posluchači prof. Bydžovského. [30]

Ve výkladu prof. Bydžovského nenajdeme pro řadu současných učebnic tak typickou posloupnost definice, věta, důkaz...Důkaz většinou vyslovení věty předchází a student je tak vzděláván méně násilnou formou, většina vyložených poznatků je dávána do souvislostí s ostatními výsledky, čímž prohlubuje studentovy znalosti a usnadňuje zapamatování.

První z Bydžovského vysokoškolských učebnic se dočkala ještě dalších dvou vydání v letech 1946 a 1956. Druhé vydání se od toho prvního liší především

[29] [B47], str. 377.
[30] ČPMF 55, 1926, str. 185.

uspořádáním látky, které odpovídá lépe algebraickému rázu analytické geometrie a seskupuje látku podle stupně rovnic v souřadnicích, ne podle dimenze prostoru, jak tomu bylo ve vydání prvním. V tomto novém uspořádání je učebnice členěna do tří dílů, jejichž názvy jsou *Geometrie lineární*, *Základy geometrie kvadratické* a *Podrobnosti geometrie kvadratické*. V prvním dílu nalezneme navíc kapitolu věnovanou teorii vektorů, která byla, jak sám autor píše, v prvním vydání právem postrádána, naopak byly vynechány některé méně důležité odstavce. Druhý díl téměř beze změny odpovídá kapitolám tři a čtyři z prvního dílu a čtyři až šest z druhého dílu prvního vydání. Nově se zde objevuje pojem kvadratické formy. Obsah třetího dílu odpovídá páté a šesté kapitole prvního dílu a sedmé kapitole druhého dílu prvního vydání. Zcela vynechány jsou části, týkající se projektivní geometrie lineárních a kvadratických útvarů. Vynechán je rovněž seznam doporučené literatury.

Třetí, poslední vydání učebnice *Úvod do analytické geometrie* se obsahově téměř neliší od vydání druhého. Dělí se stejně jako druhé vydání do tří částí. V první části byl rozšířen výklad o vektorech, netvoří však již samostatnou kapitolu, ale je účelněji zařazen a použit v samotném textu učebnice. Ukažme si tuto změnu ve výkladu látky na příkladu odvození rovnice roviny, jemuž jsem věnovala pozornost i v předchozím textu, pro zajímavost uvádím Bydžovského výklad beze změny:

Na libovolnou rovinu, neprocházející počátkem, spustíme z počátku kolmici čili normálu; budiž P_0 její pata, P libovolný bod roviny, $\boldsymbol{r}$ jeho místní vektor, $\boldsymbol{n}_0$ jednotkový vektor na kolmici spuštěné z počátku na rovinu a orientované kladně ve smyslu od O k P_0. Průmět vektoru $\boldsymbol{r}$ do uvedené kolmice je roven délce $p = \overline{OP}_0$. Je tedy podle definice skalárního součinu dvou vektorů – protože jeden vektor je jednotkový –

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_0 = r \cos \varphi,$$

je-li φ úhel vektorů $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{n}_0$. Je však $r \cos \varphi = p$, i dává předchozí rovnice

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_0 = p.$$

Tato rovnice platí pro každý bod roviny a jen pro body této roviny. [31]

Pod pojmem místní vektor má Bydžovský na mysli průvodič bodu P, neboli vektor spojující počátek s bodem P. Od vektorové rovnice roviny pak autor přechází k souřadnicovému vyjádření roviny, zde se již oba výklady shodují. Na rozdíl od předchozích dvou vydání se v tomto vydání pracuje téměř výhradně již jen se souřadnicemi pravoúhlými, nově se zde objevují Plückerovy souřadnice přímky v prostoru. V části věnované kuželosečkám se Bydžovský věnuje i některým křivkám vyšších stupňů.

Porovnáme-li nároky kladené na tehdejší studenty s požadavky dnešními, byl by rozsah dnešní učebnice téměř poloviční. Bydžovský v závěru prvního vydání píše, že učebnice je určena pro ty, kteří znají nejjednodušší základy analytické geometrie ze středoškolského studia. Rovněž je třeba předpokládat alespoň minimální znalosti z teorie determinantů a maticového počtu, jež v textu autor běžně používá.

Již dříve jsem, v souvislosti s absencí homogenních souřadnic, zmiňovala dvě z knih, které předcházely Bydžovského učebnici. Jejich autory byli Gustav

[31] [B110], str. 126.

Skřivan[32] a František Josef Studnička. K těmto pracem je třeba ještě doplnit učebnice Karla Zahradníka[33] *Analytická geometrie v rovině* z roku 1883 a *Analytická geometrie I.*, která vyšla roku 1907. Ve druhé z nich se homogenní souřadnice již objevují, ovšem ne v takovém rozsahu, jako u Bohumila Bydžovského. V žádné z těchto učebnic se nesetkáme s pojmem vektor, jež se u Bydžovského vyskytuje až ve druhém vydání, ani s pojmem směr, jenž je důležitý pro jednoznačné určení polohy bodu.

Pozdější české učebnice analytické geometrie začaly vycházet až v padesátých letech 20. století. První z nich byla dvoudílná učebnice Eduarda Čecha *Základy analytické geometrie* z let 1951 a 1952. Autor zde buduje analytickou geometrii ryze algebraickým způsobem, nezávisle na předchozím studiu syntetické geometrie. Pracuje s geometrickými objekty v n-rozměrném prostoru, což je jedním z důvodů, proč je tato učebnice náročnější pro studium, než učebnice Bydžovského. Z dalších učebnic zmiňme *Úvod do analytické geometrie lineárních útvarů a kuželoseček* E. Masného z roku 1952, *Analytickou geometrii lineárních útvarů* od Emila Kraemera z roku 1954 a Vančurovu dvoudílnou učebnici *Analytická metoda v geometrii* z let 1957 a 1958.

8.2 Základy teorie determinantů a matic a jich užití

Druhá z Bydžovského učebnic je co do rozsahu výrazně menší, svým významem však určitě za učebnicí analytické geometrie nezaostává. Již dříve jsem se zmiňovala, že studovat předchozí Bydžovského učebnici lze pouze za předpokladu, že čtenář má alespoň minimální znalosti z teorie determinantů a matic. Hlavním smyslem této publikace bylo tedy vytvořit pomůcku pro studium analytické geometrie. Úkol to nebyl jednoduchý, jelikož Bydžovský se na vědecké úrovni determinantům nevěnoval, i když je třeba podotknout, že je ve svých pracích často používal.

Už sám název napovídá, že se učebnice skládá ze dvou částí. První díl, jehož rozsah pokrývá asi dvě třetiny učebnice, má název **Teorie determinantů a jich užití**, druhý se jmenuje **Teorie matic a jich užití**. V dnešních učebnicích se teorie matic vykládá před teorií determianntů, některé věty a definice mají proto odlišnou formulaci. Hodnost matice je například definována pomocí hodnosti determinantu, což je pojem, s nímž se v současných učebnicích již nesetkáváme. Důvod tohoto postupu je možné hledat v tom, že teorie matic se začala vyvíjet až z rovíjející se teorií determinantů, postupem času se jí však stala naukou nadřazenou.

Dá se říci, že sepsání druhé části učebnice bylo průkopnickým činem na poli teorie matic. Zatímco učebnic o determinantech vyšla do té doby celá řada (základy teorie determinantů a jejich užití byly součástí již téměř každé učebnice algebry), učebnice maticového počtu nevyšla do té doby v českém jazyce žádná, a ani na mezinárodním poli tomu nebylo o moc lépe. Bydžovský ve své učebnici zmiňuje pouze dvě učebnice, v nichž lze základy teorie matic nalézt. Jedná se o práci Maxima Bôchera *Einführung in die höhere Algebra*

[32]Gustav Skřivan (1831–1866), od roku 1863 profesorem matematiky na technice.

[33]Karel Zahradník (1848–1916), český matematik, od r. 1876 profesorem univerzity v Záhřebu, od r. 1899 profesorem české techniky v Brně.

z roku 1925 a o rok později vydanou práci *Einführung in die Axiomatik der Algebra*, jejímž autorem byl Hans Beck.

První díl Bydžovského učebnice je rozdělen celkem do jedenácti paragrafů, z nichž prvních šest bylo tehdejší náplní prvního semestru studia na vysoké škole. V prvním paragrafu, nazvaném **Přípravné úlohy**, se autor snaží pomalou nenásilnou cestou dovést studenty při řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých k pojmu determinant. Ukazuje jednoduchost výpočtu determinantu řádu dva, popisuje jeho vlastnosti. Předchozí postup využívá i k řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých, zatím bez definic ukazuje způsob výpočtu determinantu řádu tři pomocí rozvoje podle prvního řádku. Dále autor ukazuje souvislost determinantu s permutacemi tří prvků a dává návod jak determinant spočítat pomocí tzv. Sarrusova pravidla. V závěru kapitoly provádí úplné řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých postupem, který známe pod názvem Cramerovo pravidlo. Celá první kapitola vycházela z předpokladu, že determinant soustavy je nenulový. V závěru nalezneme jeden řešený příklad a řadu neřešených příkladů k procvičení látky. Tyto neřešené příklady nalézáme, jak jsme u Bydžovského zvykem na konci každé kapitoly, řešené příklady se vyskytují zřídka.

Druhý paragraf se jmenuje **Obecná definice determinantu**. Je známo, že s rostoucím stupněm determinantu jsou pravidla pro jeho výpočet čím dám komplikovanější, bylo tedy zapotřebí podat jasnou definici, která by platila pro determinanty všech řádů. Bydžovský definuje pojem permutace n prvků, definuje, kdy je permutace sudá a kdy lichá. Píše, že dvě permutace patří do stejné třídy, jsou-li obě sudé nebo obě liché, jinak mají různé třídy. Dále pak dokazuje několik vět o permutacích, zavádí pojem inverze v permutaci. Následuje definice matice nejprve obecné, poté čtvercové, na ni již navazuje samotná definice determinantu:

Je-li $m = n$, nazýváme matici (jež obecně je pravoúhlá) čtverečnou. tato matice má n^2 prvků a zní:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

Utvořme součin $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, tj. součin všech n prvků, jichž oba indexy jsou stejné; permutujme v něm všechny indexy sloupcové a každý součin tak vzniklý

$$a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\dots a_{nk_n}$$

opatřme znaménkem + nebo - podle toho, zdali permutace

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

je sudá či lichá. Součet všech takových součinů, opatřených znaménky takto určenými, nazýváme determinantem matice, č. determinantem jejích n^2 prvků [34]

Dále autor definuje pojmy prvek determinantu, člen determinantu, stupeň determinantu. Řádky i sloupce determinantu nazývá souhrnným názvem řady

[34] [B71], str. 13–14.

determinantu. Dále pak dokazuje, že hodnota determinantu se nezmění, zaměníme-li sloupce za řádky, aniž bychom při tom měnili pořadí sloupců či řádků, neboli, v řeči dnešní matematiky, zaměníme-li matici danou za matici transponovanou.

Základní vlastnosti determinantu jsou náplní třetího paragrafu. Autor zde např. dokazuje, že po záměně libovolných dvou rovnoběžných řad determinant změní znaménko, nebo že determinant je roven nule, jsou-li dvě rovnoběžné řady stejné. Ukazuje, že determinant lze chápat jako lineární homogenní funkci prvků kterékoliv jeho řady, jak lze snadno nahlédnout, spočítáme-li rozvoj determinantu podle dané řady. Navíc ukazuje, že tato funkce je nerozložitelná.

Dále definuje lineární kombinaci soustav čísel, aby mohl dokázat, že přičtením lineární kombinace řádků (sloupců) k jinému řádku (sloupci) se hodnota determinantu nezmění.

Ve čtvrtém paragrafu se autor zabývá **Subdeterminanty**. Jakýsi náznak práce se subdeterminanty se objevuje již v kapitole první, obecně jsou však definovány až nyní. V souvislosti s tím definuje pojem doplněk prvku v determinantu a ukazuje souvislost s rozvojem determinantu podle jeho libovolné řady. Poté řeší soustavu n rovnic o n neznámých stále ještě za předpokladu, že determinant soustavy je různý od nuly. Stejně jako v případu tří rovnic o třech neznámých odvozuje Cramerovo pravidlo, ale tento název nepoužívá.

Dále autor poukazuje na možné využití věty o rozvoje determinantu pro definici derivace determinantu. Uvažme, že ve vzorci pro rozvoj determinantu podle r-ho řádku

$$A = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}, \tag{8.4}$$

v němž A_{ri} $(i = 1, \ldots, n)$ je doplněk prvku a_{ri} v determinantu, se prvek a_{rs} vyskytuje na pravé straně pouze v jediném členu. Pokládáme-li prvky determinantu za nezávisle proměnné a zderivujeme-li jej parciálně podle prvku a_{rs} dostáváme jako výsledek:

$$\frac{\partial A}{\partial a_{rs}} = A_{rs.}$$

Je možné tedy rovnici (8.4) upravit následovně:

$$A = a_{r1}\frac{\partial A}{\partial a_{r1}} + a_{r2}\frac{\partial A}{\partial a_{r2}} + \ldots + a_{rn}\frac{\partial A}{\partial a_{rn}}$$

Determinant je funkcí všech svých prvků, o nichž předpokládejme, že jsou všechny funkcí stejné proměnné x. Podle věty o derivování složené funkce platí

$$\frac{dA}{dx} = \sum_{i,k} \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \frac{da_{ik}}{dx} = \sum_{i,k} A_{ik}a'_{ik}.$$

Zafixujeme-li na pravé straně rovnice řádkový index i, lze ji podle předchozí rovnice nahradit determinantem, jehož prvky v i-tém řádku jsou nahrazeny svými derivacemi. To nám dává jednoduchý návod, jak spočítat derivaci determinantu:

Derivace determinantu rovná se součtu n determinantů, které se obdrží z determinantu daného, když se v něm postupně všechny prvky jednotlivých rovnoběžných řad nahradí svými derivacemi. [35]

[35] [B71], str. 36.

$$\frac{dA}{dx} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

V závěru tohoto paragrafu se Bydžovský zabývá subdeterminanty (též minory) libovolného stupně, dokazuje několik vět o vzájemných vztazích subdeterminantů různých stupňů a definuje pojem hodnost determinantu.

V následujícím paragrafu pak definuje pojem hodnost matice a ukazuje, které početní úkony prováděné s maticí nemění její hodnost. Definuje pojem lineární závislosti a nezávislosti soustav čísel (tak autor stručně nazývá uspořádané n-tice čísel) a ukazuje souvislost s hodností matice těchto soustav a s hodnotou determinantu.

Šestý paragraf má název **Teorie soustavy lineárních rovnic**. Bydžovský se zde zabývá nejprve soustavou n rovnic o n neznámých. Levé strany rovnic soustavy nazývá lineární formy proměnných $x_1, \dots, x_n$ a označuje je $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Definuje lineární závislost forem, hovoří o hodnosti matice a hodnosti matice rozšířené. Dokazuje známou Frobeniovu větu o řešitelnosti soustavy rovnic. Poté přechází k obecnějším soustavám m rovnic o n neznámých a stejně jako v předchozím případě dochází k závěru, že

Nutná a postačujíí podmínka pro řešitelnost soustavy libovolného počtu rovnic o libovolném počtu neznámých je ta, aby matice soustavy a matice rozšířená měly touž hodnost. [36]

Zabývá se rovněž soustavami homogenními, popisuje tvar jejich řešení. Dále definuje pojem resultant dvou algebraických rovnic a poukazuje na možnost aplikace předchozích výsledků na problém hledání společného kořene dvou rovnic.

Sedmý paragraf učebnice se nazývá **Věta Laplaceova**. Zde autor nejprve definuje přidružené subdeterminanty (prvky jednoho subdeterminantu jsou vybrány ze všech řádků a sloupců, z nichž nejsou vybrány prvky druhého; součet stupňů obou musí být n) a doplněk subdeterminantu jako subdeterminant přidružený k danému, násobený číslem $(-1)^{S(i)+S(k)}$. Jsou-li prvky daného determinantu vybrány z řádků $i_1, \dots, i_r$ a sloupců $k_1, \dots, k_r$ je pak $S(i) = i_1 + \dots + i_r$, resp. $S(k) = k_1 + \dots + k_r$. Poté vyslovuje Laplaceovu větu:

Determinant rovná se součtu součinů, které dostaneme, když násobíme každý subdeterminant r-ho stupně vzatý z určitých r řad jeho doplňkem. [37]

Bydžovský poté odvozuje několik důsledků Laplaceovy věty, zabývá se rovněž determinanty vroubenými [38] a jejich vlastnostmi.

V dalším paragrafu se Bydžovský zabývá násobením determinantů. Dokazuje větu:

[36] [B71], str. 69.
[37] [B71], str. 83.
[38] Determinant p-krát vroubený se vytvoří z determinantu řádu n připsáním napravo dalších sloupců a dolu dalších řádků, obojí v počtu p.

Součin dvou determinantů n-ho stupně lze vyjádřiti opět determinantem n-ho stupně; jeho prvek stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci je roven součinu i-ho řádku jednoho a k-ho řádku druhého determinantu. [39]

Chceme-li násobit dva determinanty A, B stupňů m, n $(m < n)$, je třeba nejprve determinant A doplnit podle následujícího schematu

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

další postup je již zcela analogický. Obdobně Bydžovský počítá i druhou mocninu determinantu a definuje tzv. řádkový součin matic.

Devátý paragraf, který je z celé učebnice nejkratší, pojednává o determinantu reciprokém vzhledem k danému determinantu. Lze jej definovat jako determinant, jehož prvky jsou doplňky A_{ik} prvků a_{ik} determinantu A, a to tak, že A_{ik} stojí v i-tém řádku a k-tém sloupci.

$$a = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Bydžovský dokazuje, že součin determinantu A a determinantu k němu reciprokému a se rovná n-té mocnině determinantu A.

Předposlední paragraf prvního dílu je věnován determinantům souměrným a polosouměrným. V dnešní terminologii bychom tyto determinanty nazvali synetrické a antisymetrické. Sdruženými prvky nazývá autor prvky souměrné podle hlavní úhlopříčky. Nejprve se věnuje determinantům souměrným a dokazuje několik zajímavých vět:

Doplňky prvků sdružených v determinantu souměrném jsou stejné.
Determinant reciproký k souměrnému je opět souměrný. [40]

V dalším textu pak vyšetřuje tzv. sekulární [41] rovnici, v dnešní terminologii bychom ji nazvali charakteristickou rovnicí:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = 0.$$

Autor v textu dokazuje důležitou větu o reálných vlastních číslech reálné symetrické matice:

Jsou-li prvky souměrného determinantu vesměs reálné, má příslušná rovnice sekulární všechny kořeny reálné. [42]

[39] [B71], str. 92.
[40] [B71], str. 113.
[41] Název sekulární odvozen od toho, že se tyto rovnice často vyskytují v teorii sekulárních poruch oběžnice.
[42] [B71], str. 113.

Dále Bydžovský odvozuje podmínku násobnosti kořene sekulární rovnice. Věnuje se polosouměrným determinantům lichého a sudého stupně a dokazuje, že:

Polosouměrný determinant lichého stupně je roven nule [43]

Polosouměrný determinant stupně sudého je roven čtverci celistvé racionální funkce[44] *svých prvků.* [45]

Poslední paragraf prvního dílu věnovaného determinantům nese název **Geometrické aplikace.** Autor zde rozebírá některé méně známé aplikace determinantů, které, jak sám říká, bývají v geometrických výkladech často opomíjeny. Zvláště se pak jedná využití věty o řádkovém součinu matic. Můžeme zde naléz např. odvození základních rovnic sférické trigonometrie, výpočet objemu čtyřstěnu jako funkce jeho hran, výpočet obsahu trojúhelníku, či řešení úlohy o minimu, v níž nalezneme uplatnění determinantů vroubených.

Druhý díl učebnice je věnován maticovému počtu. V současných učebnicích maticovému počtu často předchází počet vektorový, ten se v Bydžovského učebnicích vyskytuje až ve druhém vydání *Úvodu do analytické geometrie* a je skutečně začleněn do výkladu až ve třetím vydání této učebnice. Tento díl učebnice je rozdělen do čtyř paragrafů, které jsou dále členěny do odstavců, v závěru je připojen krátký historický přehled.

Úvodní paragraf nese název **Počet maticový**. Definici matice jsme mohli nalézt již v úvodu prvního dílu, jelikož byl pomocí ní definován pojem determinantu. V této části knihy Bydžovský nejprve definuje matici nulovou, dále pak definuje základní operace s maticemi a popisuje vlastnosti těchto operací. Každou matici pokládá za čtvercovou, čehož lze vždy dosáhnout doplněním matice o nulové řady. Podrobněji se věnuje násobení matic. Připomíná již dříve definovaný řádkový součin matic, jehož výsledkem ovšem nebyla matice ale číslo. Jeho definice násobení matic je díky tomu, že pracuje pouze s maticemi čtvercovými, jednodušší, jelikož každé dvě čtvercové matice, na rozdíl od obdélníkových, mezi sebou lze násobit. Definuje rovněž matici diagonální, jednotkovou a počítá matici inverzní. Nepoužívá však Gaussova eliminačního algoritmu, který nalezneme v dnešních učebnicích, k jehož řešení není pořeba znát determinanty, ale používá doplňků prvků matice původní, a tedy (za předpokladu $A \neq 0$)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \dots & \frac{A_{n1}}{A} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \frac{A_{1n}}{A} & \dots & \frac{A_{nn}}{A} \end{pmatrix}.$$

Tento postup samozřejmě v dnešních učebnicích nalezneme také, ale z důvodu jiného uspořádání látky bývá probírán později. Co však v dnešních učebnicích nenalezneme, je dělení matic. Bydžovský definuje dělení tak, jako se definuje dělení čísel, tj. jako opačnou operaci k násobení:

Děliti matici $\boldsymbol{B}$ *maticí* $\boldsymbol{A}$ *znamená tedy najíti matici* $\boldsymbol{X}$ *nebo* $\boldsymbol{Y}$ *tak, aby platilo*

$$\mathbf{B} = \mathbf{AX} \textit{ nebo } \mathbf{B} = \mathbf{YA}.$$

[43][B71], str. 119.
[44]Místo pojmu celistvá racionální funkce se dnes častěji používá pojem polynom.
[45][B71], str. 121.

Matice $\boldsymbol{X}$*, resp.* $\boldsymbol{Y}$ *nazývá se pak podílem matic* $\boldsymbol{B}$ *a* $\boldsymbol{A}$*. Dělení je v podstatě dvojí, což je následek toho, že násobení matic není obecně záměnné.* [46]

Bydžovský se omezuje pouze na případy, kdy matice $\mathbf{A}$ je regulární, řešení je pak velice jednoduché:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \ \mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

V dalším textu pak dokazuje např. větu, že transponováním součinu dvou matic dostáváme součin těchto matic transponovaných v opačném pořadí

$$\overline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \ \overline{\mathbf{B}} \ \cdot \ \overline{\mathbf{A}},$$

či větu obdobnou pro matici inverzní k součinu dvou matic.

Ve druhé kapitole se Bydžovský zabývá lineárními a bilineárními formami. Nejprve definuje lineární transformaci rovnicemi

$$x_i = c_{i1}X_1 + \ldots + c_{in}X_n, \ i = 1, \ldots, n.$$

Dokazuje, že je-li transformace regulární, existuje k ní transformace inverzní a zároveň matice obou zobrazení jsou navzájem inverzní. Ukazuje, že skládáním lineárních transformací získáme opět lineární transformaci. Poté pracuje se soustavou m lineárních forem, hovoří o lineární závislosti skupiny forem a definuje pojem hodnost skupiny lineárních forem. V dalším textu definuje formu bilineární a popisuje některé její vlastnosti. Hledá normální tvar bilineární formy a zabývá se ekvivalencí bilineárních forem.

Třetí a čtvrtá kapitola je zaměřena na kvadratické formy, tj. formy, které lze definovat jako mnohočlen, jehož každý člen je druhého stupně v n proměnných x_i a lze ji stručně zapsat ve tvaru

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k.$$

Bydžovský definuje matici kvadratické formy a odvozuje, že je symetrická. Vychází totiž z předpokladu, že $a_{ik} = a_{ki}$. V některých současných učebnicích se kvadratická forma definuje pomocí formy bilineární, kde tento předpoklad splněn není. Různé bilineární formy mohou definovat tutéž formu kvadratickou. Pak bychom mohli říct, že kvadratickou formu lze vždy vhodně upravit tak, aby její matice byla symetrická. Dále Bydžovský definuje determinant formy a rozlišuje formy regulární a singulární, popisuje význam hodnosti kvadratické formy. Ukazuje, za jakých podmínek je kvadratická forma rozložitelná.

Je-li hodnost kvadratické formy dvě, je tato forma rovna součinu dvou různých lineárních forem; je-li hodnost kvadratické formy jedna, je forma rovna čtverci formy lineární. A obráceně. [47]

Představíme-li si pod pojmem kvadratické formy tří proměnných rovnici kuželosečky v rovině v homogenních souřadnicích, dalo by se zde krásně poukázat na souvislost s rozložitelností kuželosečky. Je-li totiž hodnost diskriminantu kuželosečky 3, jedná se o kuželosečku nerozložitelnou, je-li hodnost 2, kuželosečka se skládá ze dvou různých přímek, zatímco, je-li hodnost 1, skládá se kuželosečka

[46] [B71], str. 148.
[47] [B71], str. 172.

z jedné dvojnásobně počítané přímky. Možná je škoda, že Bydžovský nepoukazuje na konkrétní souvislosti s geometrií analytickou, pro jejíž potřeby byla tato učebnice vytvořena.

Dále Bydžovský dokazuje důležitou větu, která umožňuje libovolnou kuželosečku transformací souřadnic převést na normální tvar:

Každá kvadratická forma n proměnných může býti uvedena vhodně volenou lineární substitucí regulární na tvar lineární kombinace čtverců proměnných, t.j. na tvar

$$c_1x_1^2 + \ldots + c_nx_n^2 \text{ [48]}.$$

Autor se rovněž věnuje ekvivalenci dvou kvadratických forem. Dále zkoumá některé speciální transformace, především ty, které jsou ortogonální. Dokazuje, že k tomu, aby transformace byla ortogonální je nutné a postačující, aby její matice transponovaná a matice inverzní byly totožné. Dtereminant ortogonální matice nazývá ortogonální determinant a dokazuje některé jeho vlastnosti. Dokazuje, že vždy existuje reálná ortogonální substituce, která převádí danou reálnou kvadratickou formu v lineární kombinaci čtverců. V závěru pak dokazuje zákon setrvačnosti kvadratických forem. Rozděluje formy na definitní kladné, definitní záporné a indefinitní, popisuje některé jejich vlastnosti a odvozuje kritérium, podle kterého lze určit typ dané kvadratické formy.

Definitní forma kladná je pro všechny reálné hodnoty proměnných buď kladná nebo rovná nule; definitní forma záporná je pro všechny reálné hodnoty proměnných buď záporná nebo rovná nule; forma indefinitní nabývá pro reálné hodnoty proměnných hodnot jak kladných tak záporných, tak i hodnoty nulové[49].

V současném názvosloví tyto formy nazýváme pozitivně definitní, negativně definitní a indefinitní, navíc ještě rozlišujeme formy pozitivně semidefinitní a negativně semidefinitní. Podle Bydžovského definice bychom do kategorie forem definitních kladných zařadili formy pozitivně definitní i pozitivně semidefinitní.

Učebnice je zakončena stručným historickým přehledem. Autor zde popisuje Leibnitzovy a Cramerovy zásluhy na objevení determinantů a jejich pozdější vývoj v devatenáctém století. Věnuje se rovněž příspěvkům českých matematiků k této problematice. Popisuje užití determinantů v algebře, analytické geometrii či matematické analýze. Zmiňuje se též o vývoji výkladu a značení determinantů a udává seznam nejdůležitější literatury, zabývající se touto tematikou.

Recenzi této učebnice napsal Karel Rychlík. Vyzdvihuje v ní jasnost a srozumitelnost výkladu,

...velkou předností je množství příkladů ke cvičení, přidaných k jednotlivým paragrafům a historický přehled, uvádějící i práce českých matematiků v tomto oboru. Svým obsahem a metodou je kniha přístupná i začátečníkům. Dobrou službu bude konati zejména posluchačům matematiky v prvních letech jejich studia; i studující nejvyšších tříd středních škol a posluchači technik budou moci, alespoň některé odstavce, s prospěchem studovati. [50]

[48] [B71], str. 175.
[49] [B71], str. 189–190.
[50] ČPMF 62, 1933, str. 61–62.

Pod nepatrně pozměněným názvem *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití* byla tato učebnice vydána podruhé těsně po válce roku 1946. Toto vydání se od prvního liší pouze drobnými stylistickými úpravami textu, což jistě svědčí o kvalitě této učebice.

V historickém závěru se Bohumil Bydžovský zmiňuje o několika českých učebnicích, či pojednáních o determinantech. Tyto knihy vznikaly v době kdy ještě nebylo ustáleno české názvosloví v tomto oboru, některé pojmy se tedy v každé učebnici nazývají jinak. Například *inverze* v permutaci se v učebnici Martina Pokorného[51] *Determinanty a vyšší rovnice* z roku 1865 nazývá *nelad*, v Zahradníkově učebnici *Prvé počátky nauky o determinantech* z roku 1879 se nazývá *obrat*. Místo pojmu *permutace* se můžeme v Pokorného učebnici setkat s pojmem *přestava*. K rozvoji českého názvosloví velice přispěl František Josef Studnička [52], který o determinantech napsal řadu publikací, hodně se věnoval speciálním typům determinantů.

Středoškolský profesor Martin Pokorný sepsal svou učebnici na popud Gustava Skřivana. Determinantům je však v učebnici věnováno pouze 40 stran, ve zbytku se zabývá řešením soustav lineárních rovnic a algebraických rovnic. Rovněž pouze úvod do teorie determinantů nalezneme ve Studničkově první učebnici věnované tomuto tématu *O determinantech* z roku 1870. Zahradníkova učebnice *Prvé počátky nauky o determinantech* z tohoto trendu nevybočuje. Definuje sice, stejně jako ostatní, determinant obecně (řádu n), ale v dalším textu pracuje již jen s determinanty maximálně řádu 3. To již neplatí o Zahradníkově druhé učebnici *O determinantech* z roku 1905, určené hlavně pro studenty techniky. Rozsah většiny těchto učebnic, nebo částí věnovaných determinantům, většinou nepřesahuje padesát stran. Výjimkou je Studničkova druhá učebnice *Úvod do nauky o determinantech* z roku 1899 (230 stran), která kromě základů teorie determinantů obsahuje i některé jeho výsledky o mocninných a sestavných determinantech.

Na Bydžovského učebnici navazuje dvoudílná učebnice jeho žáka Václava Vodičky *Determinanty a matice v theorii i v praxi* z roku 1950, jež je hodně zaměřena na praktické využití determinantů.

8.3 Úvod do algebraické geometrie

Poslední z Bydžovského vysokoškolských učebnic je věnována základním i pokročilejším partiím algebraické geometrie. Byla vydána v roce 1948 a tehdy již téměř sedmdesátiletý Bydžovský do ní zahrnul většinu výsledků své celoživotní práce. Jedná se o zdaleka nejrozsáhlejší Bydžovského publikaci (665 stran). Jako jediná z jeho učebnic se nedočkala dalšího vydání. Příčinu toho můžeme hledat jednak v jeho vysokém věku, ale též v tom, že tato kniha nepotřebovala přepracování, tak jako například do učebnice analytické geometrie bylo třeba zahrnout vektorový počet. Každá kapitola, každý paragraf byl předem několikrát přednesen a jeho srozumitelnost mnohokrát vyzkoušena na jeho studentech. Rovněž stovky příkladů, obsažené v učebnici byly předem mnohokrát propočítány. Za toto své dílo byl profesor Bydžovský vyznamenán státní cenou.

[51] Martin Pokorný (1836–1900), středoškolský profesor matematiky, v letechv letech 1878 až 1900 předseda *Jednoty českých matematiků*.

[52] Více o tom v práci: Němcová, M., *František Josef Studnička 1826–1903*, Praha, Prometheus, 1998.

Studium této učebnice předpokládá základní znalosti teorie determinantů a teorie matic a podrobnější znalosti z elementární analytické geometrie.

V kapitolách pojednávajících o rovinných křivkách nalézáme ucelenou dopodrobna propracovanou teorii, v kapitolách věnovaných algebraickým plochám a prostorovým křivkám tomu již tak není a nebylo to ani cílem této učebnice. Autorovou snahou bylo seznámit čtenáře se základními pojmy a nejjednoduššími fakty potřebnými k důkladnému poznání plochy kubické a prostorových křivek třetího a čtvrtého stupně. Obecná teorie, která je značně rozsáhlejší než v rovině, se vymyká rámci této knihy.

Učebnice je rozdělena do dvaceti kapitol, jež jsou dále členěny do 273 odstavců. Každá kapitola je zakončena řadou neřešených příkladů.

První kapitola má název **Prostor m-rozměrný**. Autor zde vede čtenáře k úvahám vícedimensionální geometrie stručným zopakováním vědomostí o homogenních souřadnicích (které pak v učebnici téměř bez výjimky používá), vysvětluje co nazýváme bodem a jeho souřadnicemi v m-rozměrném prostoru. Zabývá se lineární závislostí bodů a následně zavádí pojem r-rozměrný lineární prostor. Po zavedení souřadnicové soustavy odvozuje rovnice transformace souřadnic. Popisuje rovněž souřadnice v „nižších“ lineárních prostorech, tj. v prostorech o dimenzi r ($r < m$), které jsou obsaženy v prostoru m-rozměrném. V závěru první kapitoly definuje pojem řada bodová, základní body řady a parametr bodu v řadě.

Ve druhé kapitole autor definuje nadrovinu v prostoru m-rozměrném rovnicí:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{m+1} \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_{m+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \dots & y_{m+1}^{(m)} \end{vmatrix} = 0,$$

kde x_i jsou souřadnice bodu nadroviny a $y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(m)}$ jsou souřadnice lineárně nezávislých bodů určujících nadrovinu. Dokazuje, že se jedná o lineární homogenní rovnici mezi souřadnicemi ($\sum a_i x_i = 0$), jejíž koeficienty nejsou vesměs rovny nule. Zabývá se průnikem p nadrovin, speciálně pak průnikem nadroviny s přímkou. Definuje svazek nadrovin a věnuje se projektivnosti svazků nadrovin, nezapomíná ani na perspektivitu, jako speciální případ projektivnosti. Zavádí nadrovinové souřadnice, popisuje analogii mezi těmito souřadnicemi a souřadnicemi bodovými a vyslovuje tzv. *princip duality*:

Z geometrické věty odvozené na základě homogenních souřadnic se obdrží opět správná věta geometrická, když v první větě vyměníme navzájem slova „bod“ a „nadrovina“. [53]

Pomocí duality pak přechází od projektivních řad k projektivním svazkům nadrovin.

Ve třetí kapitole se Bohumil Bydžovský zabývá kolineací a korelací v m-rozměrném prostoru (soumístná kolineace bodů téhož prostoru). Vysvětluje pojem kolineace inverzní, aby mohl definovat kolineaci involutorní. Popisuje vlastnosti kolineace, hledá samodružné útvary. Je-li kolineace dána rovnicemi

$$x_i = \sum_{j=1}^{m+1} c_{ij} x'_j, \ i = 1, \dots, m+1,$$

[53] [B103], str. 40.

respektive (řešíme-li tuto soustavu podle neznámých x'_i)

$$x'_i = \sum_{j=1}^{m+1} C_{ji} x_j, \; i = 1, \dots, m+1,$$

má příslušná charakteristická rovnice tvar

$$D(\rho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11} - \rho & c_{12} & \dots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} - \rho & \dots & c_{2,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+1,1} & c_{m+1,2} & \dots & c_{m+1,m+1} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Bydžovský nejprve ukazuje, že samodružné útvary jsou nezávislé na volbě soustavy souřadné, poté výše uvedenou rovnici podrobně vyšetřuje, přičemž zavádí pojmy samodružný bod a samodružná nadrovina. Podle násobnosti kořenů charakteristické rovnice a podle hodnosti charakteristického determinantu pak provádí klasifikaci kolineací speciálně pro prostory o dimenzi $m = 1, 2, 3$. Dokazuje větu:

Souhrn všech kolineací v prostoru [54] *tvoří grupu; tato grupa se nazývá projektivní grupou prostoru.* [55]

Bydžovský dále zkoumá podgrupu projektivní grupy do níž patří ty kolineace, jež zachovávají pevnou nadrovinu. Tuto podgrupu pak nazývá *afinní grupou*, zavádí známé afinní souřadnice a popisuje jejich vztah se souřadnicemi homogenními.

Dále se Bydžovský zmiňuje o singulárních kolineacích. Uvádí definici a popisuje základní vlastnosti korelace mezi dvěma m-rozměrnými prostory, definuje korelaci soumístnou a korelaci involutorní. Zabývá se rovněž korelacemi singulárními.

Čtvrtá kapitola má název **Algebraické nadplochy**. Autor nejprve definuje algebraickou varietu a na jejím základě pak algebraickou nadplochu stupně n. Zabývá se projektivně invariantními vlastnostmi nadploch, jako je stupeň (také řád), třída, či reducibilita. Zabývá se tečnou rovinou v regulárním bodě nadplochy a také nadkuželem tečen v bodě r-násobném. Definuje poláru vzhledem k nadploše, zavádí polární operátor a podává návod, jak pomocí něj určit r-tou poláru vzhledem k nadploše. Zkoumá také vztah polár a singulárních bodů a dokazuje věty:

r-násobný bod plochy je pro s-tou poláru bodu různého od od tohoto bodu r-násobného bodem (r-s)-násobným.

Poláry řádu vyššího než r-1 neprocházejí r-násobným bodem.

Je-li r-násobný bod nadplochy pólem, je r-násobným bodem také všech polár vzhledem k nadploše [56] *a všechny tyto poláry mají v něm týž nadkužel tečen jako nadplocha daná. Polára nejvyššího řádu, kterou tento pól má, je právě tento nadkužel.* [57]

[54] Autor má na mysli prostor m-rozměrný.
[55] [B103], str. 60.
[56] Autor má na mysli poláry daného r-násobného bodu.
[57] [B103], str. 83.

Poté Bydžovský definuje *Jakobián*, jeho speciální případ *Hessián* a popisuje souvislost Hessiánu s určováním singulárních bodů nadplochy. Kapitola je zakončena zkoumáním a odvozováním vět pro svazek nadploch.

Speciálním typem nadploch se zabývá pátá kapitola a to nadkvadrikami, tj. nadplochami druhého stupně. Jejich rovnici dostaneme tak, že položíme rovnu nule nenulovou kvadratickou formu:

$$f(x) = \sum a_{ij} x_i x_j = 0. \tag{8.5}$$

Bydžovský v textu podmínku nenulovosti kvadratické formy neuvádí. V případě nulové kvadratické formy ovšem rovnici (8.5) splňují všechny body m-rozměrného prostoru a tedy tato forma neurčuje v tomto prostoru nadkvadriku.

V dalším textu autor definuje diskriminant nadkvadriky, jakožto determinant A sestavený z koeficientů a_{ij}. Dokazuje, že se jedná o projektivní invariant nadkvadriky a že je až na nenulový násobek shodný s jejím Hessiánem. Bydžovský dále rozebírá vztah mezi nadkvadrikou a přímkou, hledá singulární body nadkvadriky. Rozebírá polární vlastnosti nadkvadriky. Jedinou poláru, kterou může vzhledem k nadkvadrice mít bod (y), pak nazývá polární nadrovinou bodu (pólu) (y) a vysvětluje její geometrický význam:

Polární nadrovina bodu, ležícího mimo nadkvadriku (pro $m \geq 2$), vzhledem k ní je geometrickým místem bodů, které s pólem oddělují harmonicky průsečíky nadkvadriky s přímkami pólem vedenými. [58]

V dalším textu se seznámujeme s tečnovou rovnicí nadkvadriky. Na rozdíl od bodové rovnice nadkvadriky, jíž splňují všechny její body, vyhovují tečnové rovnici všechny tečné nadroviny nadkvadriky. Bydžovský rovněž odvozuje normální tvar rovnice nadkvadriky

$$\sum a_{ii} x_i^2 = 0$$

a dokazuje, že na tento tvar lze vhodnou volbou soustavy souřadnic převést každou rovnici nadkvadriky. Podívejme se na úryvek z jeho následného výkladu:

Pro zodpovězení otázky, jak je třeba zvoliti soustavu souřadnic, aby rovnice nadkvadriky nabyla této normální formy, omezme se jen na případ nadkvadriky regulární. Pak jsou všechny koeficienty a_{ii} různé od nuly. Polární nadrovina bodu O_r [59] *vzhledem k této nadkvadrice je*

$$x_r = 0.$$

Má tedy souřadnicový simplex takovou polohu vzhledem k nadkvadrice, že polární nadrovina každého jeho vrcholu je protilehlá nadrovina simplexu. Simplex této vlastnosti nazýváme polárním simplexem nadkvadriky.

Zvolíme-li obráceně polární simplex nadkvadriky

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0,$$

za souřadnicový, má bod O_i polární nadrovinu

$$\sum a_{ij} x_j = 0,$$

[58] [B103], str. 94.

[59] Tak autor označuje vrcholy souřadnicového simplexu.

která je totožná s nadrovinou $x_i = 0$, z čehož plyne $a_{ij} = 0$ pro každé i,j, kde $i \neq j$.

Tím je dokázáno:

b) Rovnici regulární nadkvadriky uvedeme na normální tvar, jestliže vezmeme za souřadnicový simplex polární simplex nadkvadriky a jen tímto způsobem. [60]

V závěru kapitoly Bydžovský vyšetřuje dvě nadkvadriky, resp. svazek nadkvadrik. Provádí diskuzi charakteristické rovnice svazku a hledá ve svazku singuární nadkvadriky.

Následující kapitola se nazývá **Projektivní geometrie v přímce**. Autor nejprve provádí klasifikaci těchto projektivností podle počtu kořenů charakteristické rovnice a hodnosti charakteristického determinantu. Definuje charakteristický dvojpoměr projektivnosti, projektivnost inverzní a involutorní, hovoří o regulárních i singulárních (samodružných) dvojicích bodů involutorní projektivnosti, definuje rovněž apolární dvojici bodů. Jedná o regulárních i singulárních svazcích dvojic bodových a uvádí nutnou a postačující podmínku pro to, aby tři dvojice bodů náležely do téhož svazku, neboli, jak říká autor, byly v involuci.

V dalším textu Bydžovský odvozuje vlastnosti trojice bodové. Definuje ji jako kořeny binární kubické formy, která je položena rovna nule:

$$f(x) \equiv a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 = 0.$$

Definuje pojem regulární (kubická forma má pouze jednoduché kořeny) a singulární trojice bodové. Uvádí Hessián trojice bodové, odvozuje její polární vlastnosti a uvádí rovnici určující kubické formy na normální tvar

$$a_0x_1^3 + a_3x_2^3.$$

V závěru přechází ke geometrii afinní a metrické a dokazuje některé jejich speciální vlastnosti, které v geometrii projektivní neplatí.

Kapitola sedmá se zabývá lineární projektivní geometrií v rovině. Autor zde probírá pojmy souřadnice, bod, přímka, zabývá se rovněž geometrií ve svazku přímek. Poté definuje úplný čtyřroh, resp. úplný čtyřstran a popisuje jejich vlastnosti. Věnuje se kolineaci dvou rovin i kolineaci v rovině, uvádí podmínky pro její jednoznačné určení, provádí klasifikaci kolineací. Dále se věnuje kolineaci involutorní a korelaci dvou rovin, resp. korelaci v rovině. Poté, stejně jako v předchozí kapitole, přechází ke geometrii afinní, popisuje afinní grupu rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3' \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3' \\ x_3 &= x_3', \end{aligned}$$

z nichž je hned patrné, že každá transformace této grupy má souřadnicovou osu o_3 za samodružnou přímku. Vynecháním této přímky pak z projektivní roviny vzniká rovina afinní, v níž Bydžovský zavádí afinní souřadnice. Dále se zabývá geometrií ekviformní a metrickou.

[60] [B103], str. 100.

Obdobnou strukturu jako předchozí dvě kapitoly má i kapitola osmá, nazvaná **Lineární projektivní geometrie v prostoru trojrozměrném**. Navíc se zde objevují pojmy svazek a trs rovin.

Kapitola devátá se jmenuje **Kuželosečky**. Rovnici kuželosečky obdržíme, když položíme rovnu nule nenulovou[61] ternární kvadratickou formu

$$f(x) \equiv \sum a_{ij}x_ix_j = 0,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Bydžovský zavádí pojem hodnost kuželosečky jako hodnost jejího diskriminantu a provádí klasifikaci kuželoseček podle hodnosti a uvádí, že

Každé dvě kuželosečky téže hodnosti a jen takové dvě kuželosečky jsou projektivně ekvivalentní, t.j. existuje kolineace, kterou lze jednu převésti ve druhou. [62]

V dalším textu Bydžovský odvozuje věty o určenosti kuželosečky, zabývá se tečnami a polárními vlastnostmi kuželoseček. Odvozuje tzv. první normální (jinak také tečnový) tvar rovnice kuželosečky

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0,$$

popisuje projektivní vytvoření kuželosečky. Dále uvádí parametrické rovnice kuželosečky a dokazuje známou Pascalovu větu. Uvádí další normální tvar rovnice kuželosečky, tzv. polární

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

při němž je za souřadnicový trojstran zvolen trojstran polární, který Bydžovský definuje jako diagonální trojstran úplného čtyrrohu vepsaného kuželosečce. Poté autor vyšetřuje svazek kuželoseček, zabývá se rovněž singulárními svazky, provádí rozbor charakteristické rovnice svazku. Dále provádí klasifikaci typů dvojic regulárních kuželoseček, v souvislosti tím odvozuje geometrický význam simultánních invariantů $\Theta_1,\ \Theta_2$, jež se objeví při řešení charakteristické rovnice svazku. Podrobně se Bydžovský zabývá také Desarguesovou větou o svazku kuželoseček, která říká, že

Svazek kuželoseček protne přímku neprocházející žádným bodem base v bodové involuci; dvě kuželosečky svazku se této přímky dotýkají a to v dvojnásobných bodech této involuce. [63]

Je odvozena a dokázána také zobecněná Desarguesova věta, o níž Bydžovský poznamenává, že ji ve věku 16-ti let objevil Eduard Weyr:

Kuželosečky svazku protínají kuželosečku pevnou, která obsahuje dva body base svazku, ve dvojicích bodové involuce, jejíž střed leží na spojnici zbývajících dvou bodů base. Dvě kuželosečky svazku se pevné kuželosečky dotýkají a to ve dvojnásobných bodech involuce [64]

Již bez důkazu ještě uvádí větu, která je důsledkem věty předchozí a jejímž zvláštním případem je věta o společném bodu chordál tří kružnic, které nenáleží témuž svazku:

[61] Bydžovský podmínku nenulovosti formy opět vynechává.
[62] [B103], str. 196.
[63] [B103], str. 227.
[64] [B103], str. 229.

Mají-li tři kuželosečky dva společné body, protínají se tři spojnice vždy zbývajících dvou průsečíků v témže bodě. [65]

V závěru kapitoly dualisuje některé z odvozených vlastností kuželosečky (uvedena např. věta Brianchonova).

V desáté kapitole, obdobně jako v kapitole deváté o kuželosečkách, jsou klasifikovány a vyloženy vlastnosti kvadrik.

Kapitola jedenáctá má název **Základní vlastnosti algebraických křivek rovinných**. Rovinná algebraická křivka je zavedena pomocí již dříve definovaného pojmu algebraické nadplochy v prostoru dvojrozměrném. Bydžovský zde definuje stupeň (řád) křivky, odvozuje vzorec pro obecnou skupinu bodů (pro určení křivky)

$$N = \frac{n(n+3)}{2}$$

a vyslovuje podmínky, za nichž může být skupina N bodů obecnou skupinou. Vyslovuje větu o počtu průsečíků křivky s přímkou. Uvádí rovnici tečny křivky, definuje tečnu inflexní jakožto přímku, jež má s křivkou styk více než dvoubodový, teprve poté definuje inflexní bod. Zabývá se dvojnásobnými i vícenásobnými body, nacházíme zde způsob třídění dvojnásobných bodů podle hodnosti Hessiánu v daném bodě.

Dále je definován resultant dvou křivek a vysvětleno jeho použití při hledání společných bodů dvou křivek. Je dokázána věta Bezoutova:

Dvě křivky stupňů n, m, jež nemají společné součásti, mají právě mn společných bodů, počítáme-li každý průsečík tolikrát, kolik udává jeho násobnost. [66]

a řada dalších pomocných tvrzení. Dále autor dokazuje, že nerozložitelná křivka stupně n nemůže mít více než

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

dvojnásobných bodů a rozebírá případy křivek s maximálním počtem dvojnásobných bodů pro $n = 2, 3, 4$. Další vlastností algebraických křivek je jejich rod. Bydžovský jej definuje pro nerozložitelné křivky, které nemají jiné singularity, než dvojnásobné body, postupně však definici rozšiřuje i na křivky složené, které neobsahují vícenásobnou součást, i na křivky se singularitami o násobnosti vyšší než dvě. Bydžovský upozorňuje na význam tohoto pojmu, křivky stejného rodu, i když různých stupňů, mají často společné některé velmi významné vlastnosti, jako např.:

Souřadnice bodu nerozložitelné křivky rodu nula lze vyjádřiti jako celistvé racionální funkce jednoho parametru. [67]

Souřadnice bodu křivky rodu jedna lze vyjádřit jako funkce racionální v t a ve druhé odmocnině z mnohočlenu v t. [68]

[65] [B103], str. 230.
[66] [B103], str. 322.
[67] [B103], str. 341.
[68] [B103], str. 342.

V dalším textu jsou rozebrány polární vlastnosti algebraických křivek a vlastnosti lineárních soustav křivek.

Další kapitola popisuje použití algebraických funkcí jedné komplexní [69] proměnné v teorii křivek. Bydžovský tuto funkci definuje rovnicí

$$f(z,u)=0,$$

kde f je mnohočlen s komplexními koeficienty v proměnných z, u. Přičemž z je nezávislá komplexní proměnná a u je definováno jako funkce z. Poté autor definuje kritické hodnoty, resp. kritické body algebraické funkce, dále pojmy cyklus a stupeň cyklu a hovoří o možnosti rozvinout elementy funkce náležející do téhož cyklu k-ho stupně v řady tvaru

$$u_i = c_0 + c_1^{(i)}(z-z_0)^{\frac{1}{k}} + c_2^{(i)}(z-z_0)^{\frac{2}{k}} + \dots,\ i=1,\dots,k.$$

V dalším textu pak autor definuje důležitý pojem větve křivky, hovoří o počátku větve, definuje charakteristická čísla větve (stupeň a třída větve) a uvádí, jaké důsledky pro větev křivky má transformace souřadnic. Poté autor provádí klasifikaci dvojnásobných bodů křivky podle stupně větví, resp. větve, které jej mají za počátek. Odvozuje základní větu o násobnosti průsečíku dvou křivek, s její pomocí pak vysvětluje geometrický význam charakteristických čísel větve:

Přímka, procházející počátkem větve stupně k-ho a třídy h-té, protne ji v tomto bodě v násobnosti k, s výjimkou tečny větve, která ji protne v násobnosti (k+h). [70]

Větu dále využívá pro výpočet násobnosti průsečíků křivky a její první poláry pro různé polohy pólu, resp. průsečíky křivky a jejího Hessiánu.

Kapitola třináctá se jmenuje **Vzorce Plückerovy**. Touto kapitolou je ukončena obecná teorie algebraických rovinných křivek. Je zde vysvětlen pojem třída křivky, uveden první Plückerův vzorec pro výpočet třídy křivky n-ho stupně , která má u uzlů a k obyčejných bodů úvratu:

$$m = n(n-1) - 2u - 3k.$$

Bydžovský dále pojednává o počtu tečen ke křivce vedených z bodů, které mají speciální polohu, modifikuje výše uvedený vzorec pro křivku, která má obyčejný bod r-násobný a zabývá se stanovením horní meze pro počet bodů úvratu na křivce. Poté zkoumá kvartiku se třemi body úvratu, zabývá se Hessiánem nerozložitelné i rozložitelné křivky a dokazuje, že

Nerozložitelná křivka má konečný počet inflexních bodů. [71]

Poté uvádí druhý Plückerův vzorec pro počet inflexních bodů křivku stupně n, která má u obyčejných uzlů a k bodů úvratu a nemá jiné další singularity:

$$i = 3n(n-2) - 6u - 8k.$$

Definuje Hesseovu a Steinerovu křivku, jako množiny bodů na křivce určitých speciálních vlastností, odvozuje tečnovou rovnici křivky, jako rovnici duální

[69] Místo komplexní používá Bydžovský termín soujemné.
[70] [B103], str. 377.
[71] [B103], str. 397.

k bodové rovnici křivky a popisuje vlastnosti větve křivky duální. Na závěr odvozuje poslední dva Plückerovy vzorce,

$$\begin{aligned} n &= m(m-1) - 2\tau - 3i \\ k &= 3m(m-2) - 6\tau - 8i \end{aligned}$$

které jsou duální k již odvozeným vzorcům. Čísla n, m, u k, τ(počet dvojnásobných tečen), i nazývá Plückerovými charakteristickými čísly křivky a dokazuje, že

…šest Plückerových čísel vyhovuje třem nezávislým podmínkám; lze tedy tři z nich voliti, zbývající tři jsou jimi určena. [72]

Kapitola čtrnáctá a patnáctá doplňují obecnou teorii algebraických rovinných křivek na příkladech rovinné kubiky a kvartiky. Na začátku první z těchto kapitol autor pojednává o společných bodech dvou kubik a o jednoznačném určení kubiky. Poté autor popisuje projektivní vytvoření kubiky, věnuje se jejím polárním vlastnostem. Zabývá se počtem tečen vedených ke kubice z jejího bodu a dokazuje větu (Salmonova):

Dvojpoměr čtyř tečen vedených ke kubice z jejího bodu je pro všechny body kubiky týž. [73]

Poznamenává, že věta platí i pro body inflexní, pokud mezi tečny vedené z tohoto bodu počítáme také samotnou inflexní tečnu. Inflexním bodům se pak věnuje podrobněji, zkoumá konfigurace inflexních bodů ležících na kubice rodu jedna.

Dokazuje, že inflexní body kubiky leží po třech na dvanácti přímkách a že každým bodem procházejí čtyři tyto přímky. Tvoří tedy inflexní body konfiguraci typu $(9_4, 12_3)$[74].

Dále ukazuje, že devět inflexních bodů tvoří pro určení kubiky skupinu speciální (tj. ne obecnou, prochází jimi více než jedna kubická křivka), lze je tedy pokládat za bázi svazku kubických křivek. Takový svazek se pak nazývá syzygetický svazek kubik. Bydžovský uvádí jeho rovnici a dokazuje, že tento svazek obsahuje čtyři nerozložitelné kubiky, z nichž každá je trojicí přímek. Věnuje se dalším charakteristickým vlastnostem této konfigurace, ukazuje mimo jiné, že

…dvanáct přímek konfigurace lze rozděliti na čtyři trojice takové, že každá z nich obsahuje všech devět bodů konfigurace. [75]

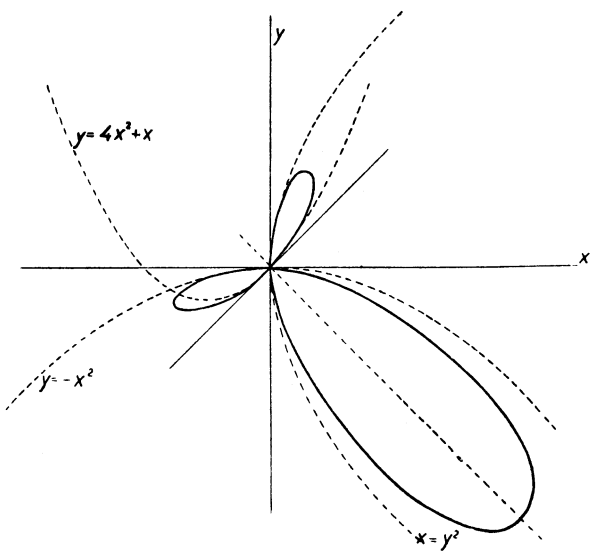
Poté se autor zabývá inflexními trojstrany, neboli singulárními kubikami syzygetického svazku a uvádí rovnici svazku na normální tvar tím, že za souřadnicový trojstran volí libovolný trojstran inflexní.

Zabývá se též kubikami harmonickými a ekvianharmonickými, zjišťuje podmínky ekvivalence dvou kubik rodu jedna. Popisuje grupu automorfních kolineací kubik rodu jedna a to zejména případu ekvianharmonického a harmonického. Tyto výsledky odvozuje již ve své práci [B73], která vyšla o 18 let dříve. V závěru kapitoly se autor věnuje kubice s bodem uzlovým a kubice s bodem úvratu.

[72] [B103], str. 414.
[73] [B103], str. 431.
[74] O tom více v kapitole šesté.
[75] [B103], str. 434.

V úvodu další kapitoly autor zdůvodňuje větu o čtyřech kuželosečkách, které tvoří uzavřený řetěz na kvartice, věnuje se kuželosečkám čtyřnásob dotykovým a jejich soustavám. Dále se Bydžovský zabývá vlastnostmi soustav dvojnásobných tečen kvadriky[76], speciálně pak kvartiky rodu nula (se třemi uzlovými body). Dále popisuje projektivní vytvoření kvartiky a polární vlastnosti kvartiky s bodem uzlovým.

Algebraickou geometrii v rovině ukončuje kapitola šestnáctá **Tvar rovinných křivek algebraických**. Autor se zde snaží dosavadní ryze abstraktní úvahy názorně zobrazit. Zavádí pravoúhlé souřadnice, znovu opakuje rozdíly mezi souřadnicemi homogenními a nehomogenními, popisuje vlastnosti nevlastní přímky, a vyslovuje věty o počtu bodů (reálných a imaginárních) na reálné algebraické křivce. Odvozuje rovnici tečny křivky v nehomogenních pravoúhlých souřadnicích, speciálně pak definuje asymptoty, jako tečny křivky v bodech nevlastních a popisuje způsob hledání asymptot. Věnuje se rovněž bodům vícenásobným. Poté uvádí několik příkladů algebraických křivek (křivky Laméovy, kubika, kvartika), na nichž postupně ukazuje metody a prostředky používané k určení tvaru křivky. Poté počítá rozvoje v daném bodě křivky, používá Newtonova polygonu pro určení přibližných křivek křivky dané v daném bodě [77](obr. 8.4[78]). Vyšetřuje průběh větví nejnižších stupňů, podrobně zkoumá tvar křivky v okolí dvojnásobného bodu, pro prozkoumání tvaru křivky v okolí nevlastních bodů používá tzv. analytický trojúhelník.



Obrázek 8.4:

Následující tři kapitoly se zabývají geometrií prostorovou. První z nich, kapitola sedmnáctá, nese název **Algebraické plochy a algebraické křivky prostorové**. Autor zde seznamuje čtenáře se základními pojmy nutnými k poznání těchto ploch a křivek. Definuje určenost algebraické plochy, algebraickou prostorovou křivku pak definuje jako průnik dvou algebraických ploch, vyslovuje

[76]Kvartika je křivka nejnižšího stupně, která může mít dvojnásobné tečny.

[77]Tato teorie je poměrně složitá. Zjednodušeně se dá říci, že hledání přibližných křivek spočívá v tom, že z rozvoje dané křivky v jejím bodě vezmeme jen několik prvních členů, čímž získáme křivku nižšího stupně, než je křivka původní. Tato křivka v okolí uvažovaného bodu přibližně vyjadřuje křivku danou.

[78]Obrázek je převzat z Bydžovského práce.

Bezoutovu větu o stupni prostorové křivky. Je definována plocha přímková a dokázáno, že každá přímková plocha, jejímž každým bodem prochází dvě přímky plochy je regulární kvadrika. Dále se autor zabývá tečnou rovinou a tečnou algebraické plochy, studuje tečné roviny podél přímky plochy, definuje torsální, resp. vícenásobnou přímku plochy. Vyslovuje důležitou větu, na jejíž důkaz odkazuje do učebnic diferenciální geometrie:

Řada dotykových bodů na přímce přímkové plochy a svazek tečných rovin v nich jsou projektivní. [79]

Dále jsou definovány a podrobně prozkoumány parabolické body, je dokázáno, že parabolické body jsou regulární průsečíky plochy s jejím Hessiánem. Poté Bydžovský zkoumá Hessovu a Steinerovu plochu, popisuje vztah Hessiánu k přímkám plochy a Hessián plochy rozvinutelné, jejíž každá přímka je torzální. Autor se zabývá singulárními body plochy (rozlišuje body konické, biplanární a uniplanární), popisuje kužel tečen vedených z bodu ku ploše, definuje pojem třída plochy.

Poté se více věnuje prostorovým křivkám, popisuje vztah křivky a přímky. Přímku protínající křivku nazývá sekantou, podle počtu průsečíků pak rozlišuje unisekantu, bisekantu, atd. Mezi sekantami si nejvíce všímá tečen křivky, které definuje jako průsečnice tečných rovin ploch, jejichž průnikem je daná prostorová křivka. Body, v nichž tečné roviny tvořících ploch splývají, nazývá singulárními body křivky.

V dalším textu pak můžeme nalézt návod, jak lze studovat prostorovou křivku z jejího průmětu do roviny, dále je zde podána obecnější definice prostorové křivky. V závěru kapitoly je pak ukázáno použití duality v teorii algebraických ploch i prostorových algebraických křivek.

Následující dvě kapitoly jsou věnovány geometrii prostorové. První z nich se zabývá studiem kubické plochy. Bydžovský nejprve zkoumá nerozložitelnou kubickou plochu bez singulárních bodů a dokazuje, že na ní leží 27 přímek. Poté se seskupením přímek na kubické ploše zabývá podrobněji a dochází k následujícímu závěru:

Přímka plochy je proťata právě deseti dalšími přímkami plochy, jež leží po dvou v pěti rovinách položených danou přímkou. [80]

Leží-li na kubické ploše přímky, musí na ní ležet i kuželosečky, jakožto průniky plochy s rovinou procházející přímkou plochy. Proložíme-li libovolnou přímkou plochy svazek rovin, získáme průnikem s kubickou plochou vesměs regulární kuželosečky, až na pět výjimek, zmiňovaných v předchozím odstavci. Bydžovský zvolenou přímku plochy nazývá osou soustavy kuželoseček a dokazuje větu:

Soustava kuželoseček kubické plochy protíná svou osu v bodové involuci; dvě z těchto kuželoseček se tedy osy dotýkají. [81]

Bydžovský dále odvozuje, že kubická plocha bez singulárních bodů má 27 soustav dvojnásob tečných rovin a 45 trojnásob tečných rovin. Poté autor zkoumá ty přímky plochy, které jsou navzájem mimoběžné, rozřazuje je do tzv. dvojšestic přímek, zkoumá jejich charakteristické vlastnosti a jejich vztah k ostatním přímkám plochy i k ploše samotné.

[79] [B103], str. 514.
[80] [B103], str. 546.
[81] [B103], str. 547.

Dále autor zkoumá i plochy, které obsahují singulární body, zabývá se přímkami plochy, které procházejí jejím dvojnásobným bodem a torzálními přímkami plochy. Jednotlivě rozebírá případy kubické plochy s jedním bodem konickým, s jedním bodem biplanárním a bodem uniplanárním. Zkoumá plochu se třemi resp. čtyřmi dvojnásobnými body a dochází k závěru, že na nich leží vždy konečný počet přímek. Má-li kubická plocha být přímková (je myšlena plocha nekuželová), tj. má-li obsahovat nekonečný počet přímek, musí mít i nekonečný počet singulárních bodů. Bydžovský vyšetřuje přímkové kubické plochy dvou typů, do prvního z nich řadíme např. plochy obsahující dvě řídící přímky (jednu dvojnásobnou, jednu jednoduchou), druhý typ reprezentuje v učebnici kubická plocha Cayleyova, jež má jedinou řídící přímku (dvojnásobnou). V závěru ještě zkoumá plochu duální ke kubické ploše se čtyřmi konickými body, tzv. plochu Steinerovu (římskou), která je čtvrtého stupně.

Následující kapitola se zabývá prostorovou kubikou a kvartikou. Popisuje parametrické vyjádření kubiky, zkoumá vzájemnou polohu kubiky a roviny, kubiky a přímky, určuje hodnost a třídu kubiky. Poté kubiku promítá z bodu kvadratickým kuželem do roviny, zkoumá vlastnosti průmětu a odvozuje tak vlastnosti kubiky prostorové. V dalším textu je nalezen minimální počet bodů, potřebný pro jednoznačné určení prostorové kubiky, vysvětleno její projektivní vytvoření a podáno zobecněné parametrické vyjádření. Poté autor uvádí, že prostorová kubika je útvar sám k sobě duální v tom smyslu, že bodům a oskulačním rovinám prostorové kubiky v dualitě odpovídají oskulační roviny a body zase prostorové kubiky. Co se týče prostorových kvadrik, je vysvětleno jejich vytvoření, rozdělení do dvou základních typů. Autor rovněž zkoumá jejich základní vlastnosti, dvojnásob dotykové roviny a zabývá se kvartikami obsahujícími singulární body. Prostorovými kvartikami se Bohumil bydžovský zabýval již ve svých pracích [B7] a [B8], v nichž studuje grupu kolineací, jmiž se tato křivka reprodukuje.

Poslední kapitola Bydžovského učebnice se poněkud liší od předchozích, autor v ní rozebírá příklady algebraických transformací vyšších stupňů. Seznamuje čtenáře s nejjednoduššími příklady tzv. Cremonových transformací, především pak s kvadratickou transformací mezi dvěma rovinami. Již z 1. a 4. kapitoly této disertační práce víme, že se jedná o vzájemně jednoznačnou bodovou příbuznost, v níž jsou souřadnice bodu každé roviny vyjádřeny jako kvadratické formy souřadnic bodu jemu odpovídajícího v druhé rovině. Bydžovský odvozuje rovnice takové transformace, definuje pojmy hlavní body a hlavní přímky transformace. Ukazuje, že obrazem přímky jedné roviny v transformaci je kuželosečka procházející všemi hlavními body druhé roviny a zavádí pojem homaloidní síť kuželoseček. Užívá tuto transformaci na křivku n-ho stupně a ukazuje výhody tohoto použití. Zabývá se též kvadratickou transformací involutorní a kvadratickou inversí. Poté krátce přistupuje k transformacím vyšších stupňů a bez důkazu[82] vyslovuje větu:

Každou Cremonovu transformaci lze rozložiti v několik transformací kvadratických.[83]

[82]Již ve čtvrté kapitole jsem zmiňovala, že tento důkaz lze nalézt v Nöther, *Zur Theorie des eindeutigen entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimension*, Math. Annalen 3, Göttingen Nachrichten, 1870.

[83][B103], str. 632.

Více se věnuje Cremonovým transformacím v prostoru trojrozměrném. Autor nejprve definuje soustavu homaloidních kvadrik, poté se postupně věnuje transformaci kvadrobikvadratické, kvadrokubické a kvadrokvadratické a involutorní transformaci kvadrtické. V závěru Bydžovský uvádí zobrazení algebraické plochy, speciálně pak kubické plochy, na rovinu pro podrobnější zkoumání jejích vlastností. Obecně se problematikou zobrazování z prostorů vyšších dimenzí do prostorů nižších dimenzí zabývá v práci [B46] *Užití principu promítání v teorii geometrických příbuzností.*

Učebnice je zakončena věcným seznamem, na rozdíl od předchozích učebnic zde není stručný historický přehled vývoje této problematiky ani seznam literatury pro další studium v tomto oboru, často se však v textu odkazuje na rozličné většinou zahraniční učebnice či publikace věnované tomuto tématu. Uveďme zde alespoň některé znich. Roku 1939 vyšla v Berlíně kniha Bartela van der Waerdena *Einführung in die algebraische Geometrie*, v níž můžeme nalézt základy této teorie. Úplnější a ucelenější je učebnice Juliana Lowela Coolidge *A treatise on algebraic plane curves*, vydaná roku 1931 v Oxfordu. Velice často se autor odkazuje na třetí svazek (*Geometrie*) rozsáhlé *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, jež vyznikala v letech 1903–1915. Z českých učebnic nejčastěji čerpá ze své učebnice o determinantech, z knihy *Diferenciální počet* od Karla Petra, které vyšla roku 1923 v Praze a z učebnic diferenciální geometrie Hostinského[84] a Hlavatého[85]. Ještě je třeba zmínit jednu knihu, o níž sám Bydžovský v úvodu své knihy píše

Kniha má četné styčné body s knihou prof. J. Vojtěcha o projektivní geometrii,[86]) liší se však od ní jednak tím, že je to učebnice a nikoli kompendium, jako kniha Vojtěchova, jednak tím, že východisko knihy Vojtěchovy je ryze geometrické, kdežto východisko knihy mé formálně algebraické. Čtenář najde v knize Vojtěchově ryze geometrické poučení o mnohých částech látky vykládané v mé knize algebraicky.[87]

Poměrně rozsáhlou recenzi k této učebnici napsal profesor brněnské techniky Otto Hlínka[88]. Kromě podrobného výpisu obsahu knihy zde Hlínka chválí nejen výklad, ale i technickou stránku knihy.

Po vnější stránce kniha vyniká dobrou úpravou typografickou a vzorně narýsovanými obrazci (v počtu 46); je doplněna abecedním ukazatelem a seznamem opravených chyb a nedopatření tiskových a jiných.

Profesor Bydžovský se v tomto spise opět ukázal jako mistrný učitel přenášející na čtenáře svůj vřelý poměr k vykládané látce. Její výběr je promyšleně vyvážen, takže není přehnaný odhad, že pro každého, kdo se hodlá zabývati geometrií, i když ne algebraickou, Bydžovského kniha je nezbytnou a dokonalou průpravou.

S politováním musím poznamenat, že úroveň dnešní výuky algebraické geometrie je nižší. Současní studenti učitelského oboru matematika a deskriptivní geometrie na MFF UK, kde se tento předmět vyučuje v rámci jednoho semestru[89], se například vůbec neseznámí s pojmy větev křivky, Newtonův

[84] Hostinský, B.,Diferenciální geomertie křivek a ploch, Praha, 1942.
[85] Hlavatý, V.,Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha , 1937.
[86] Vojtěch, J., Geometrie projektivní, Sborník Jednoty československých matematiků a fysiků, čís. XIX, Praha, 1932.
[87] [B103], str. 8.
[88] ČPMF 75, 1950, str. 440–443.
[89] Hodinová dotace předmětu je 2/0.

polygon, či Cremonova transformace. Dalo by se říci, že na učitelském studiu převládá geometrický přístup ve výuce algebraické geometrie, zatímco na oboru Matematika, převládá přístup algebraický.

Dva roky po Bydžovského učebnici vyšla v Princetonu učebnice *Algebraic curves* od Roberta J. Walkera. Její pojetí této problematiky se od Bydžovského poněkud odlišuje a je mnohem bližšší učebnicím novějším. Zatímco Bydžovského přístup mnohem více vychází z geometrie, Walkerův přístup bychom spíše nazvali algebraický. Kniha obsahuje nezbytný úvod z lineární algebry. Daleko větší důraz, než v knize Bydžovského je zde kladen na použití algebraického aparátu formálních mocninných řad pro zkoumání větví křivek, racionálních transformací křivek a biracionálních korespondencí. Učebnice vyšla o dva roky později též v ruském jazyce.

Čistě z algebry vychází i učebnice rakouského matematika Wolfganga Gröbnera *Moderne Algebraische geometrie* z roku 1949. Jeho jméno je známé v souvislosti s Gröbnerovými bázemi které jsou užitečným početním nástrojem, často používaným v algebraické geometrii[90].

Zásadní rozdíl mezi Bydžovského učebnicí a učebnicemi pozdějšími byl v úrovni obecnosti, na níž byl výklad prováděn. Bydžovský látku mnohem více probírá na konkrétních příkladech.

K Walkerově učebnici sepsal roku 1970 profesor Alois Švec sbírku řešených příkladů[91]. První český učební text algebraické geometrie, vydaný po Bydžovského učebnici, vyšel až v roce 1975. Kniha se jmenuje *Algebraické křivky* a jejím autorem je Jarolím Bureš. Kniha obsahově nepřesahuje Walkerovu učebnici, jež byla, jak sám autor píše, hlavním zdrojem pro sepsání knihy, čerpal rovněž z učebnice profesora Bydžovského.

[90] Využívají se např. k řešení soustav polynomiálních rovnic.
[91] Švec, A., *Příklady z algebraické geometrie*, Praha, 1970.

Kapitola 9

Přílohy

9.1 Seznam publikovaných prací

Následující seznam publikací Bohumila Bydžovského byl téměř beze změny převzat z práce *Život a dílo Bohumila Bydžovského* od Ladislavy Francové. Hlavním zdrojem tohoto přehledu byl seznam, který sestavil Karel Šindelář po smrti Bohumila Bydžovského, publikovaný roku 1970 v 95. ročníku *Časopisu pro pěstování matematiky*[1]. Při jeho sestavování autor vycházel ze seznamů uveřejněných v letech 1950 a 1955 od autorů Karla Koutského[2] a Karla Havlíčka[3]. Šindelářův seznam obsahoval celkem 60 prací, nebyly v něm zahrnuty články referativního charakteru (s výjimkou nekrologů), články s pedagogickým či elementárně–matematickým obsahem, ani středoškolské učebnice matematiky a sbírky úloh. Po pečlivém prověření a doplnění tento počet vzrostl na 111 prací.

Více než polovina (32) Bydžovského vědeckých prací byla publikována v *Časopise pro pěstování matematiky a fysiky* (později přejmenovaném na *Časopis pro pěstování matematiky*). V seznamu je pro tento časopis použita zkratka ČPMF (resp. ČPM). Zhruba čtvrtina prací (14) byla publikována v časopise *Rozpravy II. třídy České Akademie věd a umění*, který v seznamu nazývám stručně *„Rozpravy"*. Časopis *Věstník Královské české společnosti nauk* cituji jako *„Věstník"*. Ostatní názvy časopisů jsou ponechány beze změn.

U jednotlivých položek seznamu publikací jsou uvedeny odkazy na tyto referativní časopisy:

J = Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,

RS = Revue semestrielle des publications mathématiques.

Odkazy jsou doplněny šifrou, nebo jménem referenta. Jsou zde uvedeny též citace recenzí v ČPMF nebo jiných časopisech. U některých prací jsou v hranatých závorkách poznámky nejrůznějšího charakteru.

K pořadovému číslu prací je připojeno písmeno B, aby se práce Bohumila Bydžovského odlišily od ostatních pramenů citovaných v jednotlivěch článcích této práce.

[1] Šindelář, K., *Památce akademika Bohumila Bydžovského*, ČPM 95 (1970), 100–113.
[2] Koutský, K., *Sedmdesátiny prof. dr. Bohumila Bydžovského*, ČPMF 75 (1950), D349–D357.
[3] Havlíček, K., *Akademik Bohumil Bydžovský pětasedmdesátníkem*, ČPM 80 (1955), 247–249.

[B1] *Inflekční přímka kubické křivky racionální.*
ČPMF 35 (1906), 1–23
J: 37 (1906), 569 Pe
RS: XV–1, 93 Petr

[B2] *Příspěvek k theorii svazku kubických křivek racionálních.*
Zpráva c. k. státní reálky král. hor. města Kladna za VI. školní rok 1905–1906, 5–30
J: 37 (1906), 569 Pe
ČPMF: 36 (1907), 295 Petíra

[B3] *Theorie maxim a minim.*
ČPMF 36 (1907), 169–196, 297–315
J: 38 (1907), 333 Pe
RS: XVI–1, 110 Petr

[B4] *Podrobnosti k theorii ternálně cyklické kollineace.*
VII. Zpráva c. k. státní reálky v král. horním městě Kladně za školní rok 1906–1907, 5–17
J: 38 (1907), 572 Pe
ČPMF: 38 (1909), 309 Petíra

[B5] *Kubická křivka racionálná jakožto souhrn dvojic konjugovaných bodů.*
ČPMF 37 (1908), 13–24
J: 39 (1908), 616 Pe
RS: XVII–2, 108 Petr

[B6] *Grupa šesti kollineací rovinných nebo prostorových.*
Třicátá pátá roční zpráva cís. král. české vyšší reálky Karlínské za školní rok 1907–1908, 3–14
J: 39 (1908), 205 Pe
ČPMF: 38 (1909), 311 Petíra

[B7] *Grupa kollineací prostorové křivky bikvadratické prvého druhu.*
Rozpravy, 17 (1908), č. 18, 39 stran
J: 39 (1908), 706–707 Pe
RS: XVIII–1, 112 Petr
Věstník české Akademie: 17 (1908), 320 Petr

[B8] *Grupa kollineací prostorové křivky bikvadratické prvého druhu.*
Rozpravy, 17 (1908), č. 27, 13 stran
J: 39 (1908), 706–707 Pe
RS: XVIII–1, 112 Petr
Věstník české Akademie: 17 (1908), 380 Petr, Sobotka

[B9] *Gruppe der Kollineationen der biquadratischen Raumkurve erster Art.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 14 (1909), 163–175
[Jde o zkrácený překlad prací [B7] a [B8].]
J: 40 (1909), 702 Pe
RS: XIX–1, 102 Mannoury

[B10] *O jisté grupě rovinných kollineací.*
ČPMF 38 (1909), 25–32, 150–164
J: 40 (1909), 647 Petr
RS: XIX–1, 99 Petr

[B11] *Budoucnost matematiky.*
ČPMF 38 (1909), 129–149
[Článek H. Poincarého přeložil Bohumil Bydžovský.]
RS: XIX–1, 100 Petr

[B12] *O jisté nekonečné grupě Cremonových transformací.*
Rozpravy, 18 (1909), č. 34, 8 stran
J: 40 (1909), 729 Pe
RS: XX–1, 107 Petr
Věstník České Akademie: 18 (1909), 445 Sobotka

[B13] *Über eine unendliche Gruppe von Cremonaschen Verwandtschaften.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 15 (1910), 1–5
[Jde o zkrácený překlad práce [B12].]
J: 41 (1910), 744 Pe
RS: XX–1, 106 Mannoury

[B14] *O imaginárních bodech.*
ČPMF 39 (1910), 317–329, 417–426
RS: XX–1, 104 Petr

[B15] *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií.*
Nákladem JČM, v Praze 1910, 181 stran
ČPMF: 40 (1911), 488–489 Hostinský
RS: XXI–2, 138

[B16] *Arithmetika pro IV. třídu škol reálných.*
Nákladem JČM, v Praze 1910, 149 stran
[Částečně se shoduje s učebnicí [B15].]
ČPMF: 40 (1911), 488–489 Hostinský
RS: XXI–2, 138

[B17] *Příspěvek k theorii cyklických projektivností.*
ČPMF: 40 (1911), 281–295
J: 42 (1911), 703 Pe
RS: XXI–2, 104 Velísek

[B18] *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií.*
Nákladem JČM, v Praze 1911, 154 stran
ČPMF: 41 (1912), 74–76 Hostinský
RS: XXI–2, 138

[B19] *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných.*
Nákladem JČM, v Praze 1911, 196 stran
[Částečně se shoduje s učebnicemi [B15] a [B18].]
ČPMF: 41 (1912), 74–76 Hostinský
RS: XXI–2, 138

[B20] *O vytvoření geodetických křivek na rotačních ellipsoidech.*
ČPMF 41 (1912), 319–330
[Práce je obsažena ve „Sborníku prací mathematických a fysikálních vydaném na počest dra Fr. Koláčka"; sborník je součástí ČPMF.]
J: 43 (1912), 721–722 Pe
RS: XXI–2, 107 Velísek
Naše věda: 2 (1915–1918), 261 Vojtěch

[B21] *Dvojnásobné body křivek šestého stupně.*
Rozpravy, 21 (1912), č. 42, 12 stran
J: 43 (1912), 676 Pe
RS: XXI–2, 113 Velísek
Věstník České Akademie: 21 (1912), 470–471 Petr, Sobotka
Naše věda: 1 (1914), 107–108 Vojtěch

[B22] *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií.*
Nákladem JČM, v Praze 1912, 179 stran
[Spoluautor Jan Vojtěch.]
ČPMF: 42 (1913), 201–202 Hostinský

[B23] *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek.*
Nákladem JČM, v Praze 1912, 176 stran
[Jedná se o částečně upravenou učebnici [B22]. Spoluautor Jan Vojtěch.]
ČPMF: 42 (1913), 201–202 Hostinský

[B24] *Sbírka úloh z mathematatiky pro vyšší třídy středních škol.*
Nákladem JČM, v Praze 1912, 329 stran
[Spoluautor Jan Vojtěch zpracoval část geometrickou, část arithmetickou zpracoval B. Bydžovský s částečným použitím 7. vydání Hromádkovy a Strnadovy „Sbírky úloh z algebry".]

[B25] *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií.*
Nákladem JČMF, v Praze 1913, 181 stran
[Jde o druhé, nezměněné vydání učebnice [B15].]

[B26] *Konstrukce rovinných křivek šestého stupně rodu 0 až 3.*
Rozpravy, 22 (1913), č. 46, 20 stran
J: 44 (1913), 615 Pe
RS: XXV–1, 74 Bydžovský
Věstník České Akademie: 22 (1913), 426–427 Sobotka
Naše věda: 1 (1914), 318–319 Bydžovský

[B27] *Konstruktion der ebenen Kurven sechster Ordnung vom Geschlechte 0 bis 3.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 19 (1914), 314–329
[Jde o zkrácený překlad práce [B26].]

[B28] *Řešení zvláštního problému projektivnosti a jeho užití.*
ČPMF 43 (1914), 273–290
J: 45 (1914–1915), 781 Pe
RS: XXV–1, 72 Bydžovský
Naše věda: 2 (1915–1918), 264–265 Vojtěch

[B29] *O zvláštním druhu konstrukcí.*
Věstník, tř. math.–př., 1914, č. 21, 6 stran
J: 45 (1914–1915), 850
RS: XXV–1, 77 Bydžovský
Naše věda: 2 (1915–1918), 256 Vojtěch

[B30] *Příspěvek k theorii elliptické křivky normální.*
Rozpravy, 23 (1914), č. 39, 6 stran
J: 45 (1914–1915), 897 Pe
RS: XXV–1, 76 Bydžovský
Naše věda: 2 (1915–1918), 264 Vojtěch

[B31] *Remarque sur les points d'inflexion d'une cubique á point double.*
L'Enseignement mathématique, Genève, 16 (1914), 366–368
J: 45 (1914–1915), 787–788 Zch
RS: XXIII–1, 39 B. de Greve

[B32] *O vytvoření geodetických křivek na rotačních plochách centrálních druhého stupně.*
ČPMF 44 (1915), 151–193
J: 45 (1914–1915), 897 Pe
RS: XXV–2, 47 Bydžovský
Naše věda: 2 (1915–1918), 261 Vojtěch

[B33] *Reálné body hyperoskulační algebraických křivek rovinných.*
Rozpravy, 25 (1916), č. 50, 9 stran
J: 46 (1916–1918), 971 By
RS: XXVIII–2, 94 Bydžovský
Věstník České Akademie: 25 (1916), 320–321 Sobotka
Naše věda: 2 (1915–1918), 259 Vojtěch

[B34] *Sur un théoréme concernant les courbes elliptiques normales.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 20 (1916), 101–106
[Jde o překlad práce [B30].]

[B35] *Křivky rovinné stupně* $2n$*-ho s třemi body* n*-násobnými.*
ČPMF 46 (1917), 1–16
J: 46 (1916–1918), 970 By
RS: XXVIII–2, 85 Bydžovský
Naše věda: 2 (1915–1918), 258–259 Vojtěch

[B36] *Řešení zvláštního problému projektivnosti pro svazek kubických křivek.*
Rozpravy, 26 (1917), č. 20, 17 stran
J: 46 (1916–1918), 971 By
RS: XXVIII–2, 95 Bydžovský
Věstník České Akademie: 26 (1917), 184 Sobotka
Naše věda: 4 (1921–1922), 55 Petr

[B37] *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií.*
Nákladem JČMF, v Praze 1917, 181 stran
[Jde o třetí, nezměněné vydání učebnice [B15].]

[B38] *Příklad jednodvojznačné příbuznosti dvou rovinných polí.*
ČPMF 47 (1918), 247–262
J: 46 (1916–1918), 913 By
RS: XXVIII–2, 87 Bydžovský
Naše věda: 2 (1915–1918), 266–267 Vojtěch

[B39] *Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane.*

Comptes rendus du Congrés internat. des Math., Strasbourg 1920, 383–387

J: 48 (1921–1922), 705 Mz

[B40] *Kvadratické transformace obecné rovinné křivky bikvadratické rodu 1.*

Rozpravy, 29 (1920), č. 17, 10 stran

J: 47 (1919–1920), 608 By

RS: XXX–1, 85 Bydžovský

Věstník České Akademie: 28–29 (1919–1920), 146 Petr

Naše věda: 4 (1921–1922), 223 Bydžovský

[B41] *Snížení počtu kvadratických transformací rovinné křivky elliptické stupně čtvrtého.*

Rozpravy, 29 (1920), č. 23, 10 stran

J: 47 (1919–1920), 608 By

RS: XXX–1, 86 Bydžovský

Věstník České Akademie: 28–29 (1919–1920), 148 Petr

Naše věda: 4 (1921–1922), 223 Bydžovský

[B42] *Sbírka Úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol.*

Nákladem JČMF, v Praze 1920, 332 stran

[Jedná se o druhé, málo upravené vydání sbírky [B24]. Spoluautor Jan Vojtěch.]

[B43] *Aritmetika pro IV. a V. třídu škol středních.*

Nákladem JČMF, v Praze 1920, 189 stran

[Jde o čtvrté, upravené vydání učebnice [B15].]

[B44] *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl druhý.*

Nákladem JČMF, v Praze 1921, 160 stran

[Jedná se o druhé, upravené vydání učebnice [B19].]

[B45] *Sbierka Úloh z matematiky pro vyššie triedy škôl stredných.*

Nákladem JČMF, v Praze 1921, 336 stran

[Jde o jen málo upravenou sbírku [B24] přeloženou do slovenštiny. Spoluautor Jan Vojtěch.]

[B46] *Užití principu promítání v teorii geometrických příbuzností.*

ČPMF 52 (1923), 11–18

[Práce obsahuje krátký francouzský výtah.]

J: 49 (1923), 432 By

RS: XXXI–2, 167 Bydžovský

[B47] *Úvod do analytické geometrie.*

Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek 8, nákladem JČSMF, v Praze 1923, 408 stran

ČPMF: 55 (1926), 185 Hlavatý

[B48] *Réduction du nombre de transformations quadratiques d'une quartique elliptique plane.*

Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 23 (1923), 68–71

[Jde o zkrácený překlad práce [B41].]

[B49] *Sur les transformations quadratiques d'une qartique plane générale de genre un.*

Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 23 (1923), 72–75

[Jde o zkrácený překlad práce [B40].]

[B50] *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl první.*

Nákladem JČSMF, v Praze 1923, 176 stran

[Jde o páté, upravené vydání učebnice [B15].]

[B51] *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl druhý*

Nákladem JČSMF, v Praze 1924, 144 stran

[Jde o třetí, upravené vydání učebnice [B19].]

[B52] *Sbírka Úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol.*

Nákladem JČSMF, v Praze 1924, 335 stran

[Jde o třetí, málo upravené vydání sbírky [B24].]

[B53] *Poznámka ke studiu speciálních kvartik rovinných.*

ČPMF 53 (1924), 27–31

[Práce obsahuje krátký francouzský výtah.]

J: 50 (1924), 430 By

RS: XXXII–1, 162 Bydžovský

[B54] *Mezinárodní sjezd matematiků r. 1924.*

ČPMF 53 (1924), 340

[B55] *Eliptické kvartiky rovinné, projektivně specialisované.*

Rozpravy, 33 (1924), č. 32, 36 stran

J: 50 (1924), 430 By

RS: XXXIII–2, 212 Bydžovský

Věstník České Akademie: 33 (1924), 48 Bydžovský

[B56] *Contribution á la théorie de la sextique á huit points doubles.*
Proceedings of the international mathematical Congress, Toronto 1924, 729–731
J: 54 (1928), 688 Fgl.

[B57] *Sur des quartiques elliptiques planes, spéciales au point de vue projectif.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 25 (1925), 200–205
[Jde o zkrácený překlad práce [B55].]

[B58] *Odpověď k "Poznámkám"klasických filologů.*
Vydalo Státní nakladatelství, v Praze 1925, 12 stran
[Spoluautor J. Čeněk.]

[B59] *Předmluva.*
Úvod do neeuklidovské geometrie. Napsal Václav Hlavatý. Nákladem JČSMF, v Praze 1926, 5–6

[B60] *Aritmetika pre IV. – VII. triedu stredných škôl, diel prvý.*
Nákladem JČSMF, v Praze 1926, 176 stran
[Jedná se o překlad učebnice [B50] do slovenštiny.]

[B61] *Aritmetika pre IV. – VII. triedu stredných škôl, diel druhý.*
Nákladem JČSMF, v Praze 1927, 144 stran
[Jedná se o překlad učebnice [B51] do slovenštiny.]

[B62] *Příspěvek k teorii Brianchonovy konfigurace.*
Rozpravy, 36 (1927), č. 53, 13 stran
J: 53 (1927), 608 Bydžovský
RS: XXXIV–2, 179 Bydžovský
Věstník České Akademie: 36 (1927), 64–65 Bydžovský

[B63] *Contribution á la théorie de la configuration de Brianchon.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 27 (1927), 51–52
[Jde o zkrácený překlad práce [B62].]

[B64] *Příspěvek k teorii eliptické sextiky.*
ČPMF 57 (1928), 202–207
[Obsahuje krátký francouzský výtah.]
J: 54 (1928), 688 Bydžovský
RS: XXXIV–2, 172 Bydžovský

[B65] *Příspěvek k teorii eliptické sextiky.*
Sborník prací matematických a fysikálních vydaný na počest šedesátého výročí narozenin Dra Karla Petra. Nákladem JČSMF, v Praze 1928, 34–39
[Přetištěna práce [B64].]

[B66] *Remarque sur les groupes finis de transformations de Cremona.*
Atti del Congresso Internazionale dei matematici, Bologna 1928, Tomo IV, 43–44
J: 57 (1931), 1535 Fgl

[B67] *O některých grupách Cremonových transformací v rovině.*
Zprávy sjezdu čsl. přírodozpytců a lékařů, 1928

[B68] *Sur les involutions symétriques du cinquiéme ordre.*
Rozpravy, 38 (1929), č. 2, 17 stran
J: 55 (1929), 356 Bydžovský
RS: XXXVI–1, 125 Bydžovský

[B69] *Sur une espéce particuliére de groupes d'involutions planes de Cremona.*
Věstník, tř. mat.–př., 1929, č. 11, 26 stran
J: 55 (1929), 356 Bydžovský
RS: XXXVI–1, 128 Bydžovský

[B70] *O zvláštním druhu grup Cremonových involucí v rovině.*
Zprávy sjezdu matematiků zemí slovanských, Varšava 1929, 314–317
J: 56 (1930), 543 Bydžovský

[B71] *Základy teorie determinantů a matic a jich užití.*
Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek 14. Nákladem JČSMF, v Praze
1930, 212 stran
ČPMF: 62 (1933), 61–62 Rychlík

[B72] *Jazykové starosti vědeckého pracovníka.*
Sborník přírodovědecký, svazek 7, Nákladem České akademie věd a umění, v Praze
1930, 38–52

[B73] *Kolineace kubických křivek harmonických a ekvianharmonických.*
ČPMF 59 (1930), 168–171
[Práce obsahuje krátký francouzský výtah.]
J: 56 (1930), 556 Bydžovský
RS: XXXVI–1, 124 Bydžovský

[B74] *Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném.*
ČPMF 60 (1931), 214–224
[Práce obsahuje krátký francouzský výtah.]

[B75] *Literatura matematická.*

Československá vlastivěda, díl X., Osvěta, Pod protektorátem Masarykovy akademie práce, Praha 1931, 408–415

[B76] *Jan Sobotka.*

Nákladem České akademie věd a umění, v Praze 1932, 45 stran

[Nekrolog.]

[B77] *Bedřich Procházka.*

Nákladem České akademie věd a umění, v Praze 1934, 18 stran

[Nekrolog.]

[B78] *Sir Thomas Muir.*

ČPMF 63 (1934), 311

[Podepsáno značkou *By*.]

[B79] *Aritmetika pro IV. třídu středních škol.*

Nákladem JČSMF, v Praze 1934, 106 stran

[Jde o šesté vydání učebnice [B16], přepracované podle osnov z r. 1933. Spoluautoři St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

ČPMF: 64 (1934–1935), D58 Bílek

ČPMF: 66 (1936–1937), D150–D152 Cífka

[B80] *Aritmetika pro V. – VII. třídu středních škol.*

Nákladem JČSMF, v Praze 1935, 212 stran

[Jde o šesté vydání učebnice [B19], přepracované podle osnov z r. 1933. Spoluautoři St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

ČPMF: 66 (1936–1937), D 150–D 152, Cífka

[B81] *Sur les involutions quadratiques dans l'espace á n dimensions.*

ČPMF 64 (1934–1935), 188–190

J: 61 (1935), 687–688 Pinl

[B82] *Sur les involutions quadratiques dans l'espace á n dimensions.*

Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských, v Praze 1934.

Nákladem JČSMF, v Praze 1935, 188–190

[Jde o přetisk práce [B81].]

[B83] *Aritmetika pre IV. triedu strednýh škôl.*

Nákladem JČSMF, v Praze 1935, 102 stran

[Jedná se o překlad učebnice [B79] do slovenštiny.]

[B84] *Aritmetika pre V. – VII. triedu stredných škôl.*
Nákladem JČSMF, v Praze 1936, 214 stran
[Jedná se o překlad učebnice [B80] do slovenštiny.]

[B85] *Sur les matrices orthogonales symétriques.*
ČPMF 65 (1935–1936), 189–194
[Obsahuje krátký český výtah.]
J: 62 (1936), 60 Wielandt

[B86] *Cas spécial de la transformation quadratique involutive dans l'espace á n dimensions.*
Věstník, tř. mat.–př., 1936, č. 10, 8 stran
J: 63 (1937), 609 Keller

[B87] *Décomposition d'une transformation quadratique involutive dans l'espace á n dimensions.*
Comptes rendus du Congrés International des mathématiciens, Oslo 1936, Tome II, 146–147
J: 63 (1937), 611

[B88] *Sbírka Úloh z matematiky pro IV. – VIII. třídu středních škol.*
Nákladem JČSMF, v Praze 1936, 274 stran
[Jedná se o čtvrté, úplně přepracované vydání sbírky [B24]. Spoluautoři Jan Vojtěch, St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

[B88a] *Nové osnovy učebné.*
Střední škola 16 (1936), 246–257

[B89] *Naše středoškolská reforma.*
Nákladem Profesorského nakladatelství a knihkupectví, Praha 1937, 331 stran

[B90] *Několik poznámek matematikových k filosofii Vorovkově.*
Vorovkův sborník. Tiskem a nákladem čsl. grafické unie, v Praze 1937, 61–63

[B91] *Sur les points et les coniques sextactiques d'une cubique plane.*
ČPMF 68 (1938–1939), 137–146
[Obsahuje krátký český výtah.]
J: 65 (1939), 683 Weiss

[B92] *Über eine ebene Konfiguration* $(12_4, 16_3)$.
Věstník, tř. mat.–př., 1939, č. 2, 8 stran
J: 65 (1939), 684 Weiss

[B93] *O simultánním invariantu Φ dvou kvadrik.*
Rozpravy, 50 (1940), č. 21, 10 stran
[Spoluautor V. Knichal.]
J: 66 (1940), 1322 Hlavatý
Věstník České Akademie: 49 (1940), 119 Bydžovský, Knichal

[B94] *Sur l'invariant simultanné Φ de deux quadriques.*
Bulletin Int. de l'Acad. des Sci. Prague, 41 (1940), 196–200
[Jde o zkrácený překlad práce [B93]. Spoluautor V. Knichal.]

[B95] *Aritmetika pro IV. třídu středních škol.*
Nákladem JČSMF, Prag – Praha 1940, 106 stran
[Shodná s učebnicí [B79]. Jedná se o sedmé, v podstatě nezměněné vydání. Spoluautoři St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

[B96] *Studium geometrie.*
ČPMF 70 (1940–1941), D 182–D 185

[B97] *Úvod do analytické geometrie.*
Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek 8, nákladem JČSMF, v Praze 1946, 436 stran
[Jde o druhé přepracované vydání díla [B47].]

[B98] *Aritmetika pro IV. třídu středních škol.*
Nákladem JČSMF, Praha 1945, 106 stran
Nákladem JČSMF, Praha 1946, 108 stran
Nákladem JČSMF, Praha 1947, 108 stran
[Téměř shodná s učebnicí [B79]. Jde o dotisky sedmého vydání. Spoluautoři St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

[B99] *Aritmetika pro V. – VII. třídu středních škol.*
Nákladem JČSMF, Praha 1947, 208 stran
[Jde o dotisk šestého vydání, shodný s učebnicí [B80]. Spoluautoři St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

[B100] *Sbírka Úloh z matematiky pro IV. – VIII. třídu středních škol.*
Nákladem JČSMF, v Praze 1946, 276 stran
Nákladem JČSMF, v Praze 1947, 276 stran
Nákladem JČSMF, v Praze 1948, 276 stran
[Jde o dotisky čtvrtého vydání, shodné s učebnicí [B88]. Spoluautoři Jan Vojtěch, St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

[B101] *Pro státní jednotnou školu.*

Komenium, Praha 1947, 16 stran

[Jde o přednášku pronesenou 26. 3. 1947 v Praze na manifestačním projevu v akci „Týden Státní jednotné školy“.]

[B102] *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití.*

Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek 14, nákladem JČSMF, v Praze 1947, 240 stran

[Jde o druhé přepracovné vydání knihy [B71].]

[B103] *Úvod do algebraické geometrie.*

Knihovna spisů matematických a fysikálních, svazek 14, nákladem JČSMF, v Praze 1948, 668 stran

ČPMF: 75 (1950), D440–D443 Hlínka

[B104] *Aritmetika pro IV. třídu středních a měšťanských škol.*

Nákladem JČSMF, Praha 1948, 108 stran

[Jde o dotisk sedmého vydání, jehož platnost byla rozšířena pro měšťanské školy. Shodné s učebnicí [B79]. Spoluautoři Jan Vojtěch, St. Teplý a Fr. Vyčichlo.]

[B105] *Předmluva.*

Černé umění ve službách vědy, napsali Karel Wick a Oldřich Müller, v Praze 1948, 5–6

[B106] *Poznámky k theorii konfigurace* $(12_4, 16_3)$.

ČPMF 74 (1949), 249–251

[Obsahuje krátký francouzský výtah. Uveřejněno v publikaci Zpráva ze společného sjezdu čs. a pol. matematiků.]

[B107] *Sur certains points remarquables d'une cubique rationnelle plane.*

ČPMF 75 (1950), 219–229

[Obsahuje krátký český výtah.]

[B108] *O dvou nových konfiguracích* $(12_4, 16_3)$.

ČPM 79 (1954), 219–228

[Jde o zkrácený překlad práce [B109].]

[B109] *Über zwei neue ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$.

Čechoslovackij matěmatičeskij žurnal – Czechoslovak mathematical Journal 4 (79) (1954), 193–218

[Obsahuje krátký ruský výtah.]

[B110] *Úvod do analytické geometrie.*
Nákladem ČSAV, v Praze 1956, 491 stran
[Jde o třetí přepracované vydání knihy [B47], resp. [B97].]

[B111] *Inflexní body některých rovinných kvartik.*
ČPM 88 (1963), 224–235
[Obsahuje krátký ruský a francouzský výtah.]

9.2 Literatura

[1] Bureš, J., *Algebraické křivky*, Univerzita Karlova, Praha, 1975.

[2] Čech, E., *Základy analytické geometrie*, I. a II. díl, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1951 a 1952.

[3] Godeaux, L., *Poznámka k teorii eliptické sextiky*, ČPMF 58, 1929, str. 300-303,přeložil Bohumil Bydžovský.

[4] Gröbner, W., *Moderne Algebraische geometrie*, Springler-Verlag, Wien, 1949.

[5] Halphen, H.: *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications II.*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1888.

[6] Havlíček, K., *Akademik Bohumil Bydžovský pětasedmdesátníkem*, ČPM 80 (1955), 247–249.

[7] Havlíček, K., : *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956.

[8] Hudson, H. P., *Cremona transformations in plane and space*, Cambridge University Press, 1927.

[9] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J., *Deskriptivní geometrie II.*, ČSAV, Praha, 1954.

[10] Koutský, K., *Sedmdesátiny prof. dr. Bohumila Bydžovského*, ČPMF 75 (1950), D349–D357.

[11] Krys, J., *Konfigurace*, kandidátská disertační práce, Chrudim, 1979.

[12] Lüroth, J., *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen*, Mathematische Annalen, sv. 11, 1877, str. 84–110.)

[13] Machytka, B., *Degenerace Bertiniovy involuce*, ČPMF 58, 1929, str. 219-225.

[14] Metelka, J., *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky MFA 5 (1960), 603–612.

[15] Metelka, J., *O jistých konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *v rovině.*, Věstník královské české společnosti nauk, 1944, článek 21, 8 stran.

[16] Metelka, J., *O rovinných konfiguracích* $(12_4, 16_3)$, ČPM 80, 1955.

[17] Metelka, V., *O jistých rovinných konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *které obsahují alespoň jeden bod typu D*, ČPM 80, 1955.

[18] Metelka, V., *O jistých rovinných konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *obsahujících B, C a E-body a konfiguracích singulárních.*,ČPM 105, 1980.

[19] Metelka, V., *Rovinné konfigurace* $(12_4, 16_3)$*, které obsahují D body*, ČPM 82, 1957, str. 385–438.

[20] Metelka, V., *Zbývající čtyři rovinné konfigurace* $(12_4, 16_3)$*, jejichž body leží na kubice rodu jedna*, b.m.t., 1962.

[21] Nádeník, Z., *Bohumil Bydžovský 1880–1969*, MFF UK Praha 1998.

[22] Němcová, M., *František Josef Studnička 1836–1903*, Prometheus, Praha, 1998.

[23] Nöther, M., *Zur Theorie des eindeutigen entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimension*, Math. Annalen 3, Göttingen Nachrichten, 1870, str. 293–317.

[24] Petr, K., *Počet integrální*, JČMF, Praha, 1915.

[25] Pokorný, M., *Determinanty a vyšší rovnice*, Praha, 1965.

[26] Potůček, J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945 II.díl*, Pedagogická fakulta ZČU v Plzni, 1993.

[27] Privalov, I. I., *Analytické funkce*, ČSAV, Praha, 1955.

[28] Seifert, L., *Imaginární elementy v geometrii*, JČMF, Praha, 1941.

[29] Schwering, K., *Geometrische Darstellung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid*, Zeitschrift für Mathhematik und Physik, 1879, str. 405–407.

[30] Skřivan, G., *Úvod do analytické geometrie v rovině*, Praha , 1864.

[30] Studnička, F. J., *O determinantech*, Praha, 1870.

[31] Studnička, F. J., *Úvod do analytické geometrie v rovině*, Praha 1902.

[32] Studnička, F. J., *Úvod do nauky o determinantech*, 1899.

[33] Šindelář, K., *In memory of Academician Bohumil Bydžovský*, Czechoslovak Mathematical Journal 20 (95) (1970), 169–178.

[34] Šindelář, K., *Památce akademika Bohumila Bydžovského*, ČPM 95 (1970), 100–113.

[35] Šindelář, K.: *Vzpomínka na akademika Bohumila Bydžovského*, ČPM 105 (1980), 325–328.

[36] Švec, A., *Příklady z algebraické geometrie*, SPN, Praha, 1970.

[37] Vojtěch, J., *Geometrie Projektivní*, Sborník JČMF XIX, 1932.

[38] Walker, R.J., *Algebraic curves*, Princeton University Press, Princeton, 1950.

[39] Weyr, E., *Projektivná geometrie základných útvarů prvého řádu*, 1898.

[40] Weyr, E., *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*, Leipzig, 1869.

[41] Zahradník, K., *Analytická geometrie*, Brno, 1907.

[42] Zahradník, K., *Analytická geometrie v rovině*, Praha, 1884.

[43] Zahradník, K., *Prvé počátky nauky o determinantech*, Praha, 1879.

[44] Zahradník, K., *O determinantech*, Brno, 1905.