Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Kašpar

Makroskopická gravitace

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.
Studijní program: teoretická fyzika

2010

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce RNDr. Otakaru Svítkovi, Ph.D., za veškerou ochotu spojenou se vznikem a průběhem této práce. Dále bych chtěl poděkovat Jakubu Hruškovi za inspiraci a cenné rady ohledně tématiky Cartanových skaláru. Nesmím také zapomenout na rodiče a všechny své kamarády, kteří mi poskytují tolik potřebné zázemí a podporu během celého studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 14.4.2010 Petr Kašpar

Obsah

Název práce: Makroskopická gravitace
Autor: Petr Kašpar
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.
e-mail vedoucího: Otakar.Svitek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Díky nelinearitě Einsteinových rovnic lze jejich středováním obdržet rovnice obecné relativity (zejména s uplatněním v kosmologii) s modifikovanou pravou stranou. Jedním z prvních kovariantních přístupů k tomuto problému je teorie makroskopická gravitace. Další navrhovanou možností je nejprve geometrii prostoročasu charakterizovat sadou Cartanových skalárů a ty poté středovat.

Klíčová slova: kosmologie, středování, Cartanovy skaláry

Title: Macroscopic Gravity
Author: Petr Kašpar
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Otakar.Svitek@mff.cuni.cz

Abstract: Due to the nonlinearity of the Einstein equations it is possible to obtain modified equations of the general relativity (with application in cosmology) just by averaging. One of the first covariant approaches to this problem is the theory of Macroscopic Gravity. Next proposed possibility is to first characterize spacetime by the Cartan scalars and then to proceed averaging procedure.

Keywords: cosmology, averaging problem, Cartan scalars

Kapitola 1

Úvod

Obvyklým předpokladem při konstrukci kosmologických modelů je existence prostorové škály L, na které se pozorovatelný vesmír jeví téměř homogenní a izotropní. Einsteinovy rovnice obecné relativity jsou však dobře testovány na menších vzdálenostech (např. ohyb světla kolem Slunce, stáčení perihelia Merkuru), a korektní postup při sestavování kosmologických rovnic by tak měl spočívat ve středování Einsteinových rovnic (způsobem analogickým odvození Maxwellových rovnic z Lorentzovy elektronové teorie).

V 80. letech minulého století Ellis zdůraznil tento často opomíjený krok a důsledky s ním spojené [17]. Klíčové je zde pozorování, že střední hodnota Einsteinova tenzoru je obecně různá od Einsteinova tenzoru sestaveného ze středované metriky, tj. $\langle E_{\mu\nu}(g_{\mu\nu})\rangle \neq E_{\mu\nu}(\langle g_{\mu\nu}\rangle)$. Chceme-li zachovat obvyklý přístup FRW kosmologie a využít středovanou (homogenní a izotropní) metriku $\langle g_{\mu\nu}\rangle$, obdržíme modifikované rovnice

$$E_{\mu\nu}(\langle g_{\mu\nu}\rangle) = 8\pi \langle T_{\mu\nu}\rangle + C_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

Korelační člen $C_{\mu\nu}$ představuje geometrickou korekci, kterou je možno interpretovat jako část makroskopického efektivního tenzoru energie a hybnosti. Tento člen nemusí nutně vyhovovat energetickým podmínkám kladeným na fyzikální zdroje gravitačního pole.

Naměřená kosmologická data se obvykle interpretují v rámci ΛCMD modelu reprezentujícího vesmír, který obsahuje 73% temné energie, 23% temné hmoty a pouze zbývajících necelých pět procent představuje známou formu hmoty a energie. V poslední době se objevily spekulace, že příspěvek od temné energie lze vysvětlit i bez nutnosti zavedení kosmologické konstanty, quintessence pole nebo dokonce modifikace teorie relativity jako pouhý důsledek středování dynamických rovnic. Ohledně velikosti a tvaru tohoto korelačního členu se vedou v poslední velké diskuze. Nápadná je především časová shoda růstu nelineárních struktur ve formě galaxií a období dominance temné energie.

Pro korektní analýzu tohoto problému je třeba kovariantním způsobem středovat Einsteinovy rovnice. V první kapitole bude podán přehled jednoho možného přístupu - Zalaletdinova teorie makroskopické gravitace, včetně drobných doplňků ilustrujících nejednoznačnost středování a interpretaci nalezených řešení. Dále je formalismus aplikován na středování vysokofrekvenčních gravitačních vln na de Sitterově prostoročasu. Po stručném přehledu dalších metod středování je v čtvrté kapitole nastíněn nový přístup ke středování Einsteinových rovnic využívající teorii Cartanových skalárů.

Kapitola 2

Makroskopická gravitace

2.1 Středovací schéma

První obtíž při středování Einsteinových rovnic spočívá ve volbě korektní definice střední hodnoty tenzorové pole $t^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}(x)$. Na rozdíl od plochého prostoru má totiž obecný tenzor v různých bodech variety odlišné transformační vlastnosti a jeho integrací nemusí vzniknout tenzorový objekt (jak lze nahlédnout z definice Riemannova integrálu).

Shirokov a Fisher [43] v 60. letech navrhli následující středovací schéma:

$$\langle g_{\mu\nu}(x)\rangle = \frac{\int\limits_{\Omega} g(x+x')\sqrt{-g}d^4x'}{\int\limits_{\Omega}\sqrt{-g}d^4x'}, \tag{2.1}$$

$g_{\mu\nu}(x)$ je metrický tenzor v bodě x a oblast Ω je dostatečně velká vzhledem k metrickým fluktuacím. Hlavním výsledkem středování byla přítomnost polarizačního členu, který pozměnil dynamické rovnice a efektivně představoval repulsivní gravitační člen. Podobným přístupem Noonan [35], [36] rozšířil definici na obecný tenzorový objekt

$$\langle Q(x)\rangle = \frac{\int\limits_{\Omega} Q'(x+x')\sqrt{-g}d^4x'}{\int\limits_{\Omega}\sqrt{-g}d^4x'}. \tag{2.2}$$

V aproximaci slabého pole a pomalého pohybu, kdy lze použít pro gravitační pole hvězd Newtonovskou aproximaci, byl nalezen nalezen dodatečný příspěvek k tenzoru energie a hybnosti.

Výše uvedené středování není kovariantní nově vzniklý objekt není tenzorové povahy. Je tedy žádoucí nejprve definovat dodatečný operátor, který přenese tenzor z bodu x' do bodu x. Jako vhodný kandidát se na první pohled jeví bivektor paralelního přenosu $g_{\beta}^{\alpha'}(x', x)$ (teorie se pak ale omezuje na prostory se specifickou křivostí, navíc středování nemění tvar metrického tenzoru [23], [49]). V teorii makroskopické gravitace (nadále MG) je zaveden bivektor $\mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x)$ transformující se jako vektor v bodě x', resp. kovektor v bodě x. Jeho konstrukce bude vyplývat z následujících požadovaných vlastností:

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x) = \delta_{\beta}^{\alpha}, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{W}_{\gamma''}^{\alpha'}(x', x'')\mathcal{W}_{\beta}^{\gamma''}(x'', x) = \mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x). \tag{2.4}$$

Z aplikace limity (2.3) na rovnici (2.4) přímo vyplývá existence inverzního operátoru $[\mathcal{W}_{\gamma''}^{\alpha'}(x', x'')]^{-1} = \mathcal{W}_{\alpha}^{\gamma''}(x'', x')$. Dále lze dokázat [32], že vlastnosti (2.3) a (2.4) jsou ekvivalentní následujícímu tvaru bilokálního operátoru

$$\mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x, x') = F_{\gamma}^{\alpha'}(x')F_{\beta}^{-1\gamma}(x). \tag{2.5}$$

Nyní je možno pro danou kompaktní oblast $\Omega \subset \mathcal{M}$ na n-dimenzionální metrické varietě $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ s objemovou n-formou definovat střední hodnotu tenzorového pole $t_{\beta\ldots}^{\alpha\ldots}(x)$ $x \subset \mathcal{M}$ podle vztahu

$$\bar{t}_{\beta\ldots}^{\alpha\ldots}(x) = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} \tilde{t}_{\beta\ldots}^{\alpha\ldots}(x, x')\sqrt{-g'}d^n x', \tag{2.6}$$

g=det$(g_{\alpha\beta})$, V_{Ω} je objem oblasti Ω,

$$V_{\Omega} = \int_{\Omega} \sqrt{-g}d^n x. \tag{2.7}$$

a $\tilde{t}_{\beta\ldots}^{\alpha\ldots}(x, x')$ představuje bilokální rozšíření obecného tenzorového objektu $t_{\beta\ldots}^{\alpha\ldots}(x)$ pomocí bivektoru $\mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x)$.

$$\tilde{t}_{\beta\ldots}^{\alpha\ldots}(x, x') = \mathcal{W}_{\alpha'}^{\alpha}(x', x)\ldots\mathcal{W}_{\beta}^{\beta'}(x', x)\ldots t_{\beta'\ldots}^{\alpha'\ldots}(x'). \tag{2.8}$$

Z této definice plyne, že bilokální rozšíření tenzoru (2.8) se transformuje jako původní tenzor v bodě x, ale jako skalár v x' (přes který se integruje).

Tato vlastnost umožňuje korektní definici střední hodnoty (2.6).

V další části textu budou středovány rovnice popisující geometrii prostoročasu (resp. riemannovské variety) a přepsány pomocí nových proměnných. K tomu je žádoucí umět porovnat derivaci střední hodnoty tenzoru a střední hodnotu derivace. Podle definice platí

$$\frac{d}{d\lambda}\bar{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}(x) = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta\lambda}\left(\bar{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}(x+\xi\Delta\lambda) - \bar{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}(x)\right), \tag{2.9}$$

kde x a $x+\xi\Delta\lambda$ jsou souřadnice dvou blízkých bodů a $\Delta\lambda$ je malá změna parametru okolo integrální křivky vektorového pole ξ. Při počítání Lieovy derivace je také nutno zkonstruovat novou středovací oblast - tj. body $x \in \Omega$ Lieovsky přesunout pomocí nového bilokálního vektorového pole $S^{\alpha'}$. Situace se v následujícím textu zjednoduší, použije-li se pro definici $S^{\alpha'}$ stejný bivektor $\mathcal{W}^{\alpha'}_{\beta}(x', x)$, tj.

$$S^{\alpha'}(x, x') = \mathcal{W}^{\alpha'}_{\beta}(x', x)\xi^{\beta}(x). \tag{2.10}$$

Výsledkem je vztah ([48], [50])

$$\frac{d}{d\lambda}\bar{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = \xi^{\rho}(x)\left[\left\langle \eth_{\rho}\tilde{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}\right\rangle + \left\langle \mathcal{W}^{\sigma'}_{\rho;\sigma'}\tilde{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}\right\rangle - \left\langle \mathcal{W}^{\sigma'}_{\rho;\sigma'}\right\rangle \bar{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots}\right]. \tag{2.11}$$

Symbol $\eth$ zde označuje bilokální parciální derivaci

$$\eth_{\rho} := \partial_{\rho} + \mathcal{W}^{\sigma'}_{\rho}\partial_{\sigma'}. \tag{2.12}$$

Prozatímní volba bilokálního operátoru (2.5) není jednoznačná. Při pohledu na rovnici (2.11) se nabízí omezení na bivektor vyhovující požadavku

$$\mathcal{W}^{\sigma'}_{\rho;\sigma'} = 0, \tag{2.13}$$

jehož fyzikální interpretace je přirozená - zachování objemu při Lieovském přesunu, tj. vektorové pole $S^{\alpha'}(x, x')$ má nulovou divergenci.

Dále je požadována komutace parciálních derivací, tj. $\bar{t}^{\alpha\dots}_{\beta\dots,[\rho\sigma]} = 0$. Podle definice (2.6) je pak nutnou a postačující podmínkou vztah

$$\mathcal{W}^{\alpha'}_{[\beta,\gamma]} + \mathcal{W}^{\alpha'}_{[\beta,\delta'}\mathcal{W}^{\delta'}_{\gamma]} = 0. \tag{2.14}$$

Za jakých podmínek je možno tyto rovnice splnit, je analyzováno v článku M. Marse a R. M. Zalaletdinova [32], kde je také proveden důkaz následujícího tvrzení: *Na libovolné n-dimenzionální varietě $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ s objemovou n-formou lokálně existuje objem-zachovávající bivektor $\mathcal{W}^{\alpha'}_{\beta}(x', x)$ tvaru (2.5) splňující (2.13) a (2.14).*

Ve stejném článku je rozebrána konkrétní třída řešení

$$\mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x) = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \phi^i} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^{\beta}}. \tag{2.15}$$

Vezmou-li se konkrétně funkce $\phi^i(x)$ za definici nových souřadnic, má v nich operátor $\mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x)$ jednoduchý tvar bilokálního Kroneckerova symbolu $\delta_{\beta}^{\alpha'}$. Takto zavedený, tzv. vlastní systém souřadnic, je pro jednoduchost středování v teorii makroskopické gravitace analogií kartézských souřadnic v Minkovského prostoročasu. Navíc platí tvrzení, jež bude aplikováno v pozdější části texu v kontextu středování gravitačních vln: *libovolný vlastní systém souřadnic, ve kterém bivektor (2.15) splní (2.13), je nutně objemzachovávající. Tj.* $\det(g_{\mu\nu}(\phi^k)) = konst.$

Doposud byla explicitně ukázána konstrukce střední hodnoty tenzorového pole t v konkrétním bodě x. Abychom získali nové tenzorové pole $\bar{t}$, je třeba po volbě bilokálního operátoru $\mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}$ a středovací oblasti Ω v bodě x provést stejnou proceduru na celou část variety, kde chceme mít středované tenzorové pole $\bar{t}$ definované. To vyžaduje také Lieův přenos středovací oblasti Ω z bodu x do bodu y pomocí bilokálního vektorového pole $S^{\alpha'}(x, x') = \mathcal{W}_{\beta}^{\alpha'}(x', x)\xi^{\beta}(x)$.

Díky vlastnosti (2.13) je (čtyřrozměrný) objem V_{Ω} volným parametrem teorie MG (např. při aplikaci v kosmologii je typická velikost středovací oblasti řádově 100 MPc). Vektorové pole $S^{\alpha'}(x, x')$ ale může mít obecně nenulovou rotaci nebo střižnou deformaci a středovací oblast tak může změnit podstatným způsobem svůj tvar a tím i vlastnosti nového tenzorové pole $\bar{t}$: Ω se zde může změnit z koule na podlouhlý elipsoid, což by např. v kosmologii narušilo předpoklad škály středování.

Vektorové pole $\xi^{\beta}(x)$ v definici (2.10) není potřeba přidávat jako další nezávislou konstrukci - její existenci zaručuje samotná teorie MG: Objekty $F_{\gamma}^{\alpha}(x)$ a $F_{\beta}^{-1\gamma}(x)$ v rozkladu bivektoru (2.5) lze totiž chápat jako n lineárně nezávislých vektorových polí a asociovaných 1-forem, splňujících komutační relace (resp. Maurer-Cartanovy rovnice pro duální 1-formy) s konstantními neholonomními koeficienty $C^i_{jk} = konst.$, tj.

$$[\mathbf{f}_{\alpha}, \mathbf{f}_{\beta}] = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{f}_{\gamma}, \tag{2.16}$$

při označení vektoru $\mathbf{f}_{\alpha} = F^{\rho}_{\alpha}(x)\boldsymbol{\partial}_{\rho}$.

Řešení bivektoru (2.15) odpovídá speciální volbě $C^i_{jk} = 0$, a systém vlastních souřadnic ϕ^i je tak asociován s volbou holonomní báze, kterou lze použít pro definici vektorového pole $\xi^\beta(x)$. Opět je tu jistá nejednoznačnost, jak lze rozpoznat z tvaru řešení (2.15): Tvoří-li ϕ^i systém vlastních souřadnic, pak stejnou vlastnost splní $\phi^{i\prime} = k\phi^i$, $k \in \mathbb{R}$ a tím i asociovaný vektor $F'^{\alpha}_{\gamma}(x) = \frac{1}{k} F^{\alpha}_{\gamma}(x)$ je vhodným kandidátem pro $\xi^\beta(x)$. Zafixujeme-li bilokální operátor $\mathcal{W}^{\alpha'}_{\beta}$, můžeme volbou libovolné reálné konstanty k vhodným způsobem přeškálovat kinematické veličiny kongruence $S^{\alpha'}(x, x')$ (schématicky - $\mathcal{W} = FF^{-1}$ lze chápat jako $\mathcal{W} = kF\frac{1}{k}F^{-1}$).

Ukazuje se tak, že MG neposkytuje jednoznačný návod, jak obdržet nové středované tenzorové pole. Při aplikacích v OTR a zejména v kosmologii ale nejsou geometrické objekty charakterizující reálnou varietu explicitně známy, proto je důležitá alespoň existence středování. V další části textu uvidíme, že MG poskytuje soustavu algebraických a diferenciálních rovnic pro korelační tenzor měřící netrivialitu středování. Po uvážení tvaru středované metriky pak lze obdržet modifikaci pravé strany středovaných Einsteinových rovnic, v čemž spočívá hlavní přínos MG.

2.2 Geometrie ve formalismu p-forem

Po zavedení středovacího schématu by mělo následovat bilokální rozšíření rovnic charakterizujících Riemannovskou varietu (např. algebraické a diferenciální vlastnosti metrického a Riemannova tenzoru) a následně jejich středování [48]. Aby se lépe projevila kovariantní (na souřadnicích nezávislá) procedura středování a zároveň se snížil maximální počet použitých indexů, je vhodné pracovat v jazyce p-forem [33], [34].

Nejprve zvolíme pro jednoduchost souřadnicovou bázi $\mathbf{e}_\mu$ a k ní duální $\mathbf{d}x^\mu$. 1-formy konexe $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ pak definujeme pomocí vnější derivace rozšířené na tenzor-značné p-formy

$$\mathbf{d}\mathbf{e}_\mu = \boldsymbol{\omega}^\rho{}_\mu \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho(\Gamma^\rho_{\mu\sigma})\mathbf{d}x^\sigma. \tag{2.17}$$

Cartanovy rovnice struktury v případě nulové torze mají tvar

$$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\rho \wedge \mathbf{d}x^\rho = 0, \tag{2.18}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\rho \wedge \boldsymbol{\omega}^\rho{}_\nu = \mathbf{r}^\mu{}_\nu. \tag{2.19}$$

V poslední rovnosti jsou zavedeny 2-formy křivosti, které lze vyjádřit pomocí složek Riemannova tenzoru $\mathbf{r}^\mu{}_\nu = 1/2 R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\mathbf{d}x^\rho \wedge \mathbf{d}x^\sigma$. Dále pro jednoduchost zápisu definujeme kovariantní vnější derivaci $\mathbf{D}_\omega$ (asociovanou s konexí $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$) působením na tenzor-značnou p-formu $\mathbf{t}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}(x)$ (formové indexy nejsou explicitně vypsány)

$$\mathbf{D}_\omega \mathbf{t}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} = \mathbf{d}\mathbf{t}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} - \boldsymbol{\omega}^\rho{}_\beta \wedge \mathbf{t}^{\alpha\ldots}_{\rho\ldots} + \ldots + \boldsymbol{\omega}^\alpha{}_\rho \wedge \mathbf{t}^{\rho\ldots}_{\beta\ldots} + \ldots, \tag{2.20}$$

pomocí které zapíšeme podmínku kompatibility mezi metrikou a konexí

$$\mathbf{D}_\omega g_{\mu\nu} = \mathbf{d}g_{\mu\nu} - g_{\mu\rho}\boldsymbol{\omega}^\rho{}_\nu - g_{\rho\nu}\boldsymbol{\omega}^\rho{}_\mu = 0. \tag{2.21}$$

Pro úplnost je třeba dopsat příslušné rovnice integrability, které dostaneme aplikací (obyčejné) vnější derivace $\mathbf{d}$ na rovnice (2.18), (2.19), (2.21).

$$\boldsymbol{r}^\mu{}_\rho \wedge \mathbf{d}x^\rho = 0, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{r}^\mu{}_\nu - \boldsymbol{\omega}^\rho{}_\nu \wedge \boldsymbol{r}^\mu{}_\rho + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\rho \wedge \boldsymbol{r}^\rho{}_\nu = 0, \tag{2.23}$$

$$g_{\mu\rho}\mathbf{r}^\rho{}_\nu + g_{\rho\nu}\mathbf{r}^\rho{}_\mu = 0. \tag{2.24}$$

Abychom mohli předchozí rovnice středovat, využije se teorie bilokálního vnějšího kalkulu [50]. Pro bilokální (p,k') formu (tj. p-formu v bodě x a k-formu v x')

$$\boldsymbol{\alpha}(x,x') = \frac{1}{p!k!}\alpha_{\rho....\sigma'...}\mathbf{d}x^{\rho} \wedge ...\mathbf{d}x^{\sigma'} \wedge ..., \tag{2.25}$$

zavedeme posunutou vnější derivaci $\boldsymbol{d}'_{\mathcal{W}}$ podle pravidla (derivace v bodě x', antisymetrizace v x)

$$\boldsymbol{d}'_{\mathcal{W}}\boldsymbol{\alpha}(x,x') = \frac{1}{p!k!}\alpha_{\rho....\sigma'...,\tau'}\mathcal{W}^{\tau'}{}_{\lambda}\mathbf{d}x^{\lambda} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} \wedge ...\mathbf{d}x^{\sigma} \wedge ... \tag{2.26}$$

a vnější derivaci $\mathbf{d}$ nahradíme bilokální vnější derivací $\boldsymbol{đ} = \boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}'_{\mathcal{W}}$. Podmínky (2.13), (2.14) požadované na bivektor $\mathcal{W}$ se přeformulují do tvaru

$$\mathrm{div}_{\epsilon}\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\rho'}{}_{\alpha;\rho'}\mathbf{d}x^{\alpha} = 0, \tag{2.27}$$

$$\mathbf{đ}\mathcal{W}^{\alpha'} = \mathbf{đ}(\mathcal{W}^{\alpha'}{}_{\rho}\mathbf{d}x^{\rho}) = 0. \tag{2.28}$$

Druhá z podmínek je ekvivalentním přepisem nilpotence bilokální vnější derivace, tj. $\mathbf{đđ} = 0$. Za těchto předpokladů po vzoru (2.11) nalezneme jednoduchou komutační relaci

$$\mathbf{d}\bar{t}^{\alpha...}_{\beta...} = \left\langle \mathbf{đ}\tilde{t}^{\alpha...}_{\beta...} \right\rangle. \tag{2.29}$$

Nyní je možno pokračovat s bilokálním rozšířením výše napsaných rovnic charakterizujících riemannovskou geometrii. Bilokálním rozšířením bázového vektoru $\mathbf{e}_{\mu}$ definujeme bilokální 1-formu konexe $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$, jejíž střední hodnota bude mít později význačné postavení na středované varietě $\bar{\mathcal{M}}$.

$$\mathbf{đ}(\mathcal{W}^{\rho'}{}_{\mu}\mathbf{e}_{\rho'}) = \boldsymbol{\Omega}^{\sigma}_{\mu}(\mathcal{W}^{\rho'}{}_{\sigma}\mathbf{e}_{\rho'}). \tag{2.30}$$

Cartanovy rovnice struktury (2.18), (2.19) se bilokálně rozšíří na

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} = 0, \tag{2.31}$$

$$\mathbf{đ}\boldsymbol{\Omega}^{\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{\Omega}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \boldsymbol{\Omega}^{\rho}{}_{\nu} = \tilde{\mathbf{r}}^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.32}$$

Podobně s využitím bilokální kovariantní vnější derivace $\mathbf{Đ}_{\Omega}$ se přepíše podmínka kovariantně konstantní metriky (2.21)

$$\mathbf{Đ}_{\Omega}g_{\mu\nu} = \mathbf{đ}\tilde{g}_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\rho}\boldsymbol{\Omega}^{\rho}{}_{\nu} - \tilde{g}_{\rho\nu}\boldsymbol{\Omega}^{\rho}{}_{\mu} = 0 \tag{2.33}$$

Stejně tak i rovnice integrability (2.22) - (2.24)

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} = 0, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{đ}\tilde{\boldsymbol{r}}^{\mu}{}_{\nu} - \boldsymbol{\Omega}^{\rho}{}_{\nu} \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}^{\mu}{}_{\rho} + \boldsymbol{\Omega}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}^{\rho}{}_{\nu} = 0, \tag{2.35}$$

$$\tilde{g}_{\mu\rho}\tilde{\mathbf{r}}^{\rho}{}_{\nu} + \tilde{g}_{\rho\nu}\tilde{\mathbf{r}}^{\rho}{}_{\mu} = 0. \tag{2.36}$$

2.3 Středování Cartanových rovnic struktury

Dalším krokem je zkonstruovat geometrické objekty na středované varietě $\bar{\mathcal{M}}$ s využitím (2.31) - (2.36). Přímočaré je středování rovnic (2.31) a (2.34) (s označením $\boldsymbol{R}^{\mu}{}_{\nu} = \langle \tilde{\boldsymbol{r}}^{\mu}{}_{\nu} \rangle$)

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} = 0, \tag{2.37}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} = 0. \tag{2.38}$$

Hlavní geometrickou strukturou, z které se konstruují ostatní význačné tenzorové veličiny na varietě $\bar{\mathcal{M}}$, je v Zalaletdinově teorii makroskopické gravitace středovaná 1-forma konexe $\bar{\Omega}^{\mu}{}_{\nu}$. Odchylku od triviálního středování měří korelační 2-forma,

$$\boldsymbol{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} = \left\langle \boldsymbol{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \boldsymbol{\Omega}^{\gamma}{}_{\delta} \right\rangle - \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\gamma}{}_{\delta}, \tag{2.39}$$

jejíž složky budou později vystupovat na pravé straně středovaných Einsteinových rovnic. 2-formu křivosti $\mathbf{M}^{\mu}{}_{\nu}$ (sestavenou z $\bar{\Omega}^{\mu}{}_{\nu}$) na varietě $\bar{\mathcal{M}}$ definujeme strukturní rovnicí

$$\mathbf{d}\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mu}{}_{\nu} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\rho}{}_{\nu} = \bar{\mathbf{M}}^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.40}$$

a následným středováním (2.32) po uvážení definice korelační 2-formy $\boldsymbol{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}$ dostaneme

$$\mathbf{M}^{\mu}{}_{\nu} = \mathbf{R}^{\mu}{}_{\nu} - \mathbf{Z}^{\mu}{}_{\rho}{}^{\rho}{}_{\nu}. \tag{2.41}$$

Podobný tvar rovnic lze najít i v elektrodynamice, kde se středováním mikroskopických (lineárních) Lorentzových rovnic elektromagnetického pole (viz [30]) dospěje k Maxwellově teorii. Analogií elektromagnetické indukce je zde 2-forma křivosti $\mathbf{M}^{\mu}{}_{\nu}$ a roli polarizace přebírá korelační člen $\mathbf{Z}^{\mu}{}_{\rho}{}^{\rho}{}_{\nu}$.

Aplikací wedge sumy na předchozí vztah s následným využitím (2.37) - (2.39) získáme rovnici integrability pro (2.37)

$$\mathbf{M}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} = 0. \tag{2.42}$$

Další fáze středování je poněkud obtížnější. Je otázkou, jakým způsobem přepsat výrazy typu $\left\langle \boldsymbol{\Omega}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \tilde{\boldsymbol{r}}^{\rho}{}_{\nu} \right\rangle, \langle \tilde{g}_{\mu\rho} \boldsymbol{\Omega}^{\rho}{}_{\nu} \rangle$ *a* $\langle \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{\mathbf{r}}^{\rho}{}_{\nu} \rangle$ pomocí veličin na varietě $\bar{\mathcal{M}}$. Kovariantní vnější derivací definičního vztahu korelační 2-formy (2.39) obdržíme jedno z hledaných pravidel.

$$\mathbf{D}_{\bar{\Omega}} \mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} = -2\mathbb{P}\mathbf{Y}^{\alpha}{}_{\rho}{}^{\rho}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} + 2\mathbb{P}(\left\langle \tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \boldsymbol{\Omega}^{\gamma}{}_{\delta} \right\rangle - \mathbf{R}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\gamma}{}_{\delta}). \tag{2.43}$$

Symbol $\mathbb{P}$ permutuje pouze volné indexy po párech - např. $\mathbb{P}\mathbf{M}^{\alpha\gamma\epsilon}_{\beta\delta\zeta} = 1/3!(\mathbf{M}^{\alpha\gamma\epsilon}_{\beta\delta\zeta} - \mathbf{M}^{\gamma\alpha\epsilon}_{\delta\beta\zeta} + \mathbf{M}^{\alpha\epsilon\gamma}_{\beta\zeta\delta})$ a dalším členem, který znesnadňuje formalismus středování, je korelační 3-forma

$$\mathbf{Y}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}{}^{\epsilon}{}_{\zeta} = \left\langle \mathbf{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \mathbf{\Omega}^{\gamma}{}_{\delta} \wedge \mathbf{\Omega}^{\epsilon}{}_{\zeta} \right\rangle - 3\mathbb{P}(\mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}^{\epsilon}{}_{\zeta}) - \bar{\mathbf{\Omega}}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}^{\gamma}{}_{\delta} \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}^{\epsilon}{}_{\zeta}, \quad (2.44)$$

která fixuje diferenciální vlastnosti korelační 2-formy. Analogicky, budeme-li působit kovariantní vnější derivací na korelační 3-formu, můžeme identifikovat další netriviální výraz - korelační 4-formu $\mathbf{Y}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}{}^{\epsilon}{}_{\zeta}{}^{\iota}{}_{\kappa}$. Vyšší korelační členy se na čtyřrozměrné varietě (fyzikálním prostoročasu) neobjevují. Přestože se ve středovaných rovnicích struktury objevuje pouze 2-forma $\mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}$, vyšší korelační členy je pro konzistenci teorie potřeba brát v úvahu. Naštěstí existuje možnost, jak volbou vhodné vazby položit korelační 3-formu a 4-formu identicky rovny nule. Zalaletdinov ukázal [50], že k úspěchu vedou vztahy

$$\mathbf{D}_{\bar{\Omega}}\mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} = 0 = \mathbf{D}_{\bar{\Omega}}\mathbf{R}^{\alpha}{}_{\beta}, \quad (2.45)$$

s podmínkou integrability

$$\mathbb{P}(\mathbf{R}^{\alpha}{}_{\rho} \wedge \mathbf{Z}^{\rho}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} - \mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\rho} \wedge \mathbf{R}^{\rho}{}_{\delta}) = 0 \quad (2.46)$$

a dalším požadavkem

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} \wedge \mathbf{Z}^{\epsilon}{}_{\zeta}{}^{\eta}{}_{\theta}) = 0. \quad (2.47)$$

Zúžíme-li v rovnici (2.43) indexy β a γ, výsledek lze použít pro středování (2.35), které dá požadovanou identitu pro 2-formu křivosti $\mathbf{M}^{\mu}{}_{\nu}$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{M}^{\mu}{}_{\nu} - \bar{\mathbf{\Omega}}^{\rho}{}_{\nu} \wedge \boldsymbol{M}^{\mu}{}_{\rho} + \bar{\mathbf{\Omega}}^{\mu}{}_{\rho} \wedge \boldsymbol{M}^{\rho}{}_{\nu} = 0. \quad (2.48)$$

Zbývá středovat poslední 2 rovnice (2.21) a (2.36). Předpokládejme ([48], [50]), že pro třídu pomalu se měnících tenzorových polí (tenzor-značných p-forem) $\mathbf{c}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}$, včetně kovariantně konstantních a Killingových tenzorů (symetrie by procedurou středování neměla být narušena), platí následující předpoklad:

$$\left\langle \mathbf{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \tilde{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} \right\rangle = \bar{\mathbf{\Omega}}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \bar{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}, \quad (2.49)$$

$$\left\langle \mathbf{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \mathbf{\Omega}^{\gamma}{}_{\delta} \wedge \tilde{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} \right\rangle = \left\langle \mathbf{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \mathbf{\Omega}^{\gamma}{}_{\delta} \right\rangle \wedge \bar{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}. \quad (2.50)$$

Potom rovnice (2.21) a její ekvivalent pro $\bar{g}^{\mu\nu}$ dává:

$$\mathbf{D}_{\bar{\Omega}}\bar{g}_{\mu\nu} = 0; \mathbf{D}_{\bar{\Omega}}\bar{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.51)$$

Tento vztah pak umožňuje volbu $\bar{g}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ ($G_{\mu\nu}$ je metrika na středované varietě $\bar{\mathcal{M}}$). Analogie tohoto vztahu s kontravariantními indexy již neplatí, $\bar{g}^{\mu\nu} \neq G^{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\rho}\bar{g}^{\rho\nu} \neq \delta^\mu_\nu$ a tuto nerovnost je možno charakterizovat tenzorem $U^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}$. Poslední hledanou rovnici na varietě $\bar{\mathcal{M}}$ obdržíme vnější derivací předpokladu (2.49), čímž dostaneme identitu

$$-\left\langle \mathbf{\Omega}^\alpha{}_\beta \wedge \mathbf{\bar{D}}_{\bar{\Omega}} \tilde{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} \right\rangle + \bar{\mathbf{\Omega}}^\alpha{}_\beta \wedge \mathbf{D}_{\bar{\Omega}} \bar{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} + \left\langle \tilde{\boldsymbol{R}}^\alpha{}_\beta \wedge \tilde{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} \right\rangle - \mathbf{R}^\alpha{}_\beta \wedge \bar{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} =$$

$$= -\mathbf{Z}^\alpha{}_\beta{}^\mu{}_\rho \wedge \bar{\mathbf{c}}^{\rho\ldots}_{\nu\ldots} - \ldots + \mathbf{Z}^\alpha{}_\beta{}^\rho{}_\nu \wedge \bar{\mathbf{c}}^{\mu\ldots}_{\rho\ldots} + \ldots \tag{2.52}$$

a následným dosazením do poslední zbývající rovnice získáme požadovaný vztah (a analog pro $\bar{g}^{\mu\nu}$)

$$\bar{g}_{\mu\rho}\mathbf{M}^\rho{}_\nu + \bar{g}_{\rho\nu}\mathbf{M}^\rho{}_\mu = 0; \qquad \mathbf{M}^\mu{}_\rho\bar{g}^{\rho\nu} + \mathbf{M}^\nu{}_\rho\bar{g}^{\mu\rho} = 0. \tag{2.53}$$

Získali jsme tak kompletní rovnice struktury doplněné kompatibilitou metriky včetně podmínek integrability na středované varietě $\bar{\mathcal{M}}$. Schéma je platné pro libovolnou (pseudo-)Riemannovu varietu s objemovou n-formou.

2.4 Makroskopické Einsteinovy rovnice

Předpokládejme, že "mikroskopická" teorie je plně popsaná soustavou Einsteinových rovnic. Ty udávají do souvislosti kontrahovaný Riemannův tenzor křivosti s mikroskopickým tenzorem energie a hybnosti $T^{\mu(micro)}_\nu$.

$$g^{\mu\rho}r_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\rho\sigma}r_{\rho\sigma} + \delta^\mu_\nu\Lambda = 8\pi T^{\mu(micro)}_\nu. \tag{2.54}$$

Riemannův tenzor na varietě $\bar{\mathcal{M}}$ je zde definován (na rozdíl od Zalaletdinových článků [48], [50]) $r_{\mu\nu} = r^\rho{}_{\mu\rho\nu}$. Abychom obdrželi rovnice makroskopické gravitace, stačí provést proceduru středování a tenzorové veličiny na varietě $\mathcal{M}$ nahradit jejich ekvivalenty na $\bar{\mathcal{M}}$. Z tvaru Einsteinových rovnic je vidět, že z předchozího oddílu je zapotřebí identita (2.52). Makroskopické rovnice pak mají tvar

$$G^{\mu\rho}M_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu G^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma} + \delta^\mu_\nu\Lambda = 8\pi T^{\mu(macro)}_\nu, \tag{2.55}$$

$$8\pi T^{\mu(macro)}_\nu = 8\pi T^{\mu(micro)}_\nu + \left(Z^\mu{}_{\rho\sigma\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu Q_{\rho\sigma}\right)\bar{g}^{\rho\sigma} - \left(U^{\mu\rho}M_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu U^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right), \tag{2.56}$$

kde jsme označili $Z^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 2Z^{\alpha}{}_{\beta\rho}{}^{\rho}{}_{\gamma\delta}$ a $Q_{\alpha\beta} = Z^{\rho}{}_{\alpha\rho\beta}$ - výrazy jsou odvozené z korelační 2-formy $\mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} = Z^{\alpha}{}_{\beta\rho}{}^{\gamma}{}_{\sigma\delta}\mathbf{d}x^{\rho} \wedge \mathbf{d}x$.

Levá strana makroskopických rovnic (Einsteinův tenzor E^{μ}_{ν}) díky korektní konstrukci geometrie na $\bar{\mathcal{M}}$ splňuje kontrahované Bianchiho identity, z nichž plynou lokální zákony zachování

$$E^{\rho}_{\mu;\rho} = (8\pi T^{\rho}_{\mu} + C^{\rho}_{\mu})_{;\rho} = 0. \tag{2.57}$$

Korelační člen C^{μ}_{ν}, kterým se rovnice makroskopické (při označení $\left\langle T^{\mu(micro)}_{\nu} \right\rangle = T^{\mu}_{\nu}$) liší od zápisu obvyklého např. v kosmologii, má explicitní tvar

$$C^{\mu}_{\nu} = \left(Z^{\mu}{}_{\rho\sigma\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} Q_{\rho\sigma} \right) \bar{g}^{\rho\sigma} - \left(U^{\mu\rho} M_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} U^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \right). \tag{2.58}$$

2.5 Vysokofrekvenční limita MG

V mnoha aplikacích MG je předpokládán explicitní tvar makroskopické metriky (např. sférická symetrie, FRW) a za dodatečně zvolených podmínek je řešena soustava algebraických a diferenciálních rovnic pro korelační tenzor. Zde se omezíme na vysokofrekvenční tenzorové perturbace - tj. existuje takový souřadný systém, ve kterém má mikroskopická metrika tvar

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{2.59}$$

kde $G_{\mu\nu}$ je dané pozadí (makroskopická metrika) pomalu se měnící na charakteristické délce L a $h_{\mu\nu}$ je rychle oscilující část (s charakteristickou mikroskopickou délkou λ) představující gravitační záření. Typický poloměr středovací oblasti d je určen nerovnostmi $\lambda << d << L$ a amplitudy $G_{\mu\nu}$, resp. $h_{\mu\nu}$ jsou řádu 1, resp. ϵ. V Isaacsonově přístupu [23] bylo provedeno středování s využitím geodetického bilokálního operátoru a s integrační mírou (-det$G_{\mu\nu}$)$^{1/2}$.

Aplikace teorie MG na perturbovanou metriku (2.59) byla ukázána v článku [50] a výsledkem je, že v Lorentzově kalibraci

$$h^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0, \quad h^{\nu}{}_{\nu} = 0 \tag{2.60}$$

není do řádu ϵ^2 rozdílu ve tvaru perturbovaných Einsteinových rovnic (liší se samozřejmě samotná metoda středování). Korelační člen tak ve vysokofrekvenční limitě má stejný tvar efektivního tenzoru energie a hybnosti

$$T_{\mu\nu}^{GW} = \frac{1}{32\pi} \left\langle h^{\rho\tau}{}_{;\mu} h_{\rho\tau;\upsilon} \right\rangle . \tag{2.61}$$

2.6 Přesná řešení MG

Řešení rovnic MG umožňuje identifikovat tvar korelačního členu přítomného ve středovaných Einsteinových rovnicích. Korelační 2-forma musí vyhovovat komplikovaným podmínkám (2.45), (2.46) a (2.47). První přesné řešení MG bylo publikováno v roce 2005 trojicí autorů Coley, Pelavas, Zalaletdinov [13] (detaily a doplnění výpočtu byly nedávno zveřejněny v [21]). Po zvolení makroskopické metriky (plochý FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.62}$$

se předpokládal nejjednodušší možný tvar korelačního tenzoru $Z^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{\epsilon\zeta} = konst.$, volba $\bar{g}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ a nulovost elektrické části po rozkladu korelačního tenzoru na složku elektrickou a magnetickou. Výsledný korelační člen pak lze interpretovat jako dodatečnou prostorovou křivost, což je v souladu s pozdějšími články [14] a [15], kde se využívá systému vlastních souřadnic k přímému výpočtu korelačního členu ze středovaného Einsteinova tenzoru. V těchto publikacích také bylo ukázáno, že středováním sféricky symetrické mikroskopické metriky (za jistých předpokladů tvaru nehomogenity gravitačního pole) může být korelační člen zapsán jako suma výrazů reprezentujících prostorovou křivost a nedokonalou tekutinu.

Van den Hoogen v [22] navázal na předchozí výsledky. Předpokládaná zde byla statická sféricky symetrická makroskopická geometrie (nehomogenitu určoval korelační tenzor)

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.63}$$

Tenzor energie a hybnosti popisoval dokonalou tekutinu zdroje o radiální velikosti R s konstantní hustotou ρ_0. Bez korektního středování (nejen pravé strany) bychom dospěli k obvyklému (vnitřnímu a vnějšímu) Schwarzschildovu řešení. Řešením rovnic MG se sféricky symetrickou makroskopickou metrikou (2.63) spolu s dalšími dodatečnými předpoklady (např. $\mathbf{Z} = konst.$) byl nalezen korelační člen, který efektivně modeluje neizotropní tekutinu s netriviálním radiálním tlakem $p_r^{cor} = -\rho^{cor}$ a hustotou $\rho^{cor} = \frac{1}{8\pi}\frac{4h_1}{r^2}$, h_1 je kladná integrační konstanta.

Výsledek lze interpretovat zajímavým způsobem [22]: V galaktické dynamice je plochost rotačních křivek spirálních galaxií hlavním argumentem pro existenci temné hmoty. Obvyklý sféricky symetrický model vykazuje chování hustoty $\rho \propto r^{-3}$, naměřená data však lépe vyhovují závislosti r^{-2}, což je právě případ získaného korelačního členu. Existuje tedy alternativní vysvětlení pozorované plochosti rotačních křivek spirálních galaxií jako pouhý důsledek středování téměř sféricky symetrického rozložení “obyčejné” hmoty.

Aby se lépe osvětlila povaha získaného korelačního členu, uvedeme jako příklad sféricky symetrického prostoročasu de Sitterův vesmír. Statické souřadnice sice pokrývají jen část variety, ale metrika je v nich vyjádřena přímo ve tvaru (2.63)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{1}{1-\frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.64}$$

V článku [22] jsou řešeny modifikované Einsteinovy rovnice (s korelačním členem) s konstantní hustotu ρ_0, nyní interpretovanou jako $\rho_0 = \frac{\Lambda}{8\pi}$. Příslušné rovnice se ale navíc zjednoduší, budeme-li požadovat $p = -\rho_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi}$. Výsledkem je modifikovaná metrika

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3(1-4h_1)}r^2\right)dt^2 + \frac{1}{(1-4h_1)}\frac{1}{\left(1-\frac{\Lambda}{3(1-4h_1)}r^2\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.65}$$

V prvně citovaném přesném řešení FRW [13] nemohla vést magnetická část korelačního tenzoru k vysvětlení pozorovaného zrychlení vesmíru. Ovlivněn však byl netriviálním způsobem expanzní faktor. Konkrétně pro **dS** ale dochází k zajímavému jevu: Přidaným korelačním členem (prostorovou křivostí k) se nezmění výsledný prostoročas - **dS** je řešením Einsteinových rovnic s dokonalou tekutinou $p = -\rho$ pro každou volbu k=-1,0,1 (odlišná je ale foliace prostoročasu na prostory konstantní křivosti, a tak tyto tři případy poskytují odlišnou dynamiku expanzního parametru a tím i kosmologických parametrů).

Zde tenzor energie a hybnosti obsahuje součet dokonalé i nedokonalé tekutiny, a tak středovaný **dS** již nepatří do třídy FRW kosmologií (předpokládána je jen statická sférická symetrie). Jedním ze znaků ukazujících na možné zrychlení je přítomnost horizontu, tj. existují takové oblasti v prostoročasu $r > r_{max}$, které nemohou být v principu nikdy v budoucnu pozorovány. Kritická hodnota r_{max} se dostane integrací rovnice (pro metriku typu (2.63))

$$\int\limits_{0}^{r_{\max}} \frac{\sqrt{g_{rr}}}{\sqrt{g_{tt}}} dr = \lim_{t_{max}\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t_{\max}} dt. \tag{2.66}$$

Dosazením obyčejné **dS** metriky (2.64) vychází

$$\frac{\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_{\max}\right)}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} = \lim_{t_{max}\to\infty} (t_{\max} - t_0), \tag{2.67}$$

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \tag{2.68}$$

Modifikovaný prostoročas (2.65) dává výsledek (pro $0 < h_1 < 0,25$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-4h_1}} \frac{\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}\frac{1}{1-4h_1}} r^{cor}_{\max}\right)}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}\frac{1}{1-4h_1}}} = \lim_{t_{max}\to\infty} t_{\max} - t_0, \tag{2.69}$$

$$r^{cor}_{\max} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sqrt{1-4h_1}. \tag{2.70}$$

Kritická hodnota r_{max} se po uvážení korelačního členu zmenšila, což naznačuje možné zrychlení expanze (v analogii s výsledkem pro **dS**, kde s rostoucí Λ se od sebe geodetičtí pozorovatelé vzdalují rychleji).

Kapitola 3

Vysokofrekvenční gravitační vlny na pozadí dS

3.1 de Sitterův prostoročas

De Sitterův prostoročas (**dS**) je z matematického hlediska maximálně symetrická lorentzovská varieta konstantní křivosti $R > 0$ [20]. Může být znázorněn jako hyperboloid

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \tag{3.1}$$

v plochém, pěti-dimenzionálním prostoru $\mathbb{R}^5$ s metrikou

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3.2}$$

V této kapitole budou pro jednoduchost použity souřadnice, které pokrývají pouze polovinu celkové variety.

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\eta^2}\left(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \tag{3.3}$$

Tvar metriky přímo ukazuje příslušnost **dS** v širší třídě nejpoužívanějších kosmologických modelů Friedmann–Robertson–Walker (FRW)

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + {}^3\gamma_{ij}dx^i dx^j\right), \tag{3.4}$$

kde ${}^3\gamma_{ij}$ představuje metriku homogenního a izotropního 3-prostoru s konstantní křivostí K.

Fyzikálně motivující je fakt, že de Sitterův vesmír je řešením Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou Λ. Přirozená je tedy aplikace **dS** při studiu inflačních modelů v raných etapách vývoje vesmírů [45].

3.2 Evoluce tenzorových perturbací na FRW

V článku [44] bylo ukázáno chování vysokofrekvenčních gravitačních vln šířících se na pozadí FRW. Metrické perturbace $h_{\mu\nu}$ (představující gravitační záření) byly rozloženy do tenzorových harmonik

$$h_{\mu\nu} = f\left(\eta\right) Q_{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

$Q_{\mu\nu}$ kromě obvyklých kalibračních podmínek (2.60) splňuje rovnici

$$Q_{ij|1}^{|1} + k^2 Q_{ij} = 0. \tag{3.6}$$

Symbol $|$ značí kovariantní derivaci vzhledem k metrice ${}^3\gamma_{ij}$. Vlnové číslo k fixuje škálu perturbace vzhledem k danému pozadí. Evoluce amplitudy $f(\eta)$ vyhovuje obyčejné diferenciální rovnici druhého řádu (podrobnosti v [44])

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2\right) - 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{d\eta} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 6K\right] f = 0 \tag{3.7}$$

Při použití souřadnic (3.3) **dS** přejde kovariantní derivace $|$ v (3.6) na obyčejnou a rovnice pro $f(\eta)$ má řešení

$$f\left(\eta\right) = \frac{1}{\sqrt{|\eta|}}\left[C_1\left(k\right) J\left(i\frac{\sqrt{15}}{2}, k\eta\right) + C_2\left(k\right) Y\left(i\frac{\sqrt{15}}{2}, k\eta\right)\right]. \tag{3.8}$$

$J(\nu, z)$ (resp. $Y(\nu, z)$) jsou cylindrické Besselovy funkce prvního (druhého) druhu, C_1 a C_2 jsou libovolnými funkcemi k.

3.3 Isaacsonova aproximace

V minulé kapitole byla diskutována souvislost korelačního členu $Q_{\mu\nu}$ v teorii makroskopické gravitace a efektivního tenzoru energie a hybnosti $T_{\mu\nu}^{GW}$ v případě vysokofrekvenčních gravitačních vln [23], [50]. Oba přístupy obdrží korekci k Einsteinovým rovnicím ve stejném tvaru, ale liší se samotná metoda středování: Volbou bivektoru při výpočtu příslušného integrálu a také integračním objemovým elementem. Pro jednoduchost bude vliv perturbací (3.5) na pozadí **dS** počítán historicky starším způsobem zahrnujícím bivektor geodetického paralelního přenosu.

Efektivní tenzor energie a hybnosti na pravé straně Einsteinových rovnic pak bude mít tvar

$$T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} \left\langle h^{\rho\tau}{}_{;\mu} h_{\rho\tau;\upsilon} \right\rangle_{BH}, \tag{3.9}$$

kde střední hodnota tenzoru $A_{\mu\nu}$ přes oblast Ω je definována integrálem

$$\left\langle A_{\mu\nu}(x) \right\rangle_{BH} = \frac{1}{V_\Omega} \int\limits_\Omega g^{\alpha'}_{\mu}(x, x') g^{\beta'}_{\nu}(x, x') A_{\alpha'\beta'}(x') \sqrt{-g(x')} d^4x'. \tag{3.10}$$

K jeho výpočtu je potřeba nejprve nalézt geodetickou křivku $x^\mu(\tau)$ spojující body x a x' a poté podél ní paralelně přenést tenzor $A_{\mu\nu}$. Rovnice geodetiky na **dS** lze vyřešit bez jakýkoliv složitých výpočtů. Dále lze ukázat, že ve vysokofrekvenční limitě platí následující vlastnosti [23]:

- Lze ignorovat výrazy typu $\left\langle A_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho} \right\rangle_{BH}$.
- Pod integrálem lze integrovat per partes.
- Kovariantní derivace komutují.

3.4 Výpočet tenzoru energie a hybnosti vysokofrekvenčních gravitačních vln

Tvar metriky (3.3) přímo ukazuje na přítomnost tří prostorupodobných Killingových vektorů, které zaručují tři integrály pohybu (prostorové kovariantní složky čtyřhybností p_i). Pro řešení rovnic je vhodné nejprve vypočítat nenulové Christoffelovy symboly

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(g_{\rho\beta;\gamma} + g_{\gamma\rho;\beta} - g_{\beta\gamma;\rho} \right), \tag{3.11}$$

$$\Gamma^0_{\mu\mu} = \Gamma^i_{i0} = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)} = \frac{-1}{\eta}. \tag{3.12}$$

Ostatní nezávislé složky afinní konexe jsou nulové (přes dva stejné indexy se nesčítá). Rovnice paralelního přenosu se velmi zjednoduší, je-li přenášen tenzor s jedním kovariantním a kontravariantním indexem.

$$\frac{DA_0^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau}\left(A_{0,0}^0 + \Gamma_{00}^0 A_0^0 - \Gamma_{00}^0 A_0^0\right) + \frac{dx^i}{d\tau}\left(A_{0,i}^0 + \Gamma_{0i}^i A_i^0 - \Gamma_{0i}^i A_i^0\right) = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{DA_i^i}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau}\left(A_{i,0}^i + \Gamma_{0i}^i A_i^i - \Gamma_{0i}^i A_i^i\right) + \frac{dx^j}{d\tau}\left(A_{i,j}^i + \Gamma_{0i}^i A_i^0 - \Gamma_{ii}^0 A_0^i\right) = 0. \tag{3.14}$$

Tenzor $A_{\mu\nu}$ je v uvažovaném případě (3.9) symetrický, proto se nenulové Christoffelovy symboly v závorkách odečtou. Rovnicím geodetiky tak vyhovuje řešení $T_{\mu\nu}(x) = konst$. Konstanta je dále určena polohou tenzoru z počáteční podmínky $T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x')$. Paralelní přenos z bodu x' do bodu x má nakonec triviální tvar a do integrálu (3.9) lze v tomto případě za bivektor paralelního přenosu dosadit bilokální rozšíření Kroneckerova symbolu (tj. bivektor paralelního přenosu nezmění tvar přenášeného tenzoru - $T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x')$) .

Je vhodné prostorovou část perturbací $h_{\mu\nu}$ napsat pomocí Fourrierovy transformace

$$Q_{\mu\nu}(\vec{x}) = \int Q_{\mu\nu}\left(\vec{k}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}. \tag{3.15}$$

Tím je automaticky splněna podmínka (3.6). Veličiny $Q_{\mu\nu}(k)$ spolu s koeficienty $C_1(k)$ a $C_2(k)$ v řešení (3.8) v sobě zahrnují informaci o tvaru vlnového balíku (odpovídající počáteční podmínce).

Pro jednoduchost budeme předpokládat izotropní rozložení gravitačních vln (analogicky jako u fotonového plynu). Do integrálu (3.9) lze přímo dosadit řešení ve tvaru (3.5). Integrace přes oblast Ω bude realizována pomocí shlazovací funkce $W_\Omega(x^\mu) = W_t(\eta) W_x(x^i)$, která rychle klesá k nule pro $x' \notin \Omega$.

$$T_0^{0\,GW} = -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int_{R^4} W_\Omega(x^\mu) f(\eta)\, Q^{\rho\sigma}(\vec{x}') \left[f(\eta)\, Q_{\rho\sigma}(\vec{x}')\right]^{;0}_{;0} \sqrt{a^8(\eta)}\, d^3x' d\eta$$

$$= -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int_{R^4} W_t(\eta) f(\eta) \int_{R^3} Q^{ij}\left(\vec{k}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'} d^3\vec{k} g^{00} f(\eta)_{;00} \int_{R^3} Q_{ij}\left(\vec{k}'\right) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} d^3\vec{k}'$$
$$\int_{R^3} W_x\left(\vec{k}''\right) e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x}'} d^3\vec{k}'' \sqrt{a^8(\eta)}\, d^3x' d\eta$$

$$= -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int_{R} W_t(\eta) f(\eta) \int_{R^3} Q^{ij}\left(\vec{k}\right) d^3\vec{k} g^{00} f(\eta)_{;00} \int_{R^3} Q_{ij}\left(\vec{k}'\right) d^3\vec{k}'$$

$$\int\limits_{R^3} W_x\left(\vec{k}''\right) d^3\vec{k}''\sqrt{a^8\left(\eta\right)}d\eta\delta(\vec{k}+\vec{k}'+\vec{k}'')$$

$$= -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_{R}\int\limits_{R^3}\int\limits_{R^3} W_t(\eta)g^{00}f\left(\eta\right)_{;00} f\left(\eta\right)g^{ii}g^{jj}Q_{ij}\left(\vec{k}\right)Q_{ij}\left(\vec{k}'\right)$$

$$W_x(-\vec{k}-\vec{k}')a^4\left(\eta\right)d^3kd^3k'd\eta$$

$$= -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_{R}\int\limits_{R^3}\int\limits_{R^3}\left(\frac{-1}{a^2\left(\eta\right)}\right)\left(f\left(\eta\right)_{,00}-\frac{\dot{a}\left(\eta\right)}{2a\left(\eta\right)}\right)f\left(\eta\right)\frac{1}{a^2\left(\eta\right)}\frac{1}{a^2\left(\eta\right)}$$

$$Q_{ij}\left(\vec{k}\right)Q_{ij}\left(\vec{k}'\right)W_x(-\vec{k}-\vec{k}')a^4\left(\eta\right)d^3kd^3k'd\eta$$

$$\cong -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{a^2\left(\eta\right)}f^2\left(\eta\right)k^2Q_{ij}\left(\vec{k}\right)Q_{ij}\left(\vec{k}\right)d^3kd\eta. \tag{3.16}$$

V první rovnosti bylo použito integrace per partes. V limitě krátkých vlnových délek platí relace $k/a >> \dot{a}/a$, tedy fyzikální frekvence záření je mnohem větší než Hubblův parametr $H = \dot{a}/a$. Do integrálu přispívají podstatněji členy úměrné nejvyšší mocnině v k. V posledním kroku byla druhá derivace funkce f nahrazena pomocí rovnice (3.7) výrazy úměrnými v mocninách k (nejvíce přispívá $-k^2 f$). Problémy by mohly případně nastat pro $\eta \propto e^{-\frac{t}{\alpha}} \rightarrow 0$, tj. $t \rightarrow +\infty$ (Hubbleův parametr zde diverguje), kdy ale díky kosmologickému frekvenčnímu posunu v realistickém případě už není možno Isaacsonovu aproximaci použít. Nakonec byla pro zjednodušení výsledného vztahu provedena integrace přes $\vec{k}'$ - shlazovací funkce $W_x(\vec{k})$ je v limitě $\Omega \rightarrow \infty$ rovna delta funkci $\delta(\vec{k})$. Zde je tedy uplatněn předpoklad, že v integrálu je nejvyšší příspěvek od členů $\vec{k} \cong \vec{k}'$.

Při výpočtu dalších diagonálních složek efektivního tenzoru energie se využije vlastnosti izotropního rozložení gravitačních vln.

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \frac{1}{3}\sum_l T_{ll}. \tag{3.17}$$

$$\sum_{l=1}^{3} T^{l\,GW}_{l} = -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_{R^4} W_\Omega(x^\mu)f\left(\eta\right)Q^{\rho\sigma}\left(\vec{x}'\right)\left[f\left(\eta\right)Q_{\rho\sigma}\left(\vec{x}'\right)\right]_{;l}^{;l}\sqrt{a^8\left(\eta\right)}d^3x'd\eta$$

$$= -\frac{1}{32\pi}\sum_l\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_{R^4} W_t(\eta)f^2\left(\eta\right)\int\limits_{R^3} Q^{ij}\left(\vec{k}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'}d^3\vec{k}g^{ll}\left[\int\limits_{R^3} Q_{ij}\left(\vec{k}'\right)e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}d^3\vec{k}'\right]_{;ll}$$

$$\int\limits_{R^3} W_x\left(\vec{k}''\right) e^{i\vec{k}''\cdot\vec{x}'} d^3\vec{k}''\sqrt{a^8\left(\eta\right)}d^3x'd\eta$$

$$= -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_R W_t(\eta)f^2\left(\eta\right)\int\limits_{R^3} Q^{ij}\left(\vec{k}\right)d^3\vec{k}g^{ll}(-k'^2)\int\limits_{R^3} Q_{ij}\left(\vec{k}'\right)d^3\vec{k}'$$

$$\int\limits_{R^3} W_x\left(\vec{k}''\right)d^3\vec{k}''\sqrt{a^8\left(\eta\right)}d^3x'd\eta\delta(\vec{k}+\vec{k}'+\vec{k}'') + ...$$

$$\cong \frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_R\int\limits_{R^3}\int\limits_{R^3} W_t(\eta)f^2\left(\eta\right)\frac{1}{a^2\left(\eta\right)}\frac{1}{a^2\left(\eta\right)}Q_{ij}\left(\vec{k}\right)\frac{1}{a^2\left(\eta\right)}\left[k'^2Q_{ij}\left(\vec{k}'\right)\right]$$

$$W_x(-\vec{k}-\vec{k}')a^4\left(\eta\right)d^3kd^3k'd\eta$$

$$\cong \frac{1}{32\pi}\frac{1}{V_\Omega}\int\limits_\Omega \frac{1}{a^2\left(\eta\right)}f^2\left(\eta\right)k^2Q_{ij}\left(\vec{k}\right)Q_{ij}\left(\vec{k}\right)d^3kd\eta. \tag{3.18}$$

Ze stejného důvodu jako v předchozím případě lze zanedbat výrazy úměrné Christoffelovým symbolům. Dále se využilo vlastnosti (3.6) definující (až na kalibrační volnost) perturbace $Q_{\mu\nu}$.

Porovnáním výsledných tvarů rovnic (3.16), (3.17), (3.18) je možno vyčíst charakteristickou závislost tlaku záření p na hustotě ρ

$$p^{GW} = \frac{\rho^{GW}}{3}. \tag{3.19}$$

Zbývající složky tenzoru energie a hybnosti vyjdou nulové. Rovnice paralelního přenosu může mít netriviální řešení, ale tenzor přenesený z bodu $(\eta', \vec{x}')$ do $(\eta, \vec{x})$ je závislý jen na konformním čase $\tilde{T}_{\mu\nu}\left(\eta, \eta', \vec{x}'\right)$ (plyne z čistě časové závislosti složek afinní konexe). Po dosazení stačí použít transformace (3.15) a obyčejná derivace ∂_j přejde ve Fourrierově obrazu na násobení ik_j. Integrál liché funkce v k_j je pak roven nule (až na zanedbané členy).

Pozadí **dS**, na kterém se šíří gravitační vlny, lze interpretovat jako řešení Einsteinových rovnic s pravou stranou $\rho_0 = \frac{\Lambda}{8\pi}$, $p_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi}$. Evoluce gravitačních vln se v linearizované teorii řídí rovnicí (3.7) a jejich přítomnost zpětně ovlivňuje dané pozadí. Korektněji by se měla řešit rovnice (3.7) současně se započtením (3.9). Zvolíme-li iterační postup, po výpočtu (3.8) a středování (3.16), (3.18) by se měl algoritmus zopakovat (předpokládáme-li konvergenci k přesnému řešení) - tj. určit nové pozadí pomocí tenzoru energie a hybnosti $\rho_1 = \frac{\Lambda}{8\pi} + \rho^{GW}$, $p_1 = -\frac{\Lambda}{8\pi} + p^{GW}$. Konkrétněji - budeme-li sledovat závislost na Λ, zjistíme následující vztah (jmenovatel V_Ω také obsahuje faktor $a^4(\eta)$ přítomný v invariantním objemovém elementu):

$$\rho_1 = \frac{\Lambda}{8\pi} + \Lambda^3 \cdot konst., \quad p_1 = -\frac{\Lambda}{8\pi} + \Lambda^3 \cdot konst./3. \tag{3.20}$$

Charakteristický vztah kosmologické konstanty $p_0 = -\rho_0$ se díky přítomnosti vysokofrekvenčních gravitačních vln změní na $\rho_1 = -p_1 + 4/3\Lambda^3 \cdot konst.$ Konstanta kromě vlnového rozložení gravitačního záření závisí také na objemu středování - V_Ω je volným parametrem teorie, který je třeba nejprve zvolit. Protože dodatečný opravný člen je úměrný Λ^3, je možné se domnívat, že linearizované řešení (3.8) dobře aproximuje řešení přesné.

3.5 Středování pomocí MG

Nyní se pokusíme pro porovnání provést středování (3.9) pomocí formalismu makroskopické gravitace. Bivektor paralelního přenosu je nahrazen obecným bilokálním operátorem $\mathcal{W}^{\alpha'}_{\beta}(x', x)$. Jak bylo zmíněno v první kapitole tohoto textu, existuje poměrně široká třída tzv. vlastních souřadnic Φ^i (podrobněji v [32]), kdy má bivektor tvar $\mathcal{W}^{\alpha'}_{\beta}(x', x) = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \phi^i} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\beta}$ a po transformaci do vlastních souřadnic pak jednoduše přejde na bilokální rozšíření Kroneckerovy delty. Tato transformace existuje vždy a navíc determinant matice $g_{\mu\nu}$ spočtený v těchto souřadnicích je nutně konstantní. Z tvaru metriky **dS** (3.4) plyne, že nejjednodušší transformace do vlastních souřadnic změní jen časovou závislost metrických koeficientů.

$$a(\eta) d\eta = \frac{d\widehat{\eta}}{a^3(\widehat{\eta})}, \tag{3.21}$$

$$\widehat{\eta} = f(\widehat{\eta}) =, \ \widehat{x} = x, \ \widehat{y} = y, \ \widehat{z} = z \tag{3.22}$$

Při středování (3.9) budou použity původní (nestříškované) souřadnice. Bivektor v nich má zřejmě jen jedinou netriviální složku $\mathcal{W}^{0'}_{0}(x', x)$ - i ta však není složitá.

$$\mathcal{W}_0^{0'}(x',x) = \frac{\partial x^{0'}}{\partial \phi^i}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^0} = \frac{\partial \eta'}{\partial \widehat{\eta}}\frac{\partial \widehat{\eta}}{\partial \eta} = \frac{a^4(\eta)}{a^4(\eta')} = \frac{\eta^{4\prime}}{\eta^4} \tag{3.23}$$

V definici bilokálního rozšíření tenzoru T^μ_ν (2.8) vystupuje kontrakce s bivektorem $\mathcal{W}_\beta^{\alpha'}$ a jeho inverzí $\mathcal{W}_{\alpha'}^{\beta} = [\mathcal{W}_\beta^{\alpha'}]^{-1}$. Protože jsou obě matice diagonální, bilokální rozšíření opět působí identicky jako u paralelního bivektoru.

$$\widetilde{T}_0^0(x,x') = \mathcal{W}_{0'}^0(x',x)\mathcal{W}_0^{0'}(x',x)T_{0'}^{0'}(x') = T_0^0(x'). \tag{3.24}$$

Rovnice středování budou mít tedy stejný tvar jako v předchozím výpočtu podle Isaacsonova schématu - stejně jako u paraleního přenosu je i zde bilokální rozšíření tenzoru energie a hybnosti triviální. Aplikací teorie makroskopické gravitace se tak reprodukuje výsledek výše vypočtený Isaacsonovým algoritmem (3.16), (3.18).

Problémem v MG je ale nejednoznačnost středování - tj. volba bilokálního operátoru zde není explicitně daná. Jen samotný systém vlastních souřadnic tvoří poměrně velkou třídu funkcí, a proto by bylo možné požadovat splnění dalších (pro daný případ žádoucích) vazeb. Mohou tedy existovat i takové vlastní souřadnice, pomocí kterých má bivektor $\mathcal{W}_\beta^{\alpha'}(x',x) = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \phi^i}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\beta}$ netriviální všechny maticové koeficienty a výpočet středování by obecně mohl dát jiný výsledek než v předchozím případě.

Kapitola 4

Další metody středování

Kromě teorie makroskopické gravitace existuje celá řada přístupů ke středování Einsteinových rovnic. Zde budou představeny metody, které v principu dovolují středování i přesných řešení a neomezují se jen na perturbované prostoročasy (historický přehled včetně aproximačních schémat lze najít např. v Krasińskiho knize [29]).

4.1 Buchertovy rovnice

V současnosti nejrozšířenější formalismus kosmologického středování umožňuje doplnění Friedmannových rovnic o dodatečné členy, a zřetelněji tak ukazuje na ovlivnění kosmologické dynamiky v důsledku středování nehomogenit. Pro jednoduchost budou prezentovány rovnice s "nerotačním prachem" [4] (zobecnění na dokonalou tekutinu v [5]).

Nechť je dána metrika $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dX^idX^j$, prostorové středování skalárního pole Ψ je definováno předpisem

$$\left\langle \Psi(t, X^i) \right\rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int\limits_{\mathcal{D}} J d^3X \Psi(t, X^i), \tag{4.1}$$

$$V_{\mathcal{D}} = \int\limits_{\mathcal{D}} J d^3X, \tag{4.2}$$

kde J :=det$\sqrt{g_{ij}}$, g_{ij} je metrika prostorové nadplochy a X^i jsou "comoving" souřadnice sledující geodetický pohyb prachu. Důležitou vlastností je nekomutativita středování a časové derivace, jak lze nahlédnout z definice středování při uvážení časové závislosti jakobiánu:

$$\partial_t \left\langle \Psi(t, X^i) \right\rangle_{\mathcal{D}} - \left\langle \partial_t \Psi(t, X^i) \right\rangle_{\mathcal{D}} = \left\langle , \Psi(t, X^i) \right\rangle_{\mathcal{D}} \langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}} - \left\langle \Psi(t, X^i) \Theta \right\rangle_{\mathcal{D}} . \quad (4.3)$$

Expanze Θ podle definice souvisí s čtyřrychlostí tekutiny vztahem $\Theta = u^{\mu}{}_{;\mu}$ a její pomocí zavedeme v analogii s FRW modely efektivní Hubbleův parametr $H_{\mathcal{D}}$ a efektivní škálovací faktor $a_{\mathcal{D}}$

$$a_{\mathcal{D}} = \left(\frac{V_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}i}} \right)^{\frac{1}{3}} , \quad (4.4)$$

$$\langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = 3 \frac{\dot{a_{\mathcal{D}}}}{a_{\mathcal{D}}} =: 3 H_{\mathcal{D}} . \quad (4.5)$$

Tečkou se označuje časová parciální derivace a $V_{\mathcal{D}i}$ je počáteční objem oblasti, která geodeticky přešla na objem $V_{\mathcal{D}}$.

Abychom mohli využit formalismus středování na Einsteinovy rovnice, potřebujeme mít k disposici skaláry, nikoli tenzory. Toho můžeme docílit kontrakcí těchto rovnic s dostupnými tenzory: $g^{\mu\nu}, u^{\mu}$ a ∇^{μ}. Po středování a použití komutační formule (4.3) obdržíme modifikovanou Raychaudhuriho rovnici, hamiltonovskou vazbu a nakonec zákon zachování hmoty.

$$3 \frac{\ddot{a_{\mathcal{D}}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} , \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{6} - \frac{\Lambda}{3} = - \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{6} , \quad (4.7)$$

$$\partial_t \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + 3 \frac{\dot{a_{\mathcal{D}}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = 0 . \quad (4.8)$$

$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$ značí střední hodnotu prostorového Ricciho skaláru, $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}$ středovanou hustotu sledované tekutiny a přítomný kinematický člen $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ ukazující na přítomnou nehomogenitu a anizotropii je definován vztahem

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} := \frac{2}{3} \left\langle (\Theta - \langle \Theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 \right\rangle_{\mathcal{D}} - 2 \left\langle \sigma^2 \right\rangle_{\mathcal{D}} . \quad (4.9)$$

Skalár $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma^{ij}$ je sestaven z tenzoru střižné deformace σ_{ij}. Časová derivace středované hamiltonovské vazby (4.7) souhlasí se středovanou Raychadhuriho rovnicí (4.6), platí-li následující podmínka integrability

$$\partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 0 . \quad (4.10)$$

Předchozí rovnice lze formálně přepsat do standardního tvaru Friedmannových rovnic

$$3\frac{\ddot{a_{\mathcal{D}}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G\left(\rho^{\mathcal{D}}_{eff} + 3p^{\mathcal{D}}_{eff}\right) - \Lambda = 0, \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho^{\mathcal{D}}_{eff} - \frac{\Lambda}{3} = 0, \tag{4.12}$$

$$\dot{\rho}^{\mathcal{D}}_{eff} + 3\frac{\dot{a_{\mathcal{D}}}}{a_{\mathcal{D}}}\left(\rho^{\mathcal{D}}_{eff} + p^{\mathcal{D}}_{eff}\right) = 0. \tag{4.13}$$

s efektivní hustotou a tlakem

$$\rho^{\mathcal{D}}_{eff} := \langle\rho\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G}\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G}\langle R\rangle_{\mathcal{D}}\,, \tag{4.14}$$

$$p^{\mathcal{D}}_{eff} := -\frac{1}{16\pi G}\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{48\pi G}\langle R\rangle_{\mathcal{D}}\,. \tag{4.15}$$

Abychom získali jejich řešení, je třeba konkretizovat stavovou rovnici $p^{\mathcal{D}}_{eff} = p^{\mathcal{D}}_{eff}\left(\rho^{\mathcal{D}}_{eff}, a_{\mathcal{D}}\right)$. Navíc tvar efektivní hustoty a tlaku ukazuje na podobnost s výsledky obdrženými v teorii skalárního pole, a nové “zdroje” $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ a $\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}$ tak lze interpretovat jako důsledek přítomnosti dodatečného morphonového pole [8], jehož pohybová Klein-Gordonova rovnice je právě (4.10).

Podobně jako v obvyklém přístupu ke kosmologii, můžeme i zde definovat bezrozměrné veličiny (omega faktory), které ale představují funkcionály na oblasti $\mathcal{D}$.

$$\Omega^{\mathcal{D}}_m := \frac{8\pi G}{3H^2_{\mathcal{D}}}\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}}\,; \quad \Omega^{\mathcal{D}}_{\Lambda} := \frac{\Lambda}{3H^2_{\mathcal{D}}}; \quad \Omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} := -\frac{\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}}{6H^2_{\mathcal{D}}}; \quad \Omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{Q}} := -\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{6H^2_{\mathcal{D}}} \tag{4.16}$$

a Hamiltonova vazba se přepíše do standardního tvaru

$$\Omega^{\mathcal{D}}_m + \Omega^{\mathcal{D}}_{\Lambda} + \Omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} + \Omega^{\mathcal{D}}_{\mathcal{Q}} = 1. \tag{4.17}$$

Buchertův přístup spočívá ve výběru preferované nadplochy s následným trojrozměrným středováním vzhledem ke klidovému systému dokonalé tekutiny. Larena nedávno [31] metodu středování zobecnil do libovolného souřadného systému. Kromě čtyřrychlosti tekutiny u^{μ} je zavedena také 4-rychlost libovolného pozorovatele n^{μ} a Buchertovy rovnice jsou kromě kinematického členu (a dynamického u tekutiny s nenulovým tlakem) doplněny o další korekce.

Gasperini, Marozzi a Veneziano pak využili kalibračně invariantního středování a ukázali [19], že Buchertovy rovnice sice závisí na volbě nadplochy, která definuje fyzikálního pozorovatele, ale nikoliv na konkrétní volbě souřadnic. Po předložení kovariantní a kalibračně invariantní formulace komutačního vztahu (4.3) je možné středovat skalární část Einsteinových rovnic v libovolných souřadnicích. Kromě neuzavřenosti soustavy (zobecněných) Buchertových rovnic tak zůstává problematickou otázka zvolení vhodné prostorové nadplochy [24].

4.2 Ricciho tok

V předchozím oddíle byly vypočteny střední hodnoty skalárních veličin na reálné (nehomogenní) varietě. Ukazuje se, že příspěvek ke kosmickému kvartetu (4.17) od kinematického členu $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{D}}$ je kvantitativně malý v dostatečně velké expandující oblasti vesmíru. Naměřená kosmologická data se ale obvykle interpretují v rámci FRW modelů, což může pozměnit i poměrné zastoupení omega faktorů.

Kromě samotného středování (4.1) by správný postup měl obsahovat i samotné shlazení geometrie. Teorie MG využívá středování Cartanových rovnic struktury, alternativně je možno středovat i skaláry plně charakterizující (alespoň lokálně) daný prosotoročas. Existuje matematicky zajímavá alternativa, jakým způsobem lze dospět k 3-prostoru konstantní křivosti. Využívá se techniky Ricciho deformačního toku, který byl zaveden R. Hamiltonem a jehož popularita vzrostla nedávnými výsledky G. Perelamana. Důležitá byla také práce Carfory a Piotrkowské [9], kteří poukázali na souvislosti s metodou renormalizační grupy a kritickými jevy v kosmologii.

Mějme danou metriku g_{ab} na uzavřené 3-varietě bez hranic, která závisí na parametru β (typicky kosmologický čas) a nechejme ji vyvíjet ve směru Ricciho tenzoru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\beta} g_{ab}\left(\beta\right) &= -2R_{ab}\left(\beta\right), \\ g_{ab}\left(\beta=0\right) &= g_{ab}, \quad 0 \leq \beta \leq T_0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Lze ukázat, že lokální řešení na kompaktní 3-varietě pro dostatečně malé β existuje vždy a navíc, má-li počáteční metrika kladnou Ricciho křivost, pak řešení existuje pro všechna β a konverguje exponenciálně rychle k metrice prostoru o konstantní křivosti (technické detaily a další odkazy lze najít např. v [7]).

Touto procedurou se změní také ostatní kosmologické parametry. Např. střední hodnota hustoty se po shlazení oblasti $\mathcal{D}_0$ na $\overline{\mathcal{D}}$ pozmění na $\langle\rho\rangle_{\overline{\mathcal{D}}} = M_{\overline{\mathcal{D}}}/V_{\overline{\mathcal{D}}}$. Teorie navíc zajišťuje zachování hmoty při deformaci geometrie, a tak hodnota původní a renormalizované hustoty není stejná.

$$\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}_0} = \langle\rho\rangle_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{V_{\overline{\mathcal{D}}}}{V_{\mathcal{D}_0}}. \tag{4.19}$$

Podobným způsobem bychom obdrželi novou sadu renormalizovaných omega faktorů [7], která by se obecně lišila od té původní. Docházíme tak k závěru, že i v případě velmi malé hodnoty faktoru $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$ se poměr omega faktorů může díky vlivu metrické deformace netriviálním způsobem pozměnit.

Celkově tak můžeme 3+1 středování rozdělit do dvou kroků: časová evoluce (deformace ve směru vnější křivosti) a škálová evoluce (deformace ve směru vnitřní 3-Ricciho křivosti).

4.3 3+1 limita teorie MG

V Buchertově přístupu se nejprve vybere vhodný prostorový řez a poté se prostorovým středováním modifikuje skalární část Einsteinových rovnic. Paranjape a Singh [41] podobný postup využili pro středování v teorii MG pro makroskopickou FRW metriku. Opět se zde využívá systému vlastních souřadnic $\widehat{x}^\mu$: nehomogenní varieta $\mathcal{M}$ (pro jednoduchost situace s nulovou lapse funkcí N, $h{:=}\mathrm{det}h_{AB}$)

$${}^{(\mathcal{M})}ds^2 = -\frac{d\widehat{t}^2}{h(\widehat{t},\widehat{x})} + h_{AB}(\widehat{t},\widehat{x})d\widehat{x}^A d\widehat{x}^B \tag{4.20}$$

představuje takový prostoročas, z kterého po vystředování obdržíme FRW. Protože prostorová střední hodnota tenzoru $t^{\alpha\cdots}_{\beta\ldots}$ je ve vlastních souřadnicích definovaná vztahem

$$\left\langle t^{\alpha\cdots}_{\beta\ldots}\right\rangle_P = \lim_{T\to 0} \frac{1}{TV_{\Omega^{(3)}}} \int\limits_{t'-T/2}^{t'+T/2} dt' \int\limits_{\Omega^{(3)}} t^{\alpha\cdots}_{\beta\ldots}(t',x',y',z')dx'dy'dz' \tag{4.21}$$

a bilokální rozšíření tenzorových objektů je triviální, lze přímočarým způsobem vypočítat nezávislé složky korelační 2-formy $\mathbf{Z}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta}$ a z makroskopických rovnic (2.56) vybrat skalární část. Pak lze ukázat, že výsledné rovnice jsou svým tvarem podobné těm Buchertovým. Navíc skalární korekce jsou definovány přímo na FRW pozadí, takže porovnání s naměřenými daty je (na rozdíl od Buchertova přístupu) přímočaré. V [39] byla teorie dále rozpracována v kontextu kosmologických perturbací a numerické výpočty ukázaly na možnost zanedbání skalárních korekcí v perturbovaném FRW modelu se zářením a temnou hmotou. Podobně [40] uvádí zanedbatelnou korekci středováním sféricky symetrického kolapsu dokonalé tekutiny s nulovým tlakem modelovaným Lemaître-Tolman-Bondiho (LTB) metrikou.

4.4 Středování skalárních invariantů křivosti

Umíme-li bez technických obtíží integrovat na varietě $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ skalární funkce, nabízí se otázka, do jaké míry je možno samotnou geometrii representovat sadou skalárů. Coley, Hervik a Pelavas ukázali [12], že třída čtyřrozměrných lorentzovských variet, která nemůže být kompletně charakterizována polynomiálními invarianty zkonstruovaných z Riemannova tenzoru křivosti a jeho kovariantními derivacemi, je nutně Kundtova typu (tj. připouštějící geodetický nulový vektor l s nulovou expanzí, rotací a střižnou deformací).

Pro daný prostoročas $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ definujme množinu skalárních invariantů

$$\mathcal{I} \equiv \left\{R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta}, R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma}R^{\mu\nu\alpha\beta;\gamma}, R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma\delta}R^{\mu\nu\alpha\beta;\gamma\delta}, ...\right\}. \quad (4.22)$$

Integrací skalárů přes zvolenou oblast Ω dostaneme množinu $\bar{\mathcal{I}}$ charakterizující novou (makroskopickou) geometrii. Protože obecně neplatí vztahy typu $\overline{R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}} = \bar{R}_{\mu\nu}\bar{R}^{\mu\nu}$, metrický tenzor $\bar{g}_{\mu\nu}$ asociovaný s množinou skalárů $\bar{\mathcal{I}}$ nemusí existovat. Abychom tomuto problému předešli, odebereme z množiny $\mathcal{I}$ algebraicky nezávislé skaláry a tím získáme podmnožinu $\mathcal{I}_A \subseteq \mathcal{I}$. Dále odstraníme ty funkce, které lze dopočítat z rovnic ("syzygies") charakterizujících konkrétní prostoročas (např. Segreův a Petrovův typ) a takto získanou množinu $\mathcal{I}_{SA} \subseteq \mathcal{I}_A$ teprve středujeme. Tím obdržíme $\bar{\mathcal{I}}_{SA}$ a inverzním postupem pak i kompletní množinu $\bar{\mathcal{I}}$ (zde je předpokládáno, že po středování se tvar rovnic umožňujících konstrukci $\mathcal{I}_{SA}$ z $\mathcal{I}$ nezmění).

Na konci článku [11] je uveden konkrétní příklad statické, sféricky symetrické metriky s tenzorem energie a hybnosti dokonalé tekutiny.

$$ds^2 = -e^{f(r)}dt^2 + e^{f(r)}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (4.23)$$

Množina $\mathcal{I}_{SA}$ zde obsahuje jen dvě nezávislé funkce. Po středování lze množinu $\bar{\mathcal{I}}_{SA}$ sestavit z Ricciho tenzoru $\bar{R}_{\mu\nu}$ a malé korelace, která může být interpretována jako dodatečná konstantní křivost (v souladu s přehledem v kapitole 1.6).

Kapitola 5

Cartanovy skaláry

5.1 Tetrádový formalismus

Einsteinovy rovnice bývají obvykle zapsány pomocí tenzorových veličin. Často je výhodné pracovat se složkami tenzoru ve speciální - orthonormální bázi. Toho lze docílit zavedením vektorových polí ω_i^μ podle vztahu

$$\omega_i^\mu(x)\omega_j^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ij}, \tag{5.1}$$

kde η_{ij} =diag$(-1, 1, 1, 1)$ je Minkowského metrika. Tetrádové složky tenzoru se pak dostanou přímočarým způsobem

$$T^{ab...}_{ij...}(x) = \omega^a_\mu(x)\omega^b_\nu(x)...\omega^\alpha_i(x)\omega^\beta_j(x)...T^{\alpha\beta...}_{\mu\nu...}(x), \tag{5.2}$$

matice $\omega^a_\mu(x)$ je definována vztahem

$$\omega^a_\rho(x)\omega^\rho_i(x) = \delta^a_i. \tag{5.3}$$

Při využití tetrádového formalismu se výrazy netriviálně transformují jen při působení Lorentzovy grupy. Fixuje-li se určitým způsobem závislost na jejích parametrech, tetrádové složky se chovají jako skaláry a jejich středování je přímočaré. Jednou z možností, jak zvolit tetrádu $\omega_i^\mu(x)$, je minimalizovat funkcionál

$$S = \int \mathcal{L}\sqrt{-g(x)}d^4x. \tag{5.4}$$

V práci Behrendové [1] byl použit lagrangian

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu\omega^a_\rho(x)\right)\left(D_\nu\omega^b_\sigma(x)\right)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\eta_{ab}. \tag{5.5}$$

Výsledné pole $\omega_i^\mu(x)$ pak sloužilo k definici zhlazené metriky $\langle g_{\mu\nu}(x)\rangle$.

Zde bude prezentován odlišný přístup ke středování využívající teorie Cartanových skalárů. Při jejich konstrukci je navíc vybrána třída tetrádových polí, jež umožní středovat samotné Einsteinovy rovnice.

5.2 Geometrie na frame bundlu

Geometrie čtyřrozměrného prostoročasu byla v předchozím oddíle charakterizována sadou skalárních funkcí. Pro zobecnění do vyšších dimenzí není zatím k dispozici analogie důkazu v [12], o který se opírala předchozí konstrukce středování. Navíc z množiny polynomiálních invariantů je potřeba zpětně dopočítat Ricciho (popř. metrický) tenzor. Alternativní možností je lokálně charakterizovat geometrii pomocí Cartanových skalárů. Protože se jedná o množinu vytvořenou z tetrádových složek Riemannova tenzoru spolu s konečným počtem jeho kovariantních derivací (definovaných na frame bundlu), můžeme pomocí nich vyjádřit levou stranu Einsteinových rovnic a posléze skalární funkce středovat.

Začněme s konstrukcí Cartanových skalárů [10], [25]: Nechť $(\mathcal{M}, g)$ je n-dimenzionální diferencovatelná varieta s metrikou

$$\mathbf{g} = \eta_{ij}\boldsymbol{\omega}^i \otimes \boldsymbol{\omega}^j, \tag{5.6}$$

η_{ij} je konstantní symetrická matice a $\boldsymbol{\omega}^i$, i=1,2…,n tvoří bázi kotečného prostoru v bodě x^μ. Tetráda (frame) $\boldsymbol{\omega}^i$ je pro dané $\mathbf{g}$ a η_{ij} v každém bodě určena až na (zobecněné) rotace.

$$\boldsymbol{\omega}^i = \omega^i_\nu(x^\mu, \xi^\Upsilon)\mathbf{d}x^\nu, \tag{5.7}$$

ξ^Υ, Υ=1,…,$\frac{1}{2}n(n-1)$, značí souřadnice orthogonální grupy. V kapitole 1.2 byla stručně shrnuta geometrie ve formalismu 1-forem. Zde však nebude v rovnicích použita souřadnicová báze a veškeré objekty budou formulovány na zvětšeném $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimenzionálním prostoru $F(\mathcal{M})$ - frame bundlu. $F(\mathcal{M})$ je lokálně izomorfní kartézskému součinu malé části variety (prostoročasu) $\mathcal{M}$ a ortogonální (Lorentzovy) grupy G - tj. v každém bodě x^μ existuje fíbr se souřadnicemi ξ^Υ.

Vnější derivace d se tak rozšíří na $d = d_x + d_\xi$ a Cartanovy rovnice struktury pak mají tvar

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^i = \boldsymbol{\omega}^j \wedge \boldsymbol{\omega}^i{}_j, \tag{5.8}$$

$$d\boldsymbol{\omega}^i{}_j = -\boldsymbol{\omega}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k{}_j + \frac{1}{2} R^i_{jkl} \boldsymbol{\omega}^k \wedge \boldsymbol{\omega}^l. \tag{5.9}$$

spolu s podmínkou

$$\eta_{ik} \boldsymbol{\omega}^k{}_j + \eta_{jk} \boldsymbol{\omega}^k{}_i = 0. \tag{5.10}$$

Dalšími aplikacemi vnější derivace obdržíme kovariantní derivace tenzoru křivosti

$$\begin{aligned} \mathbf{d}R_{ijkl} &= R_{mjkl}\boldsymbol{\omega}^m_i + R_{imkl}\boldsymbol{\omega}^m_j + R_{ijml}\boldsymbol{\omega}^m_k + R_{ijkm}\boldsymbol{\omega}^m_l + R_{ijkl;m}\boldsymbol{\omega}^m, \\ \mathbf{d}R_{ijkl;n} &= R_{mjkl;n}\boldsymbol{\omega}^m_i + R_{imkl;n}\boldsymbol{\omega}^m_i + ... + R_{ijkl;nm}\boldsymbol{\omega}^m, \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Nechť R^p označuje množinu $\left\{R_{ijkm}, R_{ijkm;n_1}, ..., R_{ijkm;n_1...n_p}\right\}$ - p je nejmenší celé číslo, kdy všechny elementy R^{p+1} jsou funkcionálně závislé na prvcích z R^p (jako funkce na $F(\mathcal{M})$). Dvě funkce f a g jsou funkcionálně nezávislé právě tehdy, jsou-li 1-formy $\mathbf{d}f$ a $\mathbf{d}g$ lineárně nezávislé. Množina R^{p+1} pak charakterizuje geometrii (lokálně) jednoznačně a její prvky se nazývají Cartanovy skaláry.

Z následujícího postupu (Cartan-Karlhedeův algoritmus [26]) lze množinu Cartanových skalárů R^{p+1} sestavit :

1. Nechť $q = 0$.
2. Vypočítej R^q (R^0 je prázdná množina).
3. Najdi H_q, izotropní grupu R^q ($H_q \subseteq \mathrm{H}_{q-1}$), která ponechá nezměněny tetrádové složky Riemannova tenzoru.
4. Urči frame (až na H_q) převedením R^q do standardního tvaru.
5. Najdi t_q, počet nezávislých funkcí v R^q.
6. Jestliže t_q=t_{q-1} a dimH_q=dimH_{q-1}, pak $q = p + 1$.
   V jiném případě zvyš q o jednotku a pokračuj z bodu 2.

Standardní tvar v jednom z předchozích bodů lze nalézt Segreovým a Petrovovým algoritmem (popř jejich zobecnění na tenzory s vyšším počtem indexů). Podrobnosti o existujících algoritmech lze nalést například v [37] a [42].

Jak vyplývá z předchozí konstrukce, v posledním kroku nemusí být tetráda zcela fixována - existuje zde stále jistý stupeň volnosti působením izotropní grupy H_{p+1}, která sice může netriviálním způsobem transformovat tetrádové složky ostatním tenzorů, ale Cartanovy skaláry svůj tvar nezmění. Tato vlastnost umožňuje integrací Cartanových skalárů přes oblast $\Omega \subset \mathcal{M}$ získat další sadu skalárů $\bar{R}^{p+1}$, které budou dále charakterizovat zhlazenou geometrii prostoročasu .

Funkce v množině R^{p+1} zřejmě nemohou být zvoleny libovolně - měly by vyhovovat určité soustavě algebraických a diferenciálních rovnic, aby ze vztahů (5.8)- (5.11) bylo možné odečíst 1-formy $\boldsymbol{\omega}^i$ a tím i metriku $\mathbf{g}$. Podobné vazby by měly respektovat i středované Cartanovy skaláry.

Pro zjednodušení zápisu nejprve přepíšeme rovnice (5.8) - (5.11) do kompaktnějšího tvaru. Protože 1-formy konexe $\boldsymbol{\omega}^i{}_j$ jsou definovány na $F(\mathcal{M})$

$$\boldsymbol{\omega}^i{}_j = \gamma^i{}_{jk}\boldsymbol{\omega}^k + \boldsymbol{\tau}^i{}_j, \tag{5.12}$$

kde $\boldsymbol{\tau}^i{}_j = \tau^i{}_{j\Upsilon}\mathbf{d}\xi^\Upsilon$ generují orthogonální grupu a $\gamma^i{}_{jk}$ jsou Ricciho rotační koeficienty, můžeme za bázi kotečného prostoru $F(\mathcal{M})$ vzít množinu $\left\{\boldsymbol{\omega}^I\right\} \equiv \left\{\boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{\omega}^i_j\right\}$, I=1,2,…$\frac{1}{2}$n(n+1) a Cartanovy rovnice struktury přepsat do jednotného tvaru

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^I = \frac{1}{2}C^I_{JK}\boldsymbol{\omega}^J \wedge \boldsymbol{\omega}^K. \tag{5.13}$$

Jen některé C^I_{JK} jsou nenulové a lze z nich vyčíst složky Riemannova tenzoru. Další aplikací vnější derivace obdržíme analog rovnice (5.11).

$$\begin{gathered}
\mathbf{d}C^I_{JK} = C^I_{JK,\alpha}\mathbf{d}I^\alpha \equiv C^I_{JK,\alpha}I^\alpha{}_{|L}\boldsymbol{\omega}^L \equiv C^I_{JK|L}\boldsymbol{\omega}^L, \\
\mathbf{d}C^I_{JK|L} = C^I_{JK|LM}\boldsymbol{\omega}^M, \\
. \\
. \\
.
\end{gathered} \tag{5.14}$$

kde I^α, α=1,…,k $\leq \frac{1}{2}$n(n+1), je maximální množina funkcionálně nezávislých objektů z R^p. Symbol | zde označuje derivaci vzhledem k vektorovému poli duálnímu k 1-formě ω^L, podobně symbol , představuje derivaci vzhledem k vektorovému poli duálnímu k $\mathbf{d}I^\alpha$. I^α pak je možno chápat jako souřadnice na $F(\mathcal{M})$ a množina $\left\{C^I_{JK}, I^\alpha{}_{|L}\right\}$ je dostatečná pro vyjádření libovolných elementů z R^{p+1}. Formalismus Cartanových skalárů v sobě zahrnuje také informaci o symetriích dané variety. Protože množina R^{p+1} kompletně charakterizuje geometrii prostoročasu, grupa izometrií variety $\mathcal{M}$ má dimenzi $\frac{1}{2}$n(n+1)-k. Je-li z k funkcí I^α právě m nezávislých na souřadnicích ξ^Υ, pak navíc orbity izometrické grupy L mají dimenzi $d = n + m - k$ s izotropní podgrupou dimenze $s = \frac{1}{2}n(n-1) - m$.

Podstatné je pozorování, že i když izometrická grupa L nemusí působit jednoduše tranzitivně na varietě $\mathcal{M}$, na rozšířeném prostoru $F(\mathcal{M})$ je už tato vlastnost zaručena. Dokonce existuje algoritmus [27], pomocí kterého lze obdržet strukturní konstanty grupy L:

1. Omez 1-formy $\boldsymbol{\omega}^I$ na orbity $I^\alpha = konst$ na $F(\mathcal{M})$,
2. Vytvoř z nich bázi $\boldsymbol{\sigma}^I$,
3. Vypočítej vnější derivace $\boldsymbol{d\sigma}^I = -\frac{1}{2}\tilde{C}^I_{JK}\boldsymbol{\sigma}^J \wedge \boldsymbol{\sigma}^K$,
4. Identifikuj strukturní konstanty $\tilde{C}^I_{JK}$ izotropní grupy.

Algebru Killingových vektorů tak lze získat projekcí Cartanových rovnic (5.13) na orbity $\mathbf{d}I^\alpha = 0$.

V obvyklém přístupu je geometrie charakterizována $\frac{1}{2}n(n+1)$ složkami metrického tenzoru. Množina $\left\{C^I_{JK}, I^\alpha{}_{|L}\right\}$ obsahuje funkcí více, a tak jsou potřeba dodatečné algebraické a diferenciální rovnice, které se dostanou ze vztahů typu "$\mathbf{d}^2 = 0$". Lze ukázat [2], že takové nezbytné podmínky jsou

$$\mathbf{d}^2 I^\alpha = 0,$$

$$I^\alpha{}_{|K,\beta} I^\beta{}_{|J} - I^\alpha{}_{|J,\beta} I^\beta{}_{|K} + I^\alpha{}_{|L} C^L_{JK} = 0, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{d}^2 \boldsymbol{\omega}^I = 0,$$

$$C^I_{[JK|L]} + C^I_{M[K} C^M_{LJ]} = 0. \tag{5.16}$$

Z prvního vztahu plynou obvyklé Ricciho identity, druhá sada odpovídá Bianchiho identitám.

5.3 Středování Cartanových skalárů

Předpokládejme, že máme danou varietu $\mathcal{M}$ charakterizovanou množinou skalárních funkcí R^{p+1}. Chtěli bychom po volbě středovací oblasti Ω získat novou varietu $\overline{\mathcal{M}}$ - množinově identickou s $\mathcal{M}$, ale se "shlazenou" metrickou strukturou, která by už nedokázala dobře rozpoznat rychle fluktující nehomogenity gravitačního pole. Naivní postup by se skládal z integrace skalárních funkcí $f \in R^{p+1}$ podle zřejmého předpisu

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{V_\Omega} \int\limits_\Omega f\left(x'\right) d^N x', \tag{5.17}$$

kde $d^N x$ je invariantní metrická objemová míra. Tím postupem bychom obdrželi novou množinu $\overline{R^{p+1}}$. Její prvky by ale v obecném případě nemusely vyhovovat vazbám (5.15) a (5.16), protože se jedná o rovnice nelineární.

Náprava je analogická s Coleyho přístupem ke středování skalárů křivosti [11], který byl stručně shrnut v předchozí kapitole. Základem je omezit se na nejmenší možný počet nezávislých funkcí $R'^{p+1} \subseteq R^{p+1}$ (z rovnic (5.15) a (5.16) pak je možno z R'^{p+1} vygenerovat úplnou sadu R^{p+1}) a teprve tu středovat. Tím dostaneme množinu $\overline{R}'^{p+1}$ a inverzním postupem i $\overline{R}^{p+1}$. Teorie pak zaručuje, že existuje taková metrika $g_{\mu\nu}$ (resp. 1-formy $\boldsymbol{\omega}^i$), z které lze za využití rovnic (5.8) - (5.11) získat známé funkce $\overline{R}^{p+1}$.

Středováním R'^{p+1} se typicky sníží počet funkcionálně nezávislých funkcí v množině $\overline{R}'^{p+1}$, jehož důsledkem je zvětšená grupa izometrií nového prostoročasu $\overline{\mathcal{M}}$. Killingovy vektory lze pak obdržet výše popsaným algoritmem.

Formalismus Cartanových skalárů lze použít i pro středování samotných Einsteinových rovnic. Levá strana (Einsteinův tenzor $E_{\mu\nu}$) totiž obsahuje výrazy vytvořené z kontrahovaného Riemannova tenzoru (neboli součtu části Cartanových skalárů, zvolí-li se správná tetráda podle Cartan-Karlhedeova algoritmu) a ty pak lze integrovat jako skalární funkce. Einsteinovy rovnice jsou silně nelineární, proto můžeme očekávat, že po jejich středovaní obdržíme rovnice v symbolickém tvaru

$$R^\mu_\nu\left(\bar{g}_{\alpha\beta}\right) + C^\mu_\nu = \overline{T^\mu_\nu}. \tag{5.18}$$

Zde budeme předpokládat, že nový Ricciho tenzor $\overline{R^\mu_\nu}$ již charakterizuje středovanou geometrii (tj. je sestaven z makroskopického tenzoru $\overline{g}_{\mu\nu}$). Ve většině případů je metrická struktura variety $\overline{\mathcal{M}}$ explicitně předpokládána - např. v kosmologii se v převážné většině uvažuje homogenní a izotropní

FRW. Tím vzniká otázka, nakolik je tento ansatz oprávněný. Ze symetrické metriky lze přímočarým způsobem vytvořit metriku perturbovanou, opačná procedura, při které by bylo žádoucí obdržet symetrickou metriku středováním, tak samozřejmá není. Může nastat i situace, kdy po středování perturbované FRW metriky vznikne prostoročas s nenulovým Weylovým tenzorem, nebo s korelačním tenzorem ve tvaru nedokonalé tekutiny. Tím vniká nejasnost, jakým způsobem interpretovat středovanou levou stranu Einsteinových rovnic.

Mohli bychom například středovat sadu Cartanových skalárů dle výše uvedeného schématu, a tak v principu obdržet makroskopickou metriku $\overline{g}_{\mu\nu}$ (ne nutně "jednoduchou") a teprve z ní sestavit Einsteinův tenzor. Tím je zaručena korektnost středování, ale makroskopická metrika se získá složitým výpočtem (jak lze získat 1-formy $\boldsymbol{\omega}^i$ z množiny Cartanových skaláru R^{p+1}, je ukázáno v [3]). Korelační tenzor v tomto přístupu vyjde nulový - nebo lépe řečeno, geometrická korekce se zahrne do definice makroskopického Ricciho tenzoru. Výhodou je možnost pozorovat rostoucí symetrie prostoročasu při samotném středování.

Přímočařejší a pro svou jednoduchost fyzikálně přijatelnější je rovnou předpokládat tvar makroskopické metriky (sfréricky symetrická, homogenní, FRW,...) a středovat pouze Einsteinovy rovnice. Tím získáme dva Ricciho tenzory: první makroskopický $\overline{R}_{\mu\nu}$ a druhý středovaný dle definice (5.17) $\langle R_{\mu\nu}\rangle$ (v předchozím přistupu byly oba tenzory identické). Jejich rozdílem můžeme definovat korelační tenzor

$$C^{\mu}_{\nu} = \langle R_{\mu\nu}\rangle - R^{\mu}_{\nu}\left(\bar{g}_{\alpha\beta}\right). \tag{5.19}$$

Makroskopické geometrii vyhovuje Ricciho tenzor $\overline{R}_{\mu\nu}$ a jsou tak splněny i kontrahované Bianchiho identity, jejichž důsledkem se lokálně nezachovává tenzor $\overline{T^{\mu}_{\nu}}$, ale součet $\overline{T^{\mu}_{\nu}} + C^{\mu}_{\nu}$. Korelační tenzor C^{μ}_{ν} tak lze interpretovat jako příspěvek do celkového efektivního tenzoru energie a hybnosti

$$^{(ef)}T^{\mu}_{\nu} = \overline{T^{\mu}_{\nu}} + C^{\mu}_{\nu}. \tag{5.20}$$

Středování zde můžeme rozdělit do několika kroků: Pro danou nehomogenní metriku nejprve středovat Riemannův tenzor, "uhádnout" tvar hladkého prostoročasu a nakonec spočítat korelační člen, který makroskopickou metriku zpětně ovlivní.

Otázkou zůstává, který z těchto dvou postupů využít. Máme-li k dispozici libovolný metrický tenzor, můžeme integrací Cartanových skalárů R'^{p+1} přes zvolenou oblast Ω a následným výpočtem $\overline{g}_{\mu\nu}$ z množiny $\overline{R}'^{p+1}$ obdržet nový makroskopický metrický tenzor. Z nelinearity Einsteinových rovnic pak vyplývá, že vypočtený makroskopický metrický tenzor obecně nemusí být nutně ten očekávaný symetrický. Ve stejném okamžiku se středuje i tenzor energie a hybnosti. Nabízí se otázka, kdy je možno tuto jednodušší metriku použít, aniž by byla ztracena důležitá informace o původním prostoročasu. V kosmologii tato otázka zní, lze-li dynamiku charakterizovat FRW modelem s jedinou expanzní funkcí $a(t)$ a jakým způsobem se ovlivní její tvar v důsledku středování rovnic. Problém by zde mohl nastat, pokud korelační člen nevyhovuje předpokladům "uhádnuté" symetrické metriky (dokonalá tekutina u FRW modelů) a není-li svou velikostí zanedbatelně malý. Pak by bylo nutné provést prvně zmíněný komplikovanější postup a řešit tak podstatně složitější problém.

S podobnou situací jsme se setkali už v teorii MG. Bylo nutné se rozhodnout, který středovaný geometrický objekt budeme považovat za fundamentální. První možností je středovaný Riemannův tenzor (a jeho kovariantní derivace), z kterých lze ale jednoznačně zkonstruovat metriku. Druhou je pak vhodná volba makroskopické metriky a následné vypočtení korelačního členu.

5.4 Středování maximálně symetrických prostoročasů

Korektní středování by nemělo modifikovat tvar maximálně symetrických prostoročasů. Jejich geometrii charakterizuje jediná konstanta - skalární křivost R. Podle znaménka pak můžeme rozlišit de Sitterův ($R > 0$), Minkowskiho ($R = 0$) a anti-de Sitterův ($R < 0$) prostoročas. Všechny tři představují konformně plochá vakuová řešení Einsteinových rovnic s obecně nenulovou kosmologickou konstantou. Z Cartanových skalárů je funkcionálně nezávislá jen skalární křivost R, jež po středování zůstává nezměněna.

Aplikováním Cartan-Karlhedova algoritmu k nalezení Cartanových skalárů a tím i vhodné tetrády obdržíme složky Riemannova tenzoru ve standardním tvaru. S výhodou lze využit NP formalismu (viz další příklad) -

Weylův a Ricciho spinor vymizí a zbývá tak středovat pouze skalární křivost.

Podobným způsobem lze středovat i další prostory konstantní křivosti s libovolnou signaturou metrického tenzoru.

5.5 Středování gravitačních vln na plochém pozadí

Jako jednoduchou ilustraci uvedeme příklad monochromatické rovinné gravitační vlny, která se šíří ve směru osy z na pozadí plochého prostoročasu. V rámci linearizované teorie lze metriku zapsat ve tvaru [33]

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + A\sin(t - z))dx^2 + (1 - A\sin(t - z))dy^2 + dz^2. \quad (5.21)$$

a označuje amplitudu gravitační vlny s frekvencí $\omega = 1$. Další výpočty byly provedeny pomocí programu Maple. Nejprve byla zvolena nulová tetráda

$$l_a = [1, 0, 0, -1],$$

$$n_a = [1/2, 0, 0, 1/2],$$

$$m_a = [0, -\frac{1 + A\sin(t-z)}{\sqrt{(2 + 2A\sin(t-z))}}, i\frac{-1 + A\sin(t-z)}{\sqrt{(2 - 2A\sin(t-z))}}, 0],$$

$$\bar{m}_a = [0, -\frac{1 + A\sin(t-z)}{\sqrt{(2 + 2A\sin(t-z))}}, -i\frac{-1 + A\sin t - z)}{\sqrt{(2 - 2A\sin(t-z))}}, 0], \quad (5.22)$$

ve které má lorentzovská metrika η^{ab} tvar

$$\eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Pro převedení Riemannova tenzoru do normálního tvaru se často využívá NP formalismu [37]. Tenzorové veličiny lze nahradit jejími spinorovými ekvivalenty - konkrétně Riemannův tenzor je reprezentován Weylovým a Ricciho spinorem spolu se skalární křivostí. Předpokládejme, že A je malý parametr $A << 1$ charakterizující amplitudu gravitační vlny. Weylův tenzor má jedinou nenulovou složku Ψ_4 a podle Petrovovy algebraické klasifikace se jedná o prostoročas typu N, což není díky přítomnosti gravitační vlny nikterak překvapivé.

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0,$$
$$\Psi_4 = (\frac{1}{2}\mathrm{sin(t)cos(z)} - \frac{1}{2}\mathrm{sin(z)cos(t)})A + O(A^3), \tag{5.24}$$

Komponenty Ricciho spinoru vycházejí

$$\Phi_{00} = \Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{11} = \Phi_{12} = 0,$$
$$\Phi_{22} = (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos(z)^2 - \frac{3}{4}\cos(t)^2 + \frac{3}{2}\cos(t)^2\cos(z)^2 + $$
$$+\frac{3}{2}\mathrm{sin(t)cos(z)sin(z)cos(t)})A^2 + O(A^4). \tag{5.25}$$

Integrací přes dostatečný počet vlnových délek středovaný Weylův spinor vymizí a jediná netriviální složka Riemannova tenzoru zbývá $\Phi_{22} = konst.$ Explicitně byly vypočteny a středovány jen některé Cartanovy skaláry. Z čistě geometrického hlediska můžeme předpokládat (bez jakékoli znalosti obecné relativity), že středováním metriky s jednoduchou vysokofrekvenční gravitační vlnou obdržíme Minkowského prostoročas. Můžeme tak výraz $\Phi_{22} = konst.$ “přenést” na pravou stranu a interpretovat ho jako efektivní tenzor energie a hybnosti gravitačních vln. Navíc algebraický tvar Ricciho spinoru poukazuje na jeho povahu - podle očekávání charakterizuje čisté záření [42]. Výsledný středovaný prostoročas je konformně plochý s jedinou nenulovou složkou Ricciho spinoru.

Tabulka 1: Kanonický tvar Ricciho spinoru. X,Y a Z představují funkce souřadnic. Převzato z [33]

Segreho typ	Obvyklý název		Ricciho komponenty						Zbývající izotropie
			$\Phi_{00'}$	$\Phi_{01'}$	$\Phi_{02'}$	$\Phi_{11'}$	$\Phi_{12'}$	$\Phi_{22'}$	
$[111,1]$	Obecný	g	X	0	$Y\in\mathbb{R}$	Z	0	X	Žádná
$[11,Z\bar{Z}]$		z	$-X$	0	$Y\in\mathbb{R}$	Z	0	X	Žádná
$[11,2]$	PP II	2	0	0	$X\in\mathbb{R}$	Y	0	±1	Žádná
$[1,3]$	PP III	3	0	$X\notin\mathbb{R}$	$2Y$	Y	0	0	Žádná
$[1(1,2)]$	Nulový	n	0	0	$2X$	X	0	±1	1D nulová
$[(1,3)]$	Koincidentní	4	0	0	0	0	1	0	1D nulová
$[(11),Z\bar{Z}]$	Komplexní	c	$-X$	0	0	Y	0	X	Spinová
$[11(2)]$	Poloviční	h	0	0	0	X	0	±1	Spinová
$[11(1,1)]$	Boostový	b	0	0	$X\in\mathbb{R}$	Y	0	0	Boostová
$[(11)1,1]$	Spinový	s	X	0	0	Y	0	X	Spinová
$[(11)(1,1)]$	Nenulový elektromagnetický	e	0	0	0	X	0	0	Spin/boost
$[(11,2)]$	Čistě zářivý	r	0	0	0	0	0	±1	2D nul., spin.
$[1(11,1)]$	Tachyonová tek.	t	$-2X$	0	0	X	0	$-2X$	$SO(2,1)$
$[(111),1]$	Dokonalá tek.	p	$2X$	0	0	X	0	$2X$	$SO(3)$
$[--]$	Vakuum	0	0	0	0	0	0	0	$SL(2,\mathbb{C})$

Kapitola 6

Nehomogenita vesmíru a temná energie

Na závěr této práce bych rád odkázal na některé zajímavé články, které se věnují problému středování nehomogenit a jejich vztahu k pozorovanému zrychlení vesmíru. Většina z nich v sobě zahrnuje Buchertův přístup ke středování Einsteinových rovnic, který byl shrnut v kapitole 4.1.

Podstatná část provedených výpočtů využívá perturbované FRW metriky. Kolb, Matarrese a Riotto ukázali [28], že perturbace s charakteristickou délkou větší než Hubbleův poloměr nemohou vysvětlit pozorované zrychlení, a korektní analýza tak musí zahrnovat perturbace s kratší vlnovou délkou. Problém ale nastává v perturbačním rozvoji, který v tomto případě není stabilní, a správný postup by tak měl uvažovat přesnou nepertubovanou metriku.

Pokud je možné až do současné doby využít lineárně perturbované metriky

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + a^2(t)(1+2\Phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$

$$|\Phi| << 1, \left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|^2 << \frac{1}{a^2}D^i\Phi D_i\Phi, \left(D^i\Phi D_i\Phi\right)^2 << \left(D^i D^j\Phi\right)\left(D_i D_j\Phi\right), \tag{6.1}$$

kde D_i značí kovariantní derivaci vzhledem k prostorové metrice γ_{ij}, Ishibashi a Wald [24] ukázali, že korekce v Buchertových rovnicích (4.6), (4.7) jsou zanedbatelně malé. Jedním z modelových přesných řešeních Einsteinových rovnic je sféricky symetrická nehomogenní LTB metrika

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2(r,t)}{1+2E(r)}dr^2 + R^2(r,t)\,d\Omega^2. \tag{6.2}$$

Je-li pozorovatel umístěn do centra s velmi malou hustotou hmoty, pak je možné s dobrým úspěchem fitovat naměřená data bez nutnosti zavedení temné energie [18]. Tím je ale přímo narušen jeden z hlavních obvykle kladených předpokladů - kosmologický princip.

Wiltshire [47] v souvislosti s pozorovaným rozložením hmoty zdůrazňuje odlišné měření času v různých místech vesmíru a jejich vliv na měření pozorovatelných veličin. Využit je Buchertův přístup, který umožňuje popsat dvouškálové rozložení hmoty v pozorovaném vesmíru, který lze reprezentovat jako prázdnou oblast vyplněnou hmotou ve formě clusterů galaxií. Tento odlišný pohled na danou problematiku umožní v sobě zahrnout zdánlivé zrychlení vesmíru. Tento přístup umožňuje modifikaci Friedmannových rovnic bez nutnosti zavedení temné energie.

Podrobnější analýza problému, kde vystupuje více oblastí s odlišným poměrem hmot, lze nalézt v nedávném článku Wieganda a Bucherta [46]. Studovány zde byly opět Buchertovy rovnice, kde středovací oblasti obsahovaly více různých částí s odlišnou hustotou hmoty. Výsledný model opět v sobě nezahrnoval kosmologickou konstantu.

Kromě souvislosti s temnou energií se v rámci teorie MG objevily spekulace o vysvětlení temné hmoty jako pouhý důsledek středování dynamických rovnic. Otázka, do jaké míry jsou tyto modifikace podstatné, je stále otevřená a v této souvislosti existuje několik různých směrů k řešení tohoto problému. Podrobnější analýzu týkající se této problematiky lze najít např. v přehledových článcích [6] a [16].

Kapitola 7

Závěr

V této práci byla stručně shrnuta tématika středování Einsteinových rovnic, zejména důsledky v kosmologickém kontextu. Především byl vysvětlen přesný kovariantní způsob středování - Zalaletdinova teorie makroskopické gravitace. Při shrnutí známé teorie byl kladen důraz zejména na osvětlení nejednoznačnosti volby bilokálního operátoru, problému Lieova přenosu středovacích oblastí a interpretace přesných řešení na konkrétním prostoročasu.

Hlavní výsledek první části práce spočívá v aplikaci vysokofrekvenční limity MG pro středování vysokofrekvenčních gravitačních vln na pozadí **dS**. Stejný výsledek je získán také Isaacsonovou aproximační metodou. Korelační člen lze v tomto případě identifikovat s tenzorem energie a hybnosti dokonalé tekutiny. V závislosti na kosmologické konstantě Λ se ukazuje, že další korekce by mohly být zanedbatelně malé.

Po stručném shrnutí dalších možných přístupů k problému středování (důraz je kladen především na neperturbační metody) je navrhnuta další metoda spočívající ve středování Cartanových skalárů. Geometrie prostoročasu je zde charakterizována sadou skalárních funkcí, jejichž středováním je možno obdržet další (v jistém smyslu zhlazený) prostoročas.

Na závěr jsou uvedeny dvě konkrétní aplikace tohoto středování na prostoročasy konstantní křivosti a dále na rovinnou monochromatickou gravitační vlnu na pozadí Minkowského prostoročasu.

Literatura

[1] Behrend, J.: *Metric renormalization in general relativity*, arXiv:0812.2859 (2008)

[2] Bradley, M., Karlhede, A.: *On the curvature description of gravitational fields*, Class. Quantum Grav. 7 449 (1990).

[3] Bradley, M., Marklund, M.: *Finding solutions to Einstein's equations in terms of invariant objects*, Class. Quantum Grav. 13 3021 (1996).

[4] Buchert, T.: *On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity: Dust Cosmologies*, Gen. Rel. Grav. 32, 105 (2000).

[5] Buchert, T.: *On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity: Perfect Fluid Cosmologies* , Gen. Rel. Grav. 33, 1381 (2001).

[6] Buchert, T.: *Dark Energy from structure: a status report*, Gen. Rel. Grav. 40, 467 (2008).

[7] Buchert, T., Carfora,, M.: *Regional averaging and scaling in relativistic cosmology* , Class. Quant. Grav. 19, 6109 (2002).

[8] Buchert, T.,Larena, J., Alimi, J.–M.: *Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies - the 'morphon field'*, Class. Quant. Grav. 23, 6379 (2006).

[9] Carfora, M., Piotrkowska, K.: *Renormalization group approach to relativistic cosmology*, Phys. Rev. D 52, 4393 (1995).

[10] Cartan, E.: *Leçons sur la Geometrie des Espaces de Riemann*, 2nd edn. Paris, Gauthier-Villars (1946).

[11] Coley, A.A.: *Averaging in cosmological models using scalars* , arXiv:0908.4281 (2009).

[12] Coley, A.A., Hervik, S., Pelavas, N.: *Lorentzian spacetimes with constant curvature invariants in four dimensions*, Class. Quantum Grav. 26, 025013, (2009).

[13] Coley, A.A. , Pelavas, N. , Zalaletdinov, R.M.: *Cosmological solutions in macroscopic gravity*, Phys. Rev. Lett., 95, 151102, (2005).

[14] Coley, A.A. , Pelavas, N.: *Averaging spherically symmetric spacetimes in general relativity*, Phys. Rev. D 74, 087301 (2006).

[15] Coley, A.A. , Pelavas, N.: *Averaging in spherically symmetric cosmology*, Phys. Rev. D 75, 043506 (2007).

[16] Ellis, G.F.R.: *Dark energy and inhomogeneity*, J. Phys.: Conf. Ser. 189 012011 (2009).

[17] Ellis, G.F.R.: *Relativistic cosmology: its nature, aims and problems*, General Relativity and Gravitation, ed B. Bertotti et al. (Reidel) 215–288 (1984).

[18] Enqvist, K., Mattsson, T.: *The effect of inhomogeneous expansion on the supernova observations*, JCAP 0702, 019 (2007).

[19] Gasperini, M., Marozzi, G.,Veneziano, G.: *A covariant and gauge–invariant formulation of the cosmological "backreaction*

, arXiv:0912.3244 (2009).

[20] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R.: *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.

[21] van den Hoogen,R. J.: *A complete cosmological solution to the averaged Einstein field equations as found in macroscopic gravity* J. Math. Phys. 50, 082503 (2009).

[22] van den Hoogen,R. J.: *Spherically Symmetric Solutions in Macroscopic Gravity* Gen. Rel. Grav., 40, 2213-2227 (2008).

[23] Isaacson, R. A.: *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency I. and II.,*, Phys. Rev. 166, 1263-1280 (1968).

[24] Ishibashi, A., Wald, R.M.: *Can the Acceleration of Our Universe Be Explained by the Effects of Inhomogeneities?*, Class. Quant. Grav. 23, 235 (2006).

[25] Karlhede, A.: *A Review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity*, Gen. Rel. Grav. 12, 693 (1980).

[26] Karlhede, A.: *A The equivalence problem* , Gen. Rel. Grav. 6,1109–1114 (2006).

[27] Karlhede, A., MacCallum, M.A.H.: *On determining the isometry group of a riemannian space* , Gen. Rel. Grav. 14, 673 (1982).

[28] Kolb, E.W., Matarrese, S., Riotto, A.: *On cosmic acceleration without dark energy*, astro–ph/0506534, (2005).

[29] Krasiński, A.: *Inhomogenous Cosmological Models*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[30] Kvasnica, J.: *Teorie elektromagnetického pole*, Academia, Praha (1985).

[31] Larena, J.: *Spatially averaged cosmology in an arbitrary coordinate system,*Phys. Rev. D 79, 084006 (2009).

[32] Mars,M., Zalaletdinov, R.M.: *Space–time averages in macroscopic gravity and volume-preserving coordinates*, J. Math. Phys. 38, 4741(1997).

[33] Misner,Ch.W., Thorne, K.S., Wheeler,J.A.: *Gravitation*, W H Freeman and Co., New York,(1970).

[34] Nakahara,M.: *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing,(1990).

[35] Noonan, T. W.: *The Gravitational Contribution to the Stress-Energy Tensor of a Medium in General Relativity*, Gen. Rel. Grav. 16 1103, (1984).

[36] Noonan, T. W.: *The Gravitational Contribution to the Momentum of a Medium in General Relativity*, Gen. Rel. Grav. 17, 535 (1985).

[37] O'Donnell, P.: *Introduction to 2-spinors in general relativity*, World Scientific Singapore, (2003).

[38] Paranjape,A.: *A Thesis: The Averaging Problem in Cosmology*, Tata Institute of Fundamental Research,Mumbai(2009).

[39] Paranjape,A: *Backreaction of cosmological perturbations in covariant macroscopic gravity*, Phys. Rev. D78, 063522 (2008).

[40] Paranjape,A, Singh, T.P.: *Cosmic Inhomogeneities and Averaged Cosmological Dynamics*, Phys. Rev. Lett. 101, 181101 (2008).

[41] Paranjape,A, Singh, T.P.: *Spatial averaging limit of covariant macroscopic gravity: Scalar corrections to the cosmological equations*, Phys. Rev. D76, 044006, (2007).

[42] Pollney, D., Skea, J.E.F.,d'Inverno,R.A.: *Classifying geometries in general relativity: I. Standard forms for symmetric spinors*, Class. Quantum Grav. 17, 643–63 (2000).

[43] Shirokov, M. F., Fisher, I. Z.: *Isotropic Spaces with Discrete Gravitational-Field Sources. On the Theory of a Nonhomogeneous Isotropic Universe*, Gen. Rel. Grav. 30, 1411–1427 (1998).

[44] Svítek, O., Podolský, J.: *Evolution of high-frequency gravitational waves in some cosmological models*, Czechoslovak Journal of Physics **56** 1367-1380 (2006).

[45] Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, (2008).

[46] Wiegand, A, Buchert, T. *Multi–scale cosmology and structure–emerging Dark Energy: a plausibility analysis*, arXiv:1002.3912 (2010).

[47] Wiltshire,D.L. *Exact Solution to the Averaging Problem in Cosmology*, Phys. Rev. Lett. 99, 251101 (2007).

[48] Zalaletdinov, R.M.,: *Averaging out the Einstein equations*, Gen. Rel. Grav. 24, 1015 (1992).

[49] Zalaletdinov, R.M.,: *Space-time Averages of Classical Physical Fields*, gr-qc/0411004 (2004).

[50] Zalaletdinov, R.M.,: *Towards a theory of macroscopic gravity*, Gen. Rel. Grav. 25, 673 (1993).