Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

Slovní úlohy s procenty
Word problems with percentages

Vypracovala: Alena Šteflíčková
Vedoucí práce: doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

2010

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Benešově dne 1. dubna 2010

Alena Šteflíčková

Chtěla bych poděkovat vedoucí své bakalářské práce paní doc. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné vedení, cenné rady a podněty, zapůjčení materiálů a čas, který věnovala mé práci.

Název práce: Slovní úlohy s procenty
Autor: Alena Šteflíčková
Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Abstrakt: Tématem této bakalářské práce jsou slovní úlohy s procenty. V prvních dvou částech se zabývám teorií slovních úloh obecně a teorií slovních úloh s procenty. V první praktické kapitole představuji základní postupy pro počítání s procenty. V dalších kapitolách se zabývám složitějšími a kombinovanými úlohami a zahrnuty jsou také úlohy v kombinaci s jinými typy úloh a finanční matematika. Závěrečná část je věnována tematickému obsahu slovních úloh. Cílem práce je roztřídit, uspořádat a zpřehlednit slovní úlohy na procenta, které se objevují v učebnicích a sbírkách úloh pro základní a střední školy, a to pro potřeby řešitelů i pedagogů.
Klíčová slova: slovní úloha, procenta

Title: Word problems with percentages
Author: Alena Šteflíčková
Department: Department of Mathematics and Mathematical Education
Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Abstract: The topic of this bachelor thesis is word problems with percentages. I deal with the theory of both word problems generally and word problems with percentages in two first parts. I present the basic methods of calculating in the first practical chapter. Other chapters consist of more difficult and complicated word problems, also connected to other types of word problems. Basic financial math is included. I introduce different topics of word problems with percentages in the final chapter. The aim of my thesis is to sort out and divide word problems with percentages used in textbooks and workbooks for primary and secondary schools, so it could be useful for both solvers and pedagogues.
Keywords: word problem, percents, percentages

Obsah

Úvod

Tématem mé bakalářské práce jsou slovní úlohy s procenty.

Vybrala jsem si slovní úlohy z toho důvodu, že napodobují problémy, se kterými se může řešitel setkat v běžném životě. Podporují logické myšlení, úsudek a hledání řešení problémů, při integrované výuce mohou přinášet informace i z jiných oblastí, než je matematika. Jsou zadávány slovně, proto bývají řešiteli hodnoceny jako obtížné. Na druhou stranu jsou často výzvou a díky spojení s příběhem mohou být i zábavné. Slovní úlohy jsou součástí matematiky po mnoho století a čas na jejich hodnotách a důležitosti ve výuce matematiky nic nezměnil.

Procenta jsou konsenzus, se kterým se v praxi běžně setkáváme, a jejich pochopení je tedy pro žáky a studenty důležité. Během školní docházky žáci pracují s procenty několikrát. Výuka začíná představením pojmu a žáci se dostávají přes jednoduché úlohy ke složitějším a kombinovaným úlohám, které se objevují u přijímacích zkoušek na střední školy i v opakovacích úlohách k maturitám.

Cílem práce je roztřídit, uspořádat a zpřehlednit slovní úlohy na procenta, které se objevují v učebnicích a sbírkách úloh pro základní a střední školy, a to pro potřeby řešitelů i pedagogů. Hlavními zdroji mé práce (praktické části) jsou učebnice a sbírky úloh, kde jsem propočítávala úlohy týkající se procent a hledala společné znaky, abych mohla úlohy rozdělit podle různých kategorií. Úlohy jsem nakonec rozdělila na několik částí podle náročnosti a podle toho, co musíme vypočítat, abych každou úlohu mohla někam zařadit. V první části jsem uvedla základní typy úloh podle toho, zda máme vypočítat základ, počet procent nebo procentovou část, společně s různými typy řešení. Do druhé části jsem zařadila základní úlohy, které jsou nějak upravené. Ve třetí části jsou úlohy, které jsou kombinací základních tří typů úloh. Tyto úlohy už jsou většinou náročnější. Ve čtvrté části jsem se zaměřila na úlohy s procenty v kombinaci s jinými typy úloh, kde nestačí řešiteli orientovat se v procentech. Takové úlohy bývají také náročnější a často se vyskytují u přijímacích zkoušek na střední školy. Zařazené bývají mimo kapitoly s procenty. Jako zvláštní část jsem oddělila úlohy s procenty, které se v učebnicích a sbírkách tradičně objevují v kapitole „Slovní úlohy řešené rovnicemi“. Specifické úlohy jsem oddělila do části „Jiné typy úloh“ a v rozsahu základní a střední školy se věnuji také finanční matematice. Některé úlohy by mohly být zařazeny do více kategorií.

U úloh uvádím řešení. Pokud si myslím, že je zajímavé porovnat více postupů řešení, uvádím je. Ve většině případů, kde jsem uvedla více postupů, se jedná o porovnání „postupného“ výpočtu, kdy se kombinují základní metody z kapitoly 3.1, a řešení rovnicí, které bývá rychlé, ale které si řešitelé osvojují později.

Má práce má kromě praktické části také úvodní část teoretickou. V teoretické části se zabývám slovními úlohami obecně, a pak se zaměřuji na slovní úlohy s procenty. Vymezuji základní pojmy pro práci se slovními úlohami a nastiňuji něco z historie a teorie slovních úloh.

Všechny přímé citace v mé práci jsou uvedeny v uvozovkách, pouze slovní úlohy jsou pro přehlednost v kurzívě a za textem mají uvedený zdroj v závorce. Postupy řešení (hlavně v části, kde shrnuji základní metody pro výpočet jednoduchých úloh) jsou z větší části zkombinované z různých učebnic, pokud přímo cituji, uvádím autora v závorce. Obrázky, schémata a náčrtky v mé práci jsou pouze ilustrativní, vzdálenosti ani poměry neodpovídají skutečnosti. U výpočtů neuvádím zkoušky. Pokud zaokrouhluji, používám symbol $\cong$. Pokud jsou v zadáních uvedené jednotky, uvádím je v postupech řešení u počítání přes procenta, u úloh ze stereometrie a u úměrností (kromě trojčlenek v kapitole 3.1). V ostatních případech jednotky neuvádím.

1 Slovní úlohy obecně

1.1 Vymezení základních pojmů

Matematika se vyučuje různými způsoby a v různých formách. Jednou z těchto forem jsou i slovní úlohy.

Slovní úlohy, jak napovídá označení, jsou matematické úlohy, která byly zadány slovně. Kuřina (1990, str. 61) definuje slovní úlohu jako „úlohu, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální či jinou tématikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“ Podle Vyšína (1962, str. 104) „slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy“.

Úloha obecně (z angličtiny „problem“) by se dala podle Fridmana (v Novotné, 2000) definovat jako uměle navozená problémová situace, kdy řešitel musí překonat určité překážky, aby se dostal k cíli. Matematická úloha je potom úloha, která se řeší pomocí matematických metod.

Účelem řešení matematických úloh je rozvíjení logického a abstraktního myšlení řešitele.

Slovní úlohy jsou jedinečné tím, že popisují situace podobné skutečnosti, a řešitelé si na nich mohou nacvičit řešení skutečných problémů, se kterými se setkávají v každodenním životě. Slovní úlohy tak převádějí matematiku do praxe a praxi do matematiky. Přesto nejsou slovní úlohy příliš oblíbené a tato forma činí řešitelům často velké problémy. Slovní úloha totiž obvykle vyžaduje nejen provedení správného početního úkonu, ale v první řadě pochopení úlohy a převedení slov a vztahů do matematického zápisu (tzv. matematizaci). Novotná (2000, str. 15) uvádí tyto základní problémy řešitelů slovních úloh:

- „žák má nedostatečné předchozí zkušenosti a znalosti související s kontextem nebo s potřebným matematickým zázemím úlohy
- žák nečte zadání pozorně, s porozuměním
- žák nesprávně interpretuje jeden nebo více termínů použitých v zadání úlohy

- žák není schopen spojit oddělené informace a vztahy do jednoho komplexnějšího celku“

Millerová (2008) pak upozorňuje na to, že žáci jsou často v první řadě vedeni k provádění jednoduchých početních úkonů, kdy si osvojí na určitý matematický problém univerzální postup řešení, který pouze, často bezmyšlenkovitě, aplikují na každou úlohu. Pokud jsou tedy později nuceni při řešení matematických úloh hledat vlastní postup řešení, nebo se přinejmenším rozhodnout, který naučený postup zvolit, je to pro ně obtížné.

Dalším problémem může být zadání úlohy, které řešitel vnímá jako nejednoznačné.

1.2 Dělení slovních úloh

Slovní úlohy se dají dělit podle řady kritérií. Ve své práci se budu věnovat slovním úlohám s nematematickým obsahem (podle Odvárka, Caldy, Šedivého, Židka, 1990), tedy takovým, které připojují k matematickým veličinám také nějaký příběh či zápletku, ne takové, kde je numerická či geometrická úloha pouze převedena do slov. (Příklad slovní úlohy s matematickým obsahem: Jaké číslo dostaneme, pokud od čísla 29 odečteme číslo 5?).

V učebnicích a sbírkách se často slovní úlohy dělí podle postupu řešení (např. na rovnice, na trojčlenku, Vennovy diagramy) nebo podle kontextu slovních úloh – např. o pohybu, na směsi, o společné práci a jiné. V některých případech můžeme jednu slovní úlohu zahrnout do více skupin. Může se také stát, že jedna slovní úloha jde více způsoby matematizovat, vzniknou tedy různé matematické úlohy se stejným výsledkem, nebo naopak, dvě různé slovní úlohy vedou k jedné výsledné úloze matematické (Novotná, 2000).

Novotná (2000, str. 14) uvádí, že se „často diskutuje „reálnost“ situace, kterou slovní úloha popisuje“. Podle této reálnosti se dají úlohy dělit na „úlohy z reálného života“ (real-world problems) a nereálné úlohy (non-real-world problems). Toom (Novotná, 2000, str. 14) upozorňuje, že úlohy z reálného života mají velkou motivační hodnotu, ale většina standardních úloh se nedá za reálné považovat, neboť „v běžném životě bychom hledanou odpověď nepotřebovali, nebo skutečné podmínky jsou tak složité, že je na probírané úrovni matematiky nelze vyřešit“.

1.3 Obsah a obtížnost úlohy

Slovní úlohy můžeme posuzovat i z hlediska obsahu a obtížnosti. Úlohy by měly být zajímavé, tematické a aktuální vzhledem k době, úměrné věku řešitele, měly by řešitele bavit a měly by pro něj být výzvou. Podle Dalina (1987, v Pol, 2007) se člověk nejefektivněji učí právě zdoláváním výzev. I Hejný (v Novotná, 1990, str. 13) uvádí, že by slovní úlohy měly „provokovat a motivovat“. Millerová (2008) upozorňuje na to, že pokud řešitel zjistí, že řada procvičujících úloh, které jdou za sebou, se řeší podle stále stejného vzorce, ztrácí zájem a pouze do vzorce mechanicky dosazuje čísla. Dokládá to na zadání úlohy v jazyku, kterému řešitel nerozumí, ale přesto je schopen úlohu vyřešit. Tento postup pak postrádá smysl řešení slovních úloh, což je procvičovat logické myšlení a aktivně řešit nějaký problém.

Obsahově mohou mít matematické slovní úlohy ještě další přidanou hodnotu. Mohou přinášet řešiteli informace z jiných oborů, než je matematika, nebo přinášet nadoborové informace. Mohou podporovat univerzální znalosti, jako je čtenářská gramotnost. Mohou také podporovat žádoucí návyky a chování žáka – např. v oblasti multikulturní výchovy, environmentální výchovy, výchovy ke zdravému životnímu stylu, a podobně.

Rakoušová (2009) upozorňuje na současnou státní vzdělávací politiku, která mimo jiné prosazuje koncept klíčových kompetencí. Podle jejího názoru se u žáků a studentů ideálně rozvíjejí právě propojováním předmětů. Domnívá se, že matematiku v českém školství s ostatními předměty integrovat příliš neumíme, což je velká chyba a škodí to žákům i matematice.

1.4 Historický kontext

Historie slovních úloh je velmi bohatá a dlouhá. Slovní úlohy se využívají od počátků matematiky. Každá civilizace má své vlastní úlohy, které se tematicky i obsahově liší podle dané doby, stylu života a kulturních rozdílů a samozřejmě také podle přístupu k matematice. Některé starší úlohy se používají do dneška.

Gerofsky (v Markel, 2009) uvádí, že slovní úlohy jsou tak staré jako lidské písmo. Objevují se už na 4 000 let starých babylonských tabulkách s klínovým písmem. Podle Melvilla (2001) se našlo několik stovek babylonských matematických tabulek, část z nich obsahuje právě slovní úlohy. Je podle nich zřejmé, že Babyloňané považovali slovní úlohy za důležitou součást učení. Babylonští studenti podle něj většinou řešili úlohy, které se týkaly každodenního života, např. vyměřovali pole, rozpočítávali mzdu a podobně. Bečvářová (v Houser, 2006) upozorňuje, že slovní úlohy v té době vedly na lineární, ale i kvadratické a kubické rovnice a jejich soustavy.

Slovní úlohy se objevují i v Egyptě. Např. Rhindův papyrus pochází asi z roku 1650 př. n. l. a obsahuje 87 matematických úloh, mezi nimiž najdeme i řadu slovních úloh zabývající se aritmetikou, algebrou i geometrií. Zajímavé jsou např. úlohy na dělení celku na části (např. úlohy na dělení měřic ječmene – Egypťané používali počítání se zlomky) (Williams, 2008).

Slovní úlohy existovaly i v Řecku a Římě, Číně a Indii. Gottwald (2005) popisuje, že v Indii se slovní úlohy zabývaly předměty a situacemi z reálného života a většina jich byla napsána mezi 3. a 14. stoletím. Některé úlohy byly rytmizovány, aby se studentům lépe pamatovaly.

I přesto, že se slovní úlohy z různých dob a od různých národů liší, jsou ve své podstatě stále stejné a mají stále stejný smysl – přiblížit řešiteli matematiku a převést matematické poznatky do reality a obráceně. Protože i přes to, že je matematická věda krásná sama o sobě, jejím základním smyslem je a vždy bylo především procvičovat logické myšlení a úsudek a nacvičit zvládání obtížných situací.

1.5 Proces řešení slovních úloh

Proces řešení slovních úloh je předmětem zájmu mnoha matematiků. Do dnešní doby se často cituje maďarský matematik Polya, který rozděluje proces řešení na uchopování, stanovování strategie, realizaci strategie a interpretaci výsledků (1945, v Novotná, 2000). Podle něj (1957, v Alfeld, 1996) musí řešitel v etapě uchopování pochopit problém. Uvědomit si, co zná a co nezná, jaké má k dispozici informace a jaké jsou podmínky. Polya doporučuje nakreslit obrázek a vytvořit legendu[1]. V etapě stanovování strategie by měl řešitel najít spojení mezi známými a neznámými informacemi. Mohou mu pomoci podobné úlohy, které řešil v minulosti. Může mu pomoci přeformulovat úlohu. Polya dále doporučuje, že pokud není řešitel schopný

[1] Termín „legenda“ používán např. v Novotné (2000), někteří autoři používají jiné termíny, např. „zápis“ nebo „záznam“.

vyřešit úlohu, ať se nejprve zaměří na jiné úlohy podobného typu. Na konci této etapy by měl řešitel ověřit, že použil všechny relevantní podmínky a informace. Během realizace strategie by měl řešitel ověřit každý krok. Měl by být schopen dokázat, že daný krok je správný. Při interpretaci výsledků by měl řešitel zkontrolovat výsledek.

Jednou z problematických oblastí v procesu řešení slovních úloh je zjistit, které informace jsou pro výpočet důležité a které můžeme vypustit, které ovlivňují výsledek a které ne. Na druhou stranu, někdy je nutné si informace domyslet, dohledat nebo znát kontext.

1.6 Formální náležitosti slovní úlohy

- legenda – umožňuje řešiteli vhled do úlohy, pomáhá mu správně uspořádat vztahy v zadání, může být doplněná obrázkem, diagramem
- výpočet – proces, kdy řešitel z informací ze zadání získává vlastní výsledek
- odpověď – nutí řešitele zformulovat číselný výsledek do věty a lze podle ní poznat, zda řešitel porozuměl zadání a zda ví, co vlastně vypočítal
- zkouška – řešitel ověřuje, že jeho postup a výpočet byl správný

2 Slovní úlohy s procenty

2.1 Vymezení pojmu procento

Koncept procent je úzus. Procenta byla zavedena kvůli jednoduchému vyjádření části celku. Procenta jsou úzce spojena se zlomky a s desetinnými čísly. 1 % odpovídá setině celku. Celku – tedy jedné jednotce – odpovídá 100 %.

Tato úzká spojitost se odráží i v postupech počítání, kde můžeme zaměňovat procenta za zlomky a desetinná čísla a obráceně.

Pojem spojený s procenty, je pojem „promile – ‰“, což je jedna tisícina celku.

2.2 Používání pojmu procento

Procenta mají široké využití a můžeme se s nimi setkat všude, kde potřebujeme vyjádřit část celku. Procenta slouží např. k popisu ekonomických veličin a ve statistikách (např. nárůst počtu obyvatelstva, pokles či porovnávání HDP, k popisu inflace, nezaměstnanosti). Pomocí procent se určuje výše daní, mají také velký význam v bankovnictví (úrokové a jiné míry). Často jsou využívány k porovnávání různých hodnot. V každodenním životě se s procenty setkáváme např. při zlevňování a zdražování produktů a služeb, při popisu složení různých roztoků.

Při porovnávání je důležité znát kontext, protože počet procent nám o celku nic neřekne – např. pokud v rozvojové zemi roste HDP rychleji než vyspělé zemi, neznamená to, že je rozvojová země ekonomicky v lepším stavu.

2.3 Historický kontext

Podle Hoada (1996) pochází výraz „procento“ z latinského „per centum“ či italského „per cento“, tedy „na sto“, „ze sta“. Jak uvádí Weaver (1997), procenta se používala už na konci 15. století, a to v obchodních záležitostech, jako bylo počítání úroku, zisku a ztrát, a také v souvislosti s daněmi. Myšlenka procent je ovšem ještě daleko starší, už za císaře Augusta existovala v Římě a Itálii daň zvaná „centesima rerum venalium“, podle které se musela odvádět setina z veškerého zboží daného do veřejné dražby (Smith, 1830). Daň z každého propuštěného otroka byla 1/20 z ceny a 1/25 z ceny z otroka prodaného. Římané ovšem neuvažovali v procentech jako takových, počítali ve zlomcích (Weaver, 1997). Weaver dále uvádí, že ve středověku byla hodnota 100 často brána jako základ počítání a v italských rukopisech z patnáctého století se objevovaly výrazy jako „20 p 100“ a „xx p cento“, které značily 20 % (římská číslice X se pro „deset“ používá také dodnes). V sedmnáctém a osmnáctém století už bylo počítání s procenty celkem běžné.

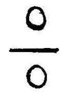
Podle Smithe (1958, ve Weaver, 1997) je symbol procent %, s šikmou čárou rozdělující dvě malé nuly, celkem moderní, do dnešní podoby se vyvíjel postupně a přešlo se k němu právě ze zkrácené formy „p 100“ a „p cento“. Herman, Chrápavá, Jančovičová a Šimša (1994) se domnívají, že % vzniklo pravděpodobně z nedbalého zápisu „cto“, tedy zkrácené podoby „cento“, který mohl vypadat nějak takto: ${}^{c}t_{o}$.

Obr. č. 1 představuje symbol pro procenta z italského rukopisu z roku 1425 (Weaver, 1997). Kolem roku 1650 se začíná objevovat jiný symbol (obr. č. 2), kde už je vypuštěné písmeno p (sborník THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Historical Topics for the Mathematics Classroom, 1969 ve Weaver, 1997). Obrázek č. 3 ukazuje text z roku 1684, kde je daný symbol použit (Smith, 1958, ve Weaver, 1997).

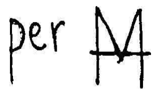
Podobně se vyvíjel symbol pro promile. Jeho původní podoba je na obr. č. 4.

Obr. č. 1

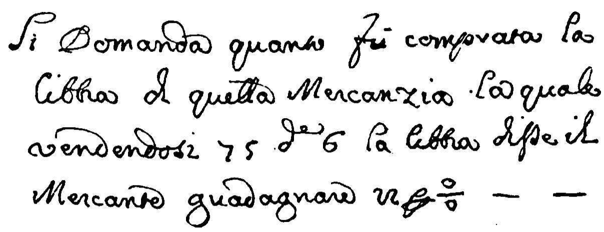
Obr. č. 2



Obr. č. 4



Obr. č. 3



3 Typy slovních úloh na procenta

3.1 Základní typy úloh s procenty podle toho, co musíme vypočítat

Základní a nejjednodušší úlohy na procenta, které se objevují v učebnicích, jsou úlohy na vypočítávání základu, procentové části a počtu procent. Základ (z) je celek, který dělíme na části. Procentová část (č) je část celku ve stejných jednotkách jako celek, kterou vyjadřujeme procenty. Počet procent (p) je vyjádření procentové části v procentech.

Základní rovnost se udává tradičně v této podobně: $\boxed{z \,.\, p = č}$

Ve skutečnosti v úlohách nepočítáme s počtem procent p, ale s (p . 0.01).

Tři základní (i když ne jediné) postupy pro výpočet jednoduchých úloh na procenta jsou přepočítávání přes jedno procento (popřípadě přepočítávání na jiný počet procent), použití trojčlenky (tedy použití přímé úměrnosti) a sestavování rovnice. Výběr postupu většinou záleží na řešiteli, na tom, co mu nejvíce vyhovuje a jak je zvyklý počítat ze školy, tedy i na vyučujícím a používané učebnici.

V některých úlohách je lepší použít jeden určitý postup, protože to vede k rychlejšímu dosáhnutí výsledku (např. úlohy, kde počítáme víc procentových částí z jednoho základu, bývá výhodné počítat přes jedno procento), ale není chybou použít jakýkoli jiný postup. Podle mého názoru je nejrychlejší a nejpohodlnější způsob počítání pomocí rovnice, i když pro začátečníky může být obtížné ji sestavit. Pomocí rovnice můžeme vyjádřit i složitější vztahy a zápis bývá krátký a rychlý. Pokud porovnávám počítání přes jedno procento a pomocí trojčlenky, dávám přednost počítání s trojčlenkou. Počítání přes jedno procento je názorné a přehledné pro začátečníky, ale zdlouhavé. Při počítání s trojčlenkou provádíme o krok méně než u počítání přes jedno procento.

Herman, Chrápová, Jančovičová a Šimša (1994) doporučují zapisovat při počítání s procenty i odhady, které řešiteli pomohou pochopit úlohu a ověřit výsledek.

3.1.1 Úlohy na vypočítávání základu

3.1.1.1 Základní typ úlohy a postup

Nejjednodušší typ úlohy na výpočet základu je úloha, kde pracujeme pouze s veličinami pro počet procent a procentovou část.

Úloha: *Házenkář vstřelil 9 gólů, takže měl šedesátiprocentní úspěšnost střelby. Kolikrát vystřelil na bránu?* (Žůrek, 1994, str. 77)

Základní metody řešení:

1. Přes jedno procento (nebo jiný počet procent)

60 % .... 9 střel

1 % .... 0,15 střel

100 % .... 15 střel

Jednoduchost počítání přes jedno procento spočívá v tom, že řešitel vydělí procentovou část (č) počtem procent (p) a dostane procentovou část odpovídající 1 %. Odtud získá celek násobením stem. Řešitel může zvolit i jinou procentovou část, než je 1 %, cílem řešitele obecně by mělo být zvolit nejrychlejší, nejjednodušší a pro něj nejpohodlnější postup.

V tomto případě bychom mohli snadno počítat přes 10 % nebo 20 %:

Počítání přes 20 %

60 % ……………………………………………. 9 střel

20 % ……………………………… 9 střel : 3 = 3 střely

100 % …………………………… 3 střely . 5 = 15 střel

Počítání přes 10 %

60 % …………………………………………… 9 střel

10 % …………………………….. 9 střel : 6 = 1,5 střel

100 % ………………………… 1,5 střel . 10 = 15 střel

2. Trojčlenka – využití přímé úměrnosti

60 % …………… 9

100 % …………... x

$x/9 = 100/60$

$x = 15$

Použití trojčlenky v počítání s procenty je také snadné, neboť se jedná vždy o úměrnost přímou. Řešitel musí zadané veličiny pouze správně umístit ve schématu.

Využitím přímé úměrnosti se dají některé úlohy snadno počítat zpaměti. Jedná se především o takové úlohy, kde se 100 % dá jednoduše dělit počtem procent. Pokud chceme např. vypočítat základ a z úlohy vyčteme, že 20 % ze základu je 40, můžeme postupovat tak, že si řekneme, že 100 % je pětkrát větší než 20 %, proto i základ musí být pětkrát větší než 40. Základ bude 200.

3. Rovnice

$z \cdot (p \cdot 0{,}01) = č$

$0{,}6 \cdot z = 9$

$z = 15$

Pro řešení úlohy pomocí rovnice musíme převést procenta na desetinná čísla nebo zlomky. Neznámá je základ z. Slovně by se dala rovnice interpretovat tak, že na levé straně máme 60 % z celku z, které se rovnají 9.

Právě slovní interpretace může v sestavení rovnice pomoci. Předložky „z“, „ze“, nahrazujeme „krát“, sloveso „je“ nahrazujeme rovnítkem. Jen nesmíme zapomenout, že počet procent se převádí na desetinné číslo, tedy násobí 0,01.

60 % ze z je 9

$0{,}6 \quad \cdot \; z \; = 9$

Házenkář vstřelil na bránu patnáctkrát.

3.1.1.2 Netradičně zadané úlohy na výpočet základu

Úloha: *V matematické soutěži získala Jana o 5 bodů více než její kamarád Honza a dosáhla tak 125 % Honzova bodového zisku. Kolik bodů získali v soutěži oba dohromady?* (Zhouf a kol., 2002, str. 8)

Strategie řešení:

- Tato úloha se dá vyřešit rovnicí přímo ze zadaných hodnot, nebo si uvědomíme, že 5 bodů, které získala Jana navíc oproti Honzovi, je 25 % z bodů, které získal Honza. Tento postup „přes 25 %“ je kratší a výrazně jednodušší, úloha se dá vyřešit téměř okamžitě z hlavy, na druhou stranu je obtížnější na něj přijít.

Řešení 1. části úlohy:

1. Rovnice

Honza získal ……………………..…. x bodů

Jana získala …. 125 % z x = 1,25 . x bodů

1,25 . x = x + 5

0,25 . x = 5

x = 20

2. „Přes 25 %“ (můžeme použít trojčlenku nebo rovnou výpočet přes procenta)

Honza: 25 % …………. 5 bodů

100 % ……..… 20 bodů

Jana: 20 bodů + 5 bodů = 25 bodů

Řešení druhé části úlohy:

Dohromady: 20 bodů + 25 bodů = 45 bodů

Honza a Jana získali dohromady 45 bodů.

Úloha: *27 % z počtu kartiček hokejistů je o 12 méně než 33 % z tohoto počtu. Kolik je kartiček celkem?* (Husar, 2002, str. 12)

Strategie řešení:

- V této úloze jsou zadány dva počty procent ze stejného základu a rozdíl mezi těmito počty procent v procentové části. Úloha se dá počítat dvěma způsoby, buď rovnicí, nebo převedením na úlohu na výpočet základu. Oba postupy jsou stejně náročné. U rovnice zvolíme za x celkový počet kartiček.

1. Rovnice

$0{,}27x + 12 = 0{,}33x$

$x = 200$

2. Převedení na úlohu na výpočet základu

33 % - 27 % = 6 %

6 % .... 12 kartiček

1 % .... 2 kartičky

100 % .... 200 kartiček

Kartiček je celkem 200.

3.1.2 Úlohy na výpočet procentové části

Základní úlohy na výpočet procentové části mají dvě podoby. Budu jim říkat výpočet procentové části „přímo“ a „nepřímo“, abych se vyhnula dlouhému popisu v dalších úlohách.

3.1.2.1 Výpočet procentové části „přímo“

Úloha: *V Maďarsku je z 5 miliónů ha orné půdy zavlažováno přibližně 5 % půdy. Kolik ha orné půdy je v Maďarsku zavlažováno?* (Běloun, 1998, str. 25)

Způsoby řešení:

1. Přes jedno procento

100 % .... 5 mil. ha

1 % .... 0,05 mil. ha

5 % .... 0,25 mil. ha

2. Trojčlenka – použití přímé úměrnosti

100 % 5

5 % x

$5/100 = x/5$

$x = 5/20 = ¼$

3. Rovnice

$z \,.\, (p \,.\, 0{,}01) = č$

$č = 0{,}05 \,.\, 5$

$č = 0{,}25$

Hodnota zapsaná pomocí procent se dá zapsat i pomocí zlomku:

$5/100 \,.\, 5 = 25/100 = ¼$

4. V této úloze by mohl někdo použít i **přepočet na část celku**

Výpočet části celku: 100 : 5 = 20 (5 % je 1/20 ze 100 %)

Kolik je dvacetina z 5 mil. ha půdy? 5 mil. ha : 20 = ¼ mil. ha

V Maďarsku je zavlažováno přibližně 0,25 mil. ha orné půdy.

3.1.2.2 Výpočet procentové části „nepřímo“

Úloha: *Vypočítejte, kolik stála po zlevnění o 12 % žehlička, jejíž původní cena byla 1 250 Kč.* (parafrázováno z Novotné, Kubínové, Sýkory, Hankové, Sinkové, 1997)

Strategie řešení

- Tuto úlohu můžeme řešit buď tak, že nejprve vypočítáme procentovou část odpovídající 12 % z 1 250 a odečteme od 1 250, nebo tak, že vypočítáme procentovou část odpovídající rozdílu 100 % a 12 % (tedy 88 %) z 1 250. Druhý způsob je jednodušší, neboť v prvním způsobu se odečítají velká čísla, v druhém způsobu pouze procenta, tedy čísla menší nebo rovna 100.
- 2. způsob je jednodušší, neboť odečítání procent je pouze do sta. Na výpočet procentové části použijeme jednu ze základních metod uvedených v podkapitole 3.1.2.1.

Řešení:

1. **způsob:**

100 % …………………… 1 250 Kč

1 % ……………….……. 12,5 Kč

12 % …. 12,5 Kč . 12 % = 150 Kč

1 250 Kč – 150 Kč = 1 100 Kč

2. **způsob**

100 % – 12 % = 88 %

100 % …………………….. 1 250 Kč

1 % ………………………… 12,5 Kč

88 % … 12,5 Kč . 88 % = 1 100 Kč

Žehlička po zlevnění stála 1 100 Kč.

3.1.2.3 Netradičně zadané úlohy na výpočet procentové části

Úloha: *Pan Řehák zaplatil letos za pojištění domácnosti 1 224 Kč. Platil méně než vloni, protože mu pojišťovna poskytla slevu 5 % za bezeškodní průběh a slevu 5 % za dva nové bezpečnostní zámky na dveřích bytu. Obě slevy jsou počítány z částky, kterou zaplatil v loňském roce. O kolik korun zaplatil letos méně než vloni?* (Odvárko, Kadleček, 1999, str. 97)

Strategie řešení:

- Tato úloha je zajímavá tím, že nepotřebujeme znát základ.

Řešení úlohy:

(100 % - 5 % - 5 % = 90 %) ………….. 1 224 Kč

1 % ………………………………………. 13,6 Kč

10 % + 5 % ………………………………. 204 Kč

Pan Řehák zaplatil letos méně než vloni o 204 Kč.

Úloha: *Počet stromů v sadu stoupl o 50 % na 300. O kolik stromů tedy počet vzrostl?* (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 2003, str. 53)

Strategie řešení:

- V této úloze také není potřeba počítat základ. Z procentové části a počtu procent se počítá jiná procentová část, v tomto případě nejjednodušeji přes 50 %.

Řešení:

150 % ……………… 300 stromů

50 % ……………….. 100 stromů

Počet stromů vzrost o 100.

3.1.3 Úlohy na výpočet počtu procent

Stejně jako při výpočtu procentové části, i při výpočtu počtu procent můžeme počítat „přímo“ či „nepřímo“.

3.1.3.1 Výpočet počtu procent „přímo“

Úloha: *Alena získala při zkouškách ze 40 možných bodů 34 bodů. Kolik procent z možných bodů Alena získala?* (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 2003, str. 41)

Způsoby řešení:

1. Přes jedno procento (kombinovaný s rovnicí)

100 % ………………………….. 40 bodů

1 % ……………………………. 0,4 bodů

x % ze 100 % …... 0,4 bodů . x = 34 bodů

x = 85

2. Trojčlenka – použití přímé úměrnosti

100 % 40

x % 34

x/100 = 34/40

x = 85

3. Rovnice

z . (p . 0,01) = č

40 . (p . 0,01) = 34

p = 85

Koman, Tichá, Kuřina, Černek (2003) uvádějí žáky do počítání s procenty tím, že zdůrazňují, že procenta jsou setiny. Převedou tedy podíl čísel 34 a 40 na zlomek se základem 100:

34/40 = (34 . 25)/(40 . 25) = 850/(1 000) = 85/100 = 85 setin => 85 %

Alena získala 85 % možných bodů.

3.1.3.2 Výpočet počtu procent „nepřímo“

Úloha: *O kolik procent byla zlevněna halenka, která stála původně 650 Kč a nyní stojí 455 Kč?*

Strategie řešení:

- Tato úloha je podobná úloze o žehličce z kapitoly 3.1.2.2. Buď vypočítáme jednou z metod počet procent ze základu 650 Kč a procentové části 455 Kč a odečteme ho od 100 %, nebo vypočítáme rozdíl cen a určíme, jakému počtu procent odpovídá, pokud je základ 650 Kč.

1. způsob

100 % 650

x % 455

x = (455 . 100)/650 = 70

100 % – 70 % = 30 %

2. způsob

650 – 455 = 195

100 % 650

x % 195

x = (195 . 100)/650 = 30

Halenka byla zlevněna o 30 %.

3.2 Upravené základní úlohy

Základní úlohy bývají různě upraveny, popř. obohaceny dalšími složkami nebo požadovanými početními úkony. Řešitel musí např. převést jednotky, eliminovat nepotřebné informace, porovnat hodnoty a podobně.

3.2.1 Změna jednotek

Úloha: *Prvním potrubím přitéká do nádrže 75 hl vody za hodinu, druhým potrubím 1,25 l vody za sekundu. Vypočítejte, o kolik procent více nebo méně vody přitéká za jednotku času do nádrže druhým potrubím než potrubím prvním.* (Husar, 2002, str. 12)

Strategie řešení:

- Tato úloha vyžaduje převedení veličin na stejné jednotky a pak navíc porovnání.

Řešení:

75 hl/h = 75 . (100/3 600) l/s = 25/12 l/s

100 % 25/12

x % 1,25

x = 1,25 . 100/(25/12) = 60

100 % – 60 % = 40 %

Druhým potrubím přitéká o 40 % méně vody než potrubím prvním.

3.2.2 Úlohy, kde je část úlohy zadána ve zlomcích nebo v desetinných číslech

Některé úlohy mají hodnoty místo v procentech zadané ve zlomcích nebo v desetinných číslech. Takové hodnoty se dají buď převést na procenta, nebo se může počítat rovnou ve zlomcích či desetinných číslech.

Úloha: *Ze skladu ovoce poslali 5/8 všech jablek do obchodů ve městě, 7/9 ze zbývajících beden dovezli nákladními auty do sousedního města. Kolik procent beden zůstalo ještě na skladu?* (Husar, 2002, str. 102)

Strategie řešení:

- Úlohu můžeme buď celou převést na procenta, nebo vyřešit celou ve zlomcích a převést na procenta až konečný výsledek. Někdy je lepší počítat ve zlomcích, neboť procenta mohou vycházet s nekonečným rozvojem a zaokrouhlování už ubírá na přesnosti. Tato úloha je zajímavá také tím, že neznáme přesný počet beden jablek na skladě a ani ho znát nepotřebujeme, neboť nemáme zjistit nic o počtu beden, ale jen to, jak se změnil stav.

Řešení:

Bedny	Zlomky	Procenta (z původního počtu beden)
na skladě původně	x	100 %
do blízkého města	(5/8)x	62,5 %
co zbyly na skladě	x – (5/8)x = (3/8)x	100 % – 62,5 % = 37,5 %
do sousedního města	7/9 . (3/8)x = (7/24)x	77,778 . 37,5 % = 29,167 %
co zbyly na skladě	(3/8)x – (7/24)x = (1/12)x	37,5 % – 29,167 % = 8,333 %

Na skladě zůstalo 8 % beden.

3.2.3 Eliminace nepotřebných informací

Úloha: *Jeden kilogram jablek stojí 12 Kč. Kdo nakoupí více než 50 kg, získá slevu 5 % z ceny. Pan Dvořák kupuje 3 přepravky jablek. Prodavač navážil celkem 67 kg. Kolik korun pan Dvořák za jablka zaplatí?* (Odvárko, Kadleček, 1999, str. 92)

Strategie řešení:

- Tato úloha je úloha na procentovou část, kde je ale více matematických údajů, než je potřeba k výpočtu. To, že pan Dvořák kupuje tři přepravky, výsledek nijak neovlivní. Naopak informace, že kdo nakoupí více jablek než 50 kilogramů, získá slevu, je pro výpočet důležitá, i když samotný údaj „50 kg“ se ve výpočtu také neobjeví. Tuto informaci musíme brát v úvahu při posuzování dalších údajů v úloze, neboť splnění podmínky podmiňuje odečtení slevy.
- Úloha se dá vyřešit tak, že dostaneme základ vynásobením počtu kilogramů jablek, které pan Dvořák koupil, cenou za 1 kg, poté vypočítáme procentovou část.

Řešení:

100 % ………. 12 Kč/kg . 67 kg = 804 Kč

1 % ……………………………... 8,04 Kč

95 % …………………………. 763,80 Kč

Pan Dvořák za jablka zaplatí 764 Kč.

3.2.4 Úlohy, které jsou kombinací několika oddělených úloh

Jedna úloha v sobě často obsahuje několik úloh, které mají stejný kontext, ale jejichž úkolem je odpovědět na různé otázky. V učebnicích mohou, ale také nemusí, být části úloh označené číslicemi, písmeny nebo odrážkami, ale také nemusí. Jednotlivé části na sebe mohou navazovat nebo mohou být nezávislé, popř. se výsledky na konci porovnávají.

Úloha: *Počet narozených dětí v České Republice v roce 2000 klesl oproti roku 1993 na 75 %. Pokles byl přibližně o 30 tisíc. Kolik dětí se přibližně narodilo v roce 2000 a kolik v roce 1993?* (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 2003, str. 51)

Strategie řešení:

- Tato úloha má dvě části – jedna část je úloha na výpočet základu, druhá na výpočet procentové části z jiné procentové části.

Řešení:

25 % ………………. 30 000 dětí

1 % …………………. 1 200 dětí

100 % ……………. 120 000 dětí

75 % ………………. 90 000 dětí

V roce 2000 se narodilo přibližně 90 000 dětí, v roce 1993 přibližně 120 000 dětí.

Úloha: *V restauraci McDonald´s zlevnili přechodně všechny hamburgery o 15 %. BigMac stál před slevou 60 Kč, McChicken stál po slevě 34 Kč. Kolik jsme zaplatili celkem před slevou a kolik po slevě, jestliže jsme si koupili jeden BigMac a jeden McChicken?* (Husar, 2002, str. 31)

Strategie řešení:

- Tuto úlohu můžeme vyřešit tak, že vypočítáme jednou procentovou část a jednou základ, pak sečteme příslušné hodnoty. Jednodušší a rychlejší postup je použít dvě rovnice.

Řešení pomocí výpočtu procentové části a základu:

BigMac	McChicken
100 % .... 60 Kč	85 % .... 34 Kč
1 % .... 0,6 Kč	1 % .... 0,4 Kč
85 % .... 51 Kč	100 % .... 40 Kč

Celková cena před slevou: 60 Kč + 40 Kč = 100 Kč

Celková cena po slevě: 51 Kč + 34 Kč = 85 Kč

Řešení pomocí rovnice:

Celková cena před slevou: 60 Kč + 34 . (100/85) Kč = 100 Kč

Celková cena po slevě: (0,85 . 60) Kč + 34 Kč = 85 Kč

Před slevou jsme zaplatili 100 Kč, po slevě 85 Kč.

(Kontrolou nám může být to, že 100 % snížené o 15 % je skutečně 85 %.)

3.3 Úlohy, které jsou kombinací základních tří typů

3.3.1 Úlohy se zvyšováním či snižováním základu

3.3.1.1 Základní úlohy

Tento typ úloh je velmi rozšířený. Tematicky se úlohy často týkají zlevňování a zdražování, nějakého vývoje v čase nebo porovnávání. Snižování a zvyšování základu se může různě kombinovat, stejně tak se mění, co musíme vypočítat. Strategie řešení jsou buď počítání „postupně“, nebo pomocí rovnice. Počítání „postupně“ je delší a zdlouhavější, pro některé řešitele může být ale přehlednější. Počítání pomocí rovnice je rychlejší a kratší, neboť na vyřešení stačí několik kroků.

Úloha: *Mobilní telefon nejprve zlevnili o 20 % a po uvedení nového modelu na trh ještě o 25 % z nové ceny. Kolik stál původně, jestliže jeho cena po dvou slevách byla 5 160 Kč?* (Husar, 2002, str. 12)

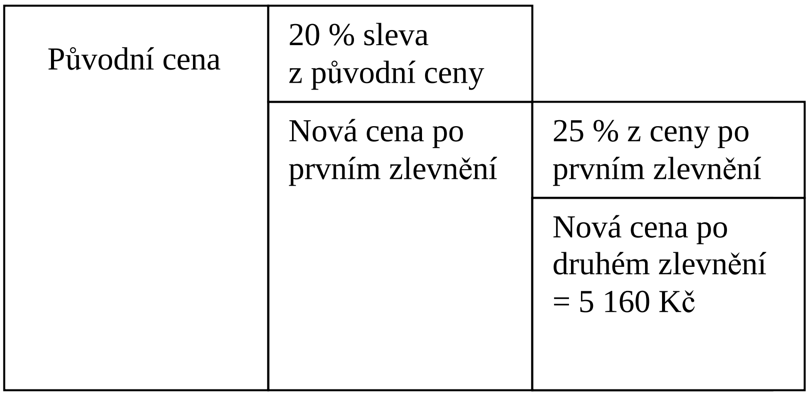
Strategie řešení:

- Tento typ úloh se dá počítat buď jednou rovnicí, nebo „postupně“ jednou ze základních metod pro počítání základu, procentové části nebo počtu procent (v tomto případě počítáme dvakrát základ). Počítání „postupně“ může činit řešitelům problémy tím, že snižování ceny je pokaždé z jiného základu. Postupujeme tak, že počítáme nejprve cenu po prvním zlevnění, pak původní cenu. Situaci zpřehlední, pokud vztahy ze zadání zakreslíme do obrázku nebo schématu. Sestavení rovnice rozepisuji, zkušený řešitel by pravděpodobně zapsal rovnici rovnou.

Řešení rovnicí:

Původní cena v Kč:	x
První zlevnění:	$-0{,}2x$
Cena po prvním zlevnění v Kč:	$x - 0{,}2x = 0{,}8x$
Druhé zlevnění:	$-0{,}25(0{,}8x)$
Cena po druhém zlevnění v Kč:	$0{,}8x - 0{,}25(0{,}8x) = 5\,160$
	$0{,}8 \cdot 0{,}75x = 5\,160$
	$x = 8\,600$

Řešení „postupně“:



75 % .... 5 160 Kč

1 % .... 68,8 Kč

100 % .... 6 880 Kč

80 % .... 6 880 Kč

1 % .... 86 Kč

100 % .... 8 600 Kč

Telefon stál původně 8 600 Kč.

Úloha: *Rádio, jehož původní cena byla 4 400 Kč, bylo po technickém zdokonalení o 20 % zdraženo. Později bylo o 20 % z nové ceny zlevněno. O kolik procent se celkově cena rádia snížila?* (Husar, 2002, str. 12)

Strategie řešení:

- Tato úloha se liší od předešlé úlohy tím, že známe konečnou cenu a hledáme původní. Navíc musíme vypočítat také celkový počet procent. Tato úloha by mohla některé řešitele vést k nesprávnému přesvědčení, že pokud se nejprve zdražuje o 20 % a pak zlevňuje o 20 %, cena se vrátila na původní hodnotu. Úlohu rozdělíme na dvě části – nejprve vypočítáme konečnou cenu, pak srovnáváme. Při řešení první části rovnicí je x konečná cena.

Řešení první části jednou rovnicí:

0,8 . (1,2 . 4 400) = x

x = 4 224

Řešení první části jednou ze základních metod:

100 % ………… 4 400 Kč

1 % ………………. 44 Kč

120 % ………… 5 280 Kč

100 % ………… 5 280 Kč

1 % …………….. 52,8 Kč

80 % ………….. 4 224 Kč

Řešení druhé části:

100 % ………… 4 400 Kč

1 % ………………. 44 Kč

x % …………… 4 224 Kč

4 224 : 44 = 96

100 % – 96 % = 4 %

Rádio bylo zlevněno o 4 %.

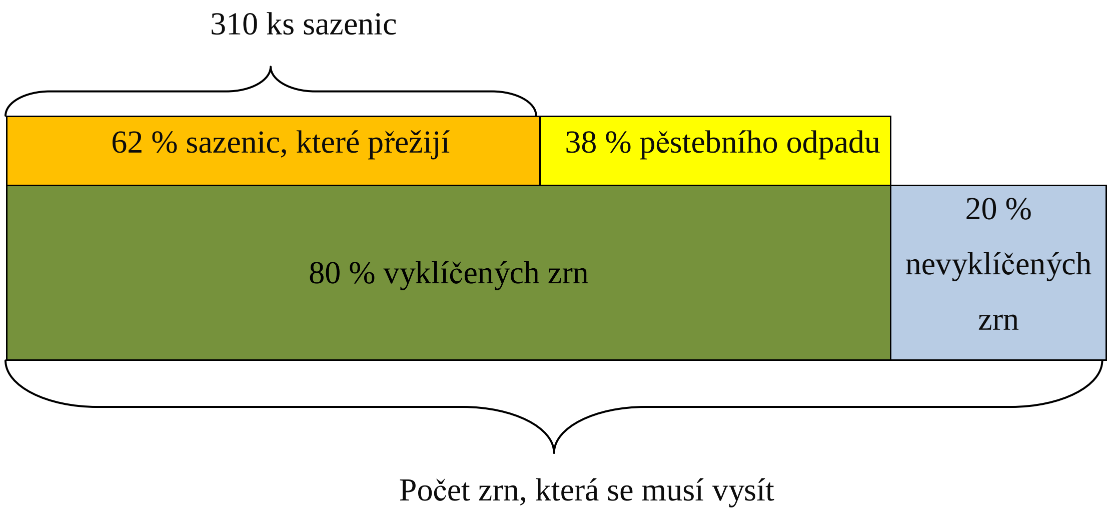
3.3.1.2 *Složitější úlohy*

Tyto úlohy jsou obohaceny dalšími kroky, nejčastěji počítáním potřebného množství. Tento typ úloh se často v učebnicích vyskytuje v kontextu klíčivosti rostlin.

Úloha: *Pro výsadbu skleníkových okurek je třeba 310 kusů sazenic. Jeden gram semena obsahuje průměrně 30 zrn, jejich klíčivost je 80 %. Pěstební odpad od výsevu do výsadby činí 38 % z klíčících rostlin. Určete v gramech hmotnost semen, která se musí vysít, aby byla zajištěna plánovaná výsadba.* (Běloun, 1998, str. 34)

Strategie řešení:

- V prvním kroku musíme vypočítat, jaký počet semen budeme potřebovat, v druhém kroku zjistíme hmotnost. Pro první krok můžeme nakreslit obrázek, podle kterého snadno sestavíme rovnici nebo vypočítáme dvakrát základ pomocí některé ze základních metod. Jednotlivé kroky sestavení rovnice rozepisuji v postupu.



1. **část**

Řešení rovnicí:

Počet sazenic, které přežijí:	310
Počet všech sazenic, včetně odpadu:	x
	62/100 . x = 310
	x = 310 . 100/62

Počet všech zrn: y

80/100 . x = y

Výsledná rovnice: 310 . (100/62) . (100/80) = y

y = 625

Řešení přes počítání základu: 62 % …………… 310 sazenic

1 % ……………….. 5 sazenic

100 % ………….. 500 sazenic

80 % ……………….. 500 zrn

1 % ………………... 6,25 zrn

100 % ……………… 625 zrn

2. část

30 zrn …………….. 1 g semena

625 zrn …………… x g semena

x = 625/30 = 20,84

Aby byla zajištěna plánovaná výsadba, musíme vysít 20,8 g semena.

3.3.2 Úlohy, kdy situace a vztahy mezi objekty jsou popsány pomocí procent

Tento typ úloh jsou také úlohy, kde se kombinuje zvyšování a snižování základu. Na rozdíl od předchozích úloh zde můžeme základy i sčítat. V těchto úlohách pracujeme s několika situacemi či objekty a vzájemné vztahy mezi těmito situacemi či objekty jsou popsány pomocí počtu procent (např. první má o 10 % více než druhý, druhý o 20 % více než třetí). Další informace, které můžeme znát, jsou číselné hodnoty vztahující se k jednotlivým situacím a objektům, popř. součet těchto situací a objektů. Nejlépe se takové úlohy počítají pomocí rovnic.

Úloha: *Petr Štika miluje smaženého kapra. Maminka proto nasmažila opravdu hodně kousků a Petr jedl kapříka od Štědrého večera až do Štěpána. Na Boží hod snědl o 37,5 % méně kousků kapra než předešlý den k večeři a na Štěpána o 75 % méně kousků než při štědrovečerní večeři. Celkem snědl 15 osmažených kapřích řízků. Kolik jich spořádal 24. prosince k večeři?* (Husar, 2002, str. 61)

Strategie řešení:

- Tato úloha je jednoduchá, neboť údaje z druhého dne a třetího dne se vztahují k prvnímu dni.

Řešení:

Počet řízků, které Petr snědl na Štědrý den:	x
Počet řízků, které Petr snědl na Boží Hod:	(1 – 0,375) . x
Počet řízků, které Petr snědl na Štěpána:	(1 – 0,75) . x

Výsledná rovnice (kolik snědl Petr celkem): x + 0,625x + 0,25x = 15

x = 8

Petr snědl na Štědrý večer 8 řízků.

Úloha: *Vánoční zpívání koled probíhalo po 3 dny: 22. 12., 23. 12. a 24. 12. Druhý den přišlo o 10 % více posluchačů než první den a třetí den přišlo ještě o 20 % více posluchačů než druhý den. Celkově se zpívání koled za tři dny zúčastnilo 684 posluchačů. Kolik přišlo přesně posluchačů každý den?* (Husar, 2002, str. 60)

Strategie řešení:

- Úlohu řešíme rovnicí.

Řešení:

Počet lidí, kteří přišli první den:	x
Počet lidí, kteří přišli druhý den:	1,1x
Počet lidí, kteří přišli třetí den:	1,2(1,1x)
Počet lidí, kteří přišli celkem za tři dny:	684

První den: $x + 1{,}1x + 1{,}2(1{,}1x) = 684$

$$3{,}42x = 684$$

$$x = 200$$

Druhý den: $1{,}1 \cdot 200 = 220$

Třetí den: $1{,}2 \cdot 220 = 264$

První den přišlo 200 lidí, druhý den 220 a třetí den 264 lidí.

3.4 Slovní úlohy s procenty v kombinaci s jinými typy úloh

Slovní úlohy s procenty v kombinaci s jinými úlohami se často objevují u přijímacích zkoušek, protože přijímací zkoušky musí v krátkém čase na několika úlohách prověřit co nejvíce schopností a znalostí uchazeče o studium. Navíc vyzkouší řešitelovu schopnost poradit si se složitějšími úlohami a jeho orientaci v matematice obecně. Do této kategorie mohou spadat i jednoduché úlohy. V některých úlohách se pomocí procent počítají pouze doplňkové úkoly.

Obecně se dají procenta „našroubovat" téměř všude, kde se porovnávají nějaké veličiny, např. jsem sice nenašla žádnou úlohu, kde byla procenta ve slovní úloze o pohybu, ale v úlohách, kde se počítá, kdy se objekty setkají, bychom např. rychlost jednoho objektu mohli vyjádřit číslem, rychlost druhého objektu závislostí na prvním (např. první auto jelo rychlostí 60 km/hod, druhé auto jelo o 70 % rychleji). V této kapitole uvádím úlohy z učebnic a sbírek.

3.4.1 Jednoduché slovní úlohy kombinované se základními úkony

Úloha: *Paní Ajnštajnová nakoupila u jedné zásilkové služby zboží v ceně více než 2 000 Kč, proto si mohla další zboží objednat se slevou 15 %. Rozhodla se, že koupí soupravu ručníků, která stála bez slevy 860 Kč, a že za ušetřené peníze objedná pro Kryšpína kapesní nůž, jehož původní cena byla 160 Kč. Vypočítej, kolik korun ušetřila paní Ajnštajnová při koupi*

a) soupravy ručníků,

b) kapesního nože.

c) Vypočítej, zda za původní cenu soupravy ručníků mohla paní Ajnštajnová nakoupit se slevou ručníky i kapesní nůž pro manžela.

(Novotná, Kubínová, Sýkora, 1995, str. 12)

Strategie řešení:

- V této úloze kromě výpočtu procentové části porovnáváme rozdílem dvě hodnoty, což je prakticky to nejjednodušší, co můžeme s dvěma veličinami dělat. Navíc je v této úloze matematický údaj 2 000 Kč, který nemá na řešení úlohy žádný vliv.

Řešení:

a)	Ručníky:	Původní cena	860 Kč
		15 % z 860 Kč	129 Kč
		Cena po slevě	731 Kč
b)	Nůž:	Původní cena	160 Kč
		15 % ze 160 Kč	24 Kč
		Cena po slevě	136 Kč

Paní Ajnštajnová ušetřila 129 Kč za ručníky a 24 Kč za nůž.

c)	Původní cena za ručníky:		860 Kč
	Cena za ručníky a nůž po slevě:	731 Kč + 136 Kč =	867 Kč

Paní Ajnštajnová nemohla za původní cenu ručníků koupit nůž a ručníky ve slevě, neboť by jí chybělo 7 Kč.

Úloha: *V odpařovači, který má objem 1,2 l, zůstalo po týdnu jen 150 ml vody. Kolik procent vody se už odpařilo? Odhadněte, na kolik dní ještě postačí zásoba vody v odpařovači?* (Novotná, Kubínová, Sýkora, Hanková, Sinková, 1997, str. 19)

Strategie řešení:

- Tato úloha je úlohou na vypočítání počtu procent „nepřímo". Doplňkovými úkoly je převedení jednotek a zaokrouhlení. Úloha na procenta je zkombinovaná s úlohou na dělení.

Řešení:

a) 1 200 ml …………… 100 %
   150 ml …………….. 12,5 %
   100 % - 12,5 % = 87,5 %
b) Kolik vody se vypaří za 1 den? (1 200 ml – 150 ml) : 7 dní = 150 ml/den

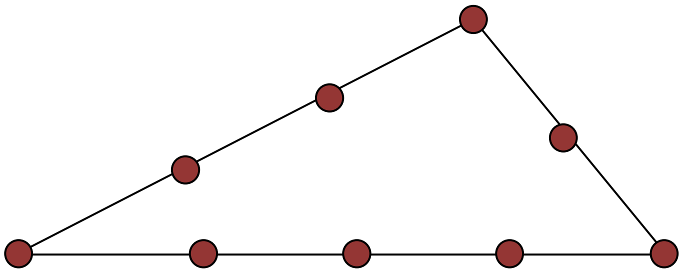
Vypařilo se už 87,5 % vody. Voda v odpařovači vydrží ještě jeden den.

3.4.2 Slovní úlohy s procenty v kombinaci s poměrem

Úloha: *Trosečníci na opuštěném ostrově se rozhodli vytvořit trojúhelníkový plot z dřevěných kůlů kolem svého tábořiště jako ochranu proti lidojedům z okolních ostrovů. Délky stran trojúhelníku jsou v poměru 2 : 3 : 4 a délka nejkratší strany je 34 metrů. Na každý metr délky připadnou průměrně 4 kůly. Kolik kůlů je potřeba, tvoří-li odpad 10 %?* (Husar, 2002, str. 74)

Strategie řešení:

- V této úloze musíme nejprve vypočítat, kolik metrů je obvod trojúhelníku. Tento počet metrů pak vynásobíme 4, neboť na každý metr připadnou 4 kůly. Výslednou hodnotu (počet kůlů) vezmeme jako procentovou část a jednou ze základních metod vypočítáme základ.



Řešení:

Obvod trojúhelníku:	Nejkratší strana:	2 díly ……………...... 34 metrů
	Obvod celého trojúhelníku:	(2 + 3 + 4) díly ... (9 . 17) metrů
		9 dílů ……………… 153 metrů

Počet kůlů bez odpadu:	1 metr …………….. 4 kůly
	153 metrů ……… 612 kůlů
Počet kůlů včetně odpadu:	90 % .... 612 kůlů
	1 % .... 6,8 kůlů
	100 % .... 680 kůlů

Na plot je potřeba 680 kůlů.

3.4.3 Slovní úlohy s procenty v kombinaci se společnou prací

Úloha: *Prvním čerpadlem se naplní malý bazén za 6 minut, druhým trvá naplnění o jednu třetinu déle a třetí čerpadlo potřebuje o 25 % delší čas než druhé čerpadlo. Za jak dlouho bude bazének plný, jsou-li puštěna všechna čerpadla současně?* (Husar, 2002, str. 131)

Strategie řešení:

- Tato úloha je jednoduchá úloha na společnou práci, kde musíme nejprve zjistit, za jak dlouho každé z čerpadel naplní bazének. Za jak dlouho to zvládne třetí čerpadlo, zjistíme pomocí jedné ze základních metod pro počítání procentové části. Za neznámou x zvolíme, za jak dlouho se naplní bazének pomocí všech čerpadel.

Řešení:

Počet minut, za které se napustí bazén 1. čerpadlem: 6

Počet minut, za které se napustí bazén 2. čerpadlem: 6 + (1/3 . 6) = 8

Počet minut, za které se napustí bazén 1. čerpadlem: 8 . 1,25 = 10

x/6 + x/8 + x/10 = 1

x = 120/47 minut = 153 sekund

Bazének se pomocí všech tří čerpadel naplní za 153 sekund.

Úloha: *Budou-li dvě rypadla o různých výkonech pracovat společně, splní úkol za 6 hodin. Kdyby první rypadlo pracovalo 4 hodiny a druhé 6 hodin, splnila by rypadla 80 % úkolu. Za jak dlouho by splnilo úkol každé z rypadel samo?* (Zhouf a kol., 2002, str. 37)

Strategie řešení:

- Tuto úlohu lze řešit pomocí rovnic o dvou neznámých. Označíme x hodin čas, za který splní úkol první rypadlo, kdyby pracovalo samostatně, a y hodin čas, který potřebuje druhé rypadlo.

Řešení:

6/x + 6/y = 1

<u>4/x + 6/y = 0,8</u>

x = 10, y = 15

Samotné první rypadlo by splnilo úkol za 10 hodin, samotné druhé rypadlo za 15 hodin.

3.4.4 Slovní úlohy s procenty v kombinaci s pravděpodobnostmi

Úloha: *Klíčivost semen nového druhu okurek je 94 %. Pravděpodobnost, že z 30 zasazených semen jich vyklíčí právě 28, je přibližně:*

a) 11 % b) 18 % c) 25 % d) 28 % e) 32 %

(Zhouf a kol., 2002, str. 91)

Strategie řešení:

- Pravděpodobnost, že semeno vyklíčí, je 0,94, pravděpodobnost, že nevyklíčí, pak 0,06. Podle zadání má z 30 semen vyklíčit právě 28 semen, takových skupin je (30!)/((28!) . (2!)) (Zhouf a kol, 2002).

Řešení:

$(30!)/((28!) \cdot (2!)) \cdot 0{,}94^{28} \cdot 0{,}06^{2} = 0{,}277$

Hledaná pravděpodobnost je 0,277.

3.4.5 Slovní úlohy s procenty v kombinaci s posloupnostmi

Úloha: *Intenzita světla se při průchodu skleněnou deskou sníží o 5 %. Na kolik procent původní intenzity klesne intenzita světla při průchodu pěti deskami?* (Zhouf a kol., 2002, str. 55)

Strategie řešení:

- Tato úloha se dá vyřešit i bez znalostí posloupností pomocí pětkrát opakovaného počítání procentových částí z různých základů, ale postup je to zdlouhavý a pracný. Pokud by byl navíc v úloze zadán vyšší počet desek, bylo by počítání ještě zdlouhavější. Toto postupné počítání si můžeme trochu zjednodušit tím, že intenzitě světla přiřadíme libovolnou konkrétní hodnotu, např. 100. Nepotřebujeme znát ani jednotky. Přiřadit libovolnou hodnotu můžeme z toho důvodu, že máme pouze porovnat dvě číselné hodnoty pomocí procent – výchozí hodnotu intenzity a hodnotu intenzity po průchodu pěti deskami. Stejný výsledek by nám vyšel, i kdybychom zvolili místo konkrétní hodnoty nějakou neznámou (např. i).

- Nejjednodušším řešením je použít vzorec pro geometrickou posloupnost.

1. **Řešení pomocí opakovaného počítání procentové části (pouze naznačeno):**

Intenzita světla:	100
Intenzita světla po průchodu první deskou:	95
Intenzita světla po průchodu druhou deskou:	100 % ………… 95
	1 % …………. 0,95
	95 % ………. 90,25
Intenzita světla po průchodu dalšími deskami:	Bude se opakovat stejný postup jako u intenzity světla po průchodu druhou deskou.

2. **Řešení vzorcem pro n-tý člen geometrické posloupnosti:**

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

Intenzita světla dopadajícího na první desku …….. a_1

Intenzita světla po průchodu pěti deskami ……….. $a_6 = a_1 . (95/100)^5$

$a_6 = (77,4/100) . a_1$

Intenzita světla po průchodu pěti deskami klesne na 77,4 % původní intenzity světla.

3.4.6 Slovní úlohy s procenty v kombinaci s úměrnostmi

Úloha: *Brambory obsahují v průměru 18 % škrobu. Z 50 kg škrobu lze vyrobit přibližně 32 litrů čistého lihu. Kolik tun brambor je zapotřebí k výrobě 100 hl čistého lihu?* (Zhouf a kol., 2002, str. 11)

Strategie řešení

- Nejprve musíme zjistit, kolik kilogramů škrobu je potřeba k vyrobení zadaného množství čistého lihu. Daná hmotnost odpovídá 18 % z množství brambor, které potřebuje k výrobě 100 hl lihu. Úloha je navíc ztížena o dva převody jednotek.

Řešení:

Hmotnost škrobu:

32 l lihu …………. 50 kg

10 000 l lihu ……… x kg

x = (50 x 10 000)/32 = 15 625

Hmotnost škrobu je 15 625 kg.

Hmotnost brambor:

156 225 kg …………. 18 %

x kg………………… 100 %

x = (156 225 x 100)/18 = 86 805

86 805 kg = 86,805 tun

K vyrobení 100 hl čistého lihu je zapotřebí téměř 87 tun brambor. (Zaokrouhlujeme nahoru, protože by nám jinak brambory chyběly.)

3.4.7 Slovní úlohy s procenty v kombinaci se směsmi

Úloha: Do *2 kg vody zamíchej 40 g modré skalice. Jakou koncentraci bude mít získaný roztok?* (Slouka, 1994, str. 146)

Strategie řešení:

- Tato úloha je vlastně jednoduchou úlohou na počet procent. Základem je celková hmotnost roztoku, který získáme sečtením hmotnosti vody a modré skalice.

Řešení:

(2 040)/40 = 100/x

x = 1,96

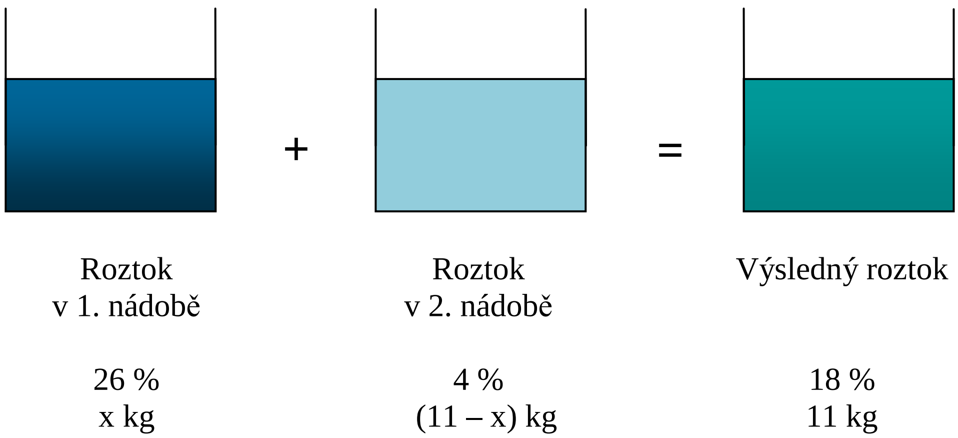
Získaný roztok bude mít koncentraci 1,96 %.

Úloha: Ve *dvou nádobách je rozpuštěná sůl. V první nádobě je ve vodním roztoku 26% koncentrace soli, ve druhé nádobě 4%. Kolik kilogramů z každého roztoku musíme nalít do třetí nádoby, aby vzniklo 11 kg roztoku s 18% koncentrací soli?* (Kotyra, Sivošová, 2004, str. 55)

Strategie řešení:

- Tento typ úloh se tradičně řeší pomocí rovnice. Rovnici sestavíme pomocí obrázku. Na obou stranách rovnice bude stejné množství soli.

Řešení:



Výsledná rovnice:

x . 0,26 + (11 – x) . 0,04 = 11 . 0,18

x = 7

11 kg – 7 kg = 4 kg

Aby vzniklo 11 kg roztoku s 18% koncentrací soli, potřebujeme 7 kg 20% roztoku a 4 kg 18% roztoku soli.

Úloha: *Kolektiv složený ze tří skupin zvýšil počet výrobků o 11 %. Přitom první skupina dosáhla 25% zvýšení, druhá 20% a třetí pro absence 4% snížení. Jak početné byly*

skupiny, když ve druhé skupině bylo o 5 lidí více než v první a třetí jich měla o 40 % více než druhá? (Předpokládáme stejnou výkonnost všech členů.)
(Benda, Daňková, Skála, Skopal, Šedivý, Vocelka, 1983, str. 31)

Strategie řešení:

- Tato úloha je zajímavá, protože na ní vidíme, že „směsi" mohou být tvořeny i jinak. V řešení úlohy se používá stejná strategie jako u úlohy předešlé, jen je řešíme pomocí soustavy rovnici o třech neznámých (počet lidí ve třech skupinách, postupně x, y, z).

Řešení:

$1{,}25x + 1{,}2y + 0{,}96z = 0{,}11 \cdot (x + y + z)$

$y = x + 5$

$\underline{z = 1{,}4 \cdot (x + 5)}$

$1{,}25x + 1{,}2 \cdot (x + 5) + 0{,}96 \cdot 1{,}4 \cdot (x + 5) = 0{,}11 \cdot (x + x + 5 + 1{,}4 \cdot (x + 5))$

$x = 30,\ y = 35,\ z = 49$

V první skupině bylo 30 lidí, ve druhé 35 lidí a ve třetí 49 lidí.

3.4.8 Slovní úlohy s procenty v kombinaci s úlohami ze stereometrie

Úloh ze stereometrie, kde je v zadání nějaký údaj s procenty, a musí se tedy během počítání využít vědomosti o procentech, je v učebnicích a sbírkách velké množství. Pomocí procent se nejčastěji popisují vztahy mezi veličinami (např. co se stane, když se něco zmenší nebo zvětší o x %), porovnávají změny v objemech, obsazích apod.

Úloha: *Tenkostěnná nádoba má tvar rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou v. Určete, o kolik procent se změní objem nádoby, jestliže poloměr její podstavy zmenšíme o 15 % a její výšku zvětšíme o 20 %.* (Zhouf a kol., 2002, str. 11)

Strategie řešení:

- Vypočítáme objem původní i změněné nádoby a porovnáme. Objem původní nádoby vezmeme jako základ, objem změněné nádoby jako procentovou část. Jednou ze základních metod vypočítáme počet procent „nepřímo". V mém případě je počet procent x.

Řešení:

Objem původní nádoby: $V = \pi r^2 v$

Objem změněné nádoby: $V = \pi \,.\, (0{,}85r)^2 \,.\, 1{,}2v$

$x/100 = \pi \,.\, (0{,}85r)^2 \,.\, 1{,}2v/ \pi r^2 v$

$x = 0{,}85^2 \,.\, 1{,}2 \,.\, 100 = 86{,}7$

$100\ \% - 86{,}7\ \% = 13{,}3\ \%$

Objem se zmenšil o 13,3 %.

Úloha: *Krychle má délku hrany 12 decimetrů. Druhá krychle má délku hrany přesně o 20 % delší. O kolik procent je více nebo méně vody v druhé krychli než v krychli první, je-li první krychle plná ze tří čtvrtin a druhá ze tří osmin?* (Husar, 2002, str. 11)

Strategie řešení:

- V této úloze musí řešitel nejprve vypočítat délku hrany druhé krychle (výpočet procentové části ze základu a počtu procent), pak objem obou krychlí, objem vody v obou krychlích, nakonec vzít objem vody v první krychli jako základ a objem vody v druhé krychli jako procentovou část a vypočítat „nepřímo" počet procent.

Řešení:

Krychle 1:

$a = 12$ dm

$V = a^3 = 12^3\ dm^3 = 1\,728\ dm^3$

$V_{vody} = 1\,728.\ ¾\ dm^3 = 1\,296\ dm^3$

Krychle 2:

$a = 12$ dm $+ 0{,}2 \,.\, 12$ dm $= 14{,}4$ dm

$V = a^3 = 14{,}4^3\ dm^3 \cong 2\,985{,}98\ dm^3$

$V_{vody} = 2\,985{,}98 \,.\, 3/8\ dm^3 \cong 1\,119{,}74\ dm^3$

100 % ……………………………………… 1 296 dm^3

1 % ………………………………………… 12,96 dm^3

x % ze 100 % ……….. 12,96 dm^3 . x = 1 119,74 dm^3

x $\cong$ 86,40

100 % - 86,4 % = 13,6 %

V druhé krychli je o 13,6 % méně vody.

Úloha: *Zmenšíme-li délku strany krychle o 10 %, bude mít krychle obsah všech stěn 1 944 cm^2. Jaká byla původní délka hrany a o kolik procent se snížil objem krychle?* (Husar, 2002, str. 20)

Strategie řešení:

- Tato úloha je podobná předchozí úloze o krychli, jen se kromě objemu počítá i povrch krychle.

Řešení:

Krychle nová:

S = 1 944 cm^2 = 6 a^2

a = 18 cm

V = a^3 = 18^3 cm^3 = 5 832 cm^3

Krychle původní:

90 % .... 18 cm

1 % .... 1/5 cm

100 % .... 20 cm

V = 20^3 cm^3 = 8 000 cm^3

100 % .... 8 000 cm^3

1 % .... 80 cm^3

x % .... 5 832 cm^3

x = (5 832)/80 = 72,9

100 % – 72,9 % = 27,1 %

Původní délka krychle byla 20 cm, objem se zmenšil o 27,1 %.

Úloha: *Roztržitý chodec prošel les a vracel se po obvodu lesa zpět do výchozího bodu. Na hodinkách zjistil, že cesta zpět mu trvala zhruba o 40 % delší dobu než cesta tam. Doma zkoumal v mapě, jak vlastně les vypadá a jak skrze něj procházel. Která z nabízených možností je správně,*

a) Les má tvar kruhu a skrz les šel chodec nejdelší možnou trasou.

b) Les má tvar čtverce a skrz les šel chodec nejdelší možnou trasou.

c) Les má tvar čtverce a skrz les šel chodec spojnicí protilehlých stran.

(Husar, 2002, str. 35)

Strategie řešení:

- Počítáme délky cest a postupně prověřujeme a), b) a c).

Řešení:

a) cesta tam ………… 2r ……………… 100 %

1% ………………….. 2r/100 = r/50

cesta zpět ………… π . r …………… x %

$x = (\pi \cdot r) : (r/50) = 50 \cdot \pi \cong 157{,}08$

Cesta zpět by trvala o 57,08 % delší dobu.

b) cesta tam ………… $2^{½}$a …………….. 100 %

1 % …………………… $2^{½}$. a /100

cesta zpět ………… 2a ……………… x %

$x \cong 141{,}42$

Cesta zpět by trvala o 41,42 % delší dobu.

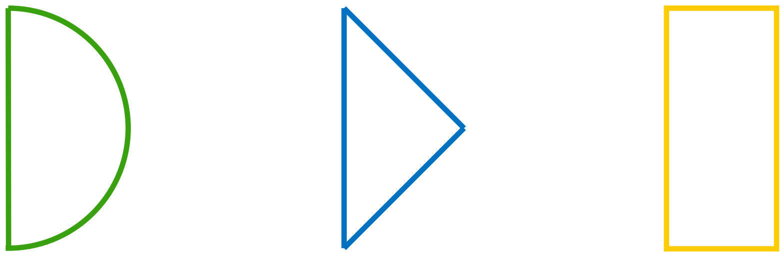
c) cesta tam …………… a ……………… 100 %

1 % ………………………. a/100

cesta zpět …………... 2a ……………... x %

x = 200

Cesta zpět by trvala o 100 % déle.



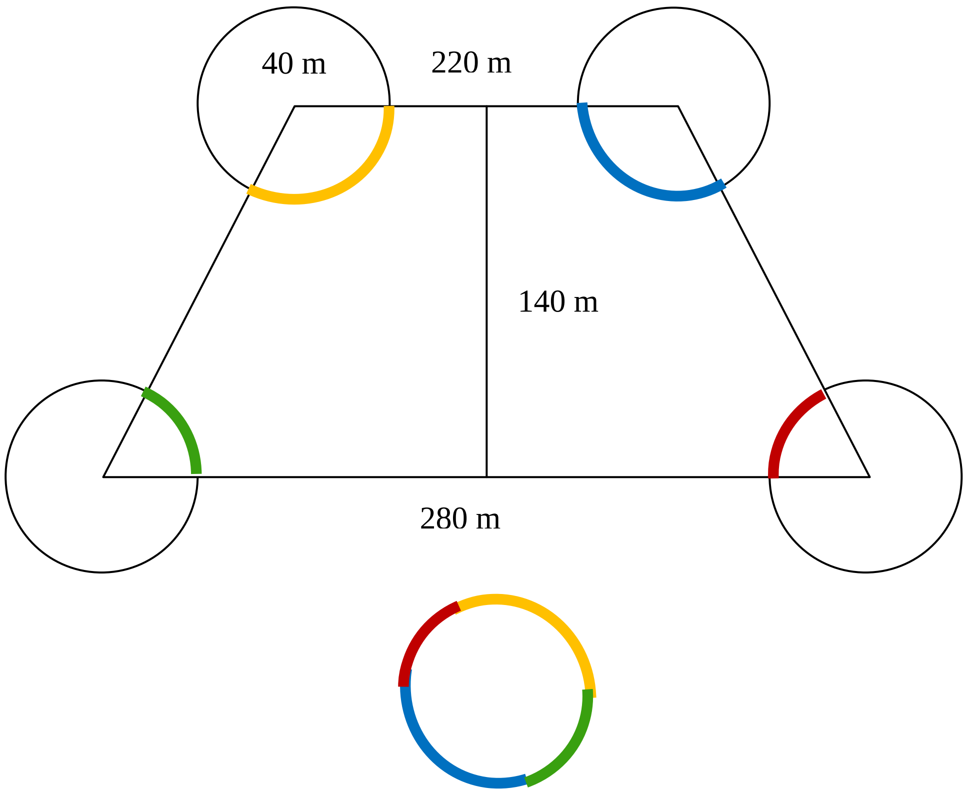
Možnosti: a) b) c)

Správně je možnost b).

Úloha: *Lichoběžníková louka má délky základen 280 m, 220 m a výšku 140 m. V každém rohu je ostřikovač, který dostříkne do vzdálenosti 40 m. Jakou část pozemku v % musí zemědělci dodatečně zavlažovat?* (Husar, 2002, str. 87)

Strategie řešení:

- V této úloze musíme vypočítat obsah lichoběžníku a odečíst od něj obsah čtyř kruhových výsečí. Tyto čtyři kruhové výseče vytvoří jeden kruh. Pak už jen počítáme počet procent.



Řešení:

$S_{lichoběžníku} = (a + c)/2 \,.\, v \text{ m}^2 = (280 + 220)/2 \,.\, 140 \text{ m}^2 = 35\,000 \text{ m}^2$

$S_{kruhu} = \pi r2 \text{ m}^2 = \pi \,.\, 40 \,.\, 40 \text{ m}^2 \cong 5\,026{,}55 \text{ m}^2$

$S = S_{lichoběžníku} - S_{kruhu} = 29\,973{,}45 \text{ m}^2$

100 % ……………. 35 000 m^2

1 % ………………….. 350 m^2

29 973,45 : 350 = 85,64

Zemědělci musí zavlažovat 85,64 % pozemku.

3.5 Slovní úlohy na procenta, které se tradičně řeší pomocí rovnic

Některé typy úloh se v učebnicích tradičně řeší pomocí rovnice nebo soustavy rovnic. Už jsme se s jedním typem setkali v podkapitole 3.4.7 věnované slovním úlohám a směsím. Další možné úlohy následují.

Úloha: *25 % žáků 8.A mělo v pololetí vyznamenání. Na konci roku k nim přibyli ještě 3 žáci, a tak třídní učitelka mohla prohlásit, že na konci roku prospěla s vyznamenáním třetina žáků třídy. Kolik žáků bylo v této třídě?* (Běloun, 1998, str. 118)

Strategie řešení:

- Úlohu vyřešíme pomocí rovnice, kde neznámá x bude počet všech dětí ve třídě.

Řešení:

0,25x + 3 = 1/3 . x

x = 36

Ve třídě bylo 36 žáků.

Úloha: *Pan Hrabal se přihlásil do konkurzu na místo ředitele banky. Součástí konkurzu je počítačový test z anglického jazyka. V něm je nutné správně odpovědět alespoň na 80 % otázek. Pan Hrabal zatím odpověděl na 15 otázek – na 10 správně a na 5 chybně. Jestliže správně odpoví na všechny zbývající otázky, bude jeho úspěšnost právě 80 %. Kolik otázek zbývá?*

a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 15

(Zhouf a kol., 2002, str. 30)

Strategie řešení:

- Tato úloha se dá řešit soustavou rovnic nebo jednou rovnicí. Navíc se jedná o uzavřenou úlohu, proto se zde nabízí ještě jeden postup pro řešitele, kteří by si nevěděli rady, a to zjistit, který z výsledků a) – e) je správný, dosazováním.

Řešení dvěma rovnicemi:

- Zvolíme dvě neznámé, x pro celkový počet otázek, y pro počet zbývajících otázek.

Celkový počet otázek: $x = 10 + 5 + y$

Správně otázek: $\underline{0{,}8x = 10 + y}$

$x = 25,\ y = 10$

Řešení jednou rovnicí:

Počet zbývajících otázek: y

$(10 + y) : (15 + y) = 0{,}8$

$y = 10$

Panu Hrabalovi zbývá odpovědět ještě na 10 otázek.

Úloha: *Z osmi čerpadel se tři pokazila, takže se výkon zbylých pěti musí zvýšit o 36 % maximálního výkonu. Na kolik procent maximálního výkonu pracovalo původně osm čerpadel?* (Žůrek, 1994, str. 215)

Strategie řešení:

- Tuto úlohu můžeme vyřešit pomocí rovnice o jedné neznámé.

Řešení:

Maximální výkon, na který pracovalo původně 8 čerpadel v procentech:	x
Celkový výkon 8 čerpadel v procentech:	$8x$
Výkon, na který pracovalo 5 čerpadel v procentech:	$(x + 36)$
Celkový výkon 5 čerpadel v procentech:	$5(x + 36)$

Výsledná rovnice: $8x = 5(x + 36)$

$x = 60$

8 čerpadel pracovalo původně na 60 %.

Úloha: *Výškový rozdíl mezi úpatím kopce a jeho vrcholem je 480 m, vzdálenost obou míst je 4 km a z úpatí na vrchol vede přímá cesta. Pod kopcem je umístěna dopravní značka „Nebezpečné stoupání“, na níž je uvedeno stoupání v procentech; přitom stoupání cesty je dáno poměrem výškového rozdílu a vzdálenosti. Jaká je na značce hodnota?* (Zhouf a kol., 2002, str. 7)

Strategie řešení:

- Zadání nám radí i postup řešení. Stoupání je poměr výškového rozdílu a vzdálenosti, musíme je jen převést na společné jednotky. Pak už stačí vynásobit stem.

Řešení:

480/(4 000) = 0,12

0,12 x 100 % = 12 %

Na značce je hodnota 12 %.

3.6 Jiné typy úloh

3.6.1 Procenta a diagramy

Jak už je zmíněno v kapitole 2.2, procenta velmi dobře slouží k porovnávání veličin a často se k němu také používají. V různých statistikách a tabulkách se pro větší ilustraci dají použít také diagramy. Diagramů (Walkenbach, 2008) je mnoho druhů, s procenty se nejčastěji používají sloupcové, popř. pruhové diagramy, které umožní porovnávat dosažené hodnoty různých veličin, které nemusí dávat dohromady 100 %. Kruhové (výsečové, prstencové, obdélníkové) diagramy jsou vhodné pro porovnávání hodnot, které jsou dohromady jeden celek, tedy 100 %.

3.6.1.1 *Sloupcové a pruhové diagramy*

Úloha: *Hanka s Jitkou připravily nástěnku s některými údaji o své třídě 6.C:*

Počet žáků 6.C: *30*

- *z nich pravidelně sportuje:*

	kopaná	*40 %*
	tenis	*30 %*
	volejbal	*20 %*
	atletika	*10 %*
	plavání	*20 %*

a) *Doplň údaje o žácích 6.C vhodnými diagramy*

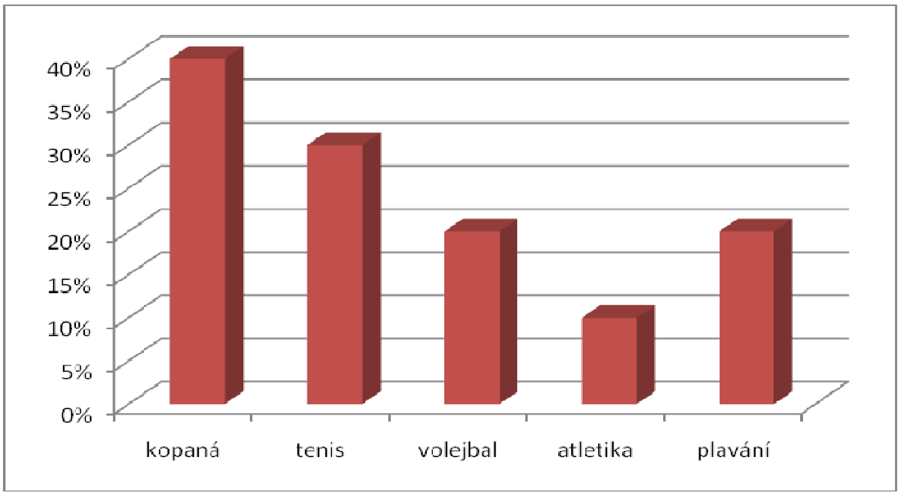
b) *Vypočítej, kolik žáků 6.C*

- *pravidelně sportuje*
- *sportuje nepravidelně nebo vůbec*

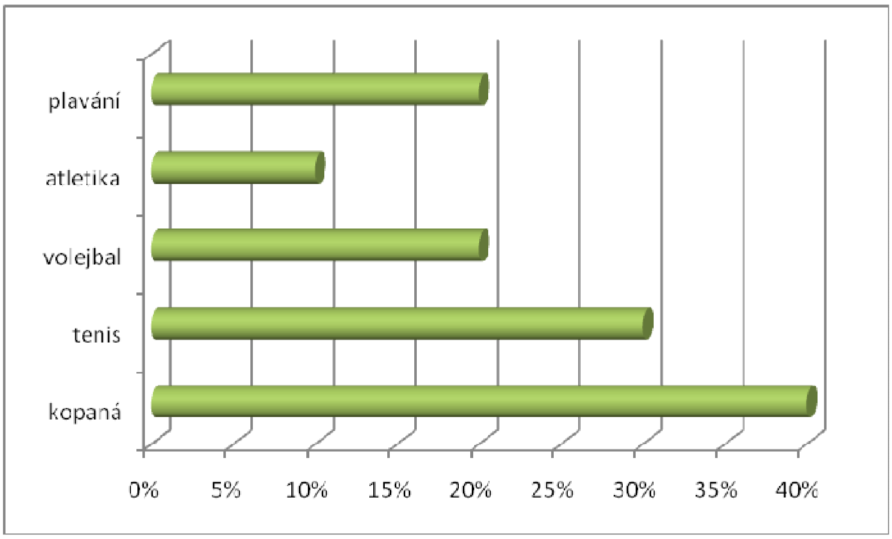
(část úlohy převzatá od Novotné, Kubínové, Sýkory, 1995, str. 11)

Řešení:

a)



(sloupcový diagram)



(pruhový diagram)

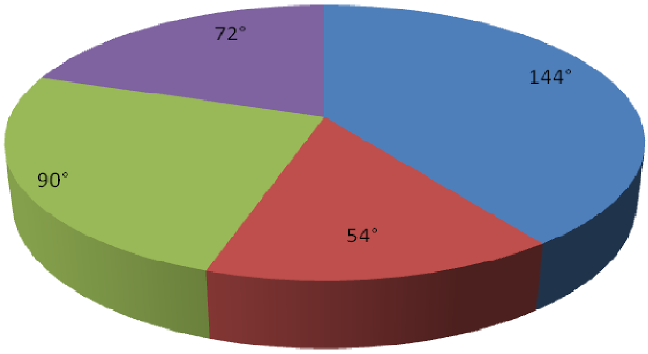
b) Počet dětí, které pravidelně sportují či nesportují vůbec

Počet procent	40 %	30 %	20 %	10 %	20 %
Počet žáků	12	9	6	3	6

V 6.C pravidelně sportuje minimálně 12 dětí (pokud by právě těch 12 dětí, které hrají pravidelně kopanou, dělalo zároveň ostatní uvedené sporty), maximálně všech 30 dětí (součet procent u všech sportů je 120 %, proto aspoň 6 dětí musí pravidelně dělat dva sporty). Nepravidelně nebo vůbec sportuje mezi 8 dětmi a žádným dítětem.

3.6.1.2 Kruhové diagramy

Úloha: *Maminka rozdělila koláč mezi čtyři děti způsobem znázorněným kruhovým diagramem. Zjistěte, kolik procent z koláče dostalo každé dítě.* (Žůrek, 1994, str. 79)



Strategie řešení:

- Při řešení úloh tohoto typu se vychází z 360° a počítají se poměrové části. (opět se může postupovat trojčlenkou nebo přes jedno procento)

Řešení:

100 % ………………………. 360°

1 % ………………………….. 3,6°

144° ………………………………… 40 % (144/3,6)

54° …………………………………… 15 % (54/3,6)

90° …………………………………… 25 % (90/3,6)

72° …………………………………… 20 % (72/3,6)

První dítě dostalo 40 % z koláče, druhé 15 %, třetí 25 % a čtvrté 20 %.

3.6.2 Úlohy, kde je uvedený údaj v procentech, ale s procenty se nemusí počítat

Úloha: *Pan Hájek kupuje na splátky velkou lednici, jejíž prodejní cena je 24 000 Kč. Při odběru zboží zaplatí 50 % z této ceny a pak po dobu 10 měsíců splácí měsíčně 1 438 Kč. Kolik korun pan Hájek za lednici zaplatí celkem?*

(Odvárko, Kadleček, 1999, str. 96)

Strategie řešení:

- V této úloze se procenta vůbec nemusí brát v úvahu, stačí si uvědomit, že 50 % je ½.

Řešení:

(24 000 : 2) + 10 . (1 438) = 26 380

Pan Hájek zaplatí za lednici celkem 26 380 Kč.

3.6.3 Úlohy, kde je k základu připočtena nějaká neměnná hodnota

Úloha: *Sud s vodou měl hmotnost 63 kg a po odlití 75 % vody byla hmotnost sudu 21 kg. Kolik vážil prázdný sud a kolik v něm bylo vody?* (Houska, Hávová, Eichler, 1991, str. 142)

Strategie řešení:

- Tato úloha se dá řešit soustavou rovnic, kde x označíme hmotnost sudu a y hmotnost vody. Můžeme počítat také základ jednou ze základních metod, pokud si uvědomíme, že známe hmotnost 75 % vody – je to rozdíl celkové hmotnosti a hmotnosti sudu se zbytkem vody.

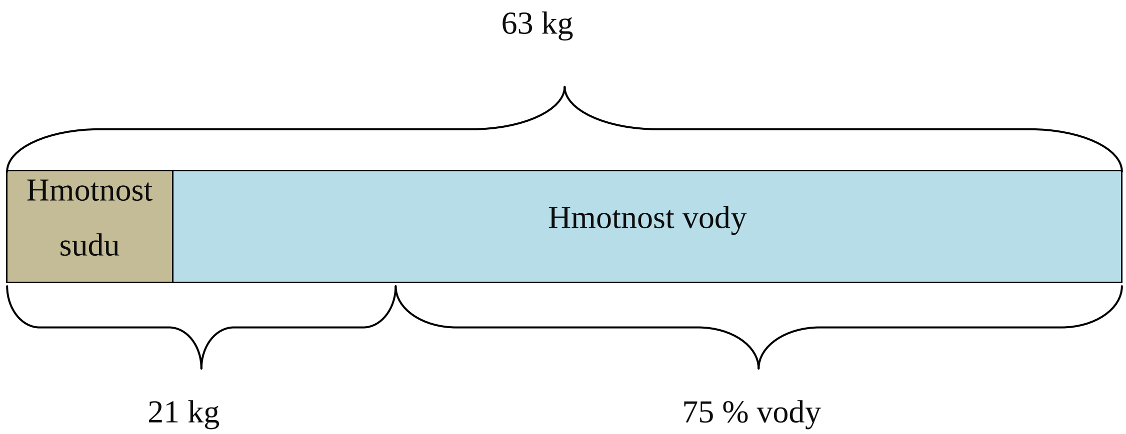
1. Řešení soustavou rovnic:

x + y = 63

<u>x + 0,25y = 21</u>

y = 56, x = 7

2. Řešení pomocí výpočtu základu:



75 % ………… 63 kg – 21 kg = 42 kg

1 % ………………………….. 0,56 kg

100 % …………………………. 56 kg

63 kg – 56 kg = 7 kg

Prázdný sud vážil 7 kg, vody v něm bylo 56 kg (tedy 56 litrů).

Úloha: *Velká mísa s cukrovím měla hmotnost 8,89 kg. Do talířků na štědrovečerní stůl se odsypalo 40 % cukroví a na Boží hod vánoční k snídani se odsypala polovina ze zbytku. Mísa se zbylým cukrovím vážila 3,29 kg. Kolik gramů má samotná mísa?* (Husar, 2002, str. 61)

Strategie řešení

- Na vyřešení této úlohy můžeme použít dvě strategie. Ta jednodušší (aspoň podle mého názoru) je sestavení a vyřešení soustavy dvou rovnic. Druhá strategie spočívá v tom, že vypočítáme, kolik cukroví bylo odsypáno. Nejprve 40 %, pak polovina ze zbytku, což je 30 %. Tyto počty procent můžeme sečíst. Víme tedy, že se odsypalo 70 % cukroví a 30 % v míse zůstalo. Odečteme hmotnost zbytku cukroví s mísou od hmotnosti mísy se vším cukrovím a dostaneme hmotnost 70 % cukroví. Pak už vypočítáme některou metodou základ – hmotnost všeho cukroví – a odečteme od hmotnosti mísy.

1. způsob řešení

Označíme x kg hmotnost mísy a y kg hmotnost cukroví.

8,89 = x + y

<u>x + 0,5 . 0,6y = 3,29</u>

8,89 – y + 0,3y = 3,29

y = 8

x = 0,89

2. způsob řešení

8,89 kg – 3,29 kg = 5,6 kg

70 % .... 5 600 g

1 % .... 80 g

100 % .... 8 000 g – vypočítali jsme hmotnost cukroví

8,89 kg – 8 kg = 0,89 kg

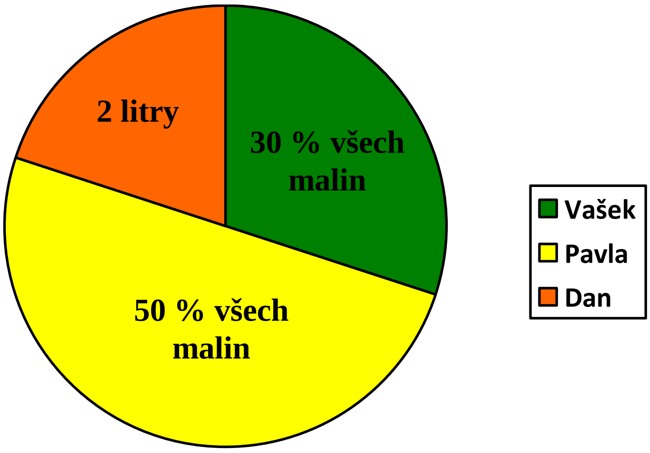
Hmotnost mísy je 890 g. (Výsledek jsme museli převést na gramy, neboť tak zněl požadavek v zadání).

3.6.4 Slovní úlohy s rozpočítáváním základu

Úloha: *Děti nasbíraly plný košík malin. Z toho Vašek nasbíral 30 %, Pavla 50 % a Dan 2 litry. Kolik nasbíraly děti dohromady a kolik každý zvlášť?* (Žůrek, 1994, str. 77)

Strategie řešení

- Řešitel má k dispozici 3 údaje. Strategie řešení je taková, že řešitel musí odečíst od 100 % malin, kolik procent malin nasbírali Vašek a Pavla, aby zjistil, kolik procent malin nasbíral Dan. Pak vypočítá pomocí jedné z metod základ – tedy kolik litrů malin děti nasbíraly celkem, a tento základ rozpočítá mezi děti. Tato úloha se dá dobře zakreslit do kruhového (prstencového, výsečového) diagramu.



Řešení:

100 % - (30 % + 50 %) = 20 %

20 % ………………………. 2 l

10 % ………………………. 1 l

100 % …………… 2 l . 5 = 10 l

50 % …………….. 10 l : 2 = 5 l

30 % …………….... 1 l . 3 = 3 l

Vašek nasbíral 3 litry malin, Pavla 5 litrů a dohromady i s Danem nasbíraly děti 10 litrů malin.

3.7 Malé základy finanční matematiky

Finanční matematika je odvětví rozsáhlé a pro výpočty se většinou používají dané vzorce. Já se jí budu věnovat do té míry, do jaké se jí věnují učebnice a sbírky úloh pro základní a střední školy. Některé úlohy neodpovídají skutečnostem, se kterými se setkáváme v realitě a v běžné praxi bank, mohou být zjednodušené, například se v nich opomíjí daň z úroku.

3.7.1 Jednoduché úročení

Jednoduché úročení/úrokování je úročení, kde se „úroky počítají z počátečního vloženého kapitálu“. (Odvárko, Kadleček, 2004, str. 136)

Úloha: *Podnikatel si vypůjčil v bance 425 000 Kčs při úrokové míře 18 % ročně. Dluh splatí za 10 měsíců.*[2]

a) *Jak velké zaplatí úroky?*
b) *Jak velkou částkou splatí podnikatel dluh?*

(Houska, Hávová, Eichler, 1991, str. 66)

Strategie řešení:

- Roční úroková míra se musí přepočítat na deset měsíců.

Řešení:

a) 425 000 . 0,18 . 10/12 = 63 750
b) 425 000 + 63750 = 488 750

Podnikatel zaplatí úroky ve výšce 63 750 Kčs a dluh splatí částkou 488 750 Kčs.

Úloha: *Občan si uložil 4. dubna ve spořitelně 12 000 Kčs při úrokové míře 13 % ročně. Jak velký bude úrok koncem roku?* (část úlohy převzatá z Housky, Hávové, Eichlera, 1991, str. 66)

Strategie řešení:

- V této úloze musíme přepočítat úrok na dny. Ve finanční matematice se pro jednoduchost počítá s tím, že měsíc má 30 dní a rok 360 dní. Den, kdy vkladatel vložil peníze, se do úrokování započítává, den, kdy peníze vybírá, se nezapočítává. Konkrétně zde budeme počítat s 27 dny z dubna a osmi měsíci (květen – prosinec).

---

[2] Ve skutečnosti může mít klient ve smlouvě, že dluh nesmí splatit dřív, nebo že za dřívější splácení zaplatí nějakou pokutu.

Řešení:

Počet dní: 8 . 30 + 27 = 267

Úrok v Kčs: 12 000. 0,13 . 267/360 = 1 157

Koncem roku bude úrok 1 157 Kčs.

3.7.2 Složené úročení

Složené úročení je úročení, při kterém se „úroky na konci každého úrokovacího období přičítají k počátečnímu kapitálu a spolu s ním se dále úročí.“ (Odvárko, Kadleček, 2004, str. 137)

Úloha: *Vložíme do banky 100 000 Kč na roční čtyřprocentní úrok. Kolik Kč budeme mít na účtu po třech letech?* (Koman, Tichá, Kuřina, Černek, 2003, str. 55) [3]

Strategie řešení:

- Tato úloha se dá řešit pomocí posloupnosti nebo „postupně“. Při řešení „postupně“ se zvyšuje základ. První rok se bere jako základ pouze počáteční kapitál. Druhý rok se bere jako základ počáteční kapitál zvýšený o úroky z roku předchozího. A tak to pokračuje. Řešíme jednou ze základních metod třikrát za sebou základní úlohu na výpočet procentové části. Řešení pomocí posloupnosti provádí všechny kroky najednou, dostáváme rovnou konečnou hodnotu.

Řešení postupně:

Celkem peněz v Kč na účtu po 1. roce: (100 000) . (1,04) = 104 000

Celkem peněz v Kč na účtu po 2. roce: (104 000) . (1,04) = 108 160

Celkem peněz v Kč na účtu po 3. roce: (108 160) . (1,04) = 112 486,40

[3] V této úloze autoři pro zjednodušení zcela opomíjejí daň z úroku.

Řešení pomocí posloupnosti:

$(100\,000) \,.\, (1{,}04)^3 = 112\,486{,}40$

Po třech letech budeme mít na účtu 112 486,40 Kč.

Úloha: *Pan Procházka uložil 1. ledna do banky částku 100 000 Kč na dobu deseti let na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 12 %. Pan Hrubý se rozhodl po dobu deseti let každý rok 1. ledna ukládat částku 20 000 Kč na účet s roční úrokovou mírou 6 %. V obou případech jde o složené úročení, úrokovací období je 1 rok a úroky jsou daněny 15 %. Který z obou pánů bude mít po připsání posledních úroků na účtu více peněz?* (Zhouf a kol., 2002, str. 58)

Strategie řešení:

- Tato úloha jsou dvě jednotlivé úlohy, jejichž výsledek se na konci porovná. Stav účtu pana Procházky se vypočítá pomocí posloupnosti (počítat zde „postupně“ by bylo zdlouhavé, protože délka uložení je 10 let).

Řešení:

Stav účtu pana Procházky v Kč po 10. roce:

$$(100\,000) \,.\, (1 + 0{,}12 \,.\, 0{,}85)^{10} = 264\,128{,}90$$

Stav účtu pana Hrubého v Kč po 1. roce:

$$(20\,000) \,.\, (1 + 0{,}06 \,.\, 0{,}85) = (20\,000) \,.\, 1{,}051$$

Stav účtu pana Hrubého v Kč po 2. roce:

$$(20\,000 \,.\, 1{,}051 + 20\,000) \,.\, (1{,}051) = (1{,}051 + 1{,}051^2) \,.\, (20\,000)$$

...

Stav účtu pana Hrubého v Kč po 10. roce:

$$(1{,}051 + 1{,}051^2 + \ldots + 1{,}051^{10}) \,.\, (20\,000) = 265\,624{,}6$$

Pan Procházka bude mít po deseti letech na účtu 264 129 Kč (po zaokrouhlení), pan Hrubý bude mít 265 625 Kč. Víc tedy bude mít pan Hrubý.

Úloha: *Pan Vrba uložil 17. 5. 1995 v bance částku 40 000 Kč při 12% roční úrokové míře, kterou chce vybrat 19. 11. 1998, kdy bude peníze potřebovat na stavební investice. Jaká částka bude panu Vrbovi vyplacena 19. 11. 1998 při uplatnění 15% daně z úroků?* (Běloun, 1998, str. 227)

Strategie řešení:

- Úrokovací doba se musí rozdělit na tři části. První část bude od 17. 5. 1995, do konce roku 1995, druhá část budou roky 1996 a 1997, třetí část bude od začátku doku 1998 do 19. 11. 1998. V každé části se vypočítá počet dnů a nárůst úroků za daný počet dnů (snížený o 15% daň).

Řešení:

1. Část 17. 5. 1995 – 31. 12. 1995:

Doba ve dnech: 14 (za květen) + 7 . 30 (červen – prosinec) = 224

Stav účtu v Kč: (40 000) . (1 + 0,12 . 0,85 . (224/360)) = 42 538,67

2. Část 1. 1. 1996 – 31. 12. 1997:

Doba ve letech: 2 roky

Stav účtu v Kč: (42 538,67) . $(1 + 0{,}12 . 0{,}85)^2$ = 51 659,13

3. Část 1. 1. 1998 – 19. 11. 1998:

Doba ve dnech: 10 . 30 (leden – říjen) + 18 (listopad) = 318

Stav účtu v Kč: (51 659,13) . (1 + 0,12 . 0,85 . (318/360)) = 56 313,62

Panu Vrbovi bude vyplacena částka 56 314 Kč.

4 Tematický obsah slovních úloh na procenta

Tematický obsah, stejně jako náročnost slovních úloh i styl, záleží na době a společnosti, ve které slovní úlohy vznikly nebo ve které se používají. Obsah slovních úloh často odráží životní styl a zájmy společnosti. Např. v úloze ze starověkého Egypta bychom mohli narazit na otroky a stavění kanálu, v indických úlohách se můžeme setkat s rozpočítáváním rýže. Rozdíly jsou patrné i při porovnávání novějších a starších českých učebnic a sbírek. V úlohách se odráží technický pokrok, zvyšování cen, braní úvěrů, na druhou stranu dnešní žáci a studenti nepočítají např., jak se plní plán a pracovní výkonnost.

V kontrastu k některým změnám jsou slovní úlohy, které jsou stále stejné. V učebnicích a sbírkách se dokonce některé úlohy opakují, jakoby ani neměly autora. Bývají to úlohy, které se týkají klíčivosti, ztrácení hmotnosti sušením, zlevňování a zdražování různých kusů oblečení, elektroniky a věcí denní potřeby, úlohy o směsích, úlohy týkající se porovnávání úspěšnosti různých lidí a činností a podobně.

Autoři učebnic se často snaží úlohy řešitelům přiblížit tím, že zařazují úlohy zajímavé a motivující. Některé učebnice jsou navíc dělané tematicky – celou učebnicí či částí provází jedna postava nebo skupina postav, které komentují teorii, a ve slovních úlohách se mohou rozvíjet jejich příběhy (např. Matematika s Betkou – Novotná, Kubínová, Sýkora, Hanková, Sinková, 1997). Tematická učebnice či sbírka může také odrážet roční období a činnosti typické pro každé z nich (např. Matematikou krok za krokem k přijímacím zkouškám pro žáky 9. tříd - Husar, 2002).

Velmi zajímavými slovními úlohami jsou úlohy integrované, ve kterých se matematika spojuje s jinými oblastmi vědy. V učebnicích a sbírkách můžeme najít nejčastěji úlohy z biologie a zeměpisu. Řešitelé tak např. vypočítají, kolik vody mají v těle nebo o kolik procent se liší poloměr Měsíce od poloměru Země.

Specifické úlohy, které najdeme ve sbírkách a učebnicích, jsou úlohy z finanční matematiky. Často se přibližují realitě více než ostatní typy úloh, neboť jsou inspirované skutečnými finančními službami, i když mohou být velmi zjednodušené. Úlohy by se měli řídit i zákony České republiky (např. daň z úroku), a také různými pravidly a zvyklostmi bank (záleží na bance, smlouvě, typu služby). Některá pravidla můžeme pro zjednodušení v úlohách „uměle“ neuvažovat.

Závěr

Cílem této práce bylo uceleně roztřídit, rozdělit a zpřehlednit slovní úlohy s procenty tak, aby toto rozdělení mohlo sloužit řešitelům i pedagogům. Takové rozdělení jsem v žádné literatuře nenašla. Kromě rozdělení na úlohy, kde se počítá základ, procentová část a počet procent, jsou v učebnicích i sbírkách uváděny spíše jednotlivé úlohy bez rámce. Roztřídění a rozdělení úloh se ukázalo být poměrně náročné, neboť jich existuje překvapivé množství. Na několika místech jsem byla pro zjednodušení nucena zavést vlastní terminologii (uvádím ji v uvozovkách).

Případné navázání na mou práci v této oblasti by bylo možné. Z didaktického hlediska by bylo zajímavé zjišťovat, který způsob řešení je žákům nejbližší, které úlohy jsou pro ně obtížnější a proč. Daly by se např. vytvořit projekty pro různé věkové skupiny žáků, které by se mohly opírat o matematiku v praxi, kdy žáci sami hledají užití procent a tvoří slovní úlohy pro své spolužáky. Procenta se také dají velmi dobře kombinovat s integrovanou výukou, např. se zeměpisem a biologií.

Zde uvedené rozdělení navíc není jedinou možností. Různí autoři by mohli nahlížet na slovní úlohy z různých hledisek.

Seznam použité literatury

ALFELD, P. *G. Polya: How to solve it. Summary taken from G. Polya, "How to Solve It", 2nd ed., Princeton University Press, 1957, ISBN 0-691-08097-6.* The Unitersity of Utah – The Department of Mathematics [online] [cit. 2009-10-16]. 1996. Dostupný z WWW: <http://www.math.utah.edu/~pa/math/polya.html>.

BENDA, P., DAŇKOVÁ, B., SKÁLA, J. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 4. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1968.

BENDA, P., DAŇKOVÁ, B., SKÁLA, J., SKOPAL, O., ŠEDIVÝ, J., VOCELKA, J. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 10. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1988.

BĚLOUN, F. a kolektiv. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. vydání. Praha: Prometheus. 1998.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M. *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* 10. vydání. Brno: Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta. 2007.

HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Racionální čísla. Procenta*. Praha: Prometheus. 2004.

HOAD, T. F. "per cent." *The Concise Oxford Dictionary of English Etymology* [online] [cit. 2009-10-16]. Encyclopedia.com. 1996. Dostupný z WWW: <http://www.encyclopedia.com/doc/1O27-percent.html>.

HOUSER, P. Počítání mezi Eufratem a Tigridem (1). *Science World* [online] [cit. 2009-10-16]. Science World. 1996. Dostupný z WWW: <http://scienceworld.cz/historie/pocitani-mezi-eufratem-a-tigridem-1-1535>.

HOUSKA, J., HÁVOVÁ, J., EICHLER, B. *Matematika pro 9. ročník základní školy a nižší třídy gymnázia.* 1. vydání. Praha: Fortuna. 1991.

HUSAR, P. *Matematikou krok za krokem k přijímacím zkouškám pro žáky 9. tříd*. 1. vydání. Praha: Prometheus. 2002.

KOMAN, M., TICHÁ, M., KUŘINA, F., ČERNEK, P. *Matematika pro 7. Ročník základní školy 3. díl.* 1. vydání. Praha: Matematický ústav AV ČR. 2003.

KOTYRA, D., SIVOŠOVÁ, A. *Slovní úlohy. Příručka pro žáky základních a skol a nižších tříd gymnázií* (Překlad ze slovenštiny, V. Janota). 1. vydání. Praha: Fragment. 2004.

KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice.* 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990.

Let's Play Math. *Historial Tidbits: Alexandria Jones* [online] [cit. 2009-10-1]. 1. 3. 2007. Dostupný z WWW: <http://letsplaymath.wordpress.com/2007/06/01/historical-tidbits-alexandria-jones/>.

MARKEL, M. Word Problems – a Bit of History. *The Cat and the Fiddle* [online] [cit. 2009-10-16]. The Cat and the Fiddle, 2009. Dostupný z WWW: <http://michellemarkel.blogspot.com/2009/09/word-problems-bit-of-history.html>.

MELVILLE, J. D. *Brief History of Mesopotamia* [online] [cit. 2009-01-10]. 2001. Dostupný z WWW: <http://it.stlawu.edu/~dmelvill/index.html>.

MILLER, M. *Math word problems — the do's and dont's of teaching problem solving in math* [online] [cit. 2010-1-12]. 2008. Dostupný z WWW: <http://www.homeschoolmath.net/teaching/problem_solving.php>.

NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. Management Press. 2000.

NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 6 pro 6. ročník obecné a základní školy.* Praha: Scientia. 1995. 126 str.

NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V., HANKOVÁ, J., SINKOVÁ, M. *Matematika s Betkou 2 pro 7. ročník základní školy.* Praha: Scientia. 1997.

ODVÁRKO, O., CALDA, O., ŠEDIVÝ, J., ŽIDEK, S. *Metody řešení matematických úloh.* 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1990.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 3. díl. Jehlan, kužel, koule. Finanční matematika.* 1. vydání. Praha: Prometheus. 2002.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Pracovní sešit z matematiky. Soubor úloh pro 7. ročník základní školy.* 2. vydání. Praha: Prometheus. 1999.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vydání. Praha: Prometheus. 2004.

POL, M. *Škola v proměnách.* 1. vydání. Brno: Masarykova Univerzita. 2007.

RAKOUŠOVÁ, A. Rodina a škola. *Integrované slovní úlohy pomohou mladšímu školákovi* [online] [cit. 2010-20-02]. 2009. Dostupný z WWW: <http://www.portal.cz/scripts/detail.php?id=28704>.

SLOUKA, R. *Algebra pro žáky 5. – 9. tříd ZŠ, studenty víceletých gymnázií a třídy s rozšířenou výukou matematiky.* 1. vydání. Olomouc: FIN. 1994.

SMITH, W. *Dictionary of Greek and Roman Antiquities* [online] [cit. 2009-10-14]. Boston: C. Little, and J. Brown, 1870. Dostupný z WWW: <http://www.ancientlibrary.com/smith-dgra/0274.html>.

ŠAROUNOVÁ, A. RŮŽIČKOVÁ, J., VÄTEROVÁ, V. *Matematika 7, 2. díl.* 1. vydání. Praha: Prometheus. 1998.

WALKENBACH, J. *222 tiků a triků pro Microsoft Office Excel 2007, Grafy a další grafické objekty* (z angličtiny přeložil Ivo Magera) [online] [cit. 2010-04-01]. CPRESS, 2008. Dostupný z WWW: <http://knihy.cpress.cz/DataFiles/Book/00003857/Download/kapitola_K1550.pdf>.

Věstník MŠMT č. 6/2009. *Soubor pedagogicko-organizačních informací pro mateřské školy, základní školy, střední školy, konzervatoře, vyšší odborné školy, základní umělecké školy, jazykové školy s právem státní jazykové zkoušky a školská zařízení na školní rok 2009/2010* (Č.j.: 1 447/2009-20) [online] [cit. 16. 2. 2010]. 2009. Dostupné z WWW: <http://www.msmt.cz>.

VYŠÍN, J. *Metodika řešení matematických úloh.* 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1962.

WEAVER, D. *The History of Mathematical Symbols* [online] [cit. 2009-10-14]. University of South Australia, 1997. Dostupný z WWW: <http://www.unisanet.unisa.edu.au/07305/split.htm>.

WILLIAMS, S., W. The Mathematics of Ancient Egypt. *Mathematicians of African Diaspora* [online] [cit. 2009-10-17]. The Mathematics Department of The

State University of New York at Buffalo, 2008. Dostupný z WWW: <http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt.html>.

ZHOUF, J. a kolektiv. *Sbírka testových úloh k maturitě z matematiky*. 1. vydání. Praha: Prometheus. 2002.

ŽŮREK, M. *Sbírka příkladů z matematiky pro 5. – 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia*. 1. vydání. Olomouc: FIN. 1994.