

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Kamil Daněk

Gravitační mikročočkování soustavou několika těles

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.,

Studijní program: Fyzika , teoretická fyzika

2010

Zde děkuji vedoucímu práce za neochvějný optimismus a správné pokládání otázek, bez kterého by mé hledání odpovědí nemělo smysl. A píši věnování své přítelkyni Zuzance za trpělivost a přípravu stravy, bez které by mé tělo již nemělo... život.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Kamil Daněk

Obsah

1	Úvod	5
2	Gravitační čočka tvořená n body	9
2.1	Zobrazovací rovnice	9
2.2	Zjasnění, kritická křivka a kaustika	10
2.3	Stacionární body jakobiánu	11
3	Dvojitá čočka	13
3.1	Kritické křivky a kaustiky pro dvojitou čočku	13
3.2	Stacionární body jakobiánu a dělicí body kritické křivky . .	15
3.3	Obrazy a zjasnění	18
4	Trojité čočka	21
4.1	Kritická křivka a kaustika	21
4.2	Dělicí body	23
4.2.1	Kolineární uspořádání s proměnnou středovou hmotností	24
4.2.2	Rovnostranný trojúhelník s proměnnou hmotností vr- cholu	28
4.2.3	Rovnoramenný trojúhelník se stejnými hmotnostmi .	32
4.3	Polohy obrazů a světelné křivky	38
4.4	Mapy zjasnění	40
4.5	Aproximace zjasnění v bodě křížení	42
4.6	Pozorovaná trojitá čočka	45
5	Závěr	49
	Literatura	51

Název práce: Gravitační mikročočkování soustavou několika těles

Autor: Kamil Daněk

Katedra (ústav): ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

e-mail vedoucího: david.heyrovsky@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme gravitační mikročočky tvořené několika hmotnými body. Uvedeme teorii obecné n -bodové čočky a podrobněji se zabýváme dvojitými a trojitými čočkami. Na dvojčočkách provedeme analýzu kritických křivek a kaustik, kterou zobecníme pro případ trojčoček. Prostor parametrů pro několik typů konfigurací trojčočky jsme rozdělili na oblasti s různými topologiemi kritické křivky. Zkoumali jsme zjasnění zdroje v blízkosti zajímavých struktur kaustiky. Otestovali jsme použitelnost aproximace zjasnění pro případ křížení dvou foldů. Nakonec jsme aplikovali použitý formalismus na pozorovaný případ trojité čočky OGLE-2006-BLG-109.

Klíčová slova: gravitační čočky, hvězdné soustavy, extrasolární planety

Title: Gravitational microlensing by a few-body system

Author: Kamil Daněk

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: david.heyrovsky@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study gravitational microlenses consisting of a few point masses. We present the theoretical framework of n -point-mass lensing, and followup by a more detailed description of binary and triple lenses. We demonstrate the analysis of critical curves and caustics of the binary lens and apply the same approach to the case of triple lenses. We divided several two-dimensional cuts of the parameter space into areas with different topology of critical curves. We studied the amplification of a source located in the vicinity of interesting parts of the caustic. We tested the applicability of an approximation for the amplification at the intersection of two folds. Finally, we applied the formalism to the case of the observed triple-lens microlensing event OGLE-2006-BLG-109.

Keywords: gravitational lenses, stellar systems, extrasolar planets

Kapitola 1

Úvod

Při gravitačním čočkování je světlo ze vzdáleného astrofyzikálního zdroje ovlivněno průchodem gravitačního pole bližšího objektu, který hraje roli čočky (viz např. [11]). Gravitační čočkování se podle metody pozorování dělí na silné čočkování, slabé čočkování a mikro-čočkování. Silné čočkování je režim, při kterém je možné pozorovat více obrazů daného zdroje. V případě silného čočkování bývá zdrojem kvazar nebo galaxie a čočkou jiná galaxie nebo kupa galaxií. V případě slabého čočkování není efekt gravitační čočky samostatně rozeznatelný a zkoumají se slabé deformace tvaru velkého množství pozorovaných vzdálených galaxií, jejichž ovlivnění gravitačním polem čočkující kupy se zpracovává statisticky. U gravitačního mikročočkování nelze rozlišit jednotlivé obrazy, měřitelná je jen časová změna zjasnění vlivem procházející gravitační čočky. Gravitační čočkou v tomto případě je nejčastěji hvězda a zdrojem bývá jiná hvězda nebo kvazar. Kromě detekce extrasolárních planet u čočkujících hvězd, která je aktuálně hlavní motivací těchto pozorování, se mikročočkování používá k mapování temné hmoty nebo k rozlišení detailů povrchu zjasněného zdroje.

První práce týkající se gravitačního mikročočkování, ačkoli tento pojem v té době ještě nebyl běžně používán, psal Refsdal již v šedesátých letech dvacátého století (např. [15]). Roku 1986 Paczyński navrhl mikročočkování jako metodu hledání temné hmoty v galaktickém halu pomocí sledování změn intenzity velkého množství hvězd ve Velkém Magellanovu mračnu [10]. Tím inspiroval zahájení několika pozorovacích projektů. Jedním z prvních byl EROS (Expérience pour la Recherche d'Objets Sombres), který měl fáze EROS-1 (1990-1995) a EROS-2 (1996-2003). O projektu se pojednává v původním článku [2], odkazy na články a další výstupy lze nalézt na

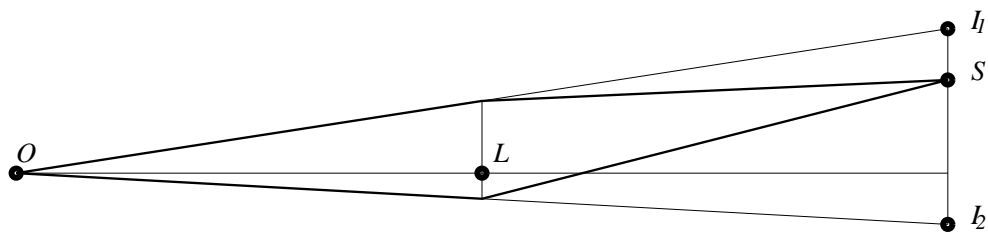
stránkách <http://eros.in2p3.fr/publications.html>. Dalším významným projektem byl MACHO (MASSive Compact Halo Object) ve spolupráci Austrálie a USA, který běžel od roku 1993 do roku 1999. Paczyński s Udalským byli u základů projektu OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment), který začal roku 1992 a pokračuje dodnes [17]. Jako poslední zmíníme další dodnes běžící projekt MOA (Microlensing Observations in Astrophysics), který vznikl roku 1998 ve spolupráci Japonska a Nového Zélandu.

Dvojitě mikročocky byly poprvé teoreticky studovány v článku Schneidera a Weiße [16], kde byly analyzovány tvary kritických křivek a kaustik, zobrazování dvojitou čockou a světelné křivky pro přechody foldů a kaspů. Autoři článku navrhovali, že tento model by mohl platit pro mikročockování vzdáleného zdroje dvojhvězdou z naší galaxie. Použitelnost tohoto modelu dále zkoumali Mao a Paczyński v [9] a odhadli, že zhruba 10% všech mikročockování v galaktické výduti bude způsobené dvojitou čockou. Navíc jako první demonstrovali, že jako dvojitá čocka může působit i hvězda s planetou. K dnešnímu dni bylo objeveno ~ 200 dvojčock v projektech MACHO (viz. např. [1]), OGLE (viz. např. [7]) a MOA, z nichž řada ještě nebyla publikována. Další články týkající se dvoučock lze nalézt mnoho, zmíníme zde ještě článek z roku 1993 [18], pojednávající o změnách topologie kaustik a kritických křivek dvojitě čocky. Tento článek je spolu s jinými zahrnut v knize [13].

V posledních letech vyšlo několik článků týkajících se trojitých čock. Ch. Han [5] a J. Wambsganss s Ch. Liebigovou [19] se zabývají možností detegovat měsíce exoplanet tvořící s planetou a hvězdou trojitou čocku. Články od Chunga a Parka [6] a od Hana a kolektivu [8] zase pojednávají o možnostech detekce planety u dvojhvězdy. První pozorovaný systém tvořený hvězdou a dvěma planetami, OGLE-2006-BLG-109, je uveden v [4] a podrobněji rozebrán v [3]. Stále ale chybí podrobný teoretický rozbor trojitých čock v duchu dvoučockových prací [16] a [18].

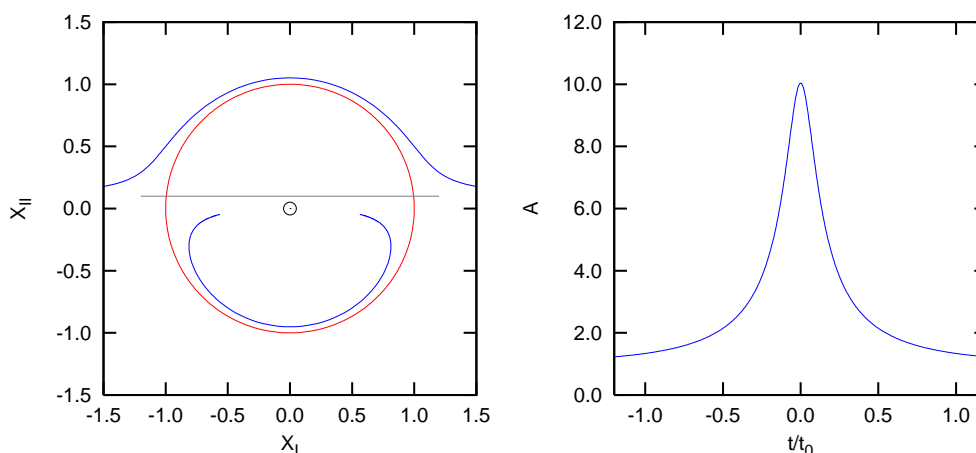
Nejjednodušším modelem gravitační čocky je ohyb světla z bodového zdroje hmotným bodem. Schéma takové čocky uvádíme v obrázku 1.1, kde O označuje polohu pozorovatele, L polohu čockujícího bodu, S polohu zdroje a I_1, I_2 polohu dvou pozorovaných obrazů zdroje (viz. např. [11]).

Polohu obrazu lze určit z kvadratické zobrazovací rovnice, která má dva různé kořeny, kromě případu, kdy jsou zdroj a čocka v přesném zákrytu. V takovém případě čocka vytvoří jeden obraz podél takzvané Einsteinovy kružnice, jejíž poloměr je určen hmotností čocky a vzdálenostmi zdroje, čocky a pozorovatele. V případě, že zdroj a čocka nejsou v zákrytu, se je-



Obrázek 1.1: Schéma gravitační čočky. O : pozorovatel; L : čočka; S : zdroj; I_1, I_2 : obrazy

den obraz nachází uvnitř Einsteinovy kružnice a druhý vně. Každý z těchto obrazů je jinak zjasnění a celkové zjasnění je dané jejich součtem. Celkové zjasnění pro zákryt bodového zdroje a čočky je formálně nekonečné. Pro ilustraci uvádíme v obrázku 1.2 příklad průchodu zdroje v blízkosti gravitační čočky. V levé části je vykreslena Einsteinova kružnice, lineární dráha zdroje a příslušné dráhy obrazů. V pravé části obrázku je pak celkové zjasnění v závislosti na čase, tzv. světelná křivka.



Obrázek 1.2: Obrazy a světelná křivka pro jednoduchou čočku. Levá část: Dráha zdroje a obrazů. Šedivá úsečka: trajektorie zdroje; modré křivky: trajektorie obrazů; červený kruh: Einsteinova kružnice; černý kroužek: poloha čočky. Pravá část: světelná křivka.

Přidáním dalšího hmotného bodu dostaneme dvojitou čočku. Pokud předpokládáme, že můžeme polohy bodů čočky nahradit polohami v rovině kolmé na směr pozorování, mluvíme o tenké gravitační čočce, v opačném případě se

jedná o tlustou gravitační čočku. Gravitačně vázané systémy lze ale většinou s dostatečnou přesností popisovat jako tenkou gravitační čočku. Oproti jednoduché gravitační čočce pro vícenásobnou čočku je zjasnění nekonečné, pokud se bodový zdroj nachází na křivce zvané kaustika. Při mikročočkování lze pak měřit na světelné křivce píky odpovídající přechodům kaustiky, případně přiblížením zdroje k výběžkům kaustiky. Z interpretace světelné křivky pomocí kaustiky lze pak získat informaci o parametrech čočky. Mikročočkování dvojitou čočkou je nejcitlivější v případě, kdy jsou body čočky vzdálené zhruba jeden Einsteinův poloměr. Tím je mikročočkování výhodnější oproti jiným metodám hledání exoplanet, neboť je citlivější na planety více vzdálené od mateřské hvězdy a tím pádem více podobné Sluneční soustavě. Trojitá čočka umožňuje hledání hvězdných soustav s dvěma planetami, planety vázané k dvojhvězdě nebo dokonce měsíce exoplanet. Znamená ale také zvýšení počtu parametrů čočky a hlavně mnohem složitější tvary kaustik. V této práci se snažíme zobecnit analýzu některých vlastností dvojitých čoček na trojitou čočku a poskytnout základní přehled kritických křivek a kaustik pro trojitou čočku.

V druhé kapitole ukazujeme cestu od zobrazovací rovnice pro jednoduchou gravitační čočku k rovnici pro n -násobnou gravitační čočku. Přecházíme do komplexních souřadnic, vyšetřujeme jakobián zobrazení čočkou a zavádíme pojem kritické křivky a kaustiky. Třetí kapitola pojednává o dvojitě čočce, ukazujeme zde několik případů kritických křivek a kaustik, polohy obrazů a tvar světelných křivek při přechodu kaustiky. Vyšetřujeme zde také uspořádání, při kterém dochází ke změnám počtu částí kritické křivky. Ve čtvrté kapitole pojednáváme o trojitě čočce. Zavádíme zde speciální dvoudimensionální parametrisace, pro které nacházíme dělicí body kritické křivky. Pomocí nich pak rozdělíme prostor parametrů na různé oblasti podle počtu částí kritické křivky a pro tyto oblasti pak vykreslujeme kritické křivky a kaustiky. Řešením zobrazovací rovnice získáme mapy zjasnění a zkoumáme jejich lokální aproximaci. Na závěr prezentujeme mapy zjasnění pro pozorovaný systém OGLE-2006-BLG-109L.

Kapitola 2

Gravitační čočka tvořená n body

2.1 Zobrazovací rovnice

V modelu bodové gravitační čočky má dráha paprsku tvar lomené čáry, přičemž úhel, o který se paprsek odchýlí od původního směru je určen vztahem

$$\alpha = \frac{4GM}{rc^2}, \quad (2.1)$$

kde M je hmotnost čočky, G gravitační konstanta, r je vzdálenost paprsku v bodě zlomu od čočky a c je rychlost světla. V gravitačním mikročočkování je tento úhel velice malý, pro hvězdy v naší Galaxii řádově 0,001”.

Zavedeme kartézské úhlové souřadnice v rovině nebe $\mathbf{X} = (X_I, X_{II})$ s počátkem v poloze čočky. Úhel α pak lze zapsat

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{\mathbf{X}}{D_L |\mathbf{X}|^2}, \quad (2.2)$$

kde D_L je vzdálenost čočky a pozorovatele. Odtud dostaneme vztah mezi souřadnicemi zdroje \mathbf{Y} a obrazu \mathbf{X}

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \frac{D_{LS}}{D_S} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.3)$$

kde D_S je vzdálenost pozorovatele a zdroje a D_{LS} je vzdálenost čočky a zdroje. Zavedením úhlového Einsteinova poloměru

$$\Theta_E = \sqrt{\frac{4GMD_{LS}}{c^2 D_S D_L}} \quad (2.4)$$

lze zobrazovací rovnici (2.3) dále upravit přechodem k úhlovým proměnným v jednotkách Θ_E

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{Y}}{\Theta_E}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}}{\Theta_E} \quad (2.5)$$

do tvaru, který obsahuje jen bezrozměrné proměnné

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \quad (2.6)$$

Pro případ tenké čočky tvořené n hmotnými body se model jednobodové čočky zobecní tak, že celkový úhel odklonu paprsku je roven součtu úhlů odklonu od jednotlivých hmotných bodů

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{4GM_i}{c^2} \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_i}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i|^2}, \quad (2.7)$$

kde \mathbf{X}_i jsou souřadnice hmotných bodů o hmotnostech M_i tvořících gravitační čočku. S využitím (2.7) lze pak zobrazovací rovnici (2.6) zobecnit pro případ n hmotných bodů

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2}, \quad (2.8)$$

kde μ_i jsou relativní hmotnosti $\mu_i = M_i/M$, $M = \sum_{i=1}^n M_i$.

Rovnici (2.8) lze dále zjednodušit zavedením komplexních proměnných $\zeta = y_I + iy_{II}$, $z = x_I + ix_{II}$, kde místo (x_I, x_{II}) budeme používat proměnné (z, \bar{z})

$$\zeta = z - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\bar{z} - \bar{z}_i}. \quad (2.9)$$

2.2 Zjasnění, kritická křivka a kaustika

Zjasnění daného obrazu zdroje je určeno převrácenou hodnotou determinantu Jacobiho matice $A = \frac{1}{|\det J|}$. Ten lze v komplexních proměnných vyjádřit

$$\det J = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} = 1 - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Po dosazení z rovnice (2.9) dostaneme

$$\det J = 1 - \left| \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \right|^2. \quad (2.11)$$

Množina obrazů z , pro které je $\det J = 0$ a které jsou tedy nekonečně zjasněné, se nazývá kritická křivka. Množina poloh zdroje ζ odpovídající nekonečně zjasněnému obrazu podle rovnice (2.9) se nazývá kaustika. Položením podmínky $\det J = 0$, získáme parametrické vyjádření kritické křivky

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = e^{2i\phi}, \quad (2.12)$$

kde $\phi \in (0, 2\pi]$. Dosazením ze zobrazovací rovnice (2.9) a komplexním sdružením dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{(z - z_i)^2} = e^{-2i\phi}. \quad (2.13)$$

Pro jednoduchou bodovou čočku ($n = 1$) v počátku máme $\mu_1 = 1$, $z_1 = 0$. Řešením rovnice (2.13) nalezneme kritickou křivku $z = e^{i\phi}$, neboli kružnici o Einsteinově poloměru. Dosazením kritické křivky do (2.9) zjistíme, že kaustika je redukována do bodu $\zeta = 0$ v poloze čočky.

2.3 Stacionární body jakobiánu

Kritickou křivku tvoří obecně soustava dílčích uzavřených křivek. Kritická křivka odděluje oblasti, kde $\det J > 0$, a oblasti, kde $\det J < 0$. Pro různé parametry čočky (tj. hmotnosti a polohy bodů čočky) může mít kritická křivka různý počet uzavřených částí. Při studiu vlastností čočky je důležité najít právě takové kombinace parametrů, při kterých dochází ke změnám topologie kritické křivky. Bod, kde se v takové konfiguraci kritická křivka rozděluje na více částí, je zároveň sedlovým bodem $\det J$. Hledanou kombinaci parametrů lze proto vyjádřit podmínkou, že sedlový bod jakobiánu leží na kritické křivce $\det J = 0$.

Z podmínky pro stacionární bod $\frac{\partial \det J}{\partial \bar{z}} = 0$ získáme

$$-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{z}^2} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{z} \partial z} = 0. \quad (2.14)$$

Druhý člen na levé straně (2.14) je identicky nulový, jak je vidět z (2.9). Pro stacionární body musí platit buď $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} = 0$ nebo $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{z}^2} = 0$. Povahu extrému $\det J$ vyšetříme pomocí hessiánu (determinantu Hesseho matice)

$$\det H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \det J}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \det J}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \det J}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \det J}{\partial y^2} \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \det J}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 \det J}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \frac{\partial^2 \det J}{\partial \bar{z} \partial z} & \frac{\partial^2 \det J}{\partial \bar{z}^2} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Dosazením ze zobrazovací rovnice (2.9) získáme

$$\det H = 4 \left(\left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{z}^2} \right|^4 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right| \left| \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \bar{z}^3} \right| \right). \quad (2.16)$$

Vzhledem k tomu, že $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right| = \left| \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \right|$, stacionární bod s $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} = 0$ má $\det H > 0$ a je tedy extrémem $\det J$. Pro n -bodovou čočku získáme tyto body z rovnice

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{(z - z_i)^2} = 0. \quad (2.17)$$

Z rovnice (2.13) je vidět, že body splňující (2.17) neleží na kritické křivce. Navíc každá konečná oblast oddělená částmi kritické křivky musí obsahovat buď pól jakobiánu (leží v polohách z_i) nebo bod splňující (2.17). Roznásobením (2.17) získáme pro tyto extrémy polynomiální rovnici stupně $2n - 2$.

Body splňující $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{z}^2} = 0$ mají $\det H < 0$ a jsou tedy hledanými sedlovými body. Pro n -bodovou čočku dostaneme po komplexním sdružení

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{(z - z_i)^3} = 0. \quad (2.18)$$

Roznásobením této rovnice získáme pro sedlové body polynomiální rovnici stupně $3n - 3$. Aby byl sedlový bod zároveň dělicím bodem, musí navíc splnit polynomiální rovnici stupně $2n$ získanou roznásobením rovnice pro kritickou křivku (2.13).

Kapitola 3

Dvojitá čočka

V této kapitole se budeme zabývat gravitačním čočkováním dvěma hmotnými body. Tento případ je již do značné míry prozkoumán a popsán v jiné literatuře (viz např. [16]). Nám tento model bude sloužit jako teoretický podklad pro studium podobného modelu gravitační čočky tvořené třemi hmotnými body, kterým se zabýváme v kapitole 3.

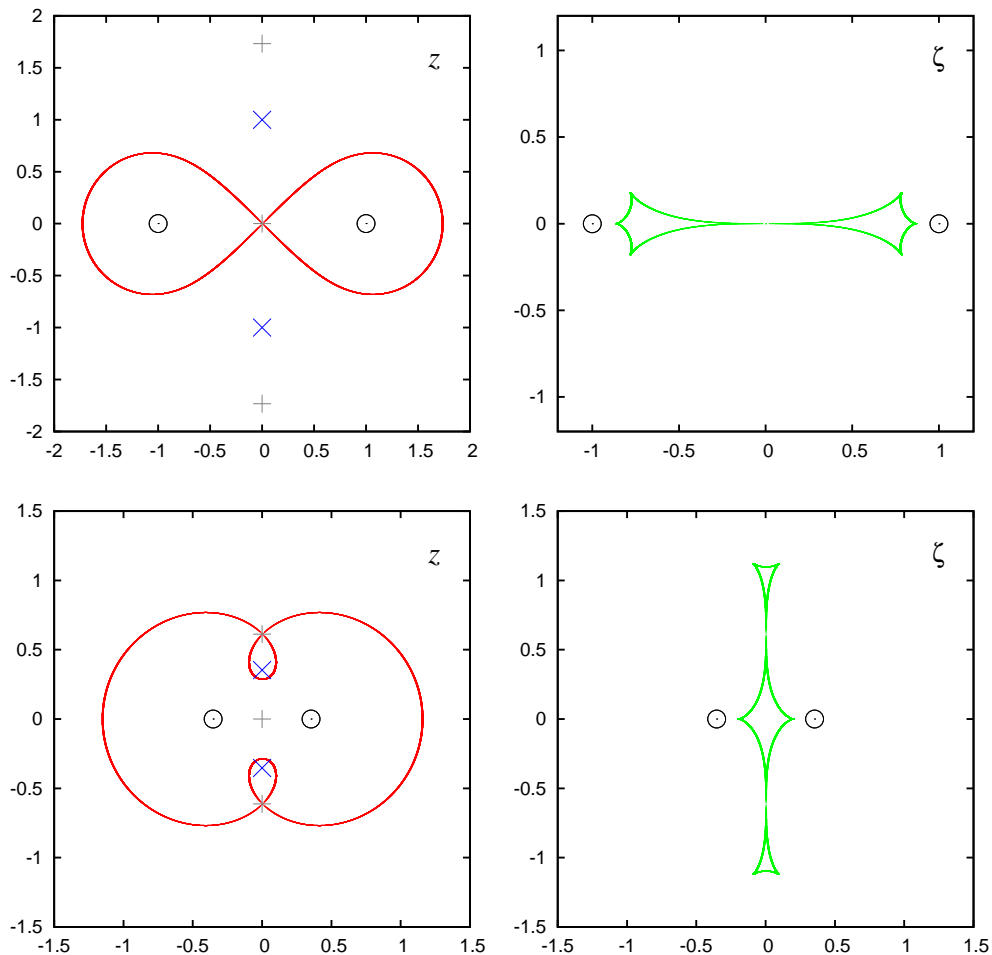
Souřadnice lze zvolit tak, aby přímka protínající body čočky ležela na reálné ose a počátek souřadnic byl v geometrickém středu. Poloha bodů čočky je pak určena jediným parametrem d , kterým označíme jejich vzdálenost v jednotkách celkového Einsteinova poloměru. Máme tedy $z_1 = -d/2$, $z_2 = d/2$. Vzhledem k tomu, že pracujeme s relativními hmotnostmi $\mu_1 + \mu_2 = 1$, vystačíme si s jedním hmotnostním parametrem $\mu \equiv \mu_2$.

3.1 Kritické křivky a kaustiky pro dvojitou čočku

Rovnice (2.13) pro kritickou křivku se v případě dvoubodové gravitační čočky redukuje na

$$\frac{1 - \mu}{(z + \frac{d}{2})^2} + \frac{\mu}{(z - \frac{d}{2})^2} = e^{-2i\phi}. \quad (3.1)$$

Roznásobením rovnice (3.1) obdržíme polynom čtvrtého stupně v proměnné z , jehož kořeny pro různé hodnoty parametru ϕ jsou body kritické křivky. Dosazením těchto bodů do rovnice (2.9) obdržíme kaustiku.



Obrázek 3.1: Kritická křivka a kaustika pro dvojitou čočku. Levá část: kritická křivka. Červená křivka: kritická křivka; šedivé křížky: sedlové body jakobiánu; modré křížky: extrémé jakobiánu; černé kroužky: polohy bodů čočky. Pravá část: kaustika. Zelená křivka: kaustika; černá kolečka: polohy bodů čočky. Horní část: $\mu = \frac{1}{2}$, $d = 2$. Dolní část: $\mu = \frac{1}{2}$, $d = 2^{-1/2}$.

V obrázku 3.1 vynášíme v levém sloupci červenou čarou kritickou křivku a v pravém zelenou čarou kaustiku pro dvojitou čočku o stejných hmotnostech $\mu = 0,5$ a dvě hodnoty d odpovídající dělicí se kritické křivce $d = 2$ pro horní část obrázku a $d = 2^{-1/2}$ pro dolní část. V levém sloupci jsou také vyznačené polohy sedlových bodů, polohy extrémů jakobiánu a polohy bodů čočky. Pro $d > 2$ kritickou křivku tvoří dvě části, které s d jdoucím do nekonečna přecházejí v kružnici o poloměrech $2^{-1/2}$, tedy v Einsteinovy kružnice dvou jednoduchých čoček. Pro $2^{-1/2} < d < 2$ kritickou křivku tvoří jen jedna část. Pro $d < 2^{-1/2}$ kritickou křivku tvoří tři části, přičemž dvě menší části jsou uzavřeny v oblasti ohraničené třetí částí. S d jdoucím k nule se uzavřené části kritické křivky zmenšují do bodu v počátku a vnější část přechází v kružnici o Einsteinově poloměru.

Kaustiky jsou složeny z konkávních úseků zvaných foldy a hrotů zvaných kasy. V případě dvojitě čočky se kaustika skládá z disjunktních uzavřených křivek, jejichž počet odpovídá počtu kritických křivek. Pro $d > 2$ tvoří kaustiku dvě části, každá se čtyřmi kasy. Pro d jdoucí do nekonečna se kaustiky zmenšují a tvarují do malých astroid kolem bodů čočky. Pro $2^{-1/2} < d < 2$ má kaustika jen jednu část s šesti kasy. Pro $d < 2^{-1/2}$ se kaustika skládá ze tří částí, dvou s třemi kasy a jedné s čtyřmi kasy mezi nimi. Pokud budeme d dále snižovat k nule, krajní trojcípé kaustiky budou unikat do nekonečna.

3.2 Stacionární body jakobiánu a dělicí body kritické křivky

Pro dvoubodovou čočku sedlové body jakobiánu splňují rovnici (2.18), tedy

$$\frac{1 - \mu}{(z + \frac{d}{2})^3} + \frac{\mu}{(z - \frac{d}{2})^3} = 0, \quad (3.2)$$

a extrémy rovnici (2.17), neboli

$$\frac{1 - \mu}{(z + \frac{d}{2})^2} + \frac{\mu}{(z - \frac{d}{2})^2} = 0. \quad (3.3)$$

Roznásobením rovnice pro extrémy vznikne kvadratická rovnice s řešením

$$z = d(1 - 2\mu \pm i\sqrt{\mu(2 - \mu)}). \quad (3.4)$$

Vidíme tedy, že polohy extrémů v případě stejných hmotností ($\mu = 0, 5$) leží na imaginární ose, jak je vidět v obrázku 3.1, a jejich vzdálenost je úměrná separaci d .

Roznásobením (3.2) získáme kubickou rovnici, pro její kořeny lze tedy také najít jednoduchý předpis. My se ale podíváme na dělicí body, které jsou společným kořenem rovnice pro sedlový bod (3.2) a rovnice pro kritickou křivku (3.1). Roznásobením rovnice (3.1) získáme rovnici 4. stupně pro z . Společný kořen budeme hledat metodou Sylvesterovy matice. Tím, že položíme determinant Sylvesterovy matice roven nule, získáme rovnici, kterou můžeme chápat jako kubickou rovnici pro $e^{2i\phi}$. Pokud tuto rovnici komplexně sdružíme, získáme novou kubickou rovnici, tentokrát pro $e^{-2i\phi}$. Vzhledem k tomu, že konfigurace, při které dochází k dělení kritické křivky, je závislá pouze na parametrech d a μ , můžeme rovnici pro $e^{2i\phi}$ a rovnici pro $e^{-2i\phi}$ považovat za dvě podmínky pro výskyt dělicího bodu a opět pro ně sestavit Sylvesterovu matici, jejíž determinant položíme roven nule. Tento determinant lze upravit do tvaru součinu tří členů, které se dají rozepsat jako polynomy v d .

První polynom vede na rovnici

$$d^6 + 3d^4 + 3[1 - 9\mu(1 - \mu)]d^2 + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Tato rovnice ale nemá reálné řešení.

Z druhého polynomu získáme rovnici

$$d^6 - 3d^4 + 3[1 - 9\mu(1 - \mu)]d^2 - 1 = 0. \quad (3.6)$$

Řešením (3.6) získáme rovnici pro d

$$d = \sqrt{1 + 3\sqrt[3]{\mu(1 - \mu)} \left(\sqrt[3]{1 - \mu} + \sqrt[3]{\mu} \right)}. \quad (3.7)$$

Pro stejné hmotnosti $\mu = 0, 5$ vyjde z (3.7) $d = 2$. Tato konfigurace popisuje případ, kdy se kritická křivka dělí na dva díly a dělicí bod se nachází v počátku souřadnic (viz levý horní panel obrázku 3.1).

Rovnici, která vznikne vynulováním třetího polynomu, lze vyjádřit jako

$$d^{12} - 3[1 - 9\mu(1 - \mu)]d^8 + 3d^4 - 1 = 0. \quad (3.8)$$

Její řešení opět vede na rovnici pro d

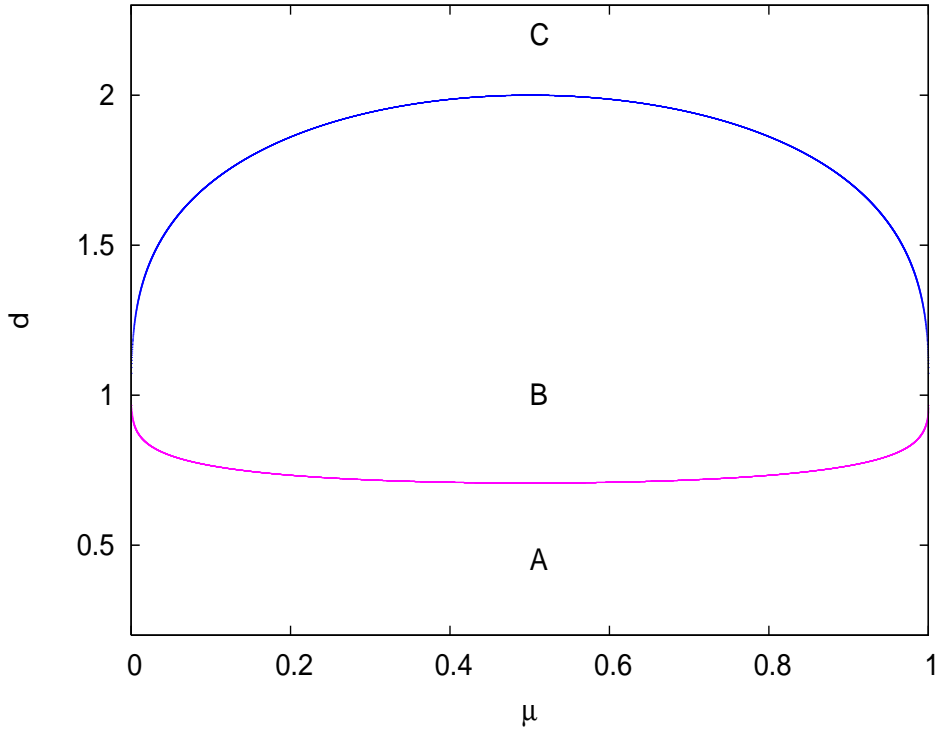
$$d = \sqrt[4]{1 - 9\mu(1 - \mu) + u + v} = 0, \quad (3.9)$$

kde

$$\begin{aligned} u &= 3\sqrt[3]{\mu(1-\mu)}\sqrt[3]{27\mu^4 - 54\mu^3 + 36\mu^2 - 10\mu + 1}, \\ v &= 3\sqrt[3]{\mu(1-\mu)}\sqrt[3]{27\mu^4 - 54\mu^3 + 36\mu^2 - 8\mu}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pro stejné hmotnosti vyjde $d = 2^{-1/2}$, což odpovídá případu, kdy se dvě malé části kritické křivky napojují na větší část kritické křivky, ve které jsou uzavřeny.

V obrázku 3.2 jsme v prostoru parametrů (μ, d) vynesli rovnici (3.6) modrou čarou a rovnici (3.8) fialovou čarou. Písmeny **A**, **B**, **C** označujeme oblasti s různými topologiemi kritické křivky. Bodu z oblasti **A** odpovídá kritická křivka tvořená třemi částmi, bodu z oblasti **B** kritická křivka tvořená jen jednou částí a bodu z oblasti **C** kritická křivka tvořená dvěma částmi.



Obrázek 3.2: Diagram topologií kritické křivky. Modrá křivka: řešení rovnice (3.6); fialová křivka: řešení rovnice (3.8). V oblasti **A** má kritická křivka tři části, v oblasti **B** jednu část a v oblasti **C** dvě části.

Podrobný rozbor této úlohy lze nalézt v [13], kde kromě dělicích bodů vyšetřují také polohy a počet kaspů pro dvojitou čočku.

3.3 Obrazy a zjasnění

Zobrazovací rovnici pro dvojitou čočku získáme z (2.8)

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mu_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^2} - \mu_2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^2}, \quad (3.11)$$

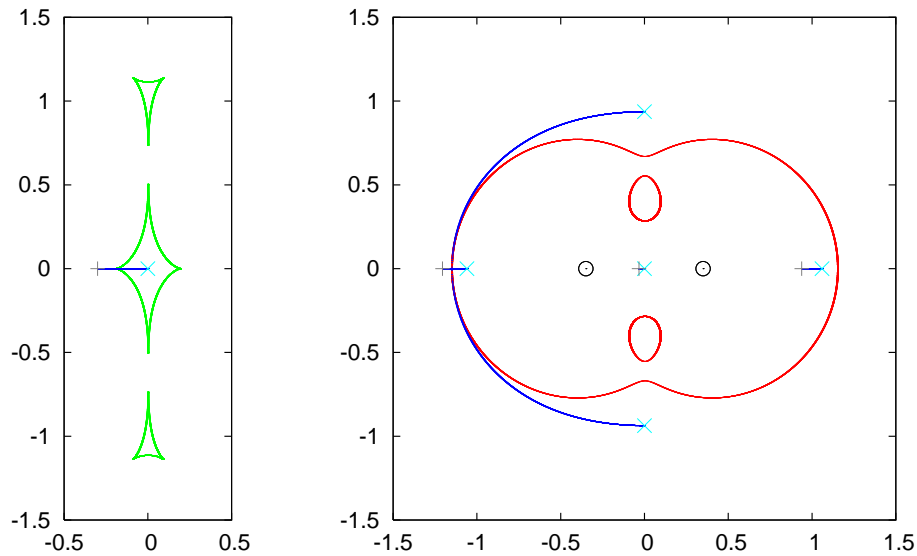
případně z (2.9) v komplexních proměnných

$$\zeta = z - \frac{\mu_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{\mu_2}{\bar{z} - \bar{z}_2}. \quad (3.12)$$

Řešením zobrazovací rovnice lze získat polohy obrazů. V reálném případě roznásobíme (3.11) a získáme dva polynomy o dvou proměnných, které musíme vyřešit zároveň. Dva polynomy dostaneme i v případě, že vezmeme zvlášť reálnou a imaginární část rovnice (3.12). Jednodušší je ale chápat z a \bar{z} jako nezávislé proměnné, komplexně sdružit (3.12), vyjádřit \bar{z} a dosadit do zpět (3.12). Tím pro dvoubodovou čočku dostaneme rovnici pátého stupně v z (pro obecné n rovnici stupně $n^2 + 1$). Kořeny této rovnice představují polohy obrazů pro danou polohu zdroje ζ . Vzhledem k tomu, že z , \bar{z} nejsou nezávislé veličiny, je nutno takto získané polohy obrazů z zpět dosadit do výchozí rovnice (3.12). V případě dvoubodové čočky je všech pět kořenů zároveň polohami obrazů jen, pokud se zdroj nachází uvnitř kaustiky. Pokud se nachází mimo kaustiku, splní rovnici (3.12) jen tři kořeny.

V obrázku 3.3 jsme vykreslili příklad úsečkové trajektorie zdroje zobrazené dvojitou čočkou. V levé části obrázku je vykreslena kaustika a trajektorie zdroje. V pravé části se nachází kritická křivka a obrazy trajektorie. Část trajektorie, která se nachází vně kaustiky, má tři obrazy podél reálné osy, jeden vně kritické křivky a dva uvnitř kritické křivky. Část trajektorie, která se nachází uvnitř kaustiky, má celkem pět obrazů. Jeden z obrazů se na kritické křivce při průchodu kaspem rozdělí na tři obrazy, z nichž jeden pokračuje dovnitř kritické křivky a dva opouštějí reálnou osu a v obloucích obepínají kritickou křivku. Při průchodu zdroje foldem se na kritické křivce objeví dva nové obrazy nezávisle na původních třech, přičemž jeden směřuje vně kritické křivky a druhý dovnitř.

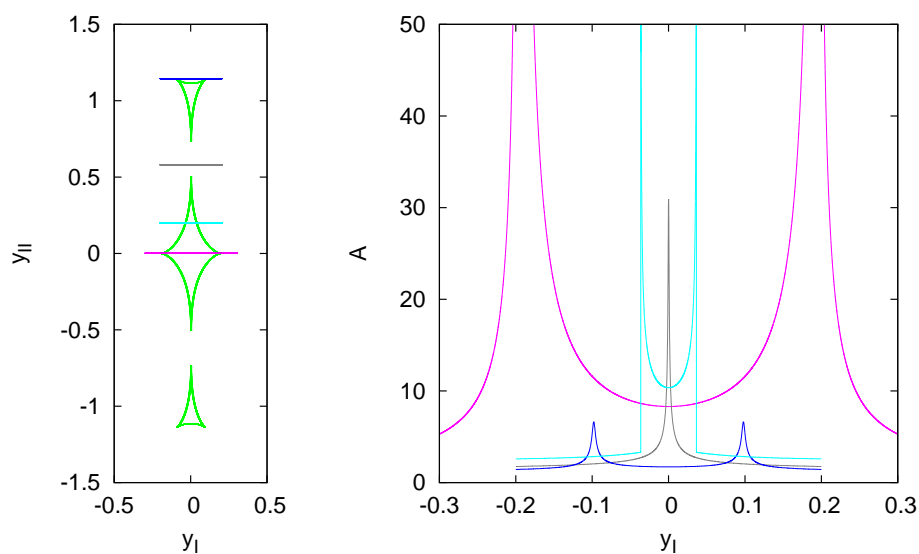
V gravitačním mikročočkování nás zajímá hlavně celkové zjasnění A světelného toku zdroje, neboť jednotlivé obrazy nebývají při pozorování



Obrázek 3.3: Pohyb obrazů pro dvojitou čočku při přechodu přes kaustiku. Levá část: kaustika a trajektorie zdroje. Zelená křivka: kaustika; modrá úsečka: trajektorie zdroje; šedivý křížek: počáteční poloha zdroje; modrozelený křížek: koncová poloha zdroje. Pravá část: obrazy zdroje. Modrá křivky: trajektorie obrazů; červená křivka: kritická křivka; šedivý křížek: obrazy zdroje v počáteční poloze; modrozelený křížek: obrazy zdroje v koncové poloze; černé kroužky: polohy bodů čočky

rozišitelné. Pro celkové zjasnění musíme tedy určit polohy jednotlivých obrazů, v těchto bodech spočítat hodnoty jakobiánu a jejich převrácené absolutní hodnoty sečíst. Většina událostí gravitačního mikročočkování trvá řádově dny až měsíce. Při pozorování se měří zjasnění čočkou zobrazeného zdroje, jehož časový průběh se nazývá světelná křivka.

Příklady světelných křivek uvádíme v obrázku 3.4. V levé části grafu je znázorněna trajektorie zdroje při přechodu přes kaustiku. V pravé části jsou světelné křivky. Trajektorie a světelné křivky spolu korespondují skrze barvy. Fialová světelná křivka odpovídá přechodu přes dva kaspý. V tom případě se zjasnění spojitě zvyšuje až k divergenci na kritické křivce a pak opět spojitě klesá. Modrozelená světelná křivka odpovídá přechodu přes fold. V tom případě se snižující se vzdáleností od kaustiky zjasnění roste jen málo, pak skokově diverguje na kritické křivce a uvnitř kaustiky spojitě klesá. Šedá a modrá křivka odpovídají trajektoriím bez přechodu kaustiky, kdy místo divergencí vykazují pouze píky v blízkosti kaspů.



Obrázek 3.4: Světelná křivka při průchodu zdroje blízko kaustiky. Levá část: kaustika a trajektorie zdroje. Zelená křivka: kaustika; barevné úsečky: trajektorie zdroje. Pravá část: světelné křivky

V reálných pozorováních mikročočkování s přechodem kaustiky hraje významnou roli nenulový rozměr zdroje. Zde uvedený model mikročočkování uvažuje bodový zdroj, proto vychází zjasnění nekonečné. Při uvážení zdroje nenulové velikosti je třeba integrovat zjasnění přes plochu zdroje, zjasnění pak vyjde konečné. Vliv nenulového rozměru zdroje do značné míry potlačí vliv divergencí zjasnění, které vycházejí pro bodový zdroj. K tomu dochází například u zjasnění na trojúhelníkových kaustikách, které se s klesající vzdáleností bodů čočky vzdalují do nekonečna.

Kapitola 4

Trojité čočka

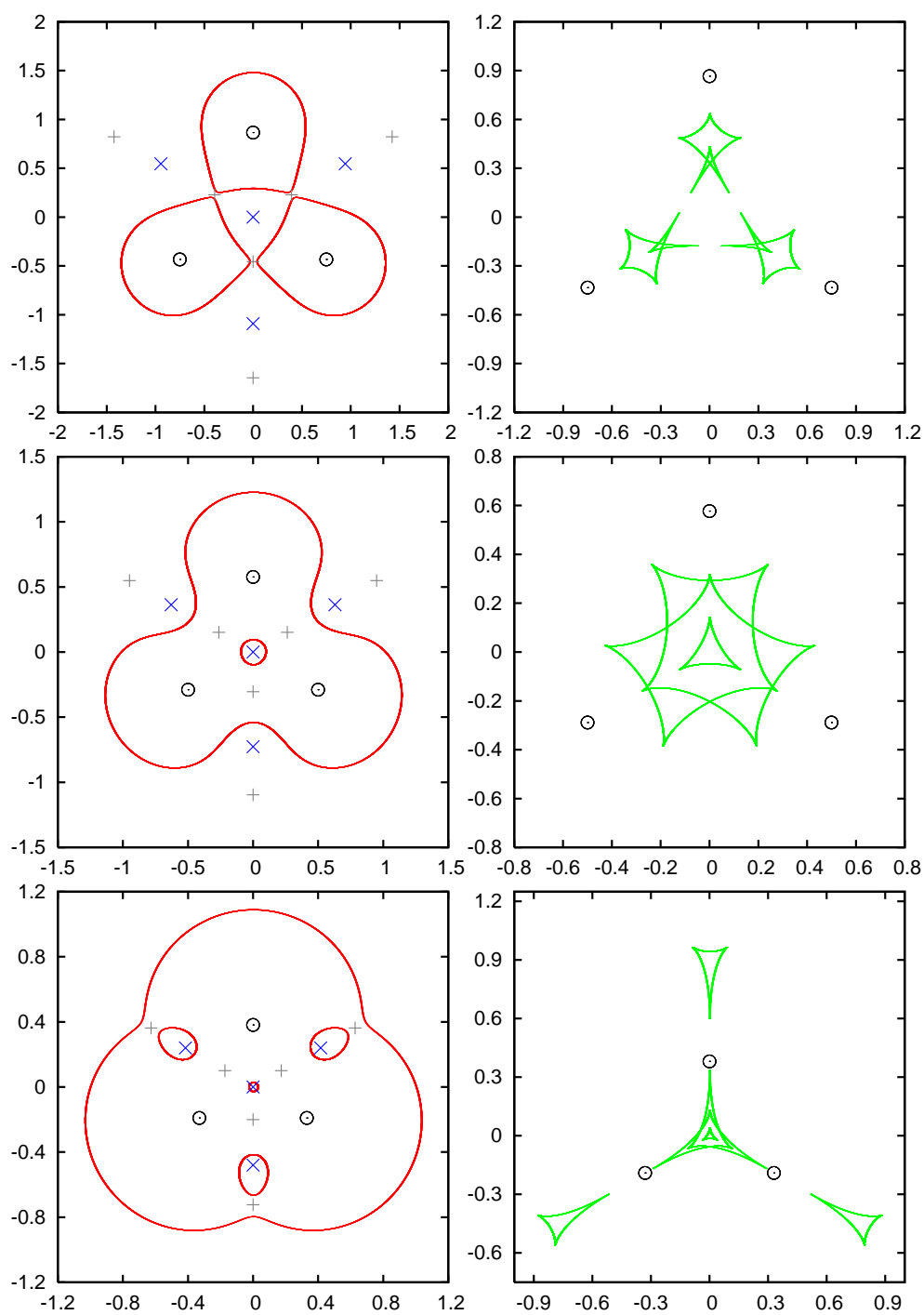
Polohu tří bodů v rovině popíšeme v obecném případě šesti souřadnicemi. Volbou počátku si vystačíme se čtyřmi parametry a volbou natočení se nám redukuje počet potřebných parametrů na tři. Pro popis hmotností máme tři relativní hmotnosti a rovnici $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, která je svazuje. Trojitou čočku lze tedy popsat pěti parametry.

4.1 Kritická křivka a kaustika

Rozdílnost mezi dvojitou a trojitou gravitační čočkou je nejlépe patrná při studiu kaustik. Jejich části se v případě trojité čočky mohou vzájemně překrývat nebo samy sebe křížit. Kromě kaspů se tedy u trojité čočky vyskytují také body křížení, útvary vznikající na foldu tvořené bodem křížení a dvěma kaspý zvané swallowtail, útvary vznikající z kaspů tvořené třemi body křížení a třemi kaspý zvané butterfly a další složitější útvary (viz [14]). Všechny tyto útvary mohou být rozlišitelné na světelné křivce a znalost konfigurací jim odpovídajících může tedy poskytnout cenné informace o příslušné gravitační čočce.

Vzhledem k velké rozmanitosti tvarů, kterých mohou kaustiky a kritické křivky trojité čočky nabývat, nemůžeme poskytnout v rámci této práce jejich vyčerpávající přehled. V této podkapitole uvedeme nejdříve příklad uspořádání, kde tři body stejné hmotnosti budou ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka s délkou strany d .

V obrázku 4.1 jsme vykreslili kritické křivky a kaustiky pro konfigurace rovnostranného trojúhelníka o straně $d = 0,67$, $d = 1,0$ a $d = 1,5$ v jednotkách Einsteinova úhlu. Vyznačili jsme také polohy sedlových bodů,



Obrázek 4.1: Kritická křivky a kaustika pro trojitou čočku shora dolů pro $d = 1, 5, d = 1, 0, d = 0, 67$. Vysvětlivky viz obrázek 3.1

polohy extrémů a polohy bodů čočky.

Pro $d = 0,67$ je kritická křivka i kaustika tvořena pěti částmi. Čtyři části kaustiky mají tři kasy a tvar malých trojúhelníků. Čtvrtá část kaustiky má tvar sebeprotínajícího se trojcípého útvaru, obsahuje celkem šest kaspů a tři body křížení.

Pro $d = 1,0$ má kritická křivka i kaustika jen dvě části. Přechod od konfigurace s $d = 0,67$ proběhne napojením tří menších částí kritické křivky na vnější část kritické křivky, resp. napojením tří trojúhelníkových částí kaustiky na sebekřížící část kaustiky. Kaustiku tvoří jedna trojúhelníková část a jedna sebeprotínající se část s celkem devíti kaspů a devíti body křížení.

Pro $d = 1,5$ se kritická křivka i kaustika skládají ze tří částí. Tři části kaustiky jsou identické útvary připomínající kosočtverce, které mají místo jednoho kaspu butterfly. Celkem tedy kaustika má osmnáct kaspů a devět bodů křížení. Kaustika prodělá mezi hodnotami $d = 1,0$ a $d = 1,5$ několik topologických změn dříve, než se rozpojí na tři části, aniž by se přitom měnila topologie kritické křivky.

V uvedeném případě trojčočky se symetrickou rovnostrannou konfigurací se nevyskytuje jednoduchý swallowtail.

4.2 Dělicí body

Naším plánem je vyšetřit možné podoby kritické křivky a kaustiky pro trojitou čočku. Budeme tedy hledat hodnoty parametrů čočky, při kterých se zásadním způsobem mění tvar těchto křivek. V případě kaustiky je takto možno vyšetřovat například počet kaspů, počet křížících bodů atd. Základnější úlohou je ale hledat hodnoty parametrů, při kterých se mění počet částí kritické křivky, tedy se na kritické křivce objevují dělicí body. Pro výskyt dělicího bodu musíme zároveň splnit rovnici (2.13) pro kritickou křivku

$$\frac{\mu_1}{(z - z_1)^2} + \frac{\mu_2}{(z - z_2)^2} + \frac{\mu_3}{(z - z_3)^2} = e^{-2i\phi} \quad (4.1)$$

a rovnici (2.18) pro sedlový bod

$$\frac{\mu_1}{(z - z_1)^3} + \frac{\mu_2}{(z - z_2)^3} + \frac{\mu_3}{(z - z_3)^3} = 0. \quad (4.2)$$

Oproti dvoubodové čočce, kde jsme roznásobením rovnice kritické křivky (3.1) získali polynom čtvrtého stupně v z a z rovnice pro sedlový bod (3.2)

polynom třetího stupně, dostáváme nyní polynomy šestého stupně jak pro rovnici kritické křivky (4.1), tak pro rovnici sedlového bodu (4.2). Rovnice lze zjednodušit volbou počátku v geometrickém středu (tedy $z_1 + z_2 + z_3 = 0$), ale ani tak jsme nebyli schopni řešit úlohu na výskyt dělicích bodů v obecném případě. Řešení jsme našli jen pro tři speciální dvouparametrické případy. V prvním případě předpokládáme lineární uspořádání tří hmotných bodů, z nichž jeden leží v geometrickém středu a zbývající dva mají stejnou hmotnost. V druhém případě jsou hmotné doby umístěny do vrcholů rovnostranného trojúhelníku a dva z nich mají stejnou hmotnost. V třetím případě mají všechny tři body stejnou hmotnost a nacházejí se ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, přičemž necháváme jako proměnné délku ramen a úhel mezi nimi. Počet uzavřených křivek, na které se dělí kritická křivka, určíme řešením rovnice pro kritickou křivku (4.1).

4.2.1 Kolineární uspořádání s proměnnou středovou hmotností

V kolineárním případě budeme úlohu parametrizovat pomocí hmotnosti středového bodu μ a vzdálenosti krajních bodů od středového d . V této konfiguraci máme tedy polohy bodů $z_1 = -d$, $z_2 = 0$, $z_3 = d$ a jejich hmotnosti $\mu_1 = (1 - \mu)/2$, $\mu_2 = \mu$, $\mu_3 = (1 + \mu)/2$. Dvakrát použijeme metodu Sylvesterovy matice na polynomy dané rovnicemi (4.1) a (4.2), abychom se zbavili parametrů z a ϕ , a dostaneme tři rovnice pro parametry konfigurace obsahující dělicí bod

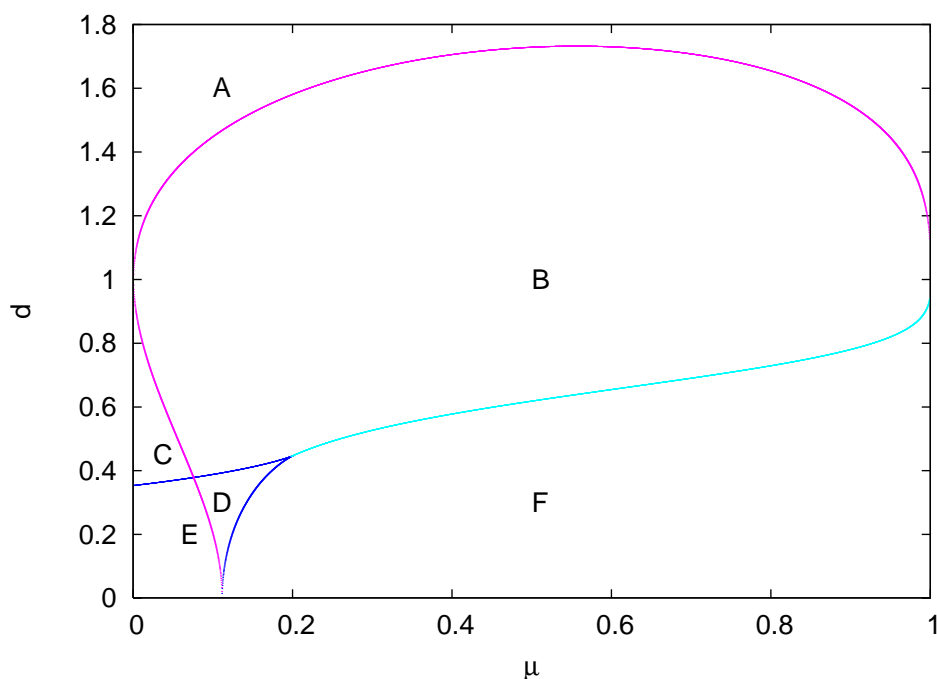
$$8d^6 + (9\mu + 15)d^4 + 6(18\mu^2 - 15\mu + 1)d^2 + 9\mu - 1 = 0, \quad (4.3)$$

$$8d^6 - (9\mu + 15)d^4 + 6(18\mu^2 - 15\mu + 1)d^2 - 9\mu + 1 = 0, \quad (4.4)$$

$$64d^{12} - 48(18\mu^2 - 15\mu + 1)d^8 + 3(3\mu + 5)(9\mu - 1)d^4 - (9\mu - 1)^2 = 0. \quad (4.5)$$

Řešením těchto rovnic dostaneme křivky, které v prostoru parametrů oddělují oblasti s různým počtem částí kritické křivky, přičemž jejich řešení je třeba zpětně dosadit do výchozích rovnic (4.1) a (4.2), protože jsme se při výpočtu dopustili neekvivalentních úprav.

V obrázku 4.2 vynášíme řešení rovnic (4.3) modrou, (4.4) fialovou a (4.5) modrozelenou barvou. Tato řešení rozdělují prostor parametrů na šest oblastí, které označujeme **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**. Tyto oblasti se liší počtem částí

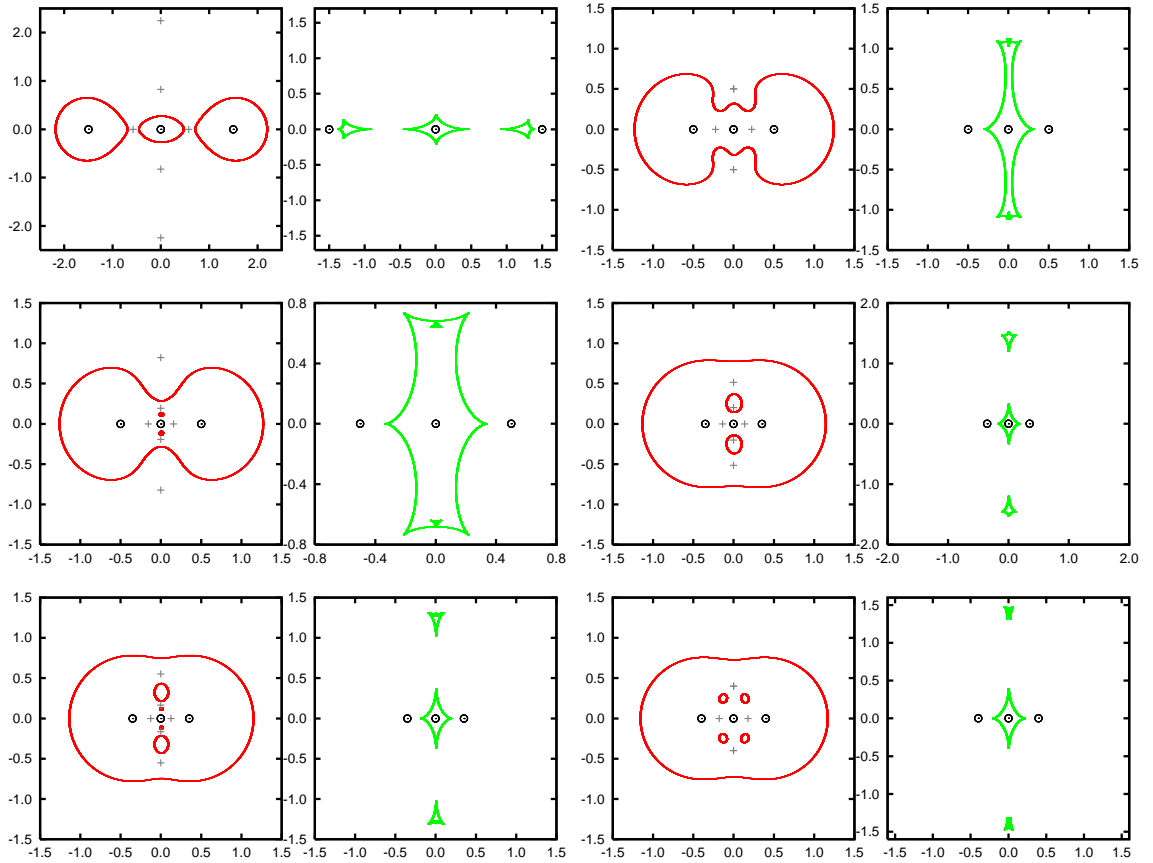


Obrázek 4.2: Diagram počtu uzavřených částí kritické křivky. Modrá křivka: řešení (4.3); fialová křivka: řešení (4.4); modrozelená křivka: řešení (4.5).

kritické křivky. V oblasti **A** má kritická křivka tři části, v **B** jednu část, v **C** tři části, v **D** tři části, v **E** a **F** pět částí. Rovnice (4.3) a (4.4) odpovídají výskytu dvou dělicích bodů a dělí oblasti, které se liší počtem částí kritické křivky o dva. Rovnice (4.5) odpovídá výskytu čtyř dělicích bodů a tvoří hranici mezi oblastmi lišícími se počtem částí kritické křivky o 4.

V obrázku 4.3 jsme vykreslili příklady kritických křivek a kaustik pro jednotlivé oblasti parametrů odpovídající různým případům dělení kritické křivky. Tato galerie obsahuje vždy nalevo kritickou křivku s polohami bodů čocky, sedlovými a kritickými body a napravo odpovídající kaustiku. Jednotlivé oblasti jsou seřazeny následujícím způsobem (v závorce jsou uvedeny parametry konfigurace):

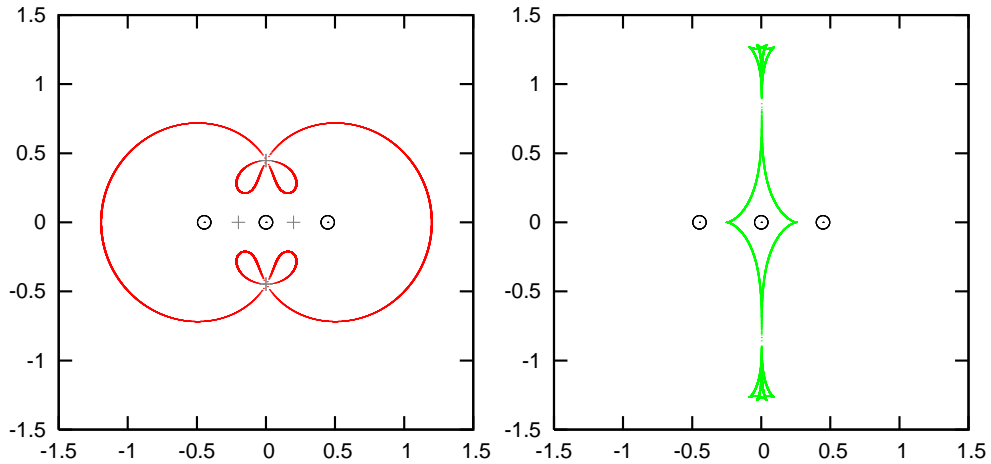
A ($\mu = 0, 1, d = 1, 5$)	B ($\mu = 0, 2, d = 0, 5$)
C ($\mu = 0, 004, d = 0, 5$)	D ($\mu = 1/9, d = 0, 35$)
E ($\mu = 0, 07, d = 0, 35$)	F ($\mu = 0, 2, d = 0, 4$)



Obrázek 4.3: Galerie kritických křivek a kaustik pro kolineární případ.
 Vysvětlivky viz obrázek 3.1

Pro $\mu = 0$ dostáváme dělicí body v $d = 1$ a $d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, což odpovídá výsledkům pro dvoubodovou čočku, protože v případě této lineární třibodové čočky je vzdálenost mezi krajními body $2d$. Pro $\mu = \frac{1}{9}$ se vynulují absolutní členy všech tří rovnic a mají tedy společný kořen v $d = 0$.

Polohu bodu, kde řešení rovnice (4.3) navazuje na řešení rovnice (4.5) najdeme metodou Sylvesterovy matice $\mu = \frac{1}{5}$ a $d \doteq 0,447$. Tato konfigurace parametrů odpovídá výskytu dvou dělicích bodů vzniklých splynutím dvou dvojic sedlových bodů. Kritickou křivku se sedlovými body a extrémy a kaustiku vykreslujeme v obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Kritická křivka a kaustika pro překryv dělicích bodů. Parametry $\mu = \frac{1}{5}$, $d \doteq 0,447$. Vysvětlivky viz obrázek 3.1

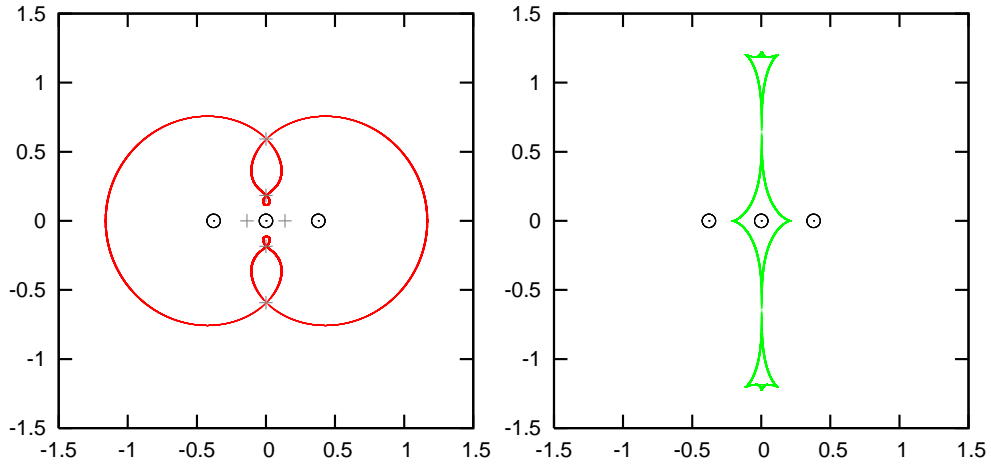
Pro bod, kde se protínají řešení rovnic (4.3) a (4.4) získáme závislost d na μ z rozdílu těchto rovnic

$$d = \sqrt[4]{\frac{1 - 9\mu}{9\mu + 15}}. \quad (4.6)$$

Zpětným dosazením do rovnice (4.3) pak dostaneme i μ pro tento bod jako řešení

$$486\mu^3 + 405\mu^2 - 684\mu + 49 = 0, \quad (4.7)$$

kde jeden kořen odpovídá zápornému μ , další komplexnímu d a třetí má hodnotu $\mu \doteq 0,075$. Z (4.6) pak dostáváme $d \doteq 0,379$. Příslušnou kaustiku uvádíme v obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Kritická křivka a kaustika pro dva druhy dělení kritické křivky zároveň. Parametry $\mu \doteq 0,075$, $d \doteq 0,379$. Vysvětlivky viz obrázek 3.1

4.2.2 Rovnostranný trojúhelník s proměnnou hmotností vrcholu

V případě uspořádání ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, ve kterém mají dva ze tří bodů stejnou hmotnost, zavedeme analogickou parametrisaci. Hmotnost různou od zbylých dvou si označíme μ a stranu trojúhelníku d . Polohy bodů tedy jsou $z_1 = (-3 - \sqrt{3}i)d/6$, $z_2 = (3 - \sqrt{3}i)d/6$, $z_3 = \sqrt{3}id/3$ a příslušné hmotnosti $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu_3 = (1 - \mu)/2$. Podmínka na výskyt dělicího bodu pak vede na čtyři rovnice. Pro větší přehlednost vyjádříme v případě prvních dvou rovnic zvlášť koeficienty a zvlášť rovnice,

$$\begin{aligned}
a_{12} &= 32 \\
a_{10} &= 48(3\mu - 1) \\
a_8 &= -48(3\mu - 1)(3\mu - 5) \\
a_6 &= 8(81\mu^3 + 27\mu^2 - 45\mu + 35) \\
a_4 &= 6(3\mu - 1)(621\mu^3 - 981\mu^2 + 351\mu + 25) \\
a_2 &= -3(3\mu - 1)(243\mu^4 - 972\mu^3 + 1098\mu^2 - 372\mu - 13) \\
a_0 &= -108\mu^3 + 324\mu^2 - 180\mu - 4,
\end{aligned}$$

$$a_{12}d^{12} + a_{10}d^{10} + a_8d^8 + a_6d^6 + a_4d^4 + a_2d^2 + a_0 = 0, \quad (4.8)$$

$$a_{12}d^{12} - a_{10}d^{10} + a_8d^8 - a_6d^6 + a_4d^4 - a_2d^2 + a_0 = 0. \quad (4.9)$$

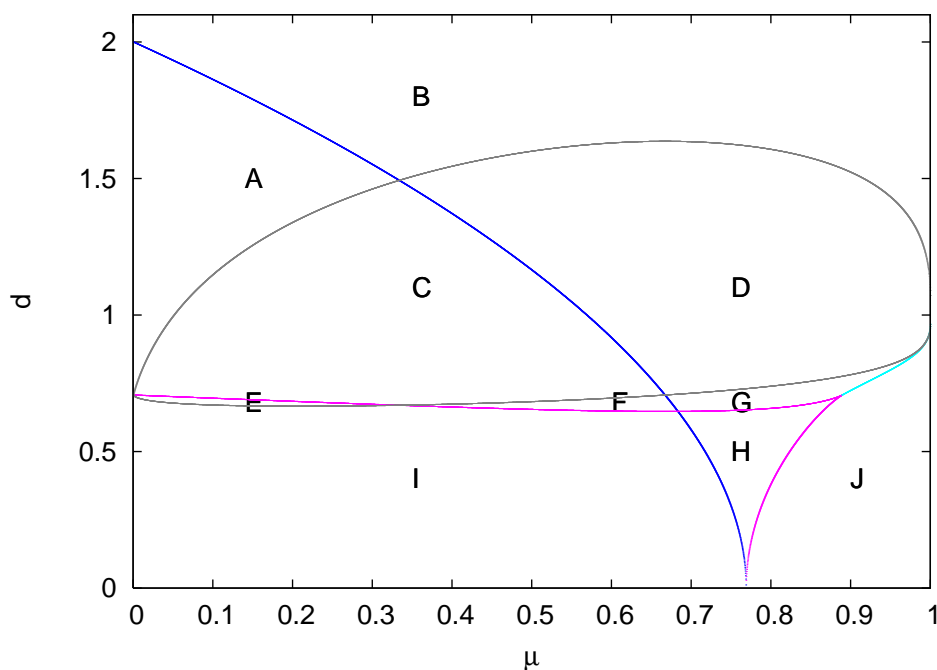
Třetí rovnice má tvar kubické rovnice pro d^4

$$16d^{12} - 24(9\mu^2 - 6\mu - 1)d^8 - (243\mu^4 + 972\mu^3 + 1134\mu^2 - 468\mu + 15)d^4 + 54\mu^3 - 162\mu^2 + 90\mu + 2 = 0. \quad (4.10)$$

Čtvrtá rovnice má tvar

$$\sum_{l=0}^{12} a_{4l}d^{4l} = 0. \quad (4.11)$$

Jedná se tedy o rovnici dvanáctého stupně ve čtvrtých mocninách d . Koeficienty této rovnice zde pro jejich složitost uvádět nebudeme.



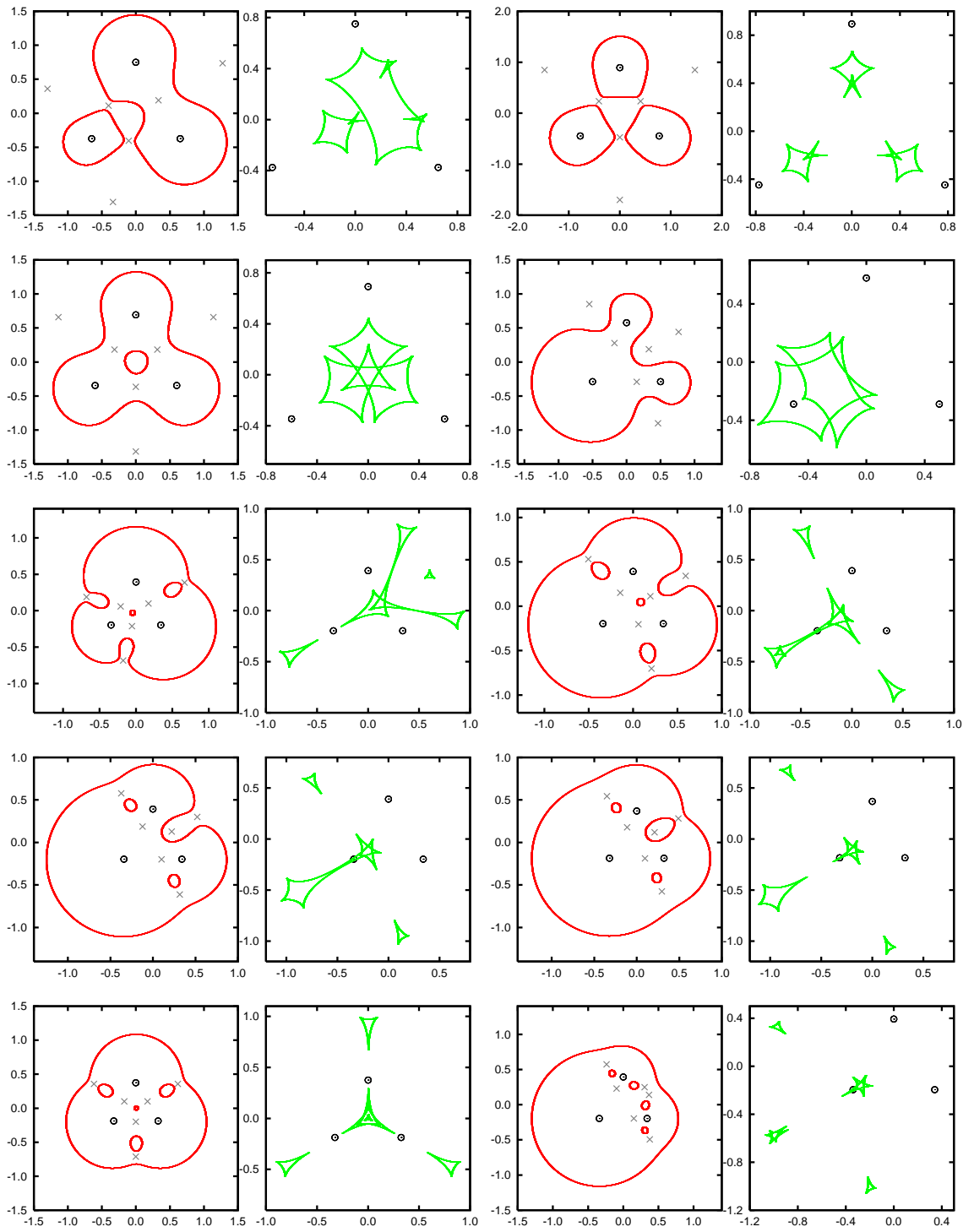
Obrázek 4.6: Diagram topologií kritické křivky. Modrá křivka: řešení (4.8); fialová křivka: řešení (4.9); modrozelená křivka: řešení (4.10); šedá křivka: řešení (4.11)

Řešení rovnic (4.8), (4.9), (4.10) a (4.11) vyznačujeme v obrázku 4.6 po řadě modrou, fialovou, modrozelenou a šedou barvou. Tato řešení rozdělují prostor parametrů pro případ rovnostranného trojúhelníku na deset oblastí, které jsme označili **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**. Kritická křivka se skládá ze dvou částí v oblasti **A**, ze tří v **B**, ze dvou v **C**, z jedné v **D**, ze tří v **E**, ze čtyř **F**, ze tří v **G**, z čtyř v **H** a z pěti v oblastech **I** a **J**. Řešení (4.8), (4.9), (4.10) odpovídá výskytu jednoho dělicího bodu a při přechodu z jedné oblasti diagramu do jiné přes tato řešení se mění počet dílů kritické křivky o jeden. Řešení rovnice (4.11) odpovídá současnému výskytu dvou dělicích bodů a přechod přes toho řešení nemusí znamenat změnu počtu dílů kritické křivky. Přehled kritických křivek uvádíme v obrázku 4.7. Jednotlivé grafy jsou uspořádány podle následujícího schématu:

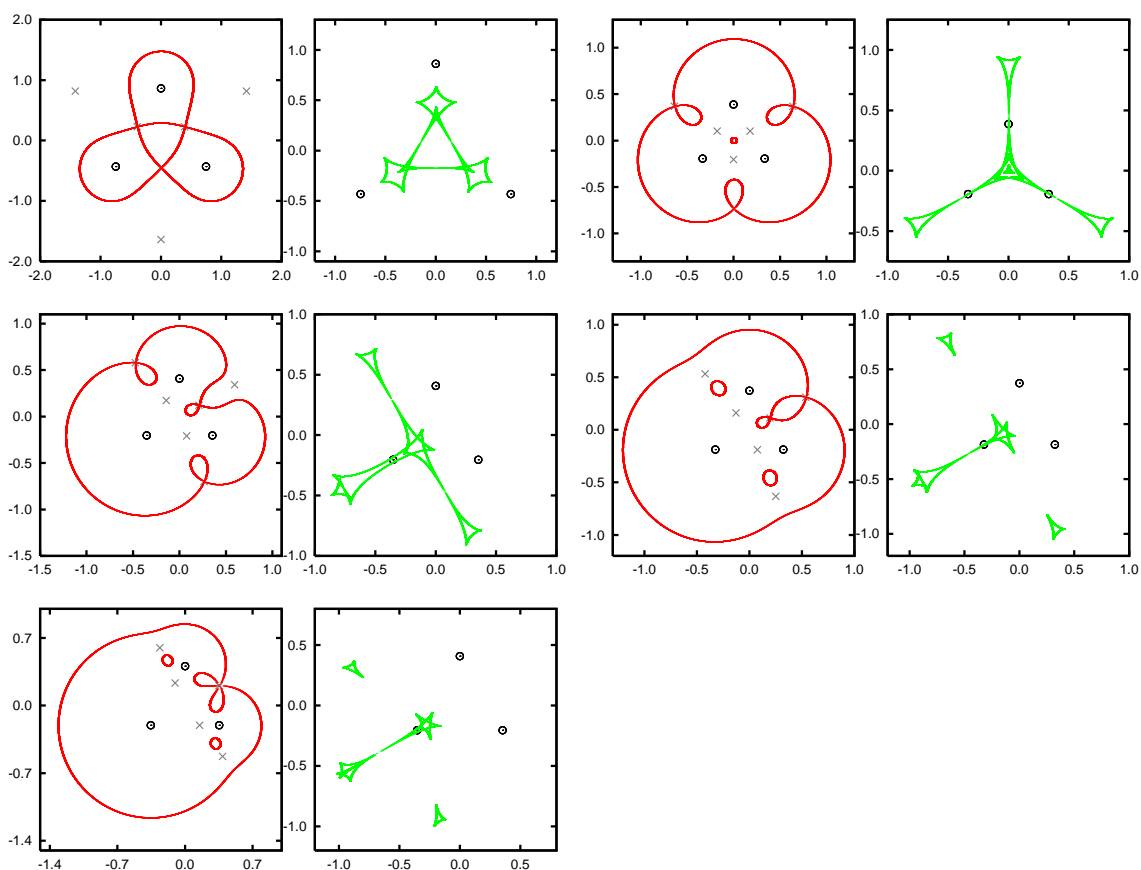
$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A} (\mu = 0, 15, d = 1, 3) & \mathbf{B} (\mu = \frac{1}{3}, d = 1, 55) \\
\mathbf{C} (\mu = \frac{1}{3}, d = 1, 2) & \mathbf{D} (\mu = 0, 7685, d = 1, 0) \\
\mathbf{E} (\mu = 0, 15, d = 0, 68) & \mathbf{F} (\mu = 0, 6, d = 0, 68) \\
\mathbf{G} (\mu = 0, 7685, d = 0, 68) & \mathbf{H} (\mu = 0, 7685, d = 0, 64) \\
\mathbf{I} (\mu = \frac{1}{3}, d = 0, 65) & \mathbf{J} (\mu = 0, 9, d = 0, 68)
\end{array}$$

Z obrázku 4.6 je dále vidět, že pro $\mu = 0$ je výskyt dělicích bodů stejný jako v případě dvoubodové čočky se dvěma stejnými hmotnostmi, tedy $d = 2$ a $d = 2^{-1/2}$. V obrázku 4.6 se vyskytují speciální body dotyku a křížení řešení rovnic pro dělicí body. Vynulováním absolutního členu rovnic (4.8) a (4.9) získáme hodnotu μ , pro kterou se v $d = 0$ tyto křivky dotýkají. Zbývající speciální body jsme hledali jako společné kořeny pomocí Sylvesterovy matice. Body křížení budeme značit kombinací písmen patřících přilehlým oblastem. Křížení **ABCD**, **CEFI**, **CDFG** odpovídají současnému výskytu tří dělicích bodů, **FGIH** výskytu dvou dělicích bodů a **GHJ** překryvu dvou dělicích bodů. Kritické křivky a kaustiky k těmto bodům uvádíme v obrázku 4.8, ten je uspořádán podle následujícího schématu, kde v závorkách uvádíme příslušné parametry čočky

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{ABCD} (\mu = \frac{1}{3}, d \doteq 1, 493) & \mathbf{CEFI} (\mu = \frac{1}{3}, d \doteq 0, 670) \\
\mathbf{CDFG} (\mu = \frac{2}{3}, d \doteq 0, 707) & \mathbf{FGIH} (\mu \doteq 0, 683, d \doteq 0, 647) \\
\mathbf{GHJ} (\mu = \frac{8}{9}, d \doteq 0, 707) &
\end{array}$$



Obrázek 4.7: Galerie kritických křivek a kaustik pro rovnostranný trojúhelník. Vysvětlivky viz obrázek (3.1)



Obrázek 4.8: Galerie kritických křivek a kaustik pro speciální změny topologie v uspořádání rovnostranného trojúhelníku. Vysvětlivky viz obrázek (3.1)

4.2.3 Rovnoramenný trojúhelník se stejnými hmotnostmi

V případě rovnoramenného trojúhelníka se třemi stejnými hmotnostmi jsme parametrisovali úlohu délkou ramen d a úhlem mezi nimi θ . Polohy ve zvolené parametrisaci jsou $z_1 = (-1 - e^{i\theta})d/3$, $z_2 = (2 - e^{i\theta})d/3$, $z_3 = (-1 + 2e^{i\theta})d/3$ a příslušné hmotnosti $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3$. Dvojnásobným použitím Sylvesterovy matice získáme tři rovnice. Dvě rovnice jsou šestého stupně v d^2 . Protože se jejich koeficienty liší jen ve znaménkách, vypíšeme nejdříve ony koeficienty

$$\begin{aligned}
a_{12} &= 27e^{3i\theta}(e^{i\theta} - 1)^6 \\
a_{10} &= 54e^{2i\theta}(e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1)^2(e^{i\theta} - 1)^4 \\
a_8 &= -9e^{i\theta}(e^{i\theta} - 1)^2(e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1)(5e^{6i\theta} - 15e^{5i\theta} - 12e^{4i\theta} + \\
&\quad + 49e^{3i\theta} - 12e^{2i\theta} - 15e^{i\theta} + 5) \\
a_6 &= 8e^{12i\theta} - 48e^{11i\theta} - 30e^{10i\theta} + 590e^{9i\theta} - 1557e^{8i\theta} + \\
&\quad + 2160e^{7i\theta} - 2238e^{6i\theta} + 2160e^{5i\theta} - 1557e^{4i\theta} - \\
&\quad - 30e^{2i\theta} - 48e^{i\theta} + 590e^{3i\theta} + 8 \\
a_4 &= 24e^{i\theta}(e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1)^5 \\
a_2 &= -6e^{2i\theta}(e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1)(4e^{6i\theta} - 12e^{5i\theta} + 15e^{4i\theta} - 10e^{3i\theta} + \\
&\quad + 15e^{2i\theta} - 12e^{i\theta} + 4) \\
a_0 &= e^{3i\theta}(8e^{6i\theta} - 24e^{5i\theta} + 21e^{4i\theta} - 2e^{3i\theta} + 21e^{2i\theta} - 24e^{i\theta} + 8). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Rovnice dělicích bodů pak budou mít tvar

$$a_{12}d^{12} + a_{10}d^{10} + a_8d^8 + a_6d^6 + a_4d^4 + a_2d^2 + a_0 = 0, \quad (4.13)$$

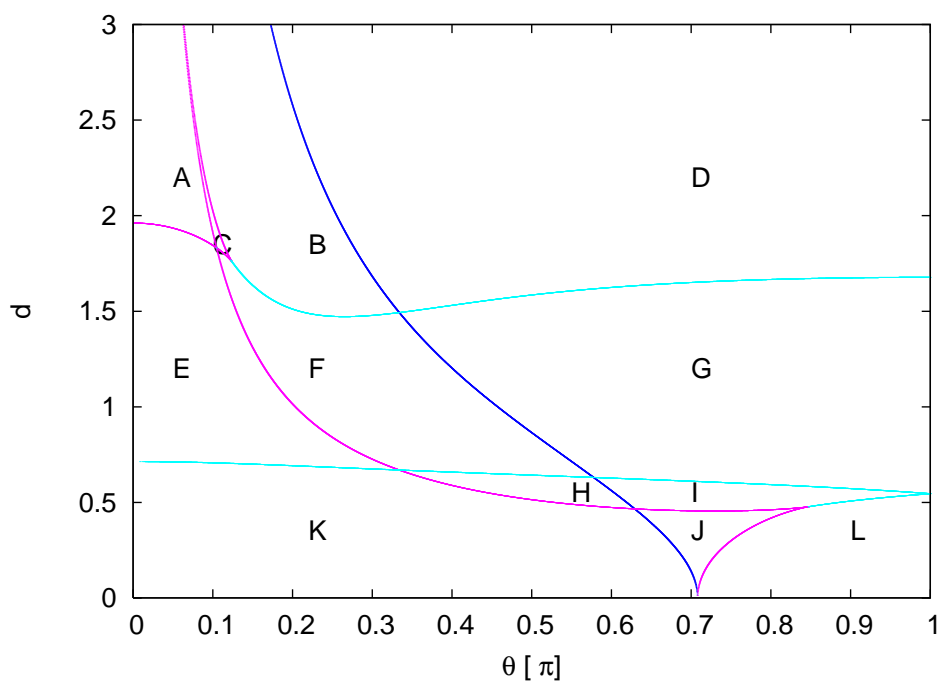
$$a_{12}d^{12} - a_{10}d^{10} + a_8d^8 - a_6d^6 + a_4d^4 - a_2d^2 + a_0 = 0. \quad (4.14)$$

Zbývající třetí rovnice je patnáctého stupně v d^4

$$\sum_{l=0}^{15} a_{4l}d^{4l} = 0, \quad (4.15)$$

jejíž koeficienty zde nebudeme uvádět.

V obrázku 4.9 znázorňujeme řešení rovnic pro výskyt dělicího bodu (4.13) modrou, (4.14) fialovou a (4.15) modrozelenou barvou. Úhel θ je uveden v jednotkách π . Tato řešení rozdělují prostor parametrů na 12 oblastí, které jsme označili **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K**, **L**. Kritická křivka se skládá ze čtyř částí v oblasti **A**, ze dvou v oblasti **B**, ze tří v oblastech **C**, **D** a **E**, ze dvou v **F**, z jedné v **G**, ze čtyř v **H**, ze tří v **I**, ze čtyř v **J** a konečně z pěti v oblastech **K** a **L**. Při přechodu přes hranici oblastí parametrického prostoru danou řešením rovnic (4.13) a (4.14) se opět mění počet dílů kritické křivky o jeden. Rovnice (4.14) opět odpovídá výskytu dvou dělicích bodů současně, při přechodu přes tímto řešením vymezenou hranici se tedy mění počet dílů kritické křivky o dva, nebo se tento počet nemění.



Obrázek 4.9: Diagram topologií kritické křivky. Modrá křivka: řešení (4.13); fialová křivka: řešení (4.14); modrozelená křivka: řešení (4.15)

Přehled kritických křivek uvádíme v obrázku 4.10. Jednotlivé grafy jsou uspořádány podle následujícího schématu:

A ($\theta = 0,05\pi, d = 2,0$)	B ($\theta = 0,2\pi, d = 2,0$)
C ($\theta = 0,1\pi, d = 2,0$)	D ($\theta = \frac{1}{3}, d = 1,55$)
E ($\theta = 0,1\pi, d = 1,2$)	F ($\theta = 0,2\pi, d = 1,2$)
G ($\theta = 0,7\pi, d = 1,2$)	H ($\theta = 0,55\pi, d = 0,55$)
I ($\theta = 0,7\pi, d = 0,55$)	J ($\theta = 0,7\pi, d = 0,45$)
K ($\theta = 0,2\pi, d = 0,55$)	L ($\theta = 0,9\pi, d = 0,5$)

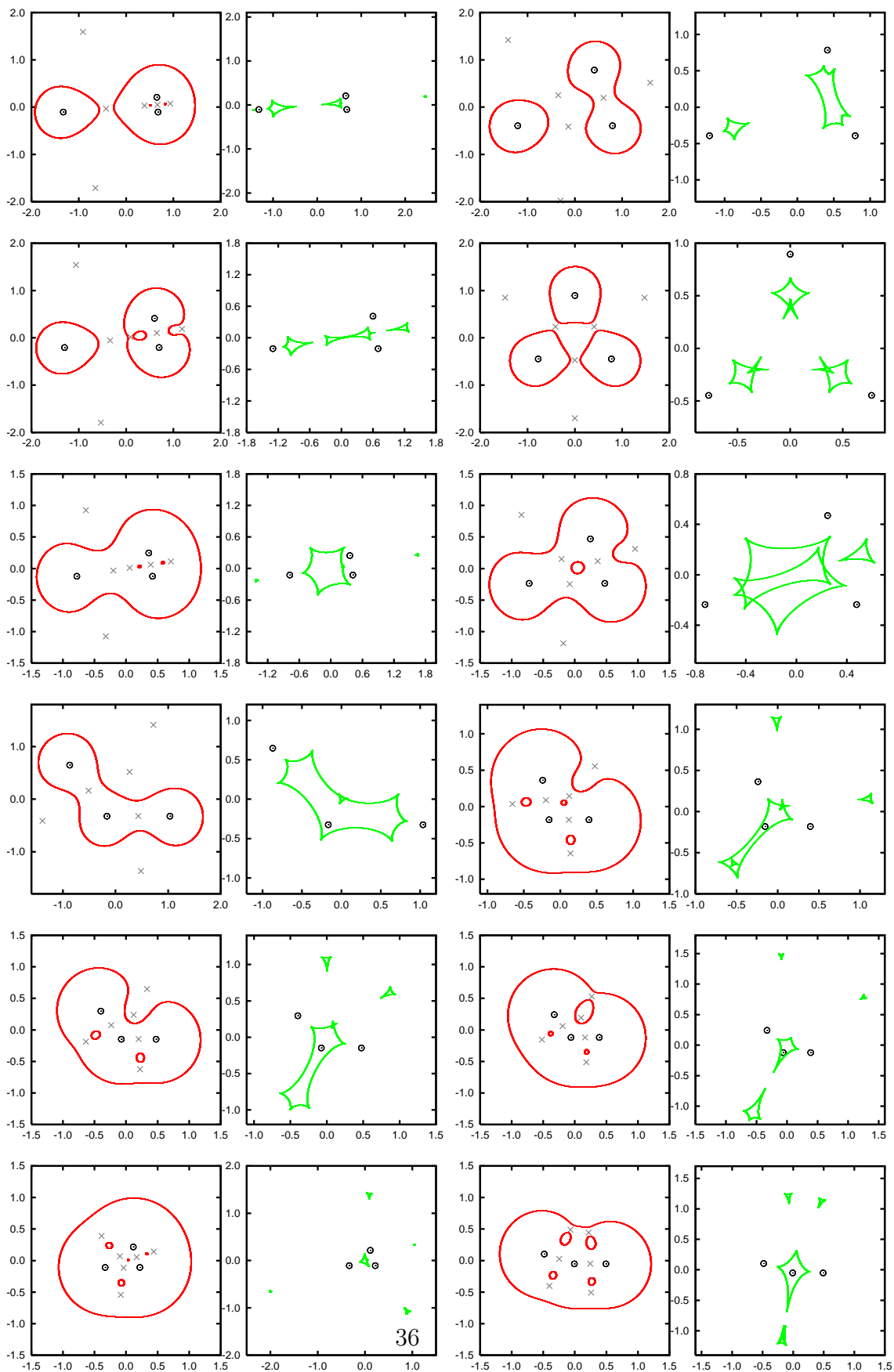
Řešení rovnic (4.13) a (4.14) pro θ jdoucí k nule diverguje, což je pochopitelné, protože tento případ odpovídá situaci, kdy je jeden bod vzdálen (zhruba ve vzdálenosti d) od zbývajících dvou, které se chovají jako dvoubodová čočka, přičemž vzdálenost mezi těmito dvěma body je přibližně θd . Další analogie s dvoubodovou čočkou nacházíme v nedivergentní části řešení (4.14) a v třetí rovnici pro $\theta = 0$, které odpovídají případu dvoubodové čočky s $\mu_1 = 1/3$ s dělicími body pro $d = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2} - 1}$ a $d = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$. V obrázku 4.9 je pro $\theta = \pi/3$ také obsažen rovnostranný trojúhelník s $\mu = 1/3$ a dělicími body pro stejnou délku strany ($d = \sqrt[6]{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$, $d = \sqrt[6]{\frac{5\sqrt{5}+11}{2}}$) jako v obrázku 4.6 a pro $\theta = \pi$ také kolineární tříbodová čočka s $\mu = 1/3$ (viz obr. 4.2).

V obrázku 4.9 se vyskytuje několik speciálních bodů křížení a dotyku řešení rovnic (4.13), (4.14), a (4.15). Vynulováním absolutních členů rovnic (4.13) a (4.14) získáme bod **JKL** $\theta \doteq 0, 7075\pi$, $d = 0$. Parametry čočky v bodech **BDFG** a **EFHK** jsou identické jako v bodech **ABCD** a **CEFI** pro rovnostranný trojúhelník s proměnnou hmotností jednoho vrcholu. Parametry pro zbývající body jsme našli metodou Sylvesterovy matice. Výjimku tvořil pouze bod **FGHI**, jehož polohu jsme určili numericky. Příslušné kritické křivky a kaustiky jsme vykreslili v obrázku 4.11.

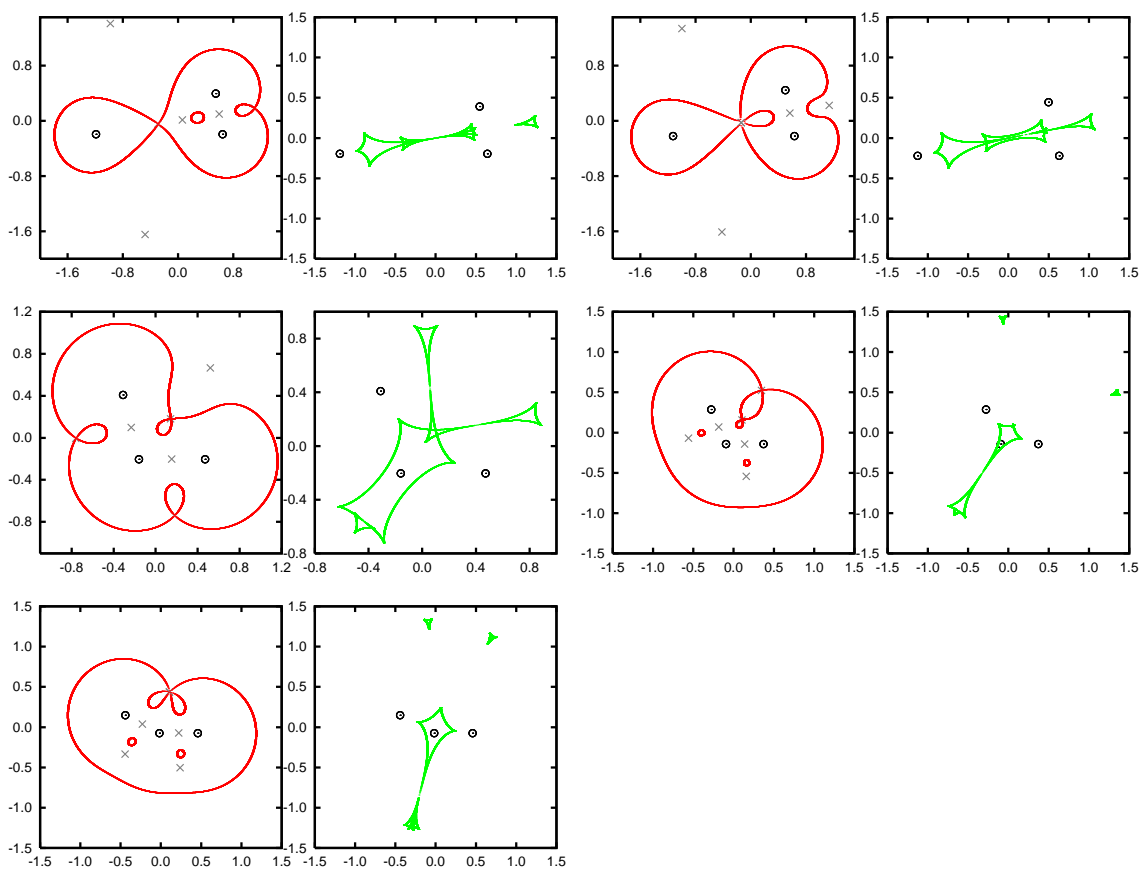
Obrázek 4.11 je uspořádán podle následujícího schématu:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{ACEF} (\theta \doteq 0, 1041\pi, d \doteq 1, 8315) & \mathbf{BCF} (\theta \doteq 0, 1235\pi, d \doteq 1, 7583) \\ \mathbf{FGHI} (\theta \doteq 0, 5771\pi, d \doteq 0, 6309) & \mathbf{HIJK} (\theta \doteq 0.6286, d \doteq 0, 4665) \\ \mathbf{IJL} (\theta \doteq 0, 8467\pi, d \doteq 0, 4778) & \end{array}$$

Tím jsme zmapovali jen několik speciálních dvouparametrických řezů prostorem parametrů tříbodové čočky. Tříbodová gravitační čočka je ale určena pěti parametry (tj. třemi parametry polohy hmotných bodů a dvěma relativními hmotnostmi). Při pokusu o tříparametrický řez propojující všechny uvedené konfigurace (tj. rovnostranný trojúhelník s proměnnou hmotností vrcholu) se nám nepodařilo rozložit determinant Sylvesterovy matice na součin. Pro vyšší počet parametrů jsme nebyli schopni tento determinant ani spočítat. Výpočty jsme prováděli pomocí softwaru Maple 9.5.



Obrázek 4.10: Galerie kritických křivek a kaustik pro různé topologie kritické křivky trojitě čočky v uspořádání rovnoramenného trojúhelníku. Vysvětlivky viz obrázek 3.1.



Obrázek 4.11: Galerie kritických přivek a kaustik pro speciální změny topologie v uspořádání rovnoramenného trojúhelníku . Vysvětlivky viz obrázek 3.1

4.3 Polohy obrazů a světelné křivky

Polohy obrazů získáme ze zobrazovací rovnice pro trojitou čočku

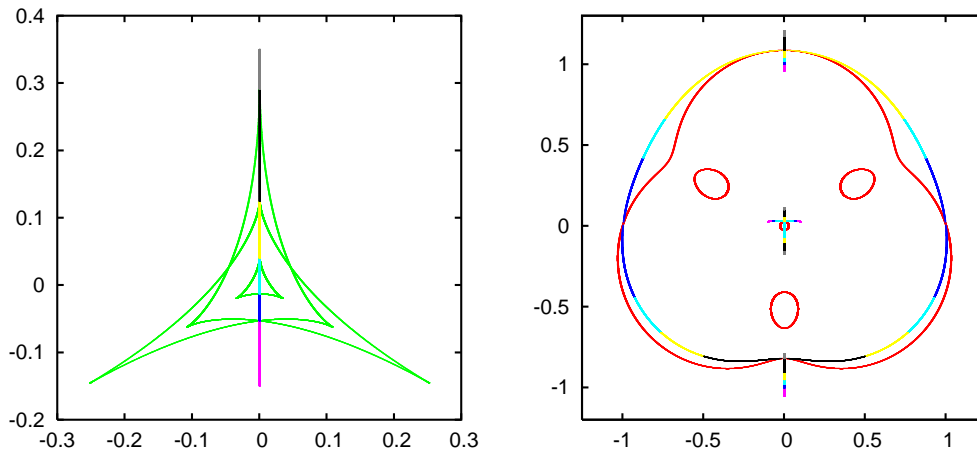
$$\zeta = z - \frac{\mu_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{\mu_2}{\bar{z} - \bar{z}_2} - \frac{\mu_3}{\bar{z} - \bar{z}_3}, \quad (4.16)$$

kteřá je speciálním případem (2.9) pro $n = 3$. Podobně jako v případě dvojitě čočky (4.16) komplexně sdružíme, vyjádříme \bar{z} pomocí z a dosadíme zpět do (4.16), kterou roznásobíme a dostaneme polynomiální rovnici desátého stupně v z . Ta má deset kořenů, ale jen ty z kořenů, které splní výchozí rovnici (4.16) určují polohu obrazů zdroje. V případě trojitě čočky máme 10, 8, 6, nebo 4 obrazy.

Polohy obrazů pro trojitou čočku vykazují podobné chování jako v případě dvojitě čočky. Při vstupu zdroje do kaustiky vznikají dva obrazy na kritické křivce. Při výstupu z kaustiky dva obrazy na kritické křivce zanikají. Pokud zdroj vstupuje do kaustiky přes kasp, jeden z obrazů se rozdělí na tři. Při vstupu přes fold se nové obrazy objevují obecně v jiném místě kritické křivky, jeden směřuje dovnitř a jeden ven z kritické křivky. V trojitě čočce se navíc vyskytují body křížení, které se ale z hlediska výše zmíněných vlastností chovají jako prosté křížení dvou foldů. Toto chování obrazů znázorňujeme na obrázku 4.12.

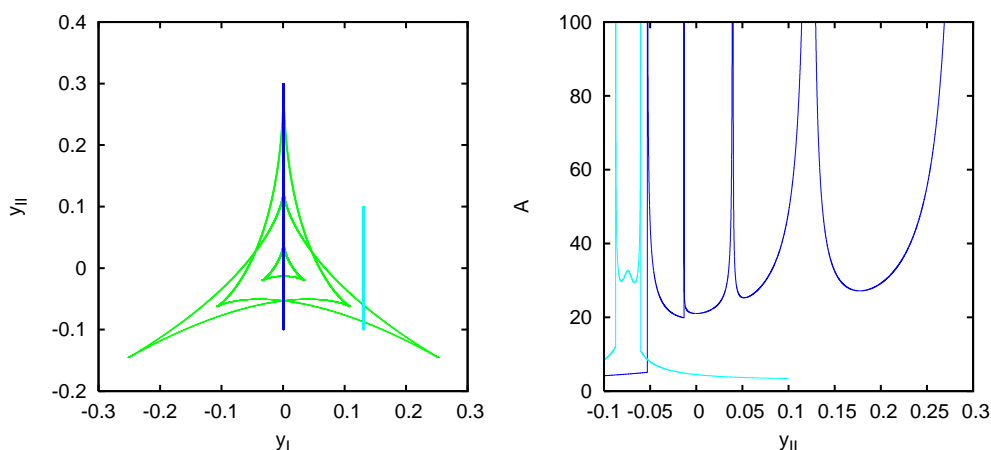
Na obrázku 4.12 jsme v levé části vykreslili část kaustiky a trajektorii zdroje barevně rozlišenou podle její polohy vůči kaustice. V pravé části je kritická křivka s obrazy. Body čočky mají stejnou hmotnost a jsou rozmístěny do vrcholů rovnostranného trojúhelníku o straně $d = 0,65$. Fialová úsečka se nachází mimo kaustiku a má čtyři obrazy. Jeden mimo kritickou křivku a tři uvnitř, z toho dva na horizontálních koncích kříže zhruba ve středu obrázku. Modrá úsečka se nachází uvnitř kaustiky za bodem křížení. Přejdem přes bod křížení vznikají čtyři obrazy, modrá úsečka je tedy zobrazena osmkrát. Čtyři obrazy navazují na obrazy fialové úsečky, navíc se symetricky podle imaginární osy objevují dvě dvojice obrazů u kritické křivky, z každé dvojice jeden vně a jeden uvnitř kritické křivky. Modrozelená úsečka se nachází uprostřed trojúhelníkové kaustiky, která je uvnitř sebeprotínající se trojúhelníkové kaustiky, a má tedy deset obrazů. Kromě osmi obrazů, které navazují na obrazy fialové úsečky, se objeví dva obrazy na spodní straně části kritické křivky tvaru malé kružnice ve středu obrázku, jeden obraz pak pokračuje vzhůru vnitřkem této části kritické křivky, druhý pokračuje směrem dolů vně části. Žlutá úsečka se již nenachází uvnitř středové

trojúhelníkové kaustiky a má proto osm obrazů, jeden z nich vzniká rovnou ze tří modrozelených obrazů na vrchu části kritické křivky tvaru malé kružnice. Černá úsečka se nachází v oblasti mezi vnitřním a vnějším kaspem sebeprotínající se trojúhelníkové kaustiky a má šest obrazů. Obraz na horní části kritické křivky vznikne ze tří obrazů žluté úsečky. Šedivá úsečka se nachází mimo kaustiku a má tudíž čtyři obrazy. Tentokrát vznikne jeden z obrazů splynutím tří obrazů černé úsečky na spodní straně kritické křivky.



Obrázek 4.12: Polohy obrazů pro trojitou čočku. Levá část: kaustika a polohy zdroje. Zelená křivka: kaustika; úsečky ostatních barev: trajektorie zdroje. Pravá část: obrazy a kritická křivka. Červená křivka: kritická křivka; křivky ostatních barev: trajektorie obrazů.

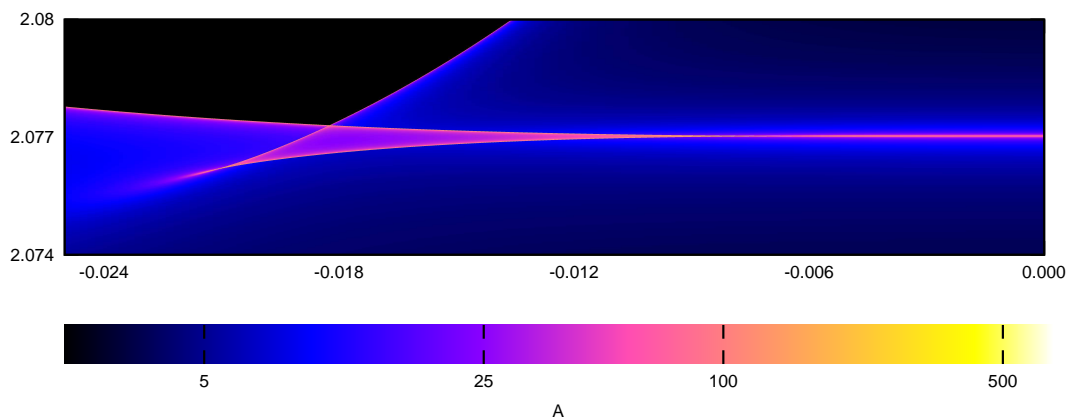
Světelné křivky dostaneme jako součet zjasnění jednotlivých obrazů. Polohu zdroje pro příklad konfigurace z obrázku 4.12 a tedy i světelné křivky v obrázku 4.13 budeme parametrizovat imaginární složkou polohy zdroje y_{II} . Modrá křivka přechází z vnějšku kaustiky přes křížení, zjasnění skokově diverguje a spojitě klesá s postupem dál do kaustiky podobně jako při přechodu foldu. Křivka dále přechází přes fold malého trojúhelníku uvnitř sebekřížící se kaustiky, což odpovídá další skokové divergenci na světelné křivce. Na modré světelné křivce pak vidíme tři další divergence odpovídající přechodu přes kasp, první od kaspu malé trojúhelníkové kaustiky a další dva od sebeprotínající se kaustiky. Modrozelená křivka odpovídá přechodu přes fold sebeprotínající se kaustiky, slabému signálu od kaspu mezi dvěma foldy a druhému přechodu přes fold.



Obrázek 4.13: Světelná křivka pro trojitou čočku. Levá část: dráhy zdroje vůči kaustice. Zelená křivka: kaustika; modrá a modrozelená přímka: dráhy zdroje. Pravá část: dva příklady světelné křivky.

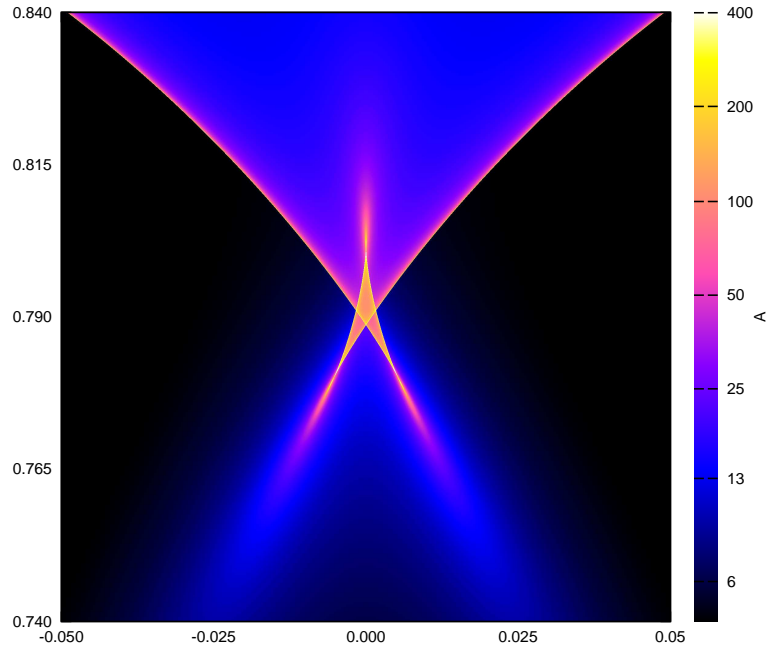
4.4 Mapy zjasnění

Jednou z užitečných pomůcek při vyšetřování gravitačních mikročoček jsou mapy zjasnění. Ty představují závislost zjasnění na poloze zdroje, jejichž řezem můžeme získat světelnou křivku. Jedna z cest, jak získat z naměřené světelné křivky parametry čočky, vede přes mapy zjasnění. My je budeme v této podkapitole používat hlavně k diskusi chování zjasnění kolem význačných bodů na kaustice.



Obrázek 4.14: Mapa zjasnění: swallowtail.

Jako první uvedeme mapu zjasnění pro swallowtail. Zvolili jsme kolineární uspořádání se vzdáleností $d = 0,25$ krajních bodů od středového a pro hmotnost středového bodu $\mu_2 = (1 - \mu_1)/2 = (1 - \mu_3)/2 = 0,0941$. Tento swallowtail vznikne splynutím stran dvou trojúhelníkovitých částí kaustiky a rozdělením těchto stran na dva swallowtaily. Mapu zjasnění jsme vykreslili v obrázku 4.14. Swallowtail se skládá ze dvou kaspů uzavřených v kaustice, bodu křížení a uzavřené oblasti, kde má zdroj minimálně osm obrazů. Kasp na levé straně má klasicky zvýšené zjasnění i mimo oblast, kterou ohraničuje. Kasp na pravé straně je pozůstatkem po dvou foldech, které se rozpojily, a mimo něj vede tenká linie zjasnění až k druhému swallowtailu, který je k prvnímu symetrický podle imaginární osy. Trojúhelníková oblast uzavřená v swallowtailu je také nejvíce zjasněná, zjasnění směrem od jejích foldů k jejímu středu klesá.



Obrázek 4.15: Mapa zjasnění: butterfly.

Druhý speciální útvar, na jehož mapu zjasnění se podíváme, bude butterfly. Zvolili jsme uspořádání rovnostranného trojúhelníka s délkou strany $d = 2,0$ a se shodnými hmotnostmi $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$. Kaustika má v tomto případě stejnou topologii jako kaustika z obrázku 4.1 pro $d = 1,55$. Mapu zjasnění jsme vykreslili v obrázku 4.15. Lze zde jasně identifikovat tři kaspě,

dva vybíhající do vnější oblasti kaustiky a jeden směřující do vnitřní oblasti kaustiky, čímž se liší od kaspů dvojitých čoček, které míří pouze vně kaustiky. Vně těchto kaspů lze pozorovat zjasněnou oblast tvaru připomínajícího plamen svíčky. Oproti tomu foldy oddělují oblast silněji zjasněnou uvnitř kaustiky od méně zjasněné vně kaustiky a zjasnění od nich směrem dovnitř kaustiky ubývá. Oblast s největším počtem obrazů je oblast tvaru deltoidu, jehož dvě strany tvoří kasp vybíhající dovnitř. Zjasnění v této oblasti neklesá pod $A = 80$.

4.5 Aproximace zjasnění v bodě křížení

Při přibližování zdroje k foldu z vnitřní strany kaustiky se dva z obrazů přibližují ke kritické křivce a jejich zjasnění diverguje se vzdáleností od foldu ρ jako $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ (viz. např. [16]). Tuto znalost můžeme využít k tomu, abychom aproximovali zjasnění při analýze světelných křivek. Protože se v této práci se zabýváme hlavně trojitými čočkami, nebudeme vyšetřovat chování aproximace na foldu, ale na křížení dvou foldů. Konkrétně volíme křížení na kaustice z obrázku 4.16 v uspořádání rovnostranného trojúhelníka se shodnými hmotnostmi ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$) o straně $d = 1, 17$, které se nachází v poloze $y_I^x = 0, 0$, $y_{II}^x \doteq -0, 2225$ (viz obrázek 4.16). Toto křížení dělí zkoumanou oblast na čtyři části, jednu s osmi obrazy, dvě se šesti obrazy a jednu se čtyřmi obrazy. Pro světelnou křivku volíme jako dráhu zdroje přímkou přecházející křížení po imaginární ose mezi hodnotami $y_{II} = -0, 2475$ a $y_{II} = -0, 1975$.

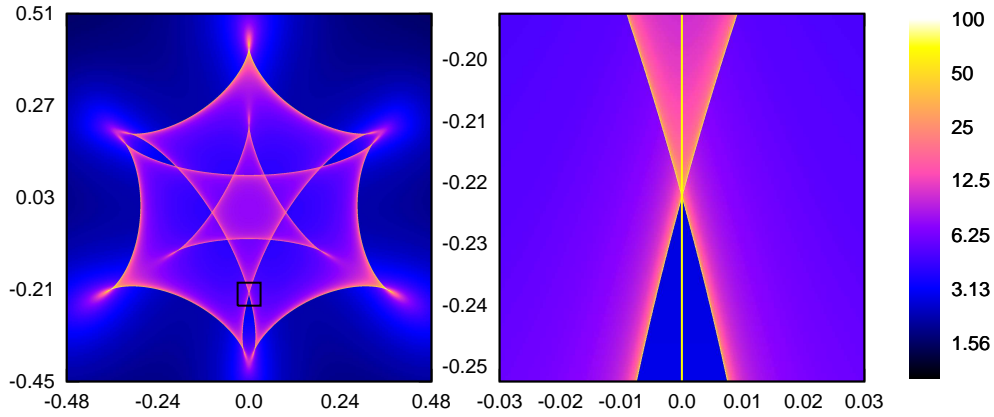
Předpokládáme, že se při přechodu kaustiky bude jen málo měnit zjasnění ostatních obrazů a tuto změnu reprezentujeme lineární funkcí. V případě světelné křivky lineární funkcí času, který zde budeme nahrazovat souřadnicí zdroje y_{II} . Pak pro aproximované zjasnění platí

$$A_{lc}^{apr} = a_{lc}(y_{II} - y_{II}^x) + b_{lc} + \frac{c_{lc}}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{d_{lc}}{\sqrt{\rho_2}}, \quad (4.17)$$

kde ρ_1 a ρ_2 jsou vzdálenosti od foldu f_1 a foldu f_2 . Parametry a_{lc} , b_{lc} , c_{lc} , d_{lc} budeme fitovat, přičemž pro $y_{II} < y_{II}^x$ položíme $c_{lc} = d_{lc} = 0$.

V případě map zjasnění nemáme konkrétní trajektorii a proto jako proměnnou lineární funkce odpovídající zjasnění čtyř obrazů volíme vzdálenost od kaustiky

$$A_{am}^{apr} = a_{am}\rho_1 + b_{am}\rho_2 + c_{am} + \frac{d_{am}}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{e_{am}}{\sqrt{\rho_2}}, \quad (4.18)$$

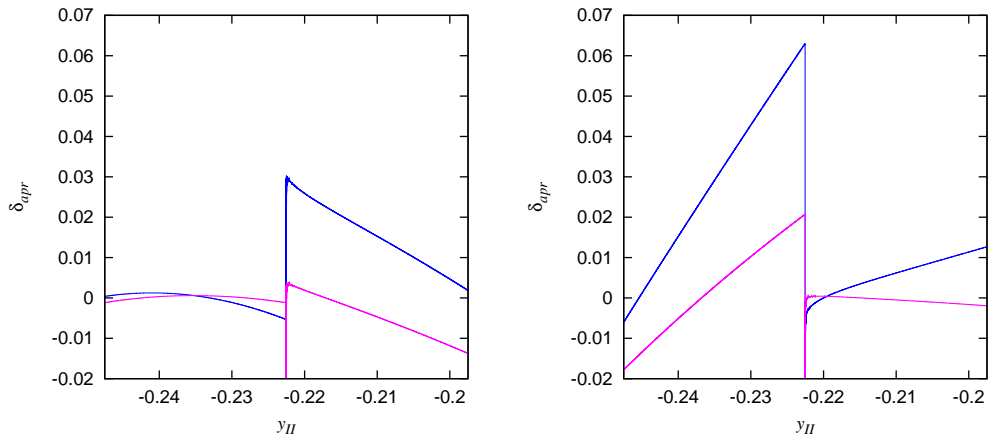


Obrázek 4.16: Mapa zjasnění křížení. Levá část: Mapa zjasnění pro trojitou čočku v uspořádání rovnostranného trojúhelníku o straně $d = 1,17$ a stejných hmotnostech. Černý čtverec: Oblast zvětšená v pravé části obrázku. Pravá část: Detail mapy zjasnění. Žlutá úsečka: Trajektorie zdroje.

kde koeficienty a_{am} , b_{am} , c_{am} , d_{am} , e_{am} budeme fitovat. Koeficient $d_{am} = 0$ pod foldem f_1 a $e_{am} = 0$ pod foldem f_2 . Navíc a_{am} v oblasti nad foldem f_1 má opačné znaménko vůči oblasti pod tímto foldem. Podobně b_{am} v oblasti nad foldem f_2 má opačné znaménko vůči oblasti pod ním.

Metoda nejmenších čtverců je nejvíce citlivá na oblasti s vysokým zjasněním, volili jsme proto dva postupy fitování. Nejprve jsme nafitovali koeficienty pro světelnou křivku po celé dráze zdroje, tím jsme zohlednili hlavně oblasti s vysokým zjasněním. Pak jsme v oblasti pod křížením nafitovali koeficient u lineárního členu a_{lc} a koeficient u absolutního členu b_{lc} . Ty jsme nechali pevné v oblasti nad křížením, kde jsme fitovali pouze c_{lc} a d_{lc} , čímž jsme zohlednili i oblast s nízkým zjasněním. Podobně jsme postupovali u fitu mapy zjasnění. Nejdříve jsme nafitovali koeficienty pro celou zkoumanou oblast. Pak jsme koeficienty u lineárních členů a_{am} , b_{am} a u absolutního členu c_{am} nafitovali v oblasti, kde má zdroj čtyři obrazy, koeficienty d_{am}, e_{am} jsme nafitovali v oblastech s osmi a s šesti obrazy.

Nejdříve porovnáme aproximaci konkrétní světelné křivky s odpovídajícím řezem aproximovanou mapou zjasnění. To provedeme pro obě metody fitování. Relativní odchylky $\delta_{apr} = \frac{A^{apr} - A}{A}$ aproximací uvádíme v obrázku 4.17. Je patrné, že fitovat přímo světelnou křivku dává lepší výsledky než dělat řez nafitovanou mapou zjasnění. Nejedná se však o řádový rozdíl, proto lze k odhadu vhodnosti aproximace použít i mapu. Také fit lépe sedí v oblasti

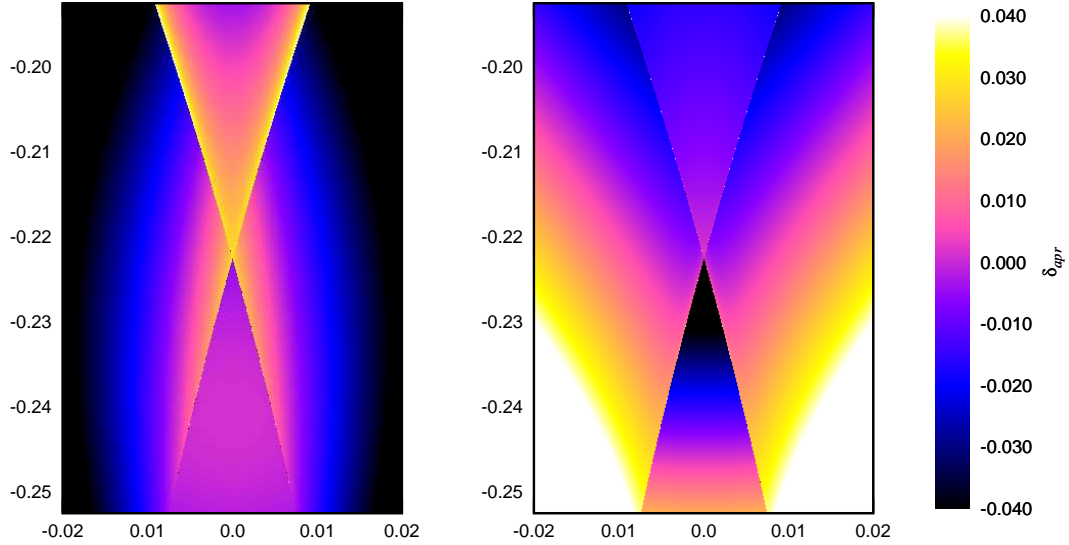


Obrázek 4.17: Relativní odchylky aproximace. Fialová křivka odpovídá fitu světelné křivky. Modrá křivka odpovídá řezu mapou chyby zjasnění. Levá část: Koeficienty $a_{lc}, b_{lc}, a_{am}, b_{am}, c_{am}$ fitovány jen pod křížením. Pravá část: koeficienty $a_{lc}, b_{lc}, a_{am}, b_{am}, c_{am}$ fitovány v celé oblasti.

se čtyřmi obrazy, pokud koeficienty $a_{lc}, b_{lc}, c_{lc}, a_{am}, b_{am}, c_{am}$ fitujeme právě zde a v ostatních oblastech je necháme pevné. A naopak fit sedí lépe v oblasti s osmi obrazy, pokud koeficienty fitujeme ve všech oblastech. Nezvyklé je, že v oblasti se čtyřmi obrazy zjasnění s rostoucí vzdáleností od křížení roste. Zpravidla tomu bývá tak, že vně kaustiky zjasnění se vzdáleností od kaustiky klesá. V našem případě je ale situace složitější, protože s klesající hodnotou y_{II} se zdroj přibližuje k dvojici kaspů.

Dále se podíváme na relativní chybu mapy zjasnění, tu uvádíme na obrázku 4.18. Opět platí, že při fitování a_{lc}, b_{lc}, c_{lc} pouze v oblasti se čtyřmi obrazy aproximace vychází nejlépe v této oblasti. Pro fitování a_{lc}, b_{lc}, c_{lc} v celé oblasti zase vychází aproximace nejlépe v oblasti s osmi obrazy. V oblasti s šesti obrazy je chyba překvapivě vysoká. Na vině mohou být vzdálenější foldy a jiné útvary, které mohou k zjasnění přispívat, ale i to oblasti odpovídají nejvyšším hodnotám vzdálenosti od foldů ρ_1, ρ_2 a lineární aproximace zjasnění čtyř nemizících obrazů zde nemusí být platná.

Chyba aproximace je v řádu procent. Taková chyba přirozeně není zanedbatelná. Aproximace jednoduchého foldu je však zatížena podobnou chybou (viz [12]). Ukázali jsme tedy, že tato aproximace lze zobecnit i na případ překryvu foldů.



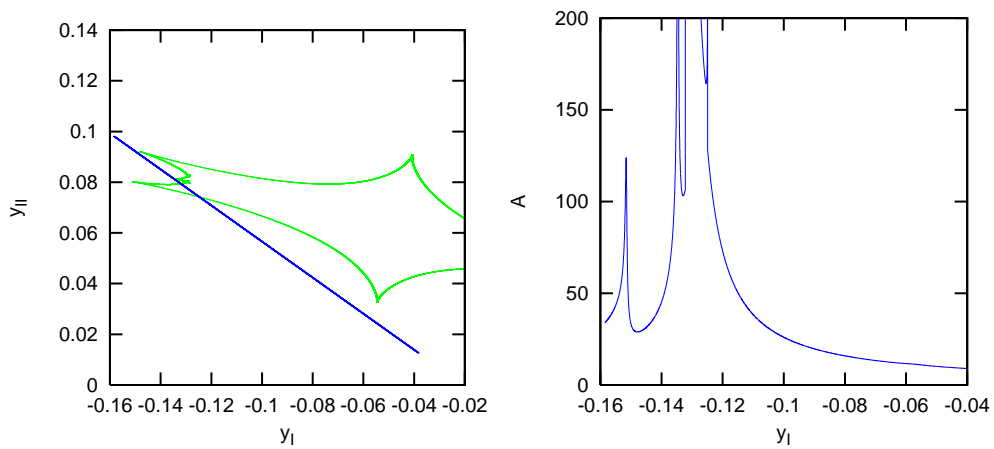
Obrázek 4.18: Mapy relativních odchylek zjasnění. Levá část: koeficienty a_{am} , b_{am} , c_{am} fitovány jen pod křížením. Pravá část: koeficienty a_{am} , b_{am} , c_{am} fitovány v celé oblasti

4.6 Pozorovaná trojitá čočka

V této podkapitole se budeme věnovat pozorovanému systému trojitě čočky (OGLE-2006-BLG-109L), který je prvním systémem s hvězdou a dvěma planetami objeveným gravitačním mikročočkováním. Tento systém je podrobně analysován v článku [3]. Protože v této práci aproximujeme zdroj bodem, uváděná zjasnění budou mít spíše jen ilustrativní význam. Tento příklad uvádíme hlavně proto, abychom demonstrovali vlastnosti gravitačního mikročočkování trojitou čočkou na modelu konkrétního pozorovaného systému.

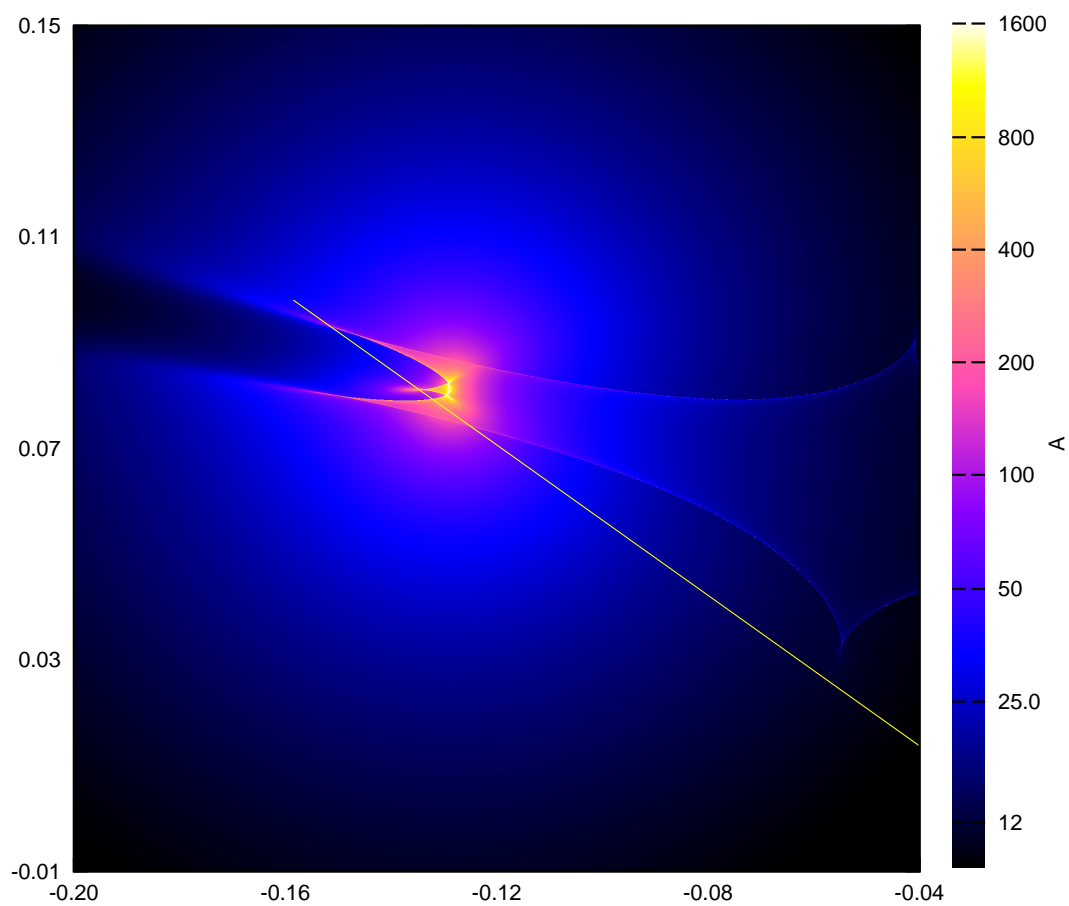
Sytém OGLE-2006-BLG-109Lb,c je tvořen hvězdou o hmotnosti $M_a = 0,51_{-0,04}^{+0,05} M_\odot$ a dvěma planetami o hmotnostech $M_b = (231 \pm 19) M_\oplus$ a $M_c = (86 \pm 7) M_\oplus$. Hlavní část pozorování, kde se vyskytly všechny píky od jednotlivých přechodů kaustiky, trvala 11 dní. Během této doby se změnilo uspořádání soustavy kvůli orbitálnímu pohybu planet, my ale budeme pro jednoduchost používat statický model odpovídající konfiguraci při průchodu v blízkosti čočkující hvězdy M_a . Veličiny, které používáme k parametrisaci čočky podle [3], jsou vzdálenost planety s indexem b od hvězdy $d_{ab} = 0,6269$, vzdálenost planety s indexem c od hvězdy $d_{ac} = 1,0418$ a úhel mezi spojnicemi planet s hvězdou $\phi = -2,9058$. Relativní hmotnosti planet vycházejí $\mu_b = 1,3554 \times 10^{-3}$, $\mu_c = 5,0565 \times 10^{-4}$.

V obrázku 4.19 je vpravo vynesena světelná křivka a vlevo část kaustiky s vyznačenou dráhou zdroje. Dráhu zdroje jsme volili tak, aby byla podobná dráze zdroje uváděné v článku [3]. Je však třeba zdůraznit, že námi zvolená dráha je přímka, zatímco skutečná dráha je zakřivena mikročokovou parallaxou a navíc se s časem pohybuje a deformuje i samotná kaustika. Zdroj se pohyboval ve směru snižující se souřadnice y_I . Nejprve se přiblížil ke kaspu pro $y_I \approx -0,06$, což ale na světelné křivce není patrné. Překročil fold pro $y_I \approx -0,12$, čemuž odpovídá na světelné křivce tenký pík, po kterém následuje další nárůst zjasnění. Nárůst zjasnění od drobných swallowtailů na světelné křivce není patrný. Další pík odpovídá zjasnění od malého kaspu mezi dvěma většími kaspami. Poslední pík je nedivergentní zjasnění od blízkého kaspu.



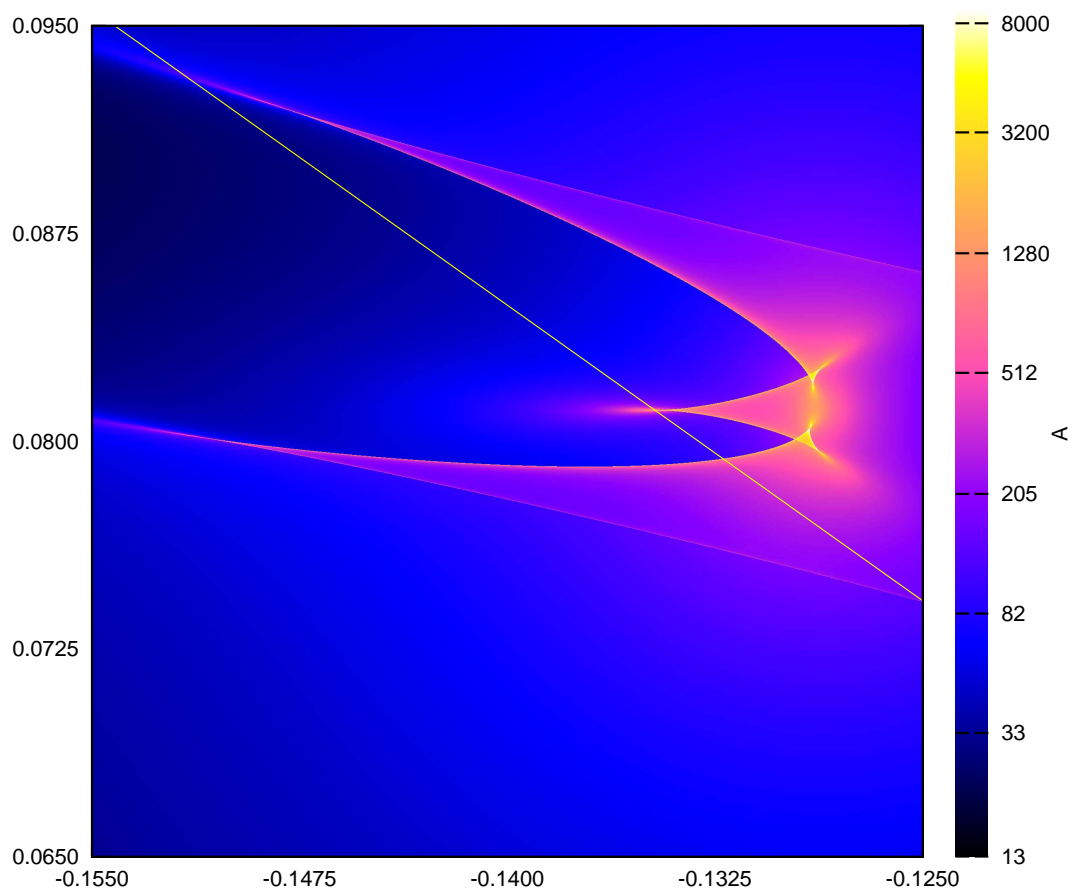
Obrázek 4.19: Světelná křivka pro trojitou čočku. Levá část: poloha zdroje a kaustika. Zelená křivka: kaustika; modrá úsečka: trajektorie zdroje. Pravá část: světelná křivka

V obrázku 4.20 uvádíme odpovídající mapu zjasnění. Poměrně dobře vidíme, jak zjasnění klesá s téměř kruhovou symetrií od polohy hvězdy. To odpovídá signálu od jednoduché čočky. Ačkoli by se mohlo zdát, že na základě malé relativní hmotnosti planet nebude jejich vliv patrný, právě v oblasti největšího zjasnění jsou odchylky od jednoduché čočky podstatné. Na tomto místě je vhodné připomenout, že tato mapa zjasnění je počítána pro bodový zdroj. Pokud by byl zdroj příliš velký, například větší než $0,02$ Einsteinova poloměru, vliv planet by se do značné míry smazal (dle [3] je poloměr zdroje $3 \cdot 10^{-4}$ Einsteinova poloměru).



Obrázek 4.20: Mapa zjasnění pro systém OGLE-2006-BLG- 109Lb,c. Žlutá úsečka označuje dráhu zdroje

Detail mapy zjasnění uvádíme v obrázku 4.21. Patrné zde jsou oba swallowtaily i kasp mezi nimi, v jehož blízkosti zdroj prošel.



Obrázek 4.21: Detail mapy zjasnění pro systém OGLE-2006-BLG- 109Lb,c. Žlutá přímka: dráha zdroje

Kapitola 5

Závěr

V rámci této práce jsme se seznámili s vlastnostmi dvojitých gravitačních čoček. Zkoumali jsme tvary kritických křivek a kaustik a hlavně změny jejich topologie prostřednictvím výskytu dělicích bodů. Uvedli jsme příklady světelných křivek odpovídajících přechodům kaustiky a přechodům v blízkosti kaspů.

Tento známý postup jsme aplikovali na trojitě čočky, což v podstatě znamená přidání dalšího členu do zobrazovací rovnice a zvýšení stupně všech polynomiálních rovnic, které ze zobrazovací rovnice vycházejí. Konfiguraci trojitě čočky popisujeme pěti parametry, a tak oproti dvouparametrické dvojitě čočce máme mnohem obtížněji zmapovatelný prostor parametrů. Navíc části kaustiky trojitě čočky nemusí být disjunktní, ale mohou se překrývat nebo samy sebe křížit. Z těchto důvodů je závislost topologie kaustiky na parametrech čočky velmi složitá. Její znalost je však nutná, pokud máme správně interpretovat pozorované světelné křivky. V této práci jsme řešili hlavně první krok, tedy hledání počtu částí kritické křivky a kaustiky pomocí dělicích bodů. Našli jsme explicitní podmínky pro výskyt dělicích bodů pro tři speciální případy: pro kolineární konfiguraci čoček s proměnnou středovou hmotností, pro rovnostranný trojúhelník s proměnnou hmotností jednoho vrcholu a pro rovnoramenný trojúhelník s proměnným úhlem mezi rameny.

Zkoumali jsme také obrazy zdroje vytvořené trojitou čočkou. Ověřili jsme, že pro trojitou čočku existují oblasti, kde má zdroj 4, 6, 8 a 10 obrazů podle polohy vůči kaustice. Ukázali jsme, že při přechodu kaustiky přes bod křížení vznikají nebo zanikají obrazy jako při současném přechodu dvou foldů. Spočítali jsme zjasnění obrazů a vynesli ho do světelných křivek, které mohou mít podstatně bohatší strukturu než v případě dvojitě čočky.

Světelná křivka při přechodu přes bod křížení vykazuje skokovou divergenci podobně jako při přechodu přes fold. Pro přechod křížení jsme také ověřovali aproximaci zjasnění kombinací funkcí $A_i = a_i \rho_i + b_i + \frac{c_i}{\sqrt{\rho_i}}$, $i = 1, 2$, kde ρ_i je vzdálenost od příslušného foldu. Zjistili jsme, že tato aproximace není řádově horší, než při přechodu jednoho foldu. Sestavili jsme také mapy zjasnění pro trojitou čočku, konkrétně pro první pozorovaný trojitý systém OGLE-2006-BLG-109Lb,c.

Výsledky této práce lze dále rozšířit. Je třeba spojit několik speciálních řezů parametrickým prostorem a nalézt tak obecnější podmínky pro výskyt dělicích bodů v trojité čočce. Dalším krokem k pochopení topologií kaus-tik pak je zkoumání počtu kaspů, podmínek pro výskyt bodu křížení, či složitějších lokálních struktur jako jsou swallowtails. Se zahrnutím nenulové velikosti zdrojové hvězdy pak bude také možné přímo modelovat pozorované světelné křivky mikročočkování trojitými čočkami.

Literatura

- [1] Alcock, C. (2000) : *Binary Microlensing Events from the MACHO Project* , Ap. J. **541** (2000), 270-297.
- [2] Aubourg, E. (1993) : *Evidence for gravitational microlensing by dark objects in the Galactic halo*, Nature **365** (1993), 623-625.
- [3] Bennett, D. P. (2010): *Masses and Orbital Constraints for the OGLE-2006-BLG-109Lb,c Jupiter/Saturn Analog Planetary System*, Ap. J. **713** (2010): 837.
- [4] Gaudi, B. S. (2008): *Discovery of a Jupiter/Saturn Analog with Gravitational Microlensing*, Science **319** (2008), 927-930.
- [5] Han, C. (2008): *Microlensing Detections of moons of exoplanets*, Ap. J. **684** (2008), 684-690.
- [6] Chung, S.-J., Park, B.-G. (2010) : *Properties of the Central Perturbations by Planets in Binary Stellar Systems under the Strong Finite-Source Effect*, Ap. J. **713** (2010): 865.
- [7] Jaroszyński, M., (2002) : *Binary Lenses in OGLE-II 1997–1999 Database. A Preliminary Study* , Acta Astron. **52** (2002), 39-60.
- [8] Lee, D.-W., Lee, Ch.-U. (2007): *Microlensing detection of planets in binary stellar systems*, Ap. J. **672** (2007), 623-628.
- [9] Mao, S., Paczyński, B. (1991): *Gravitational microlensing by double stars and planetary systems*, Ap. J. **374** (1991), L37-L40.
- [10] Paczyński, B. : (1986): *Gravitational microlensing by the galactic halo*, Ap. J. **304** (1986), 1-5.

- [11] Paczyński, B. (1996): *Gravitational microlensing in the local group*, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **34** (1996): 419-459.
- [12] Pejcha, O., Heyrovský, D. (2009): *Extended-source effect and chromaticity in two-point-mass microlensing*, Ap. J. **690**: 1772-1796.
- [13] A. O. Petters, H. Levine, J. Wambsganss (2001) *Singularity Theory and Gravitational Lensing*, Birkhäuser, Boston.
- [14] Poston, T. , Stewart, I. (1996): *Catastrophe theory and its applications*. Dover, Mineola.
- [15] Refsdal, S. (1964): *Gravitational Lens Effect*, Mon. Not. R. astr. Soc. **128** (1964), 295-306.
- [16] Schneider, P., Weiß, A. (1986): *The two-point-mass lens: detailed investigation of special asymmetric gravitational lens* A&A, **164** (1986), 237-259.
- [17] Udalski, A. (1992) : *The Optical Gravitational Lensing Experiment*, Acta Astron. **42** (1992), 253–284.
- [18] Witt, H. J., Petters, A. O. (1993): *Singularities of the one- and two-point mass gravitational lens*, J. Math. Phys. **34** (9) (1993), 4093-4110.
- [19] Wambsganss, J., Liebig, Ch. (2009) : *Detectability of extrasolar moons as gravitational microlenses* , arXiv:0912.2076v1.