

Posudek na disertační práci Mgr. Pavla Pražáka: „Diferenciální rovnice a jejich použití v ekonomii“

Poprvé se setkávám s pokusem zpracovat v disertační práci poměrně široké téma aplikace obyčejných diferenciálních rovnic. Autor se mohl opřít o poměrně bohatou časopiseckou a knižní literaturu z této oblasti. Řada prací pochází z pera významných nositelů Nobelových cen za ekonomii. Předložená práce je prací spíše přehledovou zabývající se širším okruhem otázek spojitého a deterministického popisu ekonomických systémů. Autorovi se podařilo dané téma zpracovat vcelku úspěšně, nevyhnul se však a ani se vyhnout nemohl určitým problematickým a diskutabilním místům, což podrobněji rozvádím v dalších částech svého posudku.

Kapitola první je kapitolou úvodní. Obsahuje přehled základních aplikací diferenciálních rovnic v ekonomii. Zařazení takové kapitoly pokládám za nezbytné, ovšem autor zvolil až příliš široké spektrum ilustrací. Subkapitola „Malé modely“ je poněkud nestejnorodá, protože jednak jsou zde zavedeny veličiny jako okamžitá inflace, spojité úročení, ale zároveň model učení a zapomínání, který bychom do aplikací v ekonomii řadit neměli. Právě tak mám pochybnosti o Vidale-Wolfově modelu. To jsou spíše marketingové aplikace. Ekonomické aplikace jsou v subkapitola 1.2, kde se autor zabývá aplikací logistické diferenciální rovnice. Na druhé straně chybí širší pojednání o zásobách a tocích ve spojitém ekonomickém systému. Více sofistikovaný je text o modelech růstu. Autorovi se podařilo zařadit tři modely, které jsou dobrými reprezentanty dosavadního vývoje ekonomické dynamiky a které jsou považovány za základ. Je to model Domarův, Solowův a Phillipsův. V této kapitole mám určité námitky mám proti větě na str. 27 : „Oba paradoxní výsledky ukazují nedostatky Domarova růstového modelu, které odstraňuje Sollowův model růstu...“ To je námět k diskuzi. Rovnice

$$Y(t) = \frac{1}{s} I_0 e^{\gamma t}$$

na str. 27 popisuje jaká je dynamika rovnovážné produkce pokud investice rostou tempem $\gamma > I$. Tyto investice vytvářejí kapitál ve výši

$$K(t) = K_0 + \frac{I_0}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1),$$

který vytváří produkci, která je menší než „požadavek“ na rovnovážnou produkci. Skutečnost, že nabídka zaostává za poptávkou vyvolává požadavky na další růst investic a tak se skutečné tempo růstu dále zvyšuje. Tuto problematiku řeší nepříliš exaktně Harrodova teorie, která takto vytváří poměrně originální teorii podnikatelského cyklu. Je to určitý pohled na ekonomickou realitu, který nijak neodporuje empirickým zjištěním.

Phillipsův model nelze v ekonomických aplikacích diferenciálních rovnic opomenout. Autor se zhostil výkladu velmi dobře. Vadou na kráse je, že v této kapitole opět zavádí na str. 33 nahoře veličinu s tentokrát jako mezní sklon k úsporám, i když ji už zavedl na str. 25, tentokrát jako podíl úspor. Věcná chyba v tom ale není.

Kapitola druhá je přehledným zpracováním vybraných problémů z obyčejných diferenciálních rovnic. Výběr problémů je samozřejmě orientován na další aplikace. V tomto smyslu je kapitola dobře zpracována. Kapitola třetí je věnována spojitým modelům v ekonomii. Nejdříve je prezentována teorie celkové rovnováhy, která vychází z děl Leona Walrase. Při důkazu existence walrasovské rovnováhy, autor volí tradiční postup. Transformuje rovnice

modelu a používá Brouwerovy věty o pevném bodě. Podmínky, že všechna zboží jsou silnými substituty používá pro jednoznačnost. Asymptotická stabilita plyne ze splnění slabého axiomu zjevné preference.

Další aplikace uvedené v kapitole dvě souvisí z ekonomickými teoriemi endogenního cyklu. Velice často vykládaný je Kaldorův model nelineárního cyklu. Zde se autor disertační práce dostává do menších problémů při výkladu ekonomických souvislostí. Na str. 78 je v pasáži Základní ekonomická představa uveden z ekonomického hlediska poněkud komplikovaný text. Přijatelný výklad by měl být takový: „Jestliže $S > I$, potom je část produkce nerealizována, tedy vzrostou zásoby, což vede k tomu, že firmy sníží produkci...“ a dál už je to správně, ovšem až do okamžiku, kdy se dostáváme k nerovnosti $S < I$. V tomto případě správný výklad by měl mít následující formu: „Tato nerovnost znamená převahu poptávky nad nabídkou a následně přispůsobení nabídky.“

Další problém ve výkladu Kaldorova modelu vidím u důkazu věty 3.2.1 na str.85, zejména v té části, týká pozitivní invariantnosti množiny N . Důkaz je veden intuitivně. Čtenář na základě nákresu na Obr. 3.1. má uvěřit, že množina N je invariantní. Je to přehledné, názorné a dobře pochopitelné, ale grafické ilustrace by neměly být nástrojem důkazu. Na druhé straně je fázový portrét velmi cenným nástrojem popisu, zejména při ekonomických aplikacích. Škoda, že autor zcela tohoto nástroje nevyužil. Domnívám se, že je zcela přípustné pokusit se o vhodné numerické naplnění modelu, řešit ho a tak získat jednu nebo několik trajektorií systému a ilustrovat její nebo jejich přibližování k limitnímu cyklu.

V předposlední kapitole se autor věnuje přehlednému úvodu do teorie optimálního řízení. Autor při důkazech modifikací úloh optimálního řízení shrnuje postupy obvyklé v publikacích zabývajících se optimálním řízením ekonomických procesů. V souladu s těmito přístupy se především orientuje na úlohy s pevným časem a volným koncem. Až potom přechází k Pontrjaginovu principu, který je formulován pro obecnější úlohy. Ten uvádí už bez důkazu. Použití Pontrjaginova principu je ilustrováno dvěma úlohami bez hlubšího ekonomického významu. V závěru této kapitoly se autor věnuje úlohám s nekonečným časovým horizontem. Tento problém je naznačen už v Pontrjaginově knize (61). Hlubší rozpracování je zrealizováno v některých typech ekonomických problémů. Pozitivní je, že autor registruje nejen Halkinův příklad, ale i zná hlubší rozpracování problémů s nekonečným časovým horizontem v knize [13]. Tato skutečnost je o to cennější, protože mám dojem, že řada ekonomů, kteří se zabývají aplikacemi optimálního řízení, tento problém bohužel nezaregistrovala a je stále ovlivněna poněkud zbrklým výkladem v knize [29]. Připomínku mám k větě (4.6.2) uvedené na str. 135 z hlediska jejího významu pro ekonomické aplikace. Tato věta předpokládá omezenost funkce f_0 . V ekonomii však tyto funkce omezeny nebývají. Funkce užitková ani produkční nebývají omezeny shora a funkce zisková není omezena zdola.

Kapitola pátá podává výklad tradičních modelů. Je to jednak růstový model Solowův-Swanův a model celkové dynamické rovnováhy. Solowův model představuje tradiční základ neoklasických růstových modelů. Stěžejní část kapitoly je však model Ramseyův-Cassův-Koopmansův. Výklad je tohoto modelu je veden vcelku tradičním způsobem včetně ilustrace modelu pomocí fázového portréту. Rovnovážným bodem tohoto modelu je sedlo, což přináší řadu problémů pro trajektorie systému. Pokud trajektorie začíná na stabilní varietě, interpretace ekonomického vývoje je jasná, dochází k ustalování v rovnovážném stavu. Pokud ovšem nikoli, stav systému se může nejdříve přibližovat k rovnováze, ale po určité době se neomezeně vzdaluje. Ekonomicky interpretovatelný je pohyb po stabilní varietě. Aby byl výklad konzistentní, měl by být uveden mechanismus, zajišťující, aby stav systému se

(okamžitě) dostal na stabilní varietu. To je v ekonomické teorii ne dost dobře řešený problém. Neřeší (z ekonomického hlediska) ho ani poznámky na str. 170 dole. Fázový portrét na str. 168 je znám z ekonomické literatury. K lepšímu pochopení by prospělo umístění nestabilní variety. Ještě jedna malá poznámka k integrálu (5.4.2) na str. 162. Jestliže $u(c(t)) = \sqrt{c(t)}$ a $c(t) = e^{2(\rho-n)t}$ je integrand roven jedné a integrál (5.4.2) diverguje.

Závěr:

Význam tématu práce je podtržen skutečností, po určité době intenzivního rozvoje dynamických modelů v ekonomii, dochází k neméně intenzivnímu využití těchto modelů při empirickém výzkumu a dokonce v oblasti rozhodování, jak v oblasti monetární, tak i v oblasti fiskální politiky. Při tak intenzivních aplikacích vznikají zpětně požadavky na další teoretický výzkum. Z tohoto hlediska je předložená práce vysoce aktuální. Práce je logicky uspořádaná, výrazná je snaha o zachování matematické přesnosti, výklad sám však vyžaduje použití názorných prostředků jako například konstrukci fázových portrétů, které jsou často výlučným prostředkem analýzy nelineárních spojitých ekonomických systémů. Záběr práce je příliš široký, dal bych přednost užšímu výběru ekonomických problémů, které vyžadují aplikaci diferenciálních rovnic. Kládl bych větší důraz na souvislosti jednotlivých modelů ze základními vývojovými proudy ekonomické teorie.

Autor explicitně neuvádí ve své práci svůj přínos. Osobně vidím přínos práce v tom, že autor shrnul a efektivním způsobem vyložil ty části teorie diferenciálních rovnic a optimálního řízení nezbytné pro aplikace, kterými se ve své práci zabývá. Dále srozumitelným způsobem podal výklad důležitých dynamických modelů v ekonomii. K formální stránce zpracování nemám podstatnější námitky.

Z hlediska rozvoje moderní ekonomické dynamiky je stěžejní poslední kapitola práce zejména Ramseyův-Cassův-Koopmansův model, který tvoří základ pro modely výpočetní celkové dynamické rovnováhy, které jak již bylo zdůrazněno jsou používány jako jeden z nástrojů rozhodování centrálních bank a vlády.

Domnívám se, že sepsáním této disertační práce autor prokázal, že je schopen samostatné tvůrčí práce. Samotná disertační práce splňuje předpoklady kladené na vědeckou práci a proto ji doporučuji k obhajobě.



Prof. RNDr. Ing. Jan Kodera, CSc.
Katedra měnové teorie a politiky,
Fakulta financí a účetnictví,
Vysoká škola ekonomická v Praze