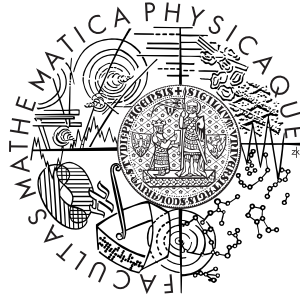


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Lucia Fuchsová

### **Velké odchylky a jejich aplikace v pojistné matematice**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: matematika

Studijní obor: finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Rada by som sa poďakovala môjmu vedúcemu pánovi RNDr. Zbyňkovi Pawlasovi, Ph.D. za jeho pomoc, vedenie, ochotu, trpezlivosť a za všetky užitočné rady. Chcela by som sa poďakovať svojim rodičom a bratovi Lukášovi za podporu pri štúdiu a písaní mojej práce.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 28. marca 2011

Lucia Fuchsová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
1.1	Základné značenie . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Rozdelenia s ťažkými chvostami</b>	<b>7</b>
2.1	Definícia a delenie rozdelení s ťažkými chvostami . . . . .	7
2.2	Subexponenciálne rozdelenia . . . . .	10
2.3	Funkcia strednej hodnoty prekročenia . . . . .	11
2.4	Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Veľké odchýlky</b>	<b>18</b>
3.1	Základy teórie veľkých odchýliek . . . . .	18
3.2	Veľké odchýlky pre rozdelenia s ťažkými chvostami . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Použitie v poisťovníctve</b>	<b>22</b>
4.1	Voľba bezpečnostnej prirážky . . . . .	22
4.2	Zaistenie . . . . .	24
4.3	Teória ruinovania . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Simulovanie pravdepodobnosti ruinovania</b>	<b>30</b>
5.1	Paretovo rozdelenie výšky škody . . . . .	30
5.2	Ďalšie rozdelenia . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Modelovanie vysokých škôd</b>	<b>42</b>
<b>7</b>	<b>Záver</b>	<b>52</b>
	<b>Literatura</b>	<b>53</b>

Název práce: Velké odchylky a jejich aplikace v pojistné matematice  
Autor: Lucia Fuchsová  
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky  
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.  
e-mail vedoucího: Zbynek.Pawlas@mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme teóriu veľkých odchýlok. Zaoberáme sa rozdeleniami s ťažkými chvostami, ktoré v poisťnej matematike popisujú pravdepodobnosť vzniku vysokej škody. Venujeme sa použitiu teórie veľkých odchýlok v poisťovníctve. Simulujeme výšky a časy vzniku škôd pre Cramérov-Lundbergov model a skúmame pravdepodobnosť, že dôjde k ruinovaniu v závislosti na parametroch nášho modelu najprv pre Paretovo rozdelenie výšky škody. Potom porovnávame pravdepodobnosť ruinovania pre rôzne rozdelenia výšky škody. Pre reálne dáta modelujeme pravdepodobnosť vzniku vysokej škody pomocou zovšeobecneného Paretovej rozdelenia.

Klíčová slova: veľké odchýlky, rozdelenie s ťažkým chvostom, vysoká škoda, pravdepodobnosť ruinovania, zovšeobecnené Paretovo rozdelenie

Title: Large deviations and their applications in insurance mathematics  
Author: Lucia Fuchsová  
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics  
Supervisor: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: Zbynek.Pawlas@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study large deviations theory. We discuss heavy-tailed distributions, which describe the probability of large claim occurrence. We are interested in the use of large deviations theory in insurance. We simulate claim sizes and their arrival times for Cramér-Lundberg model and first we analyze the probability that ruin happens in dependence on the parameters of our model for Pareto distributed claim size, next we compare ruin probability for other claim size distributions. For real life data we model the probability of large claim size occurrence by generalized Pareto distribution.

Keywords: large deviations, heavy-tailed distribution, large claim, ruin probability, generalized Pareto distribution

# Kapitola 1

## Úvod

V teórii pravdepodobnosti sa teória veľkých odchýlok zaoberá pravdepodobnosťou, že súčet náhodných veličín prekročí určitú vysokú hranicu a bude sa významne líšiť od svojej strednej hodnoty. Použitie nachádza v mnohých odboroch aj v poisťovníctve napríklad v teórii ruinovania.

V mnohých druhoch poistenia, napríklad poistenie proti prírodným katastrofám (víchrice, záplavy, atď.), pravdepodobnosť vzniku škody veľkého rozsahu nie je zanedbateľná. Vzniká potreba modelovať vysoké škody, nato sa využívajú rozdelenia s ťažkými chvostami. Im bude venovaná druhá kapitola.

V tretej kapitole sa zaoberáme teóriou veľkých odchýlok. Uvádžeme základné poznatky a medze pre pravdepodobnosť veľkých odchýlok.

Aplikáciám teórie veľkých odchýlok v oblasti neživotného poistenia je venovaná štvrtá kapitola. Uvažujeme, ako súvisí voľba bezpečnostnej prirážky alebo plnenie zaistiteľa s pravdepodobnosťou veľkých odchýlok. Zaoberáme sa teóriou ruinovania pre rozdelenia výšky škody s ťažkým chvostom.

Závislosťou pravdepodobnosti ruinovania na počiatočnom kapitále poisťovne sa zaoberáme v piatej kapitole. Predpokladáme Cramérov-Lundbergov model a simulujeme výšky a časy vzniku škôd. Skúmame závislosť pravdepodobnosti ruinovania na parametroch modelu, ak má výška škody Paretovo rozdelenie. Ďalej skúmame vplyv zmeny rozdelenia výšky škody na pravdepodobnosť ruinovania.

V šiestej kapitole sa na reálnych dátach snažíme ukázať, ako možno pomocou zovšeobecneného Paretovho rozdelenia modelovať chvost rozdelenia náhodnej veličiny, o ktorej usudzujeme, že má ťažký chvost. Využijeme prístup, kedy sa pozeráme na veľkosť prekročenia vysokej hranice, ak k ne-

mu došlo. Naše výpočty sú na priloženom CD v súboroch v programe Mathematica.

## 1.1 Základné značenie

Nech  $X$  označuje reálnu náhodnú veličinu a  $F$  jej distribučnú funkciu. Funkciu  $\overline{F} = 1 - F$  nazveme chvost distribučnej funkcie  $F$ . Strednú hodnotu náhodnej veličiny  $X$  označíme  $\mu = EX$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , rozptyl  $\sigma^2 = \text{var } X$ ,  $\sigma^2 \in [0, \infty)$ .

Nech  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, potom  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  označuje čiastočný súčet a  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  postupnosť čiastočných súčtov. Maximum konečnej postupnosti  $(X_i)_{i=1}^n$  zapíšeme symbolom  $M_n$ .

Symbol  $\sim$ ,  $a(x) \sim b(x)$  pre  $x \rightarrow x_0$  znamená, že funkcie  $a(x)$  a  $b(x)$  sú rovnakého rádu čiže  $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x)/b(x) = 1$ . Označenie  $o$ ,  $a(x) = o(b(x))$  pre  $x \rightarrow x_0$  znamená, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x)/b(x) = 0$ . Označenie  $O$ ,  $a(x) = O(b(x))$  pre  $x \rightarrow x_0$  vyjadruje  $\limsup_{x \rightarrow x_0} |a(x)/b(x)| < \infty$ .

Nech  $\Phi$  značí distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia. Ak  $X$  je náhodná veličina s charakteristickou funkciou  $f(t) = E(e^{itX})$ , potom kumulant rádu  $k$  náhodnej veličiny  $X$  je definovaný takto

$$\gamma_k = \frac{1}{i^k} \left[ \frac{d^k}{dt^k} \log f(t) \right]_{t=0}.$$

# Kapitola 2

## Rozdelenia s ťažkými chvostami

### 2.1 Definícia a delenie rozdelení s ťažkými chvostami

V poisťovníctve sú pri modelovaní vysokých poistných škôd používané rozdelenia s ťažkými chvostami. Potrebujeme, aby pravdepodobnosť, že škoda prekročí hranicu  $x$ , šla k nule dostatočne pomaly pri  $x$  idúcom k nekonečnu, aby konvergencia bola pomalšia ako u exponenciálneho rozdelenia.

**Definícia 2.1.1.** Povieme, že rozdelenie s distribučnou funkciou  $F$  má ťažký chvost, ak pre všetky  $\lambda > 0$  je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) = \infty.$$

**Definícia 2.1.2.** Rozdelenie s distribučnou funkciou ma ľahký chvost, ak existuje  $\lambda > 0$  tak, že platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) < \infty.$$

Nás zaujímajú kladné náhodné veličiny, a tak budeme pod pojmom rozdelenie s ťažkým chvostom rozumieť rozdelenie s ťažkým pravým chvostom. Samozrejme všeobecne rozdelenie môže mať ťažký aj ľavý chvost alebo oba chvosty.

Medzi rozdelenia s ťažkými chvostami patria napríklad lognormálne, loggama, Paretovo, Cauchyho, Fréchetovo, Weibullovo (len s hodnotami

parametra  $\tau$  v intervale  $(0, 1)$ ), Burrovo alebo Benktanderovo rozdelenie I. a II. typu. Pre niektoré menej známe rozdelenia uvedieme distribučnú funkciu. Fréchetovo rozdelenie má distribučnú funkciu (parameter  $\alpha > 0$ )

$$F(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0,$$

Weibullovo rozdelenie (parametre  $c > 0$ ,  $0 < \tau < 1$ )

$$F(x) = 1 - \exp\{-cx^\tau\}, \quad x > 0,$$

Burrovo rozdelenie (parametre  $\alpha, \kappa, \tau > 0$ )

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa + x^\tau}\right)^\alpha, \quad x > 0,$$

Benktanderovo rozdelenie I. typu (parametre  $\alpha, \beta > 0$ )

$$F(x) = 1 - \left(1 + 2\frac{\beta}{\alpha} \log x\right) \exp\{-\beta(\log x)^2 - (\alpha + 1) \log x\}, \quad x > 1,$$

Benktanderovo rozdelenie II. typu (parametre  $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta < 1$ )

$$F(x) = 1 - \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\} x^{-(1-\beta)} \exp\left\{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, \quad x > 1.$$

Ďalej uvedieme definíciu pojmu pomaly sa meniacia funkcia a tvrdenie platiace pre pomaly sa meniace funkcie, ktoré budeme potrebovať.

**Definícia 2.1.3.** Kladná lebesgueovsky merateľná funkcia  $L$  na intervale  $(0, \infty)$  je pomaly sa meniacia (slowly varying) v nekonečne, ak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad \text{pre každé } t > 0.$$

Príkladom pomaly sa meniacej funkcie je kladná konštanta, logaritmus, mocnina logaritmu alebo iterovaný logaritmus.

**Tvrdenie 2.1.4.** (*Karamatovo tvrdenie*) Nech  $L$  je pomaly sa meniacia funkcia v nekonečne a nech je lokálne ohraničená na  $[x_0, \infty)$  pre nejaké  $x_0 \geq 0$ , potom platí

i) pre  $\alpha > -1$

$$\int_{x_0}^x t^\alpha L(t) dt \sim (\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$



ii) pre  $\alpha < -1$

$$\int_x^\infty t^\alpha L(t) dt \sim -(\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

**Dôkaz:** Možeme nájsť v [2], veta VIII.9.1. Znenie Karamatovho tvrdenia je prevzaté z [4], veta A3.6.

Medzi najdôležitejšie rozdelenia s ťažkými chvostami patria nasledujúce tri kategórie:

- **RV( $\alpha$ ) – pravidelne sa meniace (regularly varying)**  
Rozdelenie s chvostom tvaru

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0,$$

kde  $\alpha > 0$  a  $L$  je pomaly sa meniaci funkcia, nazývame pravidelne sa meniace. Cauchyho rozdelenie je typu RV(1). Ďalšie príklady sú Fréchetovo, Paretovo, Burrovo alebo loggama rozdelenie.

- **LN( $\gamma$ ) – lognormálny typ (lognormal-type)**  
Rozdelenie s chvostom tvaru

$$\bar{F}(x) \sim cx^\beta e^{-\lambda \log^\gamma x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

kde  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 1$ ,  $\lambda > 0$  a príslušné  $c = c(\beta, \gamma)$ , nazývame rozdelenie lognormálneho typu. Pri značení LN( $\gamma$ ) potláčame závislosť na parametroch  $\beta$  a  $\lambda$ . Do tejto kategórie patrí lognormálne rozdelenie, je typu LN(2).

- **WE( $\alpha$ ) – Weibullov typ (Weibull-like)**  
Ak má chvost rozdelenia tvar

$$\bar{F}(x) \sim cx^\beta e^{-\lambda x^\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

kde  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\lambda > 0$  a príslušné  $c = c(\beta, \alpha)$ , potom toto rozdelenie nazveme rozdelenie Weibullovoho typu. Opäť v značení WE( $\alpha$ ) potláčame závislosť na  $\beta$  a  $\lambda$ . Príkladom je Weibullovo rozdelenie a Benktanderovo rozdelenie II. typu.

Delenie na tieto kategórie sme prebrali z práce [10].

## 2.2 Subexponenciálne rozdelenia

Subexponenciálne rozdelenia sú širokou triedou rozdelení s ťažkými chvostami. Označenie subexponenciálne pochádza z ich vlastnosti (2.2), ich chvost klesá pomalšie ako chvost každého exponenciálneho rozdelenia. Subexponenciálne rozdelenie nemá konečnú momentovú vytvárajúcu funkciu na žiadnom okolí počiatku. Poznatky o subexponenciálnych rozdeleniach sme čerпали z [4] a [9].

**Definícia 2.2.1.** Rozdelenie nezápornej náhodnej veličiny s distribučnou funkciou  $F$  je subexponenciálne, ak platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \quad \text{pre každé } n = 2, 3, 4, \dots,$$

kde  $F^{n*}$  značí  $n$ -násobnú konvolúciu  $F$  a  $\overline{F^{n*}}$  je jej chvost

$$\overline{F^{n*}}(x) = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x),$$

kde  $X_1, \dots, X_n$  sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s distribučnou funkciou  $F$ .

Triedu subexponenciálnych rozdelení označíme  $\mathcal{S}$ . Postačujúca podmienka k tomu, aby rozdelenie  $F$  bolo subexponenciálne, je uvedená v nasledujúcej vete.

**Veta 2.2.2.** *Ak*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2,$$

*potom rozdelenie s distribučnou funkciou  $F$  je subexponenciálne.*

**Dôkaz:** [4], lemma 1.3.4.

Uvedieme niekoľko vlastností subexponenciálnych rozdelení. Ak  $F \in \mathcal{S}$ , potom pre každé  $y$  z  $(0, \infty)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} = 1. \quad (2.1)$$

Ak platí (2.1), potom pre všetky  $\lambda > 0$

$$e^{\lambda x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Ak  $F \in \mathcal{S}$ , potom pre dané  $\varepsilon > 0$  existuje konštanta  $K < \infty$  tak, že pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n, \quad x \geq 0. \quad (2.3)$$

Vieme, že pre postupnosť  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín s distribučnou funkciou  $F$  je pravdepodobnosť, že čiastočný súčet  $S_n$  prekročí hodnotu  $x$ , chvostom  $n$ -násobnej konvolúcie distribučnej funkcie:

$$P(S_n > x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x) = 1 - F^{n*}(x) = \overline{F^{n*}}(x).$$

Pre maximum  $M_n$  z náhodných veličín  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , ak  $x$  sa blíži k nekonečnu, platí

$$P(M_n > x) = 1 - F^n(x) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim n\overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nech rozdelenie náhodnej veličiny  $X$  je subexponenciálne, potom z definície subexponenciálneho rozdelenia vidíme

$$\frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F^n}(x)} \sim \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{n\overline{F}(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Pri modelovaní poistných škôd náhodnými veličinami  $X_1, X_2, \dots, X_n$  to znamená, že pravdepodobnosť, že úhrn škôd  $S_n$  prekročí vysokú hranicu  $x$ , je približne rovná pravdepodobnosti, že aspoň jedna škoda je väčšia ako  $x$ . Vysoké straty sú spôsobené jednou vysokou škodou.

Subexponenciálne rozdelenia tvoria prirodzenú triedu rozdelení s ťažkými chvostami, niekedy sa pomocou nich vysvetľuje pojem ťažkého chvosta. Subexponenciálne rozdelenia obsahujú rozdelenia s veľmi ťažkými chvostami ako je celá kategória pravidelne sa meniacich rozdelení ale aj rozdelenia s menej ťažkými chvostami ako je napríklad lognormálne a Weibullovo ( $\tau < 1$ ) rozdelenie, ktoré majú konečné momenty do určitého rádu. Subexponenciálnym rozdeleniam sa budeme opäť venovať v podkapitole o teórií ruinovania.

## 2.3 Funkcia strednej hodnoty prekročenia

Vhodným nástrojom na porovnanie sily chvostov rozdelení je funkcia strednej hodnoty prekročenia (mean excess function). V tejto podkapitole vychádzame z [9].

**Definícia 2.3.1.** Nech  $Y$  je nezáporná náhodná veličina s distribučnou funkciou  $F$  a konečnou strednou hodnotou. Označme  $x_l = \inf\{x : F(x) > 0\}$  a  $x_r = \sup\{x : F(x) < 1\}$ . Potom jej funkcia strednej hodnoty prekročenia je daná ako

$$e_F(u) = E(Y - u | Y > u), \quad u \in [x_l, x_r).$$

Hodnota  $e_F(u)$  je vlastne stredná hodnota veľkosti prekročenia hranice  $u$ . V poisťovníctve považujeme hodnotu  $e_F(u)$  za očakávanú výšku škody nad prioritou  $u$ , pričom výška škody nie je ohraničená. Funkciu  $e_F(u)$  nazývame v poisťovníctve mean excess loss function, čo by sme mohli preložiť ako stredná hodnota straty nad danou hranicou.

Funkciu strednej hodnoty prekročenia pre distribučnú funkciu  $F$  môžeme zapísať aj v inom tvare

$$\begin{aligned} e_F(u) &= E(Y - u | Y > u) \\ &= \int_0^\infty \frac{P(Y - u > y)}{P(Y > u)} dy \\ &= \frac{1}{P(Y > u)} \int_0^\infty P(Y > y + u) dy \\ &= \frac{1}{P(Y > u)} \int_u^\infty P(Y > y) dy \\ &= \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tvar (2.5) je vhodnejší pre výpočty a odvodenie vlastností funkcie  $e_F(u)$ .

**Veta 2.3.2.** Nech  $Y$  je kladná náhodná veličina so spojitou distribučnou funkciou  $F$  a s funkciou strednej hodnoty prekročenia  $e_F$ , potom platí

$$\bar{F}(x) = \frac{e_F(x_l)}{e_F(x)} \exp \left\{ - \int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(y)} dy \right\}, \quad x > x_l.$$

**Dôkaz:** Zo spojitosti  $F$  plynie, že  $\bar{F}(x_l) = 1$ . Ďalej môžeme písať

$$\begin{aligned}
\left[ \log \int_u^\infty \bar{F}(y) dy \right]' &= \frac{-\bar{F}(u)}{\int_u^\infty \bar{F}(y) dy} = -\frac{1}{e_F(u)} \\
\log \int_x^\infty \bar{F}(y) dy - \log \int_{x_l}^\infty \bar{F}(y) dy &= -\int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(u)} du \\
\log[e_F(x)\bar{F}(x)] - \log[e_F(x_l)\bar{F}(x_l)] &= -\int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(u)} du \\
\log[e_F(x)\bar{F}(x)] - \log[e_F(x_l)] &= -\int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(u)} du \\
\log \left[ \frac{e_F(x)\bar{F}(x)}{e_F(x_l)} \right] &= -\int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(u)} du \\
\frac{e_F(x)\bar{F}(x)}{e_F(x_l)} &= \exp \left\{ -\int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(u)} du \right\} \\
\bar{F}(x) &= \frac{e_F(x_l)}{e_F(x)} \exp \left\{ -\int_{x_l}^x \frac{1}{e_F(u)} du \right\}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Za platnosti doplnujúceho predpokladu o spojitosti distribučnej funkcie  $F$  je vzťah medzi distribučnou funkciou  $F$  nezápornej náhodnej veličiny a jej príslúchajúcou funkciou strednej hodnoty prekročenia  $e_F$  jednoznačný.

Tvar funkcie strednej hodnoty prekročenia odvodíme pomocou vzorca (2.5) napríklad pre exponenciálne rozdelenie, ktoré má ľahký chvost, a pre Paretovo a Benktanderovo rozdelenie II. typu, čo sú rozdelenia s ťažkými chvostami:

- Exponenciálne rozdelenie

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \\
e_F(u) &= \frac{1}{e^{-\lambda u}} \int_u^\infty e^{-\lambda y} dy \\
&= \frac{1}{e^{-\lambda u}} \left[ \frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda} \right]_u^\infty \\
&= \frac{1}{e^{-\lambda u}} \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} \\
&= \lambda^{-1}, \quad u \geq 0.
\end{aligned}$$

- Paretovo rozdelenie

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq a, \quad a, \alpha > 0, \\
e_F(u) &= \left(\frac{u}{a}\right)^\alpha \int_u^\infty \left(\frac{a}{y}\right)^\alpha dy \\
&= \left(\frac{u}{a}\right)^\alpha \left[ a^\alpha \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_u^\infty \\
&= \left(\frac{u}{a}\right)^\alpha \frac{a^\alpha u^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \\
&= \frac{u}{\alpha-1}, \quad u \geq a, \quad \alpha > 1.
\end{aligned}$$

- Benktanderovo rozdelenie II. typu

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\} x^{-(1-\beta)} \exp\left\{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0, 0 < \beta < 1, \\
e_F(u) &= \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{\beta}} u^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha}{\beta} u^\beta}} \int_u^\infty e^{\frac{\alpha}{\beta}} y^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha}{\beta} y^\beta} dy \\
&= \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{\beta}} u^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha}{\beta} u^\beta}} \left[ e^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{\beta} y^\beta} \right]_u^\infty \\
&= \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{\beta}} u^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha}{\beta} u^\beta}} \left( e^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\beta} u^\beta} \right) \\
&= \frac{u^{1-\beta}}{\alpha}, \quad u \geq 1.
\end{aligned}$$

Ak  $e_F(u)$  konverguje k nekonečnu pre  $u$  blížiac sa k nekonečnu, môžeme o distribučnej funkcii  $F$  povedať, že má ťažký koniec. Naopak ak  $e_F(u)$  konverguje k nejakej konečnej konštante pre  $u$  blížiac sa k nekonečnu, hovoríme, že  $F$  má ľahký koniec. Pre poisťovníctvo z toho vyplýva, že neohraničený rast funkcie  $e_F(u)$  s rastúcim  $u$  vyjadruje nebezpečenstvo, že príslušná distribučná funkcia má ťažký koniec a ak nastane škoda prekračujúca vysokú hranicu  $u$ , je pravdepodobné, že v budúcnosti nastanú ešte vyššie škody.

Ak máme k dispozícii pozorovania  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , potom empirický odhad funkcie strednej hodnoty prekročenia v bode  $u$  je (viď [1])

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i I[x_i > u]}{\#\{x_i : x_i > u\}} - u = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - u) I[x_i > u]}{\#\{x_i : x_i > u\}},$$

kde  $I[A]$  je indikátor javu  $A$ , čiže  $I[A] = 1$ , ak jav  $A$  nastal,  $I[A] = 0$  inak a  $\#B$  značí počet prvkov množiny  $B$ . Vidíme, že funkciu strednej hodnoty prekročenia v bode  $u$  odhadujeme ako súčet veľkostí prekročení hranice  $u$  deleno počet prekročení hranice  $u$  v danej náhodnej vzorke. Zvyčajne sa odhad funkcie strednej hodnoty prekročenia vyčísluje v napozorovaných hodnotách. Vzostupne zoradenené pozorovania označme  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , potom pre odhad funkcie strednej hodnoty prekročenia máme vzorec

$$\hat{e}_n(x_{(k)}) = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} (x_{(k+j)} - x_{(k)}). \quad (2.6)$$

## 2.4 Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie

**Definícia 2.4.1.** Definujme distribučnú funkciu  $G_\xi$  takto

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & \text{pre } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{pre } \xi = 0, \end{cases}$$

kde  $x \geq 0$ , ak  $\xi \geq 0$  a  $0 \leq x \leq -1/\xi$ , ak  $\xi < 0$ . Potom rozdelenie s distribučnou funkciou  $G_\xi$  nazývame zovšeobecnené Paretovo rozdelenie.

Parameter  $\xi$  nazývame Paretov index. Zovšeobecneným Paretovým rozdelením nazývame aj celú rodinu rozdelení  $G_{\xi;\mu,\beta}$ , ktorá vznikne nahradením argumentu  $x$  argumentom  $(x - \mu)/\beta$ , teda pridaním ďalších dvoch parametrov  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\beta > 0$ , pričom sa zmení aj nosič distribučnej funkcie:

$$G_{\xi;\mu,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{x-\mu}{\beta})^{-1/\xi}, & \text{pre } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\{-\frac{x-\mu}{\beta}\}, & \text{pre } \xi = 0, \end{cases}$$

kde  $x \geq \mu$  pre  $\xi \geq 0$  a  $\mu \leq x \leq \mu - \beta/\xi$ , ak  $\xi < 0$ .

Pre  $\xi = 0$  a  $\mu = 0$  je zovšeobecnené Paretovo rozdelenie ekvivalentné exponenciálnemu rozdeleniu. Ak  $\xi > 0$  a  $\mu = \beta/\xi$ , potom zovšeobecnené Paretovo rozdelenie prechádza v Paretovo rozdelenie s parametrami  $a = \beta/\xi$  a  $\alpha = 1/\xi$ :

$$G_{\xi;\beta/\xi,\beta}(x) = 1 - \left(\frac{\xi}{\beta}x\right)^{-1/\xi}, \quad x \geq \beta/\xi.$$

Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie s parametrom  $\xi > 0$  má ťažší chvost ako exponenciálne rozdelenie, patrí do triedy  $RV(\alpha)$ , kde  $\alpha = 1/\xi$ . Ak je  $\xi <$

0, potom je to naopak a zovšeobecnené Paretovo rozdelenie má ľahší chvost ako exponenciálne rozdelenie. Dôležitá vlastnosť zovšeobecneného Paretovo rozdelenia je vlastnosť stability. Ak  $X$  má zovšeobecnené Paretovo rozdelenie s parametrami  $\xi$ ,  $\mu$  a  $\beta$ , potom náhodná veličina  $[X - u | X > u]$  má zovšeobecnené Paretovo rozdelenie s tým istým parametrom  $\xi$  a s parametrami  $0$  a  $\beta + \xi(u - \mu)$  pre ľubovoľné  $u > 0$ . Pre  $x \geq 0$  totiž platí:

$$\begin{aligned}
P(X - u \leq x | X > u) &= \frac{P(X \leq x + u) - P(X \leq u)}{1 - P(X \leq u)} \\
&= \frac{G_{\xi; \mu, \beta}(x + u) - G_{\xi; \mu, \beta}(u)}{1 - G_{\xi; \mu, \beta}(u)} \\
&= \frac{1 - \left(1 + \xi \frac{x+u-\mu}{\beta}\right)^{-1/\xi} - 1 + \left(1 + \xi \frac{u-\mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}}{1 - 1 + \left(1 + \xi \frac{u-\mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}} \\
&= - \left(\frac{1 + \xi \frac{x+u-\mu}{\beta}}{1 + \xi \frac{u-\mu}{\beta}}\right)^{-1/\xi} + 1 \\
&= 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta + \xi(u - \mu)}\right)^{-1/\xi}, \quad u \geq \mu.
\end{aligned}$$

To znamená, že aj prekročenia ľubovoľnej hranice majú zovšeobecnené Paretovo rozdelenie s rovnakým Paretovým indexom ako pôvodná náhodná veličina.

Definíciu zovšeobecneného Paretovo rozdelenia sme prebrali z [4], ďalšie informácie čerpáme z [1] a [8]. Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie a jeho vlastnosti využijeme k modelovaniu chvosta rozdelenia v kapitole 6.

Máme danú vysokú hranicu  $u$  a zaoberáme sa javom, že náhodná veličina  $X$  s distribučnou funkciou  $F$  prekročí túto hranicu. Zaujímá nás nie len pravdepodobnosť, že k javu dôjde ale aj veľkosť prekročenia. Takýto prístup sa nazýva excesses over threshold. Pripomeňme, že  $x_r$  sme označili pravý koniec nosiča distribučnej funkcie  $F$ ,  $x_r = \sup\{x : F(x) < 1\} \leq \infty$ . Označme  $F_u$  distribučnú funkciu prekročenia hranice  $u$  za podmienky, že k prekročeniu došlo

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad 0 \leq x < x_r - u.$$



Všimnime si, aký vzťah platí medzi funkciou strednej hodnoty prekročenia  $e_F$  a distribučnou funkciou  $F_u$ :

$$e_F(u) = \int_0^\infty (1 - F_u(x)) dx.$$

Pre vysoké hodnoty hranice  $u$  môžeme  $F_u(x)$  aproximovať pomocou  $G_{\xi;\mu,\beta(u)}$  pre vhodne zvolenú funkciu  $\beta(u)$  a Paretov index  $\xi$ . Táto aproximácia platí z Balkemaovej-de Haanovej-Pickandsovej vety, ktorá hovorí, že

$$\lim_{u \rightarrow x_r} \sup_{0 \leq x < x_r - u} |F_u(x) - G_{\xi;\mu,\beta(u)}(x)| = 0, \quad (2.7)$$

ak  $F$  patrí do maximálnej sféry príťažlivosti zovšeobecneného rozdelenia extrémnych hodnôt  $H_\xi$ , vid' veta 3.4.13 v [4]. To bude v našom prípade splnené, pretože sa zaoberáme rozdeleniami s ťažkými chvostami.

Odvodíme funkciu strednej hodnoty prekročenia pre zovšeobecnené Pareto-rozdelenie  $G_{\xi;\mu,\beta}$  s parametrom  $\xi \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\xi;\mu,\beta}(x) &= \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \\ e_G(u) &= \frac{1}{\left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}} \int_u^\infty \left(1 + \xi \frac{y - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi} dy \\ &= \frac{1}{\left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}} \frac{\beta}{\xi} \int_{1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}}^\infty z^{-1/\xi} dz \\ &= \frac{1}{\left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}} \frac{\beta}{\xi} \left[ \frac{z^{1-1/\xi}}{1 - 1/\xi} \right]_{1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}}^\infty \\ &= \frac{1}{\left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}} \frac{\beta}{\xi} \left( -\frac{\left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}\right)^{1-1/\xi}}{1 - 1/\xi} \right) \\ &= \frac{\beta}{1 - \xi} + \frac{\xi}{1 - \xi}(u - \mu), \quad u \geq \mu. \end{aligned}$$

# Kapitola 3

## Veľké odchýlky

### 3.1 Základy teórie veľkých odchýliek

Na začiatok uvedieme dve dobre známe tvrdenia z teórie pravdepodobnosti, ktoré sa týkajú postupnosti  $X_1, X_2, \dots$  nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Ďalšie poznatky a tvrdenia tejto podkapitoly čerpáme z [3] a [11].

**Veta 3.1.1.** (*Silný zákon veľkých čísel*) *Nech  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezávislých náhodných veličín s rovnakým rozdelením s konečnou strednou hodnotou  $\mu$ . Ak  $n \rightarrow \infty$  potom*

$$\frac{1}{n}S_n \rightarrow \mu \text{ skoro iste.}$$

**Veta 3.1.2.** (*Centrálna limitná veta*) *Nech  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín so strednou hodnotou  $\mu \in \mathbb{R}$  a rozptylom  $\sigma^2 \in (0, \infty)$ . Potom pre  $n \rightarrow \infty$  platí*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - \mu n) \xrightarrow{d} Z,$$

kde  $Z$  je náhodná veličina s normovaným normálnym rozdelením a  $\xrightarrow{d}$  označuje konvergenciu v distribúcií.

Silný zákon veľkých čísel hovorí o konvergencii priemeru  $\frac{1}{n}S_n$  k strednej hodnote  $\mu$  pre  $n \rightarrow \infty$ . Centrálna limitná veta popisuje pravdepodobnosť, že rozdiel  $S_n$  a  $\mu n$  je rádu  $\sqrt{n}$ . Odchýlky  $S_n$  od  $\mu n$ , ktoré sú rádu  $\sqrt{n}$ ,

nazývame normálne. Veľkými odchýlkami nazývame odchýlky rádu vyššieho ako  $\sqrt{n}$ , najčastejšie tým myslíme rádu  $n$ . Teória veľkých odchýlok sa zaoberá javmi kedy  $\{S_n > x\}$  pričom  $x$  je veľké a môžeme ho zapísať napríklad v tvare  $x = \mu n + cn$ ,  $c > 0$ . Jedným zo základných poznatkov teórie veľkých odchýlok je Cramérova veta.

**Veta 3.1.3.** (Cramérova veta) *Nech  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín splňajúcich*

$$\varphi(t) = Ee^{tX_1} < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

*potom pre všetky  $a > EX_1$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(S_n > an) = -I(a),$$

*kde  $I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [zt - \log \varphi(t)]$ .*

**Dôkaz:** Nachádza sa v [3], veta I.4.

Funkcia  $z \rightarrow I(z)$  sa nazýva rate function. Rovnaké tvrdenie platí aj pre  $P(S_n < an)$ ,  $a < EX_1$  s tým istým tvarom  $I(z)$ . Vidíme, že funkcia  $\varphi(t)$  je momentová vytvárajúca funkcia náhodnej veličiny  $X_1$ . Predpokladom Cramérovej vety je teda existencia momentovej vytvárajúcej funkcie pre všetky  $t \in \mathbb{R}$ . Táto podmienka sa nazýva Cramérova podmienka. Petrov v [11] zlepšil Cramérovu vetu do nasledujúcej podoby.

**Veta 3.1.4.** *Nech  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín,  $EX_1 = 0$ ,  $\text{var } X_1 = \sigma^2$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $Z_n = \sigma^{-1}n^{-1/2}S_n$ , označme  $G^{n*}(x) = P(Z_n \leq x) = P(S_n \leq \sigma\sqrt{n}x)$ . Ak  $x \geq 0$ ,  $x = o(n^{1/2})$  a ak existuje kladná konštanta  $H$  taká, že  $Ee^{tX_1} < \infty$  pre  $|t| < H$ , potom*

$$\frac{\overline{G^{n*}}(x)}{\overline{\Phi}(x)} = \frac{1 - G^{n*}(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp \left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[ 1 + O \left( \frac{x+1}{\sqrt{n}} \right) \right],$$

$$\frac{G^{n*}(-x)}{\Phi(-x)} = \exp \left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left( -\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[ 1 + O \left( \frac{x+1}{\sqrt{n}} \right) \right],$$

*kde  $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$  je mocninná rada, ktorej koeficienty závisia iba na kumulantoch náhodnej veličiny  $X_1$ .*

**Dôkaz:** Môžeme nájsť v [11], veta 5.23.

Rada  $\lambda(t)$  konverguje pre dostatočne malé hodnoty  $|t|$  a nazývame ju Cramérova rada. V teórii veľkých odchýlok je značná pozornosť venovaná štúdiu  $\log \overline{F^{n*}}(x)$  za platnosti Cramérovej podmienky. Tieto výsledky nazývame hrubé pravdepodobnosti veľkých odchýlok. V mnohých situáciách je však potrebné skúmať  $\overline{F^{n*}}(x)$ , nájsť tzv. presné pravdepodobnosti veľkých odchýlok. Taktiež vzniká otázka, čo môžeme povedať o asymptotickom správaní  $F^{n*}(x)$ , ak neplatí Cramérova podmienka. Pretože pre rozdelenia s ťažkými chvostami táto podmienka splnená nie je. Tejto otázke je venovaná nasledujúca podkapitola.

## 3.2 Veľké odchýlky pre rozdelenia s ťažkými chvostami

V tejto podkapitole vychádzame z práce [10] a venujeme sa asymptotickému správaniu pravdepodobnosti veľkých odchýlok  $\overline{F^{n*}}(x)$ , ak  $F$  je distribučná funkcia náhodnej veličiny  $X$ , ktorá má rozdelenie s ťažkým chvostom. Popisujeme hranice, kde sa  $\overline{F^{n*}}(x)$  správa podľa daného priblíženia.

Z centrálnej limitnej vety vieme, že pokiaľ existuje rozptyl, tak platí

$$\sup_{x-\mu n \in A_n} \left| \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{\Phi}((x-\mu n)/(\sigma\sqrt{n}))} - 1 \right| = o(1), \quad (3.1)$$

kde  $A_n = (a^-\sqrt{n}, a^+\sqrt{n})$ ,  $a^-$  a  $a^+$  sú ľubovoľne zvolené konštanty také, že  $-\infty < a^- < a^+ < \infty$ .

Vlastnosť (2.4) subexponenciálneho rozdelenia znamená, že pre vhodne zvolenú postupnosť  $(d_n)$  platí

$$\sup_{x \geq d_n} \left| \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| = o(1). \quad (3.2)$$

Predpokladajme, že  $EX = \mu = 0$ ,  $\text{var } X = \sigma^2 = 1$  a  $E|X|^{2+\delta} < \infty$  pre nejaké  $\delta > 0$ . Zaujímá nás za akých podmienok na množinu hodnôt  $x$  platia vzťahy (3.1) a (3.2). Pre  $\overline{F^{n*}}$  je typické, že existujú dve hraničné postupnosti  $(c_n)$  a  $(d_n)$ ,  $c_n \leq d_n$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$  také, že

$$\sup_{x \in (0, c_n/h_n)} \left| \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{\Phi}(x/\sqrt{n})} - 1 \right| = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

kategória	$(c_n)$	$(d_n)$
$RV(\alpha), \alpha > 2$	$n^{1/2} \log^{1/2} n$	$n^{1/2} \log^{1/2} n$
$LN(\gamma), 1 < \gamma \leq 2$	$n^{1/2} \log^{\gamma/2} n$	$n^{1/2} \log^{\gamma/2} n$
$LN(\gamma), \gamma > 2$	$n^{1/2} \log^{\gamma/2} n$	$n^{1/2} \log^{\gamma-1} n$
$WE(\alpha), 0 < \alpha \leq 0,5$	$n^{1/(2-\alpha)}$	$n^{1/(2-2\alpha)}$
$WE(\alpha), 0,5 \leq \alpha < 1$	$n^{2/3}$	$n^{1/(2-2\alpha)}$

Tabulka 3.1: Hraničné postupnosti pre aproximácie (3.3) a (3.4) podľa kategórií rozdelení s ťažkými chvostami.

$$\sup_{x \in (d_n g_n, \infty)} \left| \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

kde  $(h_n)$  a  $(g_n)$  sú ľubovoľne zvolené postupnosti také, že  $h_n \rightarrow \infty$  a  $g_n \rightarrow \infty$  pre  $n \rightarrow \infty$ .

V tabuľke 3.1 je prehľad hraničných postupností  $(c_n)$  a  $(d_n)$  pre rozdelenia s ťažkými chvostami podľa kategórií  $RV(\alpha)$ ,  $LN(\gamma)$  a  $WE(\alpha)$ . Hraničné postupnosti  $(c_n)$  a  $(d_n)$  sú určené len asymptoticky, môžeme ich prenásobiť ľubovoľnou konštantou a vzťahy (3.3) a (3.4) zostanú platné. Vidíme, že pre  $RV(\alpha)$  a  $LN(\gamma)$ ,  $1 < \gamma \leq 2$  je  $c_n = d_n$  teda existuje jediná postupnosť, ktorá oddeľuje (3.3) a (3.4).

Na záver tejto podkapitoly sa pozrime na prípad náhodných veličín s nekonečným rozptylom, konkrétne uvažujme triedu pravidelne sa meniacich rozdelení s  $\alpha < 2$ .

**Veta 3.2.1.** *Nech  $X_1, X_2, \dots$  je postupnosť nezáporných nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín s distribučnou funkciou  $F \in RV(\alpha)$ ,  $\alpha < 2$ . Majme postupnosť  $(t_n)$  takú, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\overline{F}(t_n) = 0$ . Pokiaľ je splnená jedna z podmienok*

$$i) 0 < \alpha < 1,$$

$$ii) 1 \leq \alpha < 2 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{t_n} EX_1 I[X_1 \leq t_n] = 0,$$

*potom*

$$\sup_{x \in (t_n, \infty)} \left| \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Dôkaz:** Nachádza sa v [5], veta 3.3.

# Kapitola 4

## Použitie v poisťovníctve

V poisťovníctve je okamih vzniku poistnej udalosti aj výška poistného plnenia náhodná. Veľkosť poistného plnenia pre jedno riziko za dané časové obdobie z danej poistnej zmluvy považujeme za realizáciu nezápornej náhodnej veličiny  $X$  (v skratke budeme písať škoda alebo výška škody). Samotnú náhodnú veličinu  $X$  niekedy nazývame poistným rizikom.

V tejto kapitole sa snažíme ukázať, kde sa v poisťovníctve objavuje pravdepodobnosť veľkej odchýlky. Pre dva spôsoby voľby bezpečnostnej prirážky znázorňujeme, ako súvisí jej veľkosť s pravdepodobnosťou, že nastane veľká odchýlka skutočného úhrnu škôd od jeho strednej hodnoty. Pozeráme sa na pravdepodobnosť, že plnenie zaistiteľa bude vysoké pre rôzne typy zaistenia a opäť uvažujeme, aká je pravdepodobnosť veľkej odchýlky. Ďalej sa v teórii ruinovania venujeme určeniu horného odhadu pre pravdepodobnosť ruinovania, ak vychádzame z predpokladu, že výšky škôd majú rozdelenie s ťažkým chvostom. V tejto kapitole vychádzame z [4], [6], [7] a [10].

### 4.1 Voľba bezpečnostnej prirážky

Poistné je úplata, za ktorú poisťovňa poskytuje poistnú ochranu. Rizikové poistné slúži ku krytiu poistného rizika  $X$  v danom období a je dané strednou hodnotou  $EX$ . Rizikové poistné je potrebné zvýšiť o rizikovú prirážku, ktorá je ochranou proti nepriaznivému škodnému priebehu, čo znamená, že realizácie náhodnej veličiny  $X$  prevýšia strednú hodnotu  $EX$ . Ak je odhad  $EX$  použitý k stanoveniu poistného, odvodený z minulého škodného priebehu, potom sa môže líšiť od skutočnej hodnoty  $EX$ .

Existuje viacero spôsobov voľby bezpečnostnej prirážky, nazývame ich

princípy stanovenia bezpečnostnej prirážky. Podľa princípu strednej hodnoty je obdržané poistné  $P = (1 + \theta)EX$ , kde  $\theta$  je kladná konštanta. Nevýhodou tohto princípu je to, že poistné nezávisí na miere fluktuácií poistného rizika  $X$ . Bezpečnostná prirážka je daná pevným podielom z  $EX$ . Podľa princípu rozptylu volíme poistné vo výške  $P = EX + \beta \text{var } X$ , kde  $\beta$  je kladná konštanta. Pre princíp rozptylu je charakteristická aditivita poistného pre nezávislé riziká.

Nech postupnosť nezáporných nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  označuje postupnosť poistných škôd a nech  $EX_1 = \mu > 0$ . Potom  $\overline{F}^{n*}(x)$  je pravdepodobnosť, že úhrn škôd  $S_n$  prekročí hranicu  $x$ . Pre vysoké hodnoty  $x$  môžeme  $\overline{F}^{n*}(x)$  považovať za mieru rizika podkladového portfólia poistných zmlúv. Prirodzenou voľbou hranice  $x$  je postupnosť  $x_n = (1 + a_n)ES_n = (1 + a_n)n\mu$ , kde  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť kladných čísel. Potom

$$\begin{aligned} \overline{F}^{n*}(x_n) &= P(S_n > x_n) \\ &= P(S_n > (1 + a_n)n\mu) \\ &= P(S_n > ES_n + a_nES_n) \\ &= P(S_n - ES_n > a_nES_n). \end{aligned}$$

Nech  $\text{var } X = \sigma^2 < \infty$ , potom z centrálnej limitnej vety vyplýva, že nevyhnutnou podmienkou k tomu, aby  $\overline{F}^{n*}(x_n)$  šlo k nule je, že  $a_n\sqrt{n}$  sa blíži k nekonečnu. V poisťovníctve je postupnosť  $(x_n)$  obdržané poistné a postupnosť  $(a_n)$  môžeme považovať za bezpečnostnú prirážku. Podľa princípu strednej hodnoty sa volí  $a_n = \theta > 0$  pre všetky  $n$ , kde  $\theta$  je konštanta, potom

$$\overline{F}^{n*}(x_n) = P(S_n - ES_n > \theta n\mu). \quad (4.1)$$

Podľa princípu rozptylu môžeme voliť  $a_n = \beta \text{var } S_n / ES_n = \beta\sigma^2/\mu$ ,  $\beta$  je opäť kladná konštanta,

$$\overline{F}^{n*}(x_n) = P(S_n - ES_n > \beta n\sigma^2). \quad (4.2)$$

Vidíme, že vzťahy (4.1) a (4.2) sú pravdepodobnosti veľkých odchýlok. Vidíme aj prečo je dôležité študovať pravdepodobnosť, že skutočný úhrn škôd bude rovnakého rádu alebo vyššieho ako obdržané poistné.

## 4.2 Zaistenie

Zaistenie je poistenie, ktoré uzatvára poisťovňa na časť rizík prevzatých od poistených. Funkciou zaistenia je znížiť riziko poistiteľa, ktoré vyplýva z náhodných výkyvov v škodnom priebehu. Zaistenie taktiež znižuje potrebu vlastného kapitálu poisťovne nutného k udržaniu solventnosti.

Budeme uvažovať tri spôsoby zaistenia bez hornej hranice pre plnenie zaistiteľa.

### Proporcionálne kvótové zaistenie

V proporcionálnom kvótovom zaistení sa úhrada škody delí medzi prvopoistiteľa a zaistovňu vo vopred stanovenom pomere  $p \in (0, 1)$ , ktorý nezávisí na výške škody a je rovnaký pre všetky poistné riziká zahrnuté do zaistnej zmluvy. Plnenie zaistiteľa je  $R_p(n) = pS_n$ . V rovnakom pomere sa delí aj poistné.

Proporcionálne zaistenie neohraničuje zhora plnenie prvopoistiteľa a nie je preto dobrou ochranou proti jednotlivým veľmi vysokým škodám. Kvótové proporcionálne zaistenie sa používa na zníženie potreby vlastného kapitálu pre možnosť poistenia väčšieho objemu rizík. Nevýhodou kvótového zaistenia je to, že podiel, ktorým sa delí riziko medzi prvopoistiteľa a zaistiteľa, nezávisí na veľkosti poistného rizika.

Pre neproporcionálne zaistenie je charakteristické stanovenie pevnej hornej hranice pre plnenie prvopoistiteľa, nad touto hranicou už hradí škodu zaistovňa. Tento typ zaistenia sa rozšíril s rozvojom rôznych foriem poistenia zodpovednosti za škody, kde môže poistné plnenie dosahovať veľmi vysoké čiastky. My sa budeme zaoberať dvoma typmi neproporcionálneho zaistenia a to stop-loss a excess-of-loss zaistením.

### Stop-loss zaistenie (zaistenie časového nadmerku)

Zaistiteľ hradí straty, ktoré na danom portfóliu poistných zmlúv za dané obdobie spolu presiahnu predom stanovenú hranicu  $K$ . Plnenie zaistiteľa je  $R_{SL}(n) = (S_n - K)^+$ .

Pre nedostatočnú možnosť kontroly kvality oceňovania poistných rizík a likvidácie škôd je zaistenie časového nadmerku možné získať len málokedy. Vyskytuje sa v poistných odvetviach, v ktorých je výkyvmi v škodnom priebehu obvykle rovnako postihnutý celý poistný trh. Typickým príkladom je poistenie úrody proti krupobytiu alebo mrazu. Hlavnou úlohou poistenia časového nadmerku škôd je zníženie výkyvov v škodnom priebehu.



### Excess-of-loss zaistenie (zaistenie škodného nadmerku)

Zaistiteľ z jednotlivých škôd hradí tú časť, ktorá presiahne vopred daný limit  $D$ . Plnenie zaistiteľa pre jednu škodu je  $(X - D)^+$ , plnenie pre  $n$  škôd označíme  $R_{XL}(n) = \sum_{i=1}^n (X_i - D)^+$ .

Ak nastane vysoká škoda pri neproporcionálnom zaistení, zaistiteľ hradí všetko nad danú hranicu, tým na seba berie riziko. Pozrime sa teda na pravdepodobnosť, že plnenie zaistiteľa prekročí hranicu  $x$  pre všetky uvažované formy zaistenia:

$$\begin{aligned}P(R_p(n) > x) &= P(pS_n > x) = P(S_n > p^{-1}x) \\ &= P(S_n - ES_n > p^{-1}x - n\mu), \\ P(R_{SL} > x) &= P((S_n - K)^+ > x) = P(S_n - K > x) \\ &= P(S_n - ES_n > x + K - n\mu), \\ P(R_{XL} > x) &= P\left(\sum_{i=1}^n (X_i - D)^+ > x\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n (X_i - D)^+ - nE(X - D)^+ > x - nE(X - D)^+\right).\end{aligned}$$

Vidíme, že pre vysoké hodnoty  $x$  sú tieto výrazy opäť pravdepodobnosti veľkých odchýlok a môžeme na odhadnutie ich hodnoty použiť teóriu z kapitoly 3.

## 4.3 Teória ruinovania

V tejto podkapitole definujeme Cramérov-Lundbergov model a zaoberáme sa pravdepodobnosťou, že nastane ruinovanie. Ruinovanie je okamih, kedy sa kapitál poisťovne dostane do záporných hodnôt. Pre poisťovne je dôležité poznať pravdepodobnosť ruinovania, pretože relatívne vysoká pravdepodobnosť značí nestabilitu poisťovne v dlhodobom horizonte.

Nás zaujíma otázka, aká bude pravdepodobnosť ruinovania, ak výška škody má rozdelenie s ťažkým chvostom. Vhodným modelom pre rozdelenia s ťažkým chvostom sú subexponenciálne rozdelenia.

## Cramérov-Lundbergov model

- Výšky škôd tvoria postupnosť  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  kladných nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, ktoré majú spojitú distribučnú funkciu  $F$ , konečnú strednú hodnotu  $EX_1 = \mu$  a konečný rozptyl  $\text{var } X_1 = \sigma^2$ .
- Škody nastávajú v náhodných časových okamihoch  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  skoro iste.
- Počet škôd v intervale  $[0, t]$  označíme  $N(t)$  a nazývame načítací proces počtu udalostí,  $N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$ ,  $t \geq 0$ , s tým, že  $\sup \emptyset = 0$ .
- Doby medzi škodnými udalosťami  $Y_1 = T_1$ ,  $Y_k = T_k - T_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots$  tvoria postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín s exponenciálnym rozdelením s konečnou strednou hodnotou  $EY_1 = 1/\lambda$ .
- Postupnosti  $(X_k)$  a  $(Y_k)$  sú navzájom nezávislé.

Vidíme, že  $N(t)$  je homogénny Poissonov proces s intenzitou  $\lambda$ , teda  $P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Úhrn škôd je proces definovaný takto

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad N(t) > 0, \\ &= 0, \quad N(t) = 0. \end{aligned}$$

Ak distribučnú funkciu úhrnu škôd označíme  $G_t(x)$ , potom

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Nech  $U(t)$  označuje kapitál (riziková rezervu) v čase  $t$ . Predpokladáme poistné platené spojite s intenzitou platby  $c > 0$ . Počiatočný kapitál označíme ako  $u \geq 0$ . Potom proces  $U(t)$  definujeme takto

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$

Ďalej definujeme okamih ruinovania  $T$ :

$$T = \inf\{t : U(t) < 0\}.$$

Pravdepodobnosť ruinovania v konečnom čase  $\psi(u, \tau)$  a pravdepodobnosť ruinovania  $\psi(u)$  definujeme takto

$$\psi(u, \tau) = P(U(t) < 0 \text{ pre nejaké } t < \tau), \quad 0 < \tau < \infty, \quad u \geq 0,$$

$$\psi(u) = P(T < \infty), \quad u \geq 0.$$

Zrejme platí

$$\psi(u) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi(u, \tau).$$

V praxi pri simuláciách a výpočtoch sa používa pravdepodobnosť ruinovania v nejakom konečnom čase, pretože nie je možné simulovať nekonečnú budúcnosť. Pri teoretických výpočtoch je výhodnejšie používať pravdepodobnosť ruinovania  $\psi(u)$ .

Vidíme, že náhodná veličina okamih ruinovania môže nadobúdať hodnotu nekonečno s kladnou pravdepodobnosťou, čo môžeme interpretovať tak, že poisťovňa nikdy neskrachuje, bude existovať nekonečne dlho. Ak v nejakom čase klesne kapitál poisťovne pod nulu, hovoríme, že nastalo ruinovanie. Prvý moment, v ktorom toto nastane, sa nazýva okamih ruinovania. Potom  $\psi(u)$  je pravdepodobnosť, že pri počiatocnej výške kapitálu  $u$  ruinovanie nastane v konečnom čase. Nevyhnutnosťou, aby sa poisťovňa vyhla ruinovaniu, je stanovenie výšky intenzity  $c$  platenia poistného tak, aby platilo  $\lambda\mu < c$  alebo  $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ , kde  $\theta$  je bezpečnostná (riziková) prirážka stanovená pomocou princípu strednej hodnoty. Táto podmienka sa nazýva podmienka čistého zisku (net profit condition) a zaručuje  $\psi(u) < 1$  pre všetky  $u$ , teda  $P(T = \infty) > 0$ .

V [9] v dôkaze vety 1.2.2 je ukázané, že v Cramérovom-Lundbergovom modele za platnosti podmienky čistého zisku je

$$1 - \psi(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \theta)^{-n} F_I^{n*}(u), \quad u \geq 0, \quad (4.3)$$

kde

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0.$$

Symbolom  $F_I$  je označený integrovaný chvost rozdelenia  $F$ . Všimnime si, že  $F_I(x)$  je distribučná funkcia. Ak  $F_I$  je subexponenciálna, potom platí nasledujúca veta.

**Veta 4.3.1.** *Uvažujme Cramérov-Lundbergov model, podmienku čistého zisku  $\theta > 0$  a nech  $F_I \in \mathcal{S}$ , potom*

$$\psi(u) \sim \theta^{-1} \overline{F}_I(u) = \frac{1}{\theta \mu} \int_u^\infty \overline{F}(y) dy, \quad u \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

**Dôkaz:** Za platnosti predpokladov vety je podľa (4.3)

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_I(u)} = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \theta)^{-n} \frac{\overline{F}_I^{n*}(u)}{\overline{F}_I(u)}.$$

Limitným prechodom  $u \rightarrow \infty$  a zámenou limity a nekonečnej sumy dostaneme želané tvrdenie vety

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_I(u)} = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \theta)^{-n} n = \theta^{-1}.$$

Pretože  $(1 + \theta)^{-1} < 1$ , potom existuje  $\varepsilon > 0$  také, že  $(1 + \theta)^{-1}(1 + \varepsilon) < 1$  teda z vlastnosti (2.3) subexponenciálneho rozdelenia je

$$(1 + \theta)^{-n} \frac{\overline{F}_I^{n*}(u)}{\overline{F}_I(u)} \leq (1 + \theta)^{-n} K(1 + \varepsilon)^n, \quad u \geq 0,$$

čo nám dovoľuje zameniť nekonečnú sumu a limitu na základe Lebesgueovej vety o integrovateľnej majorante.

Dôkaz môžeme nájsť aj v [9], veta 1.3.6.

Q.E.D.

Zápis  $\psi(u) = \theta(1 + \theta)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \theta)^{-n} \overline{F}_I^{n*}(u)$  nám na nájdenie pravdepodobnosti ruinovania umožňuje použiť teóriu veľkých odchýlok na  $\overline{F}_I^{n*}(u)$ ,  $u \rightarrow \infty$ .

V [10] Mikosch a Nagaev ukázali, že pre  $F \in RV(\alpha)$  môže byť konvergencia v (4.4) ľubovoľne pomalá.

**Veta 4.3.2.** *Nech  $F \in RV(\alpha)$ . Predpokladajme, že  $\mu^{-1} \overline{F}(x) = \alpha l_k x^{-\alpha-1}$ ,  $x_k < x \leq x_{k+1}$ , pre nejaké  $\alpha > 2$  a postupnosti  $(l_k)$  a  $(x_k)$  nezáporných čísel takých, že  $l_k \searrow l_0$  a  $x_{k+1}/x_k \rightarrow \infty$ , pre  $k \rightarrow \infty$ . Potom*

$$\Delta(x_k) = \frac{\psi(x_k)}{\overline{F}_I(x_k)} - \theta^{-1} = \theta^{-1} \left( \frac{l_{k-1}}{l_k} - 1 \right) + O\left(x_k^{-1/2}\right) + O\left(\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^\alpha\right).$$

**Dôkaz:** [10], veta 6.1.

Subexponenciálne rozdelenia dobre popisujú rozdelenie náhodnej výšky škody, ak pravdepodobnosť vzniku vysokej škody nie je zanedbateľná. Vzorec (4.4) nám dáva odhad pravdepodobnosti ruinovania, ak  $F_I$  je subexponenciálne. Zaoberajme sa otázkou či to, že má výška škody subexponenciálne rozdelenie ( $F \in \mathcal{S}$ ), znamená, že aj  $F_I \in \mathcal{S}$  alebo naopak. Všeobecná odpoveď na túto otázku je záporná. Neplatí ani jedna z implikácií ( $F_I \in \mathcal{S}$ )  $\Rightarrow$  ( $F \in \mathcal{S}$ ), ( $F \in \mathcal{S}$ )  $\Rightarrow$  ( $F_I \in \mathcal{S}$ ). Ďalej uvedieme postačujúce podmienky pre  $F$  tak aby  $F_I \in \mathcal{S}$ .

Celá kategória distribučných funkcií RV patrí medzi subexponenciálne rozdelenia. Z tvrdenia 2.1.4 (Karamatovo tvrdenie) vieme, že  $F$  patrí do RV implikuje, že  $F_I$  patrí do RV teda aj  $F_I$  patrí do  $\mathcal{S}$ .

K nasledujúcej vete, ktorú sme prebrali z [4], lemma 1.4.6, potrebujeme pojmy riziková funkcia (hazard function)  $Q = -\log \bar{F}$  a riziková hustota (hazard rate)  $q(x) = f(x)/\bar{F}(x)$  pre distribučnú funkciu  $F$  s hustotou  $f$ .

**Veta 4.3.3.** *Ak jedna z nasledujúcich podmienok platí, potom  $F_I \in \mathcal{S}$*

a)  $\limsup_{x \rightarrow \infty} xq(x) < \infty$ ,  
b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} xq(x) = \infty$  a jedna z nasledujúcich podmienok platí

- i)  $\limsup_{x \rightarrow \infty} xq(x)/Q(x) < 1$ ,
- ii)  $q \in RV(\delta)$ ,  $-1 \leq \delta < 0$ ,
- iii)  $Q \in RV(\delta)$ ,  $0 < \delta < 1$  a  $q$  je klesajúce,
- iv)  $q$  klesá k nule,  $q \in RV(0)$  a  $Q(x) - xq(x) \in RV(1)$ .

Medzi rozdelenia, pre ktoré platí táto veta, patria Weibullovo rozdelenie s parametrom  $\tau \in (0, 1)$ , Benktanderovo rozdelenie I. a II. typu a lognormálne rozdelenie.

# Kapitola 5

## Simulovanie pravdepodobnosti ruinovania

### 5.1 Paretovo rozdelenie výšky škody

Predpokladajme Cramér-Lundbergov model, v ktorom okamihy vzniku poistných udalostí (škôd) tvoria homogénny Poissonov proces s intenzitou  $\lambda$ . Potom má počet škôd, ktoré nastanú do času  $\tau$ , Poissonovo rozdelenie s parametrom  $\lambda\tau$ . Z vlastnosti Poissonovho procesu vieme, že ak poznáme počet škôd do času  $\tau$ , potom časy vzniku škôd sú nezávislé a majú rovnomerné rozdelenie na intervale  $[0, \tau]$ . Nech výšky škôd majú Paretovo rozdelenie s parametrami  $a, \alpha$  a distribučnou funkciou

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha, \quad x > a, \quad a, \alpha > 0.$$

Paretovo rozdelenie je špeciálnym prípadom zovšeobecneného Paretovho rozdelenia s parametrami  $\xi = 1/\alpha$ ,  $\mu = a$  a  $\beta = a/\alpha$ .

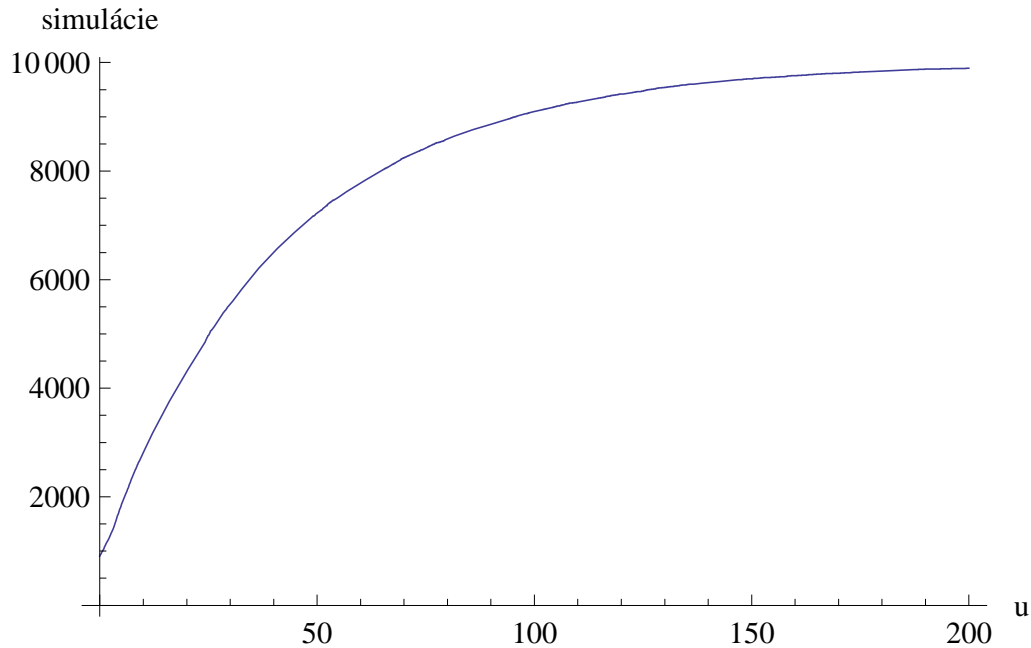
Sledujeme veľkosť kapitálu v čase a hľadáme minimálny počiatočný kapitál, ktorý je potrebný k tomu, aby nedošlo k ruinovaniu do času  $\tau$ . Veľkosť kapitálu je rizikový proces  $U(t)$  definovaný v podkapitole 4.3. Intenzitu  $c$  obdržaného poistného určíme podľa princípu strednej hodnoty takto  $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ , kde  $\mu$  je stredná hodnota výšky škody a  $\theta$  označuje bezpečnostnú prirážku. Pre daný počiatočný kapitál odhadneme pravdepodobnosť ruinovania v konečnom čase ako počet simulácií, pri ktorých došlo k ruinovaniu, k počtu všetkých prevedených simulácií.

Náhodne vyberieme počet škôd z Poissonovho rozdelenia. Potom vyberieme vektor časov vzniku škôd z rovnomerného rozdelenia. Časy vzniku

škôd zoradíme a vygenerujeme vektor výšok škôd náhodne z Paretovho rozdelenia. V časových okamihoch, kedy vznikli škody, sledujeme výšku obdržaného poistného a súčet škôd, ich rozdiel nám určí najnižšiu výšku počiatočného kapitálu, pri ktorom ešte nedôjde k ruinovaniu (kapitál poistovne je v danom čase nulový). Pre každú simuláciu nájdeme minimum z vypočítaných výšok počiatočného kapitálu a to je minimálny počiatočný kapitál potrebný k tomu, aby nedošlo k ruinovaniu. Pre každý nižší počiatočný kapitál k ruinovaniu dôjde v danej simulácii, pre vyšší nie.

Parametre volíme nasledujúcim spôsobom. V časovom úseku  $\tau = 2000$  máme Poissonov proces s intenzitou  $\lambda = 0,5$ . Výšky škôd majú Paretovo rozdelenie s parametrami  $a = 4$ ,  $\alpha = 3$ , potom stredná škoda je  $\mu = a\alpha/(\alpha - 1) = 6$ . Bezpečnostnú prirážku  $\theta$  volíme vo výške 10%, potom intenzita obdržaného poistného je  $c = (1 + \theta)\lambda\mu = 3,3$ . Prevedieme 10 000 simulácií. Všetky výpočty a simulácie v tejto podkapitole robíme v programe Wolfram Mathematica 6 [13].

Pravdepodobnosť ruinovania odhadneme aj pomocou (4.4). Predpoklady



Obrázek 5.1: Počet simulácií, pri ktorých nedošlo k ruinovaniu, pri danej výške počiatočného kapitálu.

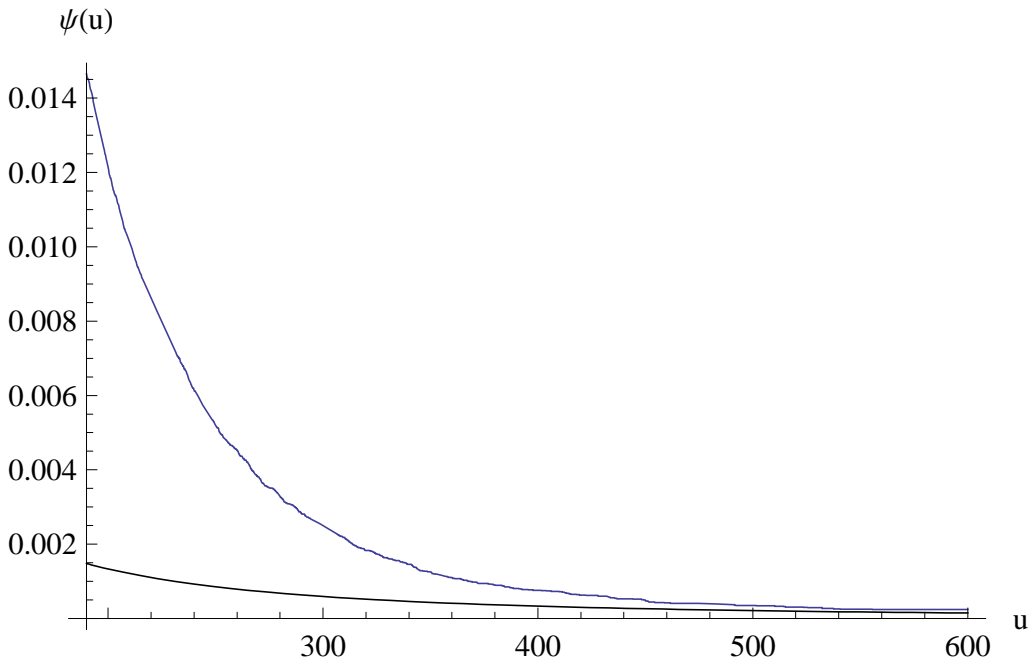
vety 4.3.1 sú splnené. Spočítame integrovaný chvost Paretovho rozdelenia

$$\overline{F_I}(u) = \frac{u}{\mu(\alpha - 1)} \left(\frac{a}{u}\right)^\alpha, \quad u > a, \quad \alpha > 1, \quad a > 0$$

a pravdepodobnosť ruinovania odhadneme takto

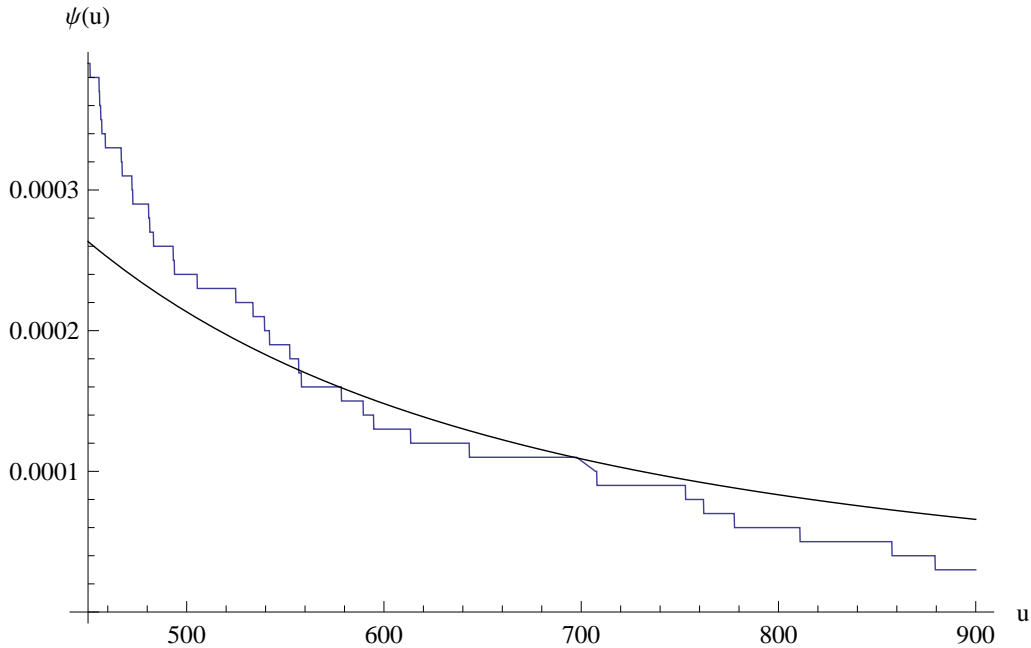
$$\psi(u) \sim \frac{u}{\theta\mu(\alpha - 1)} \left(\frac{a}{u}\right)^\alpha, \quad u \rightarrow \infty, \quad \alpha > 1, \quad a > 0. \quad (5.1)$$

Na obrázku 5.1 je znázornený počet simulácií, v ktorých nedošlo k ruinovaniu v závislosti na výške počiatočného kapitálu. Pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde aj keď počiatočný kapitál je nulový, je odhadnutá ako 9,1%. Aby pravdepodobnosť, že dôjde k ruinovaniu, bola na úrovni 5%, 1% a 0,1%, potrebujeme počiatočný kapitál vo výške 126,39, 201,62 a 376,86. Aby nedošlo k ruinovaniu v žiadnej našej simulácií, potrebujeme počiatočný kapitál viac ako 1588,2, čo je približne 12,5-krát hodnota počiatočného kapitálu potrebného k tomu, aby pravdepodobnosť ruinovania bola 5%.



Obrázek 5.2: Pravdepodobnosť ruinovania v závislosti na počiatočnom kapitále odhadnutá pomocou asymptotického vzorca (5.1) (čierna) a odhadnutá zo simulácií (modrá).

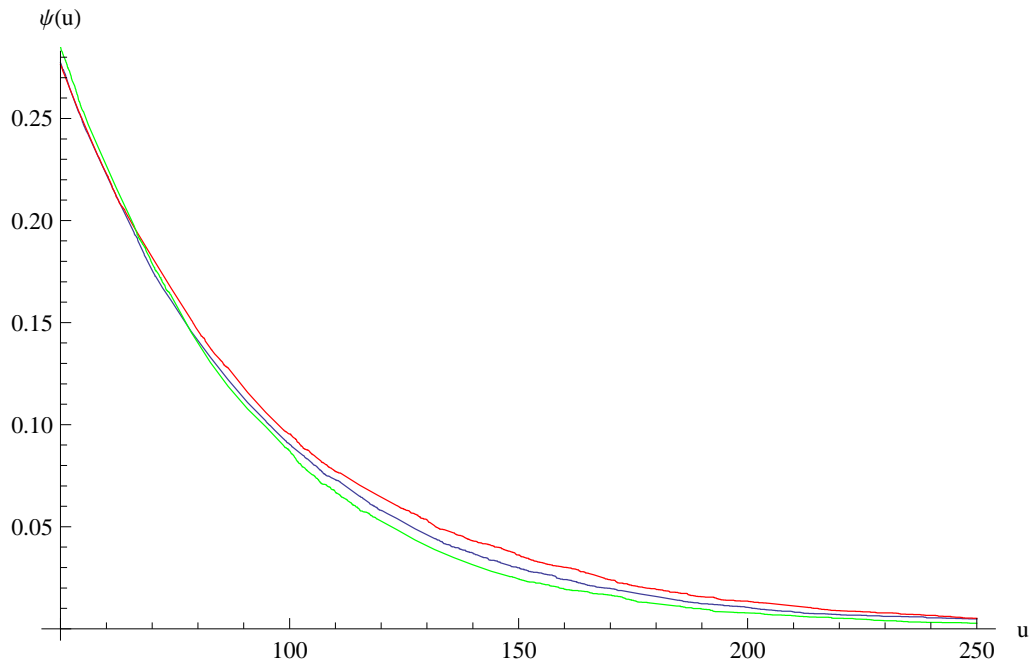




Obrázek 5.3: Porovnanie pravdepodobnosti ruinovania odhadnutej pomocou asymptotického vzorca (5.1) (čierna) a odhadnutej zo simulácií (modrá) pre vysoké hodnoty počiatočného kapitálu.

Porovnanie výšky pravdepodobnosti ruinovania, ktorú sme odhadli pomocou vzorca (5.1) a na základe simulácií pre daný vysoký počiatočný kapitál, vidíme na obrázkoch 5.2 a 5.3. Približne do hodnoty 550 je pravdepodobnosť odhadnutá zo vzorca (5.1) nižšia ako pravdepodobnosť, ktorú sme určili našimi simuláciami aj keď nad hodnotou 400 je už rozdiel veľmi malý. Nad hodnotou zhruba 750 je to naopak. To súhlasí s tým, že odhad pravdepodobnosti ruinovania pomocou vzorca (5.2) je len asymptotický a má význam len pre veľké hodnoty počiatočného kapitálu  $u$ . Na určenie pravdepodobnosti ruinovania sme v tomto pokuse spravili 100 000 simulácií.

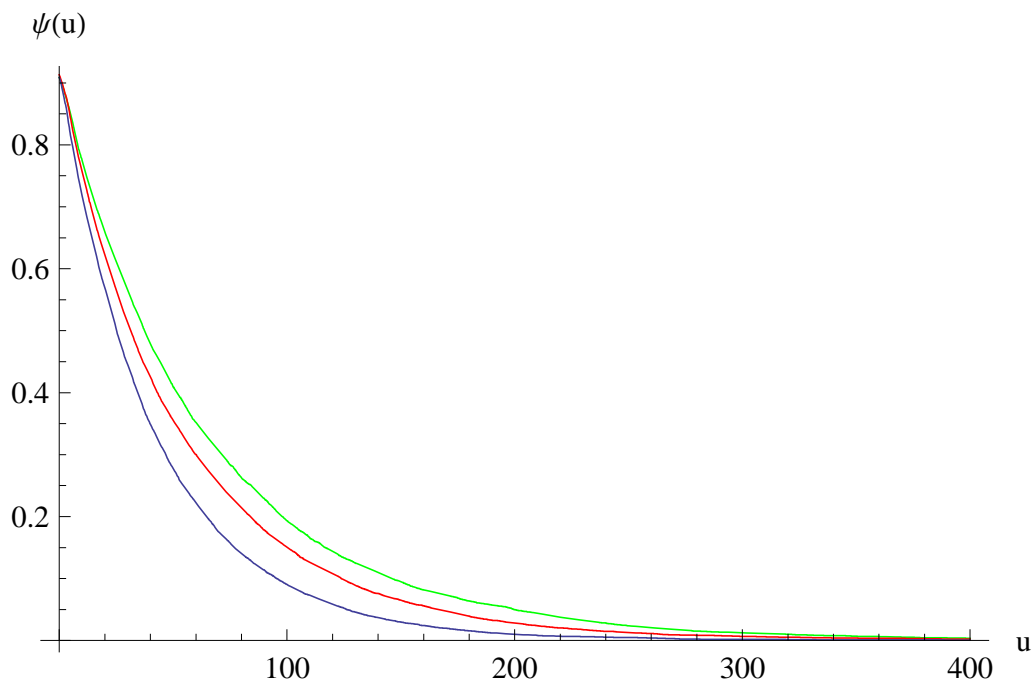
Na obrázku 5.4 vidíme, ako závisí pravdepodobnosť ruinovania na výške počiatočného kapitálu pre tri rôzne voľby parametrov  $\tau$  a  $\lambda$  (modrá  $\tau = 2000$ ,  $\lambda = 0,5$ , červená  $\tau = 10\,000$ ,  $\lambda = 0,1$  a zelená  $\tau = 1000$ ,  $\lambda = 1$ ), pričom ich súčin zostáva zachovaný teda, meníme dĺžku sledovaného úseku a intenzitu vzniku škôd ale stredný počet škôd za sledovaný časový úsek je rovnaký. Keďže meníme intenzitu  $\lambda$  vzniku škôd, mení sa nám aj intenzita  $c$  obdržaného poistného. Vidíme len malú zmenu tvaru krivky. Pre vyššie hod-



Obrázek 5.4: Pravdepodobnosť ruinovania v závislosti na počiatocnom kapitále pre rôzne voľby parametrov  $\lambda$  a  $\tau$  (modrá  $\tau = 2000$ ,  $\lambda = 0,5$ , červená  $\tau = 10\,000$ ,  $\lambda = 0,1$  a zelená  $\tau = 1000$ ,  $\lambda = 1$ ).

noty počiatocného kapitálu (nad 80) je pravdepodobnosť ruinovania nižšia pre voľbu  $\tau = 1000$  a  $\lambda = 1$  (zelená krivka) a vyššia pre voľbu  $\tau = 10\,000$  a  $\lambda = 0,1$  (červená krivka) ako je pôvodná voľba parametrov  $\tau = 2000$  a  $\lambda = 0,5$  (modrá krivka). Pre nižšie hodnoty (pod 60) je to naopak.

Ďalej študujeme závislosť pravdepodobnosti ruinovania na strednej hodnote výšky škody. Meníme parameter  $a$  Paretovho rozdelenia a tým meníme aj strednú hodnotu  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$  výšky škody. Na obrázku 5.5 sa nachádzajú tri krivky popisujúce závislosť pravdepodobnosti ruinovania na počiatocnom kapitále. Modrá krivka znázorňuje pôvodnú voľbu parametrov Paretovho rozdelenia  $a = 4$ ,  $\alpha = 3$ , pričom  $\mu = 6$  a  $\sigma^2 = 12$ . Ďalej volíme  $a = 5$ ,  $\alpha = 3$ , potom  $\mu = 7,5$  a  $\sigma^2 = 18,75$ . Závislosť pravdepodobnosti ruinovania pre takúto voľbu parametrov je vyznačená červenou farbou. Závislosť pre voľbu  $a = 6$ ,  $\alpha = 3$ , kedy  $\mu = 9$  a  $\sigma^2 = 27$ , je znázornená zelenou farbou. Vidíme, že pre vyššiu strednú hodnotu je pri rovnakom počiatocnom kapitále pravdepodobnosť ruinovania vyššia a klesá k nule pomalšie. Je to v súlade s tým, čo by sme očakávali.



Obrázek 5.5: Pravdepodobnosť ruinovania v závislosti na počiatocnom kapitále pre tri rôzne voľby parametra  $a$  Paretovho rozdelenia (modrá  $a = 4$ ,  $\alpha = 3$ , červená  $a = 5$ ,  $\alpha = 3$  a zelená  $a = 6$ ,  $\alpha = 3$ ).

	$a = 4$ $\mu = 6$	$a = 5$ $\mu = 7,5$	$a = 6$ $\mu = 9$
5%	126,39	166,5	199,9
1%	201,62	264,81	321,45
0,1%	376,86	466,09	549,72
0%	1588,2	855,69	1093,79
$1 - \psi(0, \tau)$	9,1%	8,7%	9,16%

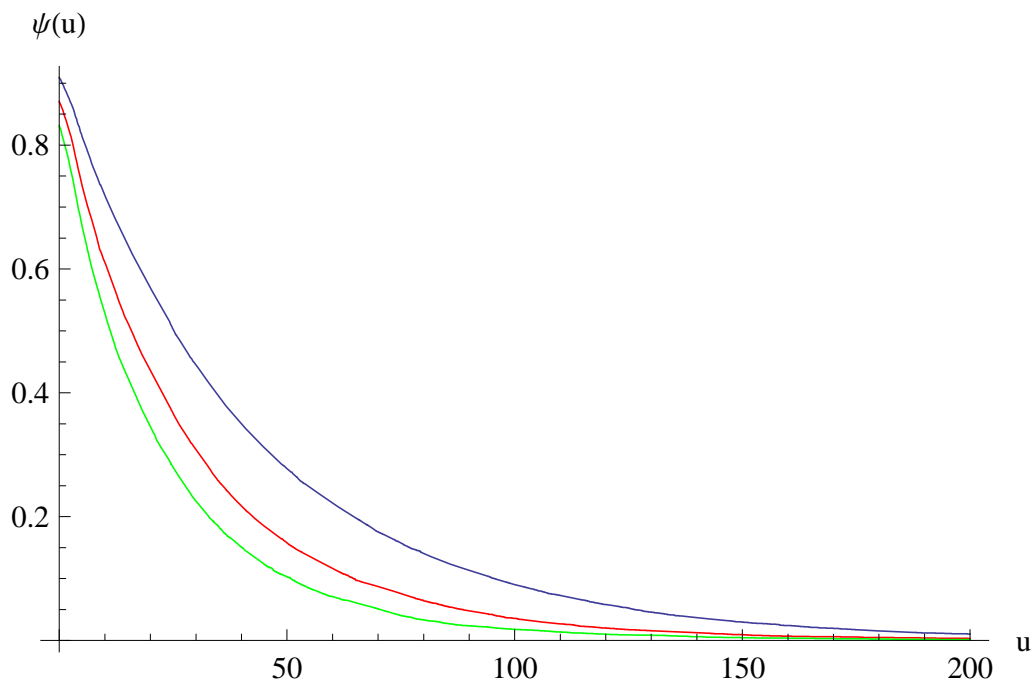
Tabulka 5.1: Počiatocný kapitál potrebný k tomu, aby pravdepodobnosť ruinovania mala hodnotu 5%, 1% a 0,1%, minimálny kapitál potrebný k tomu, aby nedošlo k ruinovaniu v žiadnej našej simulácii a pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde pre nulový počiatocný kapitál ( $1 - \psi(0, \tau)$ ), pre uvedené voľby parametra  $a$ .

V tabuľke 5.1 sú uvedené vypočítané hodnoty počiatočného kapitálu tak, aby pravdepodobnosť ruinovania bola na úrovni 5%, 1% a 0,1%. Vidíme, že pre strednú hodnotu výšky škody  $\mu = 9$  je potrebný zhruba 1,5-násobok kapitálu potrebného, ak je stredná hodnota  $\mu = 6$ . Pravdepodobnosť, že nastane ruinovanie, je približne 9% vo všetkých prípadoch. Pre porovnanie uvádzame aj hodnotu počiatočného kapitálu potrebného k tomu, aby k ruinovaniu nedošlo v žiadnej simulácii pre danú voľbu parametrov.

Zaoberáme sa aj vplyvom veľkosti bezpečnostnej prirážky na pravdepodobnosť ruinovania. Ak zvyšujeme bezpečnostnú prirážku, zvýši sa intenzita obdržaného poistného a pri zachovaní ostatných parametrov, by sa mala pravdepodobnosť ruinovania znížiť, pretože do času  $t$  obdržíme vyššie poistné  $ct$  ale stredná výška škody  $\mu$  a intenzita  $\lambda$  vzniku škôd sú rovnaké. Zvolíme bezpečnostnú prirážku na úrovni 15%, 20% a prevedieme ďalšie dve série simulácií. Na obrázku 5.6 vidíme pravdepodobnosť ruinovania v závislosti na výške počiatočného kapitálu pre pôvodnú výšku bezpečnostnej prirážky 10% (modrá krivka) a pre dve nové voľby 15% (červená), 20% (zelená). Pre vyššiu bezpečnostnú prirážku je pravdepodobnosť ruinovania nižšia pre daný počiatočný kapitál tak, ako sme predpokladali. Hodnoty počiatočného kapitálu potrebného k pravdepodobnosti ruinovania 5%, 1% a 0,1% a pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde, sú zapísané v tabuľke 5.2. Vidíme značný pokles hodnoty počiatočného kapitálu potrebného k tomu, aby bola pravdepodobnosť ruinovania 5%, 1% a 0,1%. Pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde, sa zvýšila z 9% až na takmer 17%.

	$\theta = 10\%$	$\theta = 15\%$	$\theta = 20\%$
5%	126,39	88,63	70,5
1%	201,62	146,98	120,74
0,1%	376,86	294,25	250,57
0%	1588,2	498,36	840,02
$1 - \psi(0, \tau)$	9,1%	13%	16,88%

Tabuľka 5.2: Počiatočný kapitál potrebný k tomu, aby pravdepodobnosť ruinovania mala hodnotu 5%, 1% a 0,1%, minimálny kapitál potrebný k tomu, aby nedošlo k ruinovaniu v žiadnej z našich simulácií a pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde pre nulový počiatočný kapitál ( $1 - \psi(0, \tau)$ ), pre uvedené voľby bezpečnostnej prirážky  $\theta$ .



Obrázek 5.6: Pravdepodobnosť ruinovania v závislosti na počiatocnom kapitále pre rôzne voľby parametra  $\theta$ , (modrá  $\theta = 10\%$ , červená  $\theta = 15\%$  a zelená  $\theta = 20\%$ ).

## 5.2 Ďalšie rozdelenia

V tejto podkapitole skúmame, aký vplyv na pravdepodobnosť ruinovania má rôzna voľba rozdelenia výšok škôd. Rizikový proces  $U(t)$  simulujeme podobne ako v predchádzajúcej podkapitole a hľadáme závislosť pravdepodobnosti ruinovania na počiatocnom kapitále. Za rozdelenie výšok škôd postupne volíme rozdelenia s ťažkým chvostom: Pareto, lognormálne, loggamma a Weibullovo rozdelenie a pridáme aj rozdelenie s ľahkým chvostom a to gama rozdelenie. Výsledky porovnáme.

Náhodne zvolíme počet škôd,  $k$  nemu potom časy vzniku škôd a výšky škôd s tým, že počet škôd a časy vzniku škôd zostávajú rovnaké pri zmene rozdelenia výšok škôd. Tým lepšie zachytíme rozdiel v pravdepodobnosti ruinovania pre rôzne rozdelenia výšok škôd.

Parametre  $\tau$ ,  $\lambda$  a  $\theta$  ponecháme rovnaké ako v predchádzajúcej podkapitole a vykonáme 10 000 simulácií v programe Wolfram Mathematica 8 [14].

Výšky škôd generujeme z Paretovho rozdelenia s parametrami  $a \doteq 1,9625$  a  $\alpha \doteq 2,2765$ , z lognormálneho rozdelenia s parametrami  $a \doteq 0,7771$  a  $b \doteq 0,9753$ , z loggama rozdelenia s  $\alpha \doteq 2,9786$  a  $\beta \doteq 0,3433$ , z Weibulovho s  $c_W \doteq 0,3237$  a  $\tau_W = 0,8$  a z gama s  $\alpha \doteq 0,6294$  a  $\beta \doteq 5,5611$ , potom je pre každé rozdelenie stredná hodnota výšky škody  $\mu = 3,5$  a rozptyl  $\sigma^2 = 19,4639$ . Hustota lognormálneho rozdelenia má tvar

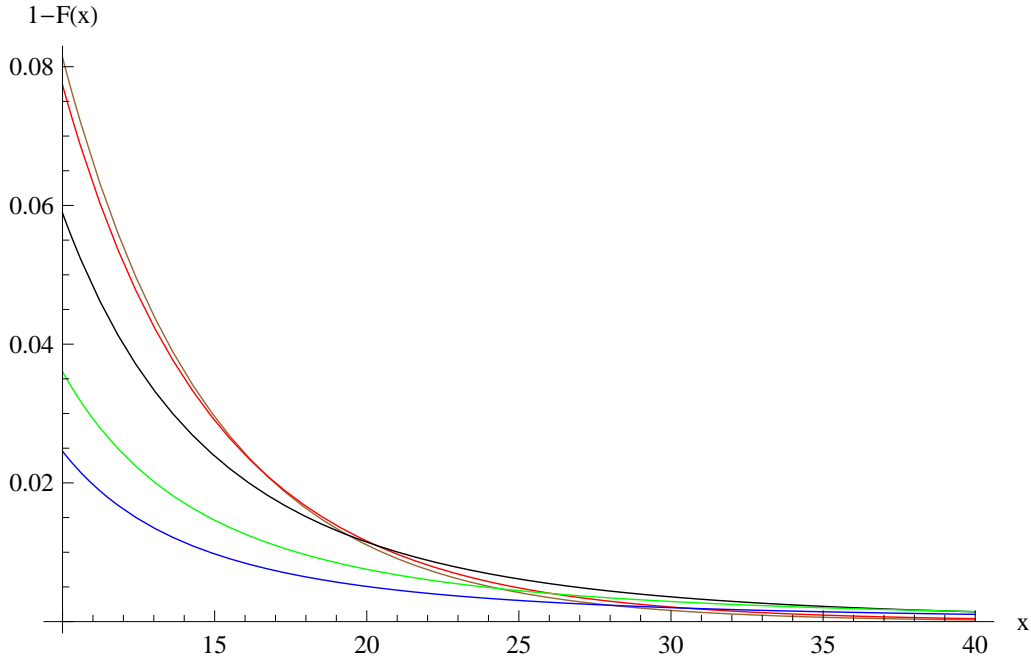
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}bx} \exp \left\{ -\frac{(\log x - a)^2}{2b^2} \right\}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad x > 0.$$

Hustotu loggama rozdelenia uvažujeme v tvare

$$f(x) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (\log x)^{\alpha-1} x^{-\frac{1}{\beta}-1}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x > 1.$$

Hustota gama rozdelenia je

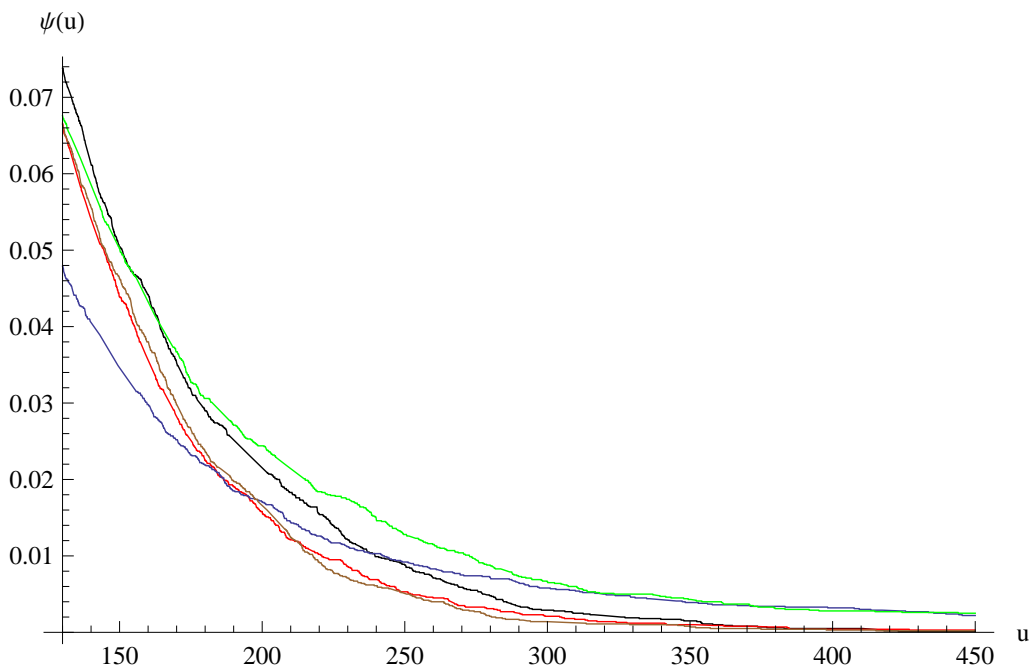
$$f(x) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x > 0.$$



Obrázek 5.7: Chvost distribučnej funkcie Paretovho (modrá), lognormálneho (čierna), loggama (zelená), Weibullovho (červená) a gama (hnedá) rozdelenia s parametrami, ktoré vedú na  $\mu = 3,5$  a  $\sigma^2 = 19,4639$ .

Chvosty uvažovaných rozdelení s danými parametrami sú znázornené na obrázku 5.7. Vidíme, že najťažší chvost má lognormálne a loggamma rozdelenie, ďalej nasleduje Pareto a Weibullovo a najľahší chvost má gama rozdelenie.

Na obrázku 5.8 je znázornená závislosť získaných pravdepodobnosti ruinovania na výške počiatocného kapitálu, ak majú výšky škôd Pareto, lognormálne, loggamma, Weibullovo a gama rozdelenie. Pre Pareto rozdelenie (modrá krivka) je pre nízke hodnoty počiatocného kapitálu pravdepodobnosť ruinovania najnižšia ale s rastúcou výškou počiatocného kapitálu klesá najpomalšie. Pre loggamma rozdelenie (zelená) je pravdepodobnosť ruinovania vysoká pre všetky hodnoty počiatocného kapitálu. Ak majú výšky škôd lognormálne (čierna), Weibullovo (červená) alebo gama (hnedá) rozdelenie potom s rastúcim počiatocným kapitálom pravdepodobnosť ruinovania rýchlo klesá. Rozdiel medzi Weibulloým a gama rozdelením je veľmi malý. Pre vysoké hodnoty počiatocného kapitálu je pre Pareto a loggamma



Obrázek 5.8: Pravdepodobnosť ruinovania v závislosti na počiatocnom kapitále pre Pareto (modrá), lognormálne (čierna), loggamma (zelená), Weibullovo (červená) a gama (hnedá) rozdelenie výšok škôd.

rozdelenie odhadnutá pravdepodobnosť ruinovania vyššia ako pre lognormálne, Weibullovo a gama rozdelenie. Blížkosť výsledkov pre Weibullovo a gama rozdelenie zodpovedá tomu, že chvosty ich distribučných funkcií majú takmer rovnaký tvar, čo je znázornené na obrázku 5.7. Vidíme aj to, že tieto dve rozdelenia majú najľahšie chvosty a aj najnižšiu pravdepodobnosť ruinovania. Pre lognormálne rozdelenie sme pre vysoké hodnoty počiatočného kapitálu odhadli len o niečo vyššiu pravdepodobnosť ruinovania ako pre Weibullovo rozdelenie ale ako vidíme na obrázku 5.7 jeho chvost je ťažší ako chvost Weibullovoho rozdelenia. Najvyššiu pravdepodobnosť ruinovania pre vysoké hodnoty počiatočného kapitálu sme odhadli pre loggama a Paretovo rozdelenie, tieto rozdelenia majú aj ťažšie chvosty ako Weibullovo a gama rozdelenie. Celkovo nie sú rozdiely medzi jednotlivými rozdeleniami až tak výrazné, čo môže byť dané tým, že pre námi zvolený stredný počet udalostí v sledovanom intervale ( $\lambda\tau = 1000$ ) nastane veľká škoda len v niekoľko málo prípadoch.

rozdelenie	Paretovo	lognormálne	loggama	Weibullovo	gama
5%	127,81	150,93	150,16	144,57	144,99
1%	242,85	239,62	272,74	220,89	217,85
0,1%	611,32	361,51	563,50	352,14	345,71
0%	3686,96	498,48	1575,25	487,30	479,68
$1 - \psi(0, \tau)$	9,23%	9,51%	9,48%	9,54%	9,22%

Tabulka 5.3: Počiatočný kapitál potrebný k tomu, aby odhadnutá pravdepodobnosť ruinovania mala hodnotu 5%, 1% a 0,1%, minimálny kapitál potrebný k tomu, aby nedošlo k ruinovaniu v žiadnej našej simulácii a pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde pre nulový počiatočný kapitál ( $1 - \psi(0, \tau)$ ), všetko pre uvedené rozdelenia výšky škôd.

Vypočítané hodnoty počiatočného kapitálu potrebného k tomu, aby pravdepodobnosť ruinovania bola na úrovni 5%, 1% a 0,1%, sa nachádzajú v tabuľke 5.3. Vidíme, že na úrovni 5% a 1% nie sú veľké rozdiely vo výške potrebného počiatočného kapitálu. Na úrovni 5% potrebujeme vysoký počiatočný kapitál pre loggamma a lognormálne rozdelenie a najnižší je potrebný pre Paretovo rozdelenie. Na 1% je najvyšší potrebný počiatočný kapitál pre loggama rozdelenie, najnižší je pre gama rozdelenie. Aby bola pravdepodobnosť ruinovania 0,1% potrebujeme už pre Paretovo rozdelenie takmer dvojnásobok počiatočného kapitálu potrebného pre gama rozdelenie.



V tabuľke 5.3 pre zaujímavosť uvádzame aj odhadnutú pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde pre nulový počiatočný kapitál a kapitál potrebný k tomu, aby k ruinovaniu nedošlo v žiadnej simulácii. Odhadnutá pravdepodobnosť, že k ruinovaniu nedôjde pre nulový počiatočný kapitál, je pre všetky rozdelenia viac ako 9%, pričom najvyššia je pre Weibullovo rozdelenie a najnižšia je pre gama rozdelenie. Aby nedošlo k ruinovaniu v našich simuláciách, potrebujeme najvyšší počiatočný kapitál pre Paretovo rozdelenie až 3686,96 zatiaľ čo pre gama a Weibullovo rozdelenie potrebujeme kapitál vo výške len 479,68 respektíve 487,30.

# Kapitola 6

## Modelovanie vysokých škôd

Ak máme napozorované realizácie náhodnej veličiny a chceme pomocou nich určiť jej rozdelenie a špeciálne nás zaujíma pravdepodobnosť vysokej hodnoty, potom veľmi dobrým modelom pre chvost rozdelenia je zovšeobecnené Paretovo rozdelenie. Práve takáto situácia nastáva v poisťovníctve, kedy má poisťovňa k dispozícii napríklad dáta o veľkostiach škôd z minulých rokov a zaujíma ju rozdelenie výšky škody. Poisťovňa nemusí celé rozdelenie popísať len jedným modelom ale často sa používa iný model na chvost a iný na telo rozdelenia. Tento prístup je vhodný napríklad keď dáta vykazujú znaky rozdelenia s ťažkým chvostom, potom model, ktorý dobre popisuje celú vzorku, nemusí dobre popisovať pravdepodobnosť vysokej škody. Nevhodný model, ktorý nadhodnocuje pravdepodobnosť vzniku vysokej škody, by sa premietol do výšky poistného a poisťovňa by mohla stratiť konkurencieschopnosť na trhu. Alebo naopak mohli by nastať oveľa vyššie škody ako odhadnutý model predpokladal a poisťovňa by nemusela mať vytvorený dostatočný kapitál na ich pokrytie. Potreba modelovať chvost rozdelenia výšky škody vzniká aj keď sa poisťovňa chce zaistiť napríklad excess-of-loss zaistením, aby poznala cenu zaistenia.

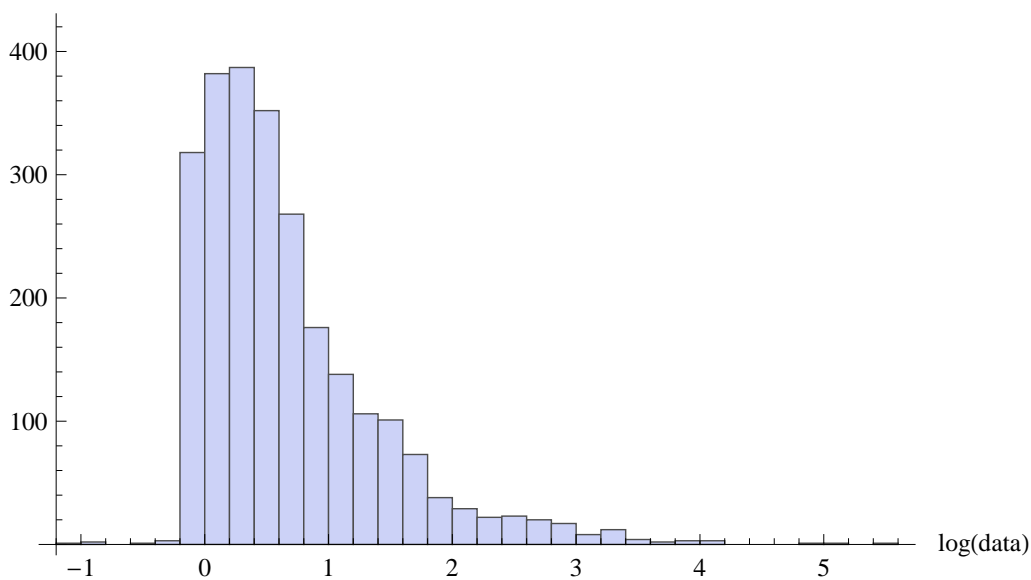
My máme k dispozícii dáta z poistenia proti požiarom v Dánsku z rokov 1980 až 1990 očistené o mieru inflácie. Dáta sú dostupné ako `danish` v knižnici `SMPracticals` v programe R [12]. Čiastky sú uvedené v miliónoch dánskych korún. V našej vzorke je  $N = 2492$  údajov. Boli zaznamenané len škody viac ako 0,3 mil. dánskych korún. Teória veľkých odchýlok sa zaoberá aj pravdepodobnosťou, že vznikne jedna veľká odchýlka, teda tým, aká je pravdepodobnosť, že náhodná veličina  $X$  prekročí vysokú hranicu. Preto, aby sme zistili pravdepodobnosť, že vznikne vysoká škoda, namodelujeme

z dát chvost rozdelenia výšky škody v danom poistnom odvetví v Dánsku.

Dáta považujeme za realizáciu náhodného výberu. V tabuľke 6.1 uvádzame základné empirické štatistické údaje a na obrázku 6.1 je histogram logaritmicke transformovaných dát. Vidíme, že aj logaritmicke transformované dáta sú zošikmené doprava.

stredná hodnota	3,0627	šíkmosť	19,8961
smerodajná odchylka	7,9767	25% kvantil	1,15718
minimum	0,3134	50% kvantil	1,63351
maximum	263,25	75% kvantil	2,64398

Tabuľka 6.1: Základné empirické štatistické údaje dát.



Obrázek 6.1: Histogram logaritmicke transformovaných dát.

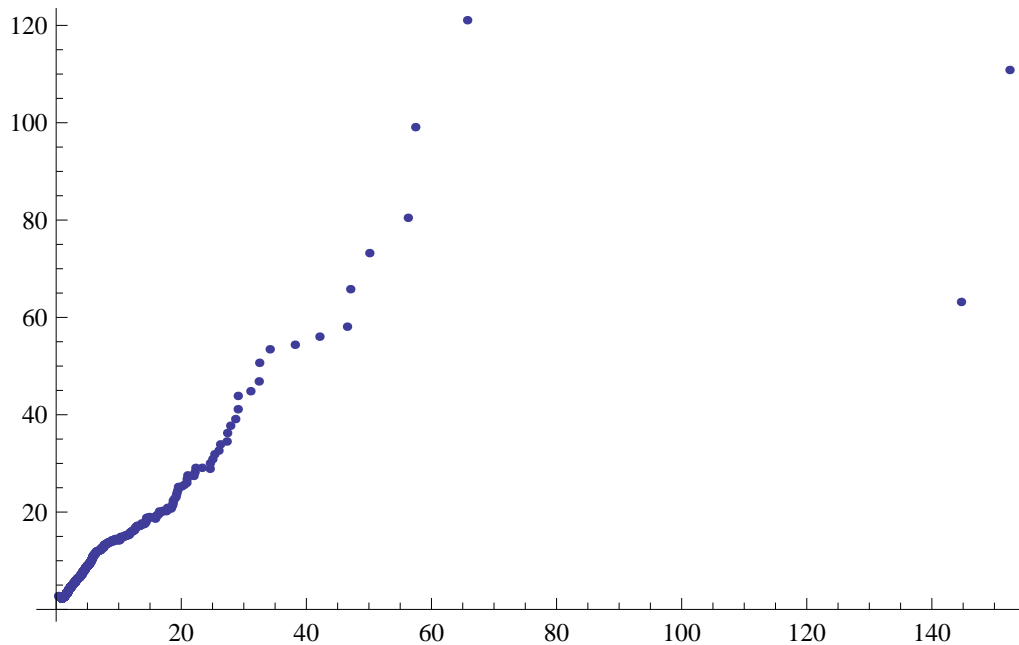
Najprv zistíme, či naše dáta majú znaky ťažkého chvosta. Vytvoríme graf empirickej funkcie strednej hodnoty prekročenia podľa (2.6) a QQ graf empirického rozdelenia oproti exponenciálnemu rozdeleniu. QQ graf je parametrický nákres, v ktorom sa vykresľuje kvantil empirickej distribučnej funkcie na horizontálnu os oproti kvantilu exponenciálneho rozdelenia na vertikál-

nej osi. Vykresľujú sa body

$$\left\{ \left( X_{(k)}, F_{exp}^{-1} \left( \frac{k}{N+1} \right) \right), k = 1, \dots, N \right\},$$

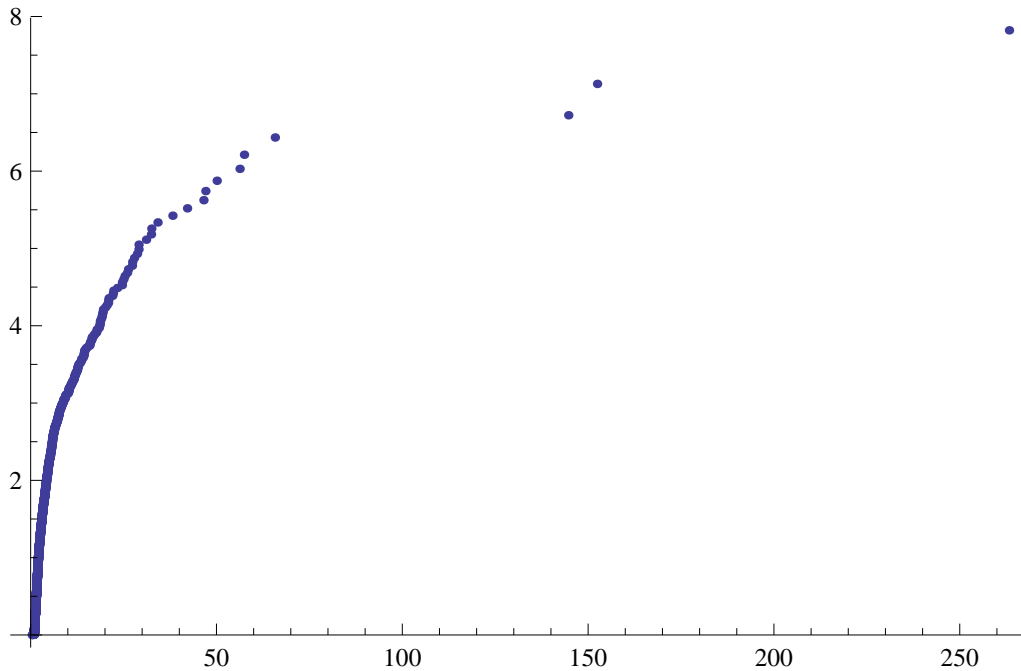
kde  $X_{(k)}$  je  $k$ -té pozorovanie zo vzostupne zoradeného náhodného výberu a  $F_{exp}^{-1}$  sme označili kvantilovú funkciu exponenciálneho rozdelenia s parametrom  $\lambda = 1$ :

$$F_{exp}^{-1}(\alpha) = -\frac{\log(1-\alpha)}{\lambda}, \quad \alpha \in (0, 1).$$



Obrázek 6.2: Graf empirickej funkcie strednej hodnoty prekročení pre dáta z poistenia proti požiarom v Dánsku.

Na obrázku 6.2 je znázornená empirická funkcia strednej hodnoty prekročenia vypočítaná z našich dát. Vieme, že pre náhodnú veličinu s exponenciálnym rozdelením je funkcia strednej hodnoty prekročenia konštantná a pre náhodnú veličinu s rozdelením s ťažkým chvostom rastie do nekonečna. Vidíme, že vypočítaná empirická funkcia strednej hodnoty prekročenia má rastúci trend. Rozdelenie, z ktorého pochádza náš náhodný výber, má teda ťažší chvost ako exponenciálne rozdelenie. Na obrázku 6.3 je príslušný QQ graf. Ak by náš výber pochádzal z exponenciálneho rozdelenia, potom by body

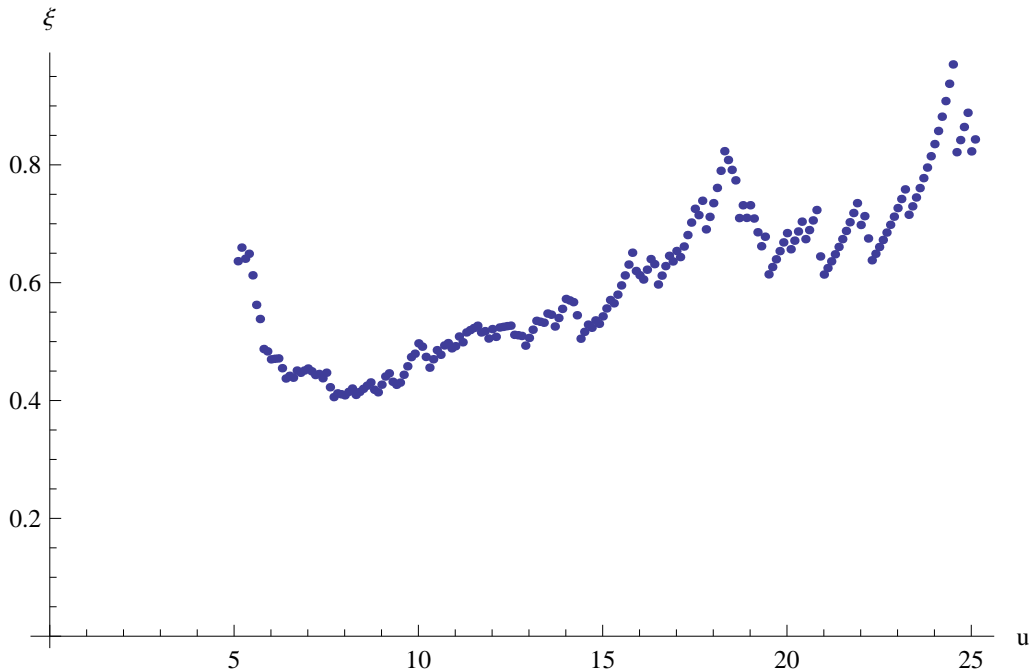


Obrázek 6.3: QQ graf empirického rozdelenia dát z poistenia proti požiarom v Dánsku oproti exponenciálnemu rozdeleniu.

ležali na priamke, ale my z konkávneho zakrivenia usudzujeme, že skúmané rozdelenie má ťažší chvost ako exponenciálne rozdelenie.

Ukázali sme, že naše dáta pochádzajú z rozdelenia s ťažkým chvostom, preto prekročenia hranice  $u$  môžeme na základe Balkemaovej-de Haanovej-Pickandsovej vety, vid' (2.7), modelovať zovšeobecneným Paretovým rozdelením. Musíme určiť hranicu  $u$ , od ktorej budeme modelovať. Pri voľbe  $u$  máme dva protichodné ciele. Potrebujeme zvoliť  $u$  dosť vysoké, aby sme zachovali v platnosti tvrdenie vety, ale ak zvolíme  $u$  príliš vysoké, potom nebudeme mať dosť pozorovaní, aby sme presne odhadli kvantily rozdelenia. Pri voľbe hranice  $u$  nám pomôže graf empirickej funkcie strednej hodnoty prekročenia. V podkapitole 2.4 sme vypočítali tvar funkcie strednej hodnoty prekročenia pre zovšeobecnené Paretovo rozdelenie. V premennej  $u$  je to lineárna funkcia, preto na grafe empirickej funkcie strednej hodnoty prekročenia (obrázok 6.2) hľadáme bod  $u$  tak, že na intervale  $[u, \infty)$  má  $\hat{e}_n$  približne lineárny tvar. Vidíme, že v priebehu  $\hat{e}_n$  nenastávajú veľké zmeny, zhruba nad hodnotou 18 už rastie s konštantnou smernicou.

Pomôže nám aj vlastnosť stability zovšeobecneného Paretovho rozdelenia. Ak nakreslíme graf závislosti parametra  $\xi$  odhadnutého pomocou metódy maximálnej vierohodnosti na voľbe hranice  $u$ , mal by sa graf stabilizovať v bode  $u$ , od ktorého sa náhodná veličina  $[X - u|X > u]$  správa podľa zovšeobecneného Paretovho rozdelenia, pretože podľa vlastnosti stability, ak sa náhodná veličina  $[X - u|X > u]$  správa podľa zovšeobecneného Paretovho rozdelenia, potom s rastúcou hranicou  $u$  sa parameter  $\xi$  nemení. Na obrázku 6.4 vidíme odhadnutý parameter  $\xi$  pre výšky hranice  $u$  od 5 do 25 s krokom 0,1. Od hranice  $u = 18$  má parameter  $\xi$  hodnotu okolo 0,7. Pre porovnanie zvolíme ešte jednu hodnotu hranice, od ktorej budeme modelovať, a to  $u = 6$ .



Obrázek 6.4: Parameter  $\xi$  v závislosti na výške hranice  $u$ .

Zvolili sme dve hranice 18 a 6. Pozorovaní s hodnotou väčšou ako 18 je v našej vzorke 46, čo je 1,85%, pozorovaní s hodnotou väčšou ako 6 máme 185, čo je 7,42%. Pozorovania, ktoré prekračujú zvolené hranice, budeme považovať za náhodný výber zo zovšeobecneného Paretovho rozdelenia s distribučnou funkciou tvaru

$$G_{\xi;u,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x > u.$$

Hranica  $u$  má hodnoty 18 resp. 6. Parametre  $\xi$  a  $\beta$  odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti. Všetky výpočty uskutočňujeme v programe Wolfram Mathematica 8 [14]. V tabuľke 6.2 máme zapísané hranice  $u$ , pre ne odhadnuté parametre a hodnotu  $D$ , čo je najväčšia vzdialenosť empirickej distribučnej funkcie od odhadnutej distribučnej funkcie,

$$D = \sup_{x \in P} |G_{\hat{\xi}; u, \hat{\beta}}(x) - G_{emp}(x)|,$$

kde  $P$  je množina našich pozorovaní.

hranica $u$	$\hat{\xi}$	$\hat{\beta}$	$D$
18	0,7350	7,3504	0,0616
6	0,4699	5,8457	0,0328

Tabuľka 6.2: Odhady parametrov modelu pre obe hranice a hodnota  $D$ .

Na obrázkoch 6.5 a 6.6 máme zakreslenú empirickú distribučnú funkciu v pozorovaniach (modré body) a distribučnú funkciu odhadnutého rozdelenia (červená krivka) pre hranicu 18 a 6. Vidíme, že v oboch prípadoch odhadnuté rozdelenie dobre aproximuje modelované pozorovania. To plynie aj z nízkej hodnoty  $D$  pre oba modely.

Aby sme overili správnosť odhadnutých modelov, na obrázkoch 6.7 a 6.8 sú znázornené QQ grafy empirického rozdelenia oproti odhadnutému rozdeleniu. Ak odhadnutý model dobre popisuje modelované dáta, mali by body na grafe ležať približne na priamke, vidíme, že to pre naše modely platí.

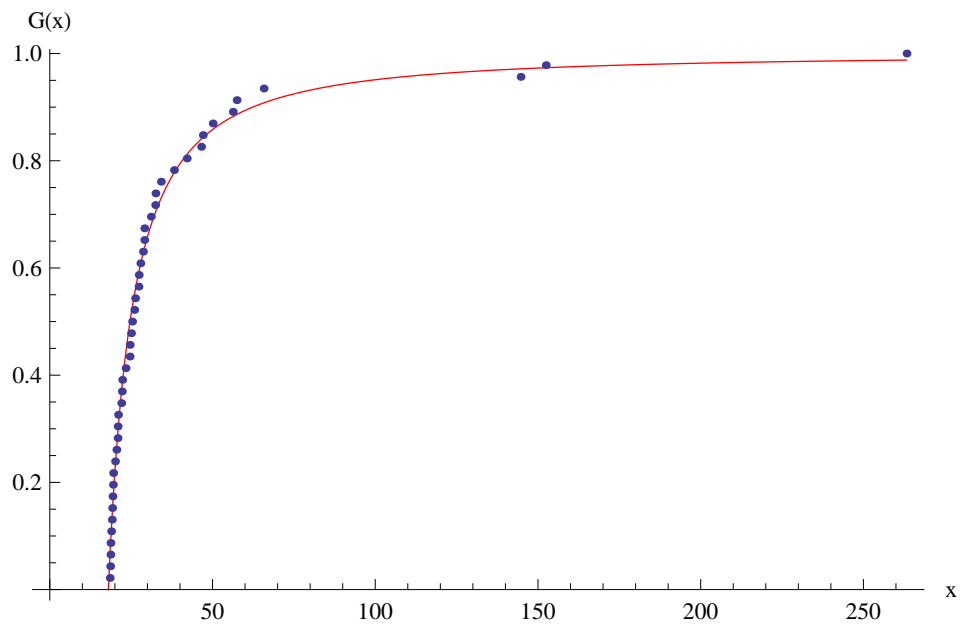
Zovšeobecným Paretoovým rozdelením  $G_{\hat{\xi}; u, \hat{\beta}}$  sme odhadli podmienené rozdelenie náhodnej veličiny  $[X - u | X > u]$ . Odhad rozdelenia pôvodnej náhodnej veličiny  $X$  nad vysokou hranicou  $u$  dostaneme zo vzťahu

$$F(x) = [1 - P(X \leq u)]F_u(x - u) + P(X \leq u), \quad x \geq u,$$

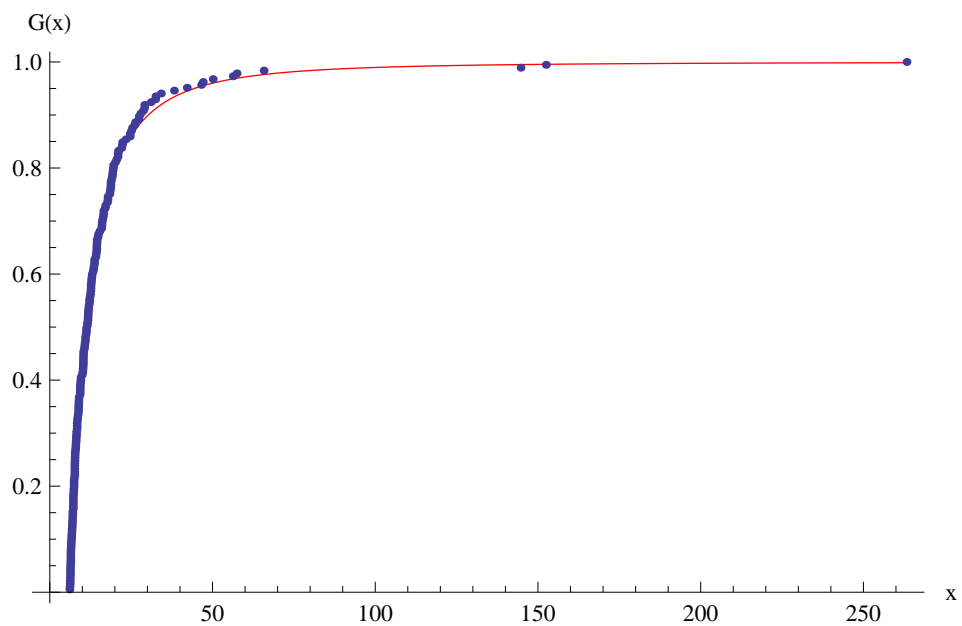
tak, že  $F_u(x - u)$  odhadneme pomocou  $G_{\hat{\xi}; u, \hat{\beta}}(x)$  a za  $P(X \leq u)$  dosadíme  $N_u/N$ , kde  $N$  značí počet všetkých pozorovaní a  $N_u$  je počet pozorovaní, ktoré neprekročili hranicu  $u$ ,

$$\hat{F}(x) = \left(1 - \frac{N_u}{N}\right) G_{\hat{\xi}; u, \hat{\beta}}(x) + \frac{N_u}{N}, \quad x \geq u.$$

Keď poznáme odhad rozdelenia náhodnej veličiny  $X$ , môžeme ľahko spočítať odhady kvantilov jej rozdelenia. V tabuľke 6.3 uvádzame odhady

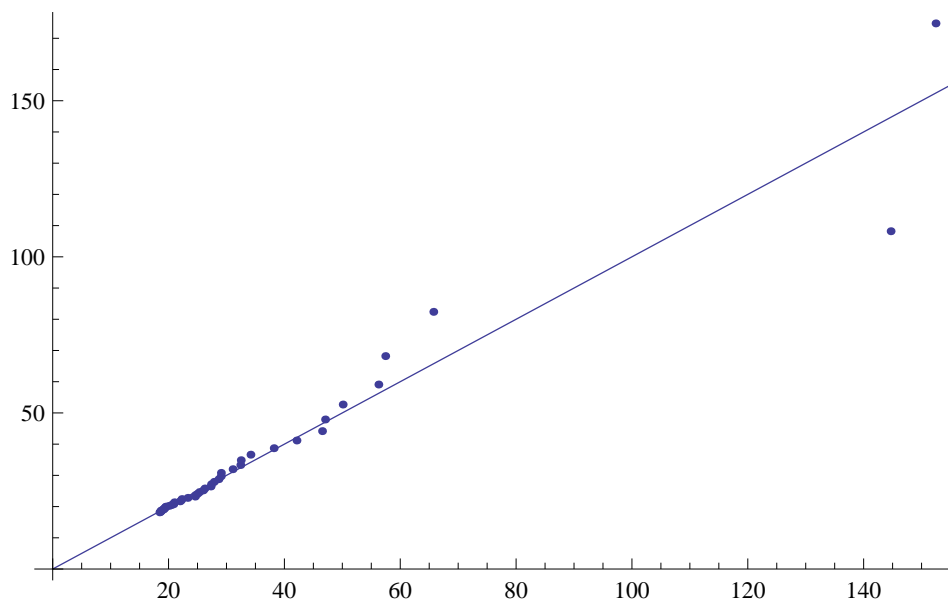


Obrázek 6.5: Empirická a odhadnutá distribučná funkcia pre model s hranicou  $u = 18$ .

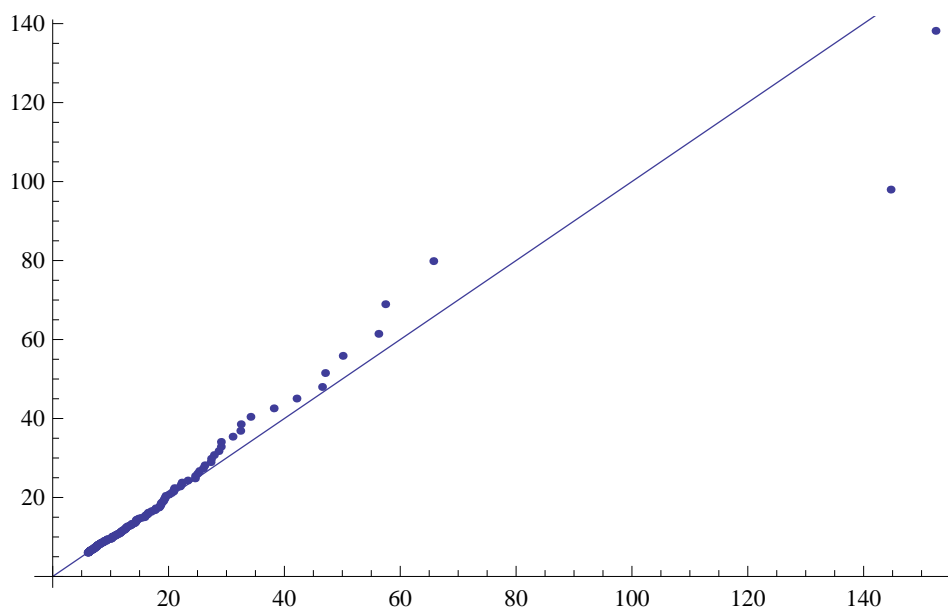


Obrázek 6.6: Empirická a odhadnutá distribučná funkcia pre model s hranicou  $u = 6$ .





Obrázek 6.7: QQ graf empirického rozdelenia oproti odhadnutému rozdeleniu pre model s hranicou  $u = 18$ .



Obrázek 6.8: QQ graf empirického rozdelenia oproti odhadnutému rozdeleniu pre model s hranicou  $u = 6$ .

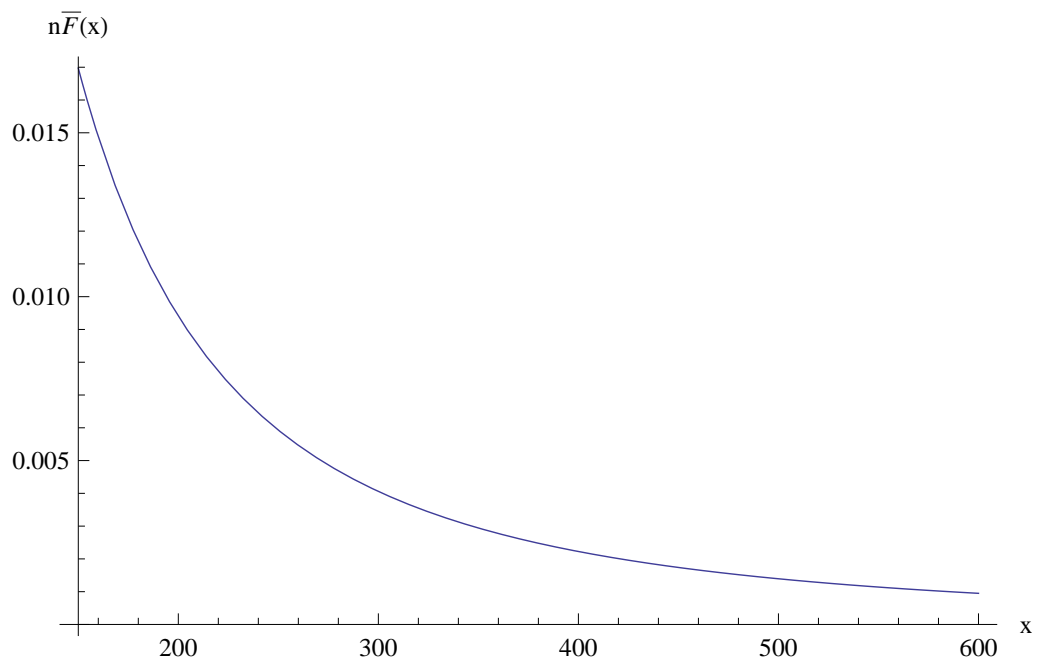
kvantilov pre oba naše odhadnuté rozdelenia a empirické odhady kvantilov. Pre model, v ktorom aproximujeme rozdelenie náhodnej veličiny  $[X - u | X > u]$  nad hranicou 18, neuvádzame 95% kvantil, pretože týmto modelom popisujeme len 1,85% pozorovaní, ktoré ležia nad hranicou 18.

kvantil	$u = 6$	$u = 18$	empirický
95%	8,54		8,45
99%	25,47	23,69	24,97
99,5%	37,76	34,12	32,47
99,9%	87,72	93,25	144,66

Tabulka 6.3: Odhady kvantilov pre modely s hranicou 6 a 18 a empirické odhady kvantilov náhodnej veličiny  $X$  popisujúcej výšku škody.

Ak  $S_n$  označuje čiastočný súčet nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín s distribučnou funkciou  $F$ , potom pravdepodobnosť, že  $S_n$  prekročí  $x$ , je chvostom  $n$ -násobnej konvolúcie  $\overline{F^{n*}}(x)$ . Podľa kapitoly 3 môžeme pre vysoké hodnoty  $x$  aproximovať  $\overline{F^{n*}}(x)$  pomocou  $n\overline{F}(x)$ . Na obrázku 6.9 vidíme  $n\overline{F}(x)$  pre náš model s hranicou  $u = 6$ , za  $n$  zvolíme hodnotu 50. Obrázok 6.9 zobrazuje náš odhad pravdepodobnosti vzniku veľkej odchýlky.

Mať dobrý model pre chvost rozdelenia náhodnej veličiny  $X$ , ktorá v našom prípade reprezentuje výšku škody, je podstatné napríklad pri oceňovaní zaistenia alebo pri stanovení hodnoty v riziku (value at risk). Model vytvorený pomocou zovšeobecného Paretovhov rozdelenia sa opiera o silné teoretické predpoklady. Naše odhadnuté modely veľmi dobre popisujú zadané dáta. Nesmieme však zabúdať, že tieto modely vychádzajú z minulosti a pri ich tvorbe predpokladáme, že budúcnosť bude rovnaká ako minulosť, a nepredpokladáme zmeny v správaní sa náhodnej veličiny  $X$ .



Obrázek 6.9: Aproximácia chvostu celkového úhrnu  $n$  škôd pomocou  $n$ -násobku chvostu namodelovanej distribučnej funkcie,  $n = 50$ .

# Kapitola 7

## Záver

V našej práci sme študovali teóriu veľkých odchýlok pre rozdelenia s ťažkými chvostami. Venovali sme sa jej použitiu pri voľbe bezpečnostnej prirážky, v zaistení a v teórií ruinovania. Ukázali sme, kde sa vyskytuje pravdepodobnosť veľkej odchýlky. Teóriu veľkých odchýlok sme využili k odhadu pravdepodobnosti ruinovania a zaoberali sme sa podmienkami na rozdelenie náhodnej výšky škody, ktoré sú potrebné, aby odhad platil.

Simulovali sme výšky a časy vzniku škôd, sledovali sme výšku kapitálu poisťovne a pri akom počiatočnom kapitále dôjde k ruinovaniu. Študovali sme ako sa zmení pravdepodobnosť ruinovania pri zmene parametrov modelu a aj pri zmene rozdelenia výšky škody.

Z reálnych dát sme namodelovali chvost rozdelenia výšky škody zovšeobecneným Paretovým rozdelením. Z odhadu rozdelenia výšky škody sme určili odhady kvantilov a ukázali sme, ako určiť odhad pravdepodobnosti vzniku veľkej odchýlky.

V práci by sa dalo pokračovať nájdením ďalších aplikácií teórie veľkých odchýlok.

# Literatura

- [1] A. C. Cebrián, M. Denuit, P. Lambert (2003): Generalized Pareto fit to the society of actuaries large claims database, *North American Actuarial Journal* **7**, 18–36.
- [2] W. Feller (1971): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II.*, 2nd edition, Wiley, New York.
- [3] F. den Hollander (2000): *Large Deviations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [4] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- [5] D. B. H. Cline, T. Hsing (1998): Large deviation probabilities for sums of random variables with heavy or subexponential tails, Technical report, Texas A&M University.
- [6] R. Kaas (2001): *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [7] P. Mandl, L. Mazurová (1999): *Matematické základy neživotního pojištění*, Matfyzpress, Praha.
- [8] A. J. McNeil (1997): Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory, *ASTIN Bulletin* **27**, 117–139.
- [9] T. Mikosch (2009): *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process*, 2nd edition, Springer, Berlin.
- [10] T. Mikosch, A. V. Nagaev (1998): Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance, *Extremes* **1**, 81–110.

- [11] V. V. Petrov (1995): *Limit Theorems of Probability Theory*, Clarendon Press, Oxford.
- [12] R Development Core Team (2010): *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- [13] Wolfram Research, Inc. (2008): *Mathematica, version 6.0*, Champaign, Illinois.
- [14] Wolfram Research, Inc. (2010): *Mathematica, version 8.0*, Champaign, Illinois.