Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra informačních technologií a technické výchovy

Využití nástroje Cabri pro podporu výuky matematiky

Autor: Michaela Kloučková

Vedoucí práce: PhDr. Josef Procházka, Ph.D.

Praha 2009

NÁZEV:

Využití nástroje Cabri pro podporu výuky matematiky

ABSTRAKT:

Bakalářská práce se zabývá problematikou využití nástroje Cabri pro podporu výuky matematiky, zejména geometrie. Konkrétně je zaměřena na oblast kuželoseček. Práce je určena pro žáky a studenty všech stupňů a druhů škol, pro jejich učitele, případně další zájemce o studovanou problematiku. Hlavní důraz je přitom kladen na dynamické zpracování ukázek konstrukcí s využitím nástroje Cabri Geometry, které jsou následně s využitím modulu CabriJava převedeny na aplety a umístěny na webové stránky. Práce zároveň představuje programy Cabri a CabriJava potřebné k umístění dynamických konstrukcí na www stránkách a zabývá se metodikou využívanou při práci s nástroji interaktivní geometrie. K tématu kuželoseček je zpracována teorie nezbytná pro práci s dynamickými konstrukcemi.

TITLE:

Cabri in Mathematical Education

ABSTRACT:

The bachelor thesis is aimed at usage of Cabri Geometry (the dynamic geometry software) in mathematical education, especially in plane geometry. It is concretely concerned with the conic sections (conics). It is especially intended for high-school students, students of colleges and universities, for their teachers; however it could be interesting for general public. Major accent is put on the dynamic constructions using Cabri Geometry and CabriJava software for conversion into dynamic web sites. Work presents functions of the Cabri Geometry and CabriJava, their advantages and disadvantages. The thesis includes essential theory of the conics sections and explains ways and methods how to use dynamic geometry tools.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod odborným vedením PhDr. Josefa Procházky, Ph.D. a s použitím informačních zdrojů uvedených v seznamu literatury.

V Praze dne 22. dubna 2009

....

podpis

Obsah

1. ÚVOD 6

2. CABRI GEOMETRIE 8

2.1. MOŽNOSTI PRÁCE S CABRI VE VÝUCE 9

2.2. ASPEKTY VYUŽITÍ NÁSTROJE CABRI 11

3. CABRIJAVA 14

3.1. JAK PUBLIKOVAT CABRI KONSTRUKCE NA WEBU? 14

3.2. OVLÁDÁNÍ CABRIJAVA 16

3.3. PARAMETRY CABRIJAVA 17

4. METODIKA 19

4.1. PROGRAMY INTERAKTIVNÍ, DYNAMICKÉ GEOMETRIE 19

4.2. KONSTRUKTIVISMUS 22

4.3. PROBLÉMOVÉ VYUČOVÁNÍ 23

4.4. KLASICKÁ VÝUKA 24

4.5. MOŽNOSTI ZAPOJENÍ DYNAMICKÉ GEOMETRIE DO VYUČOVÁNÍ 24

4.6. WWW STRÁNKY WWW.KUZELOSECKY.CZ 25

5. KUŽELOSEČKY 27

5.1. KUŽELOSEČKY – HISTORIE 28

5.2. MNOŽINA BODŮ SPOLEČNÝCH KUŽELOVÉ PLOŠE A ROVINĚ 30

5.3. KONSTRUKCE KUŽELOSEČEK PODLE DEFINICE 34

5.4. ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ KUŽELOSEČEK 47

5.5. JEDNOOHNISKOVÁ DEFINICE KUŽELOSEČEK 52

5.6. KUŽELOSEČKY JAKO MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ 56

5.7. KUŽELOSEČKA A PŘÍMKA 58

5.8. TEČNY KUŽELOSEČEK 60

6. ZÁVĚR 65

LITERATURA 67

PŘÍLOHA 69

1. Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si vybrala *Využití nástroje Cabri pro podporu výuky matematiky*. Spojuje oblast informačních technologií s matematikou, tedy oba obory, které studuji, a nabízí možnost ukázat, jakým způsobem lze informační technologie v matematice využít. Zejména technické obory se již v praxi bez použití informačních technologií neobejdou a na tento trend by měli být připraveni i absolventi českých škol. Nedílnou součást bakalářské práce tvoří praktická ukázka zapojení nástroje Cabri Geometry[1] do výuky matematiky. V Cabri jsou vytvořeny jednotlivé konstrukce, které jsou následně pomocí modulu CabriJava implementovány do výukových webových stránek www.kuzelosecky.cz.

Hlavní cíl práce spočívá právě ve zpracování výukově zaměřených stránek s využitím dynamické geometrie. S ohledem na zadání byl zvolen i metodický postup jejich implementace. Úvodní dvě kapitoly nejprve představují software, který, je k umístění konstrukcí na webové stránky využit. Je poukázáno i na výhody a nevýhody použitého softwaru. Další kapitola se věnuje metodice, která souvisí se zapojením interaktivní, či dynamické geometrie do výuky matematiky a aspekty s tím spojenými. Dále se zabývá i obecněji podporou výuky ze strany informačních technologií v matematice i v jiných předmětech. Záměrem této kapitoly je poukázat na možnost využití informačních technologií pro inovaci a podporu stávajících postupů ve výuce. Poslední kapitola se soustředí na oblast kuželoseček, kde je nejprve k jednotlivým kapitolám vysvětlena nezbytná teorie a poté je na příkladech konstrukcí z Cabri ukázáno, jak lze v praxi implementovat nástroje dynamické geometrie do výuky matematiky.

Materiály, které v současné době slouží k podpoře výuky matematiky prostřednictvím Cabri, jsou realizovány ve čtyřech základních směrech:

- konstrukce vytvořené pomocí Cabri mohou být převedeny na obrázky,
- konstrukce lze umístit na webové stránky ke stažení,

[1] V další části práce je místo celého názvu Cabri Geometry používáno jen Cabri, případně s uvedením verze, bude-li to nezbytně nutné.

- je zde také možnost jejich prezentace na webových stránkách jako aplety za využití modulu CabriJava,
- s posledními verzemi Cabri se objevila i možnost prezentovat konstrukce na webových stránkách také s podporou pluginů.[1]

Uvedené způsoby lze libovolně kombinovat. Každý z nich má své výhody i nevýhody. Pokud jsou konstrukce převedeny na obrázky, ztrácí se tím veškerá interaktivita. Umístění obrázků na web je ale poměrně snadné. Pokud je na webové stránky umístěn soubor vytvořený v Cabri, který lze stáhnout, vyžaduje to od uživatele mít na svém počítači Cabri nainstalované, aby bylo možné si jej prohlédnout a dále využívat. Prezentace konstrukcí za pomoci CabriJava případně jako pluginy, umožňuje s nimi přímo na webových stránkách manipulovat a využívat část funkcí, které Cabri nabízí, bez nutnosti jeho instalace. Pluginy se však korektně zobrazují zatím jen na některých prohlížečích. CabriJava zase vyžaduje podporu Javy[2].

Z velkého množství témat, která lze z matematiky s využitím Cabri vybrat, jsem se zaměřila na oblast kuželoseček. Díky Cabri je možné kuželosečky studovat z pohledu geometrických vztahů, které pro ně platí, tedy zejména synteticky. V současně dostupných literárních pramenech je na kuželosečky nahlíženo častěji ve vztahu k analytické geometrii.[3] Důležité jsou při tom hlavně algebraické vztahy spojené s interpretací analytického pohledu.[4] V případě mnoha jiných geometrických konstrukcí Cabri především usnadní a urychlí práci. Dynamická geometrie otvírá ale pro kuželosečky spoustu dalších možností. Velkým přínosem je i skutečnost, že v případě kuželoseček umožňuje sestrojit velmi přesně i takové objekty, které by se jinak zkonstruovat téměř nepodařilo, případně by to bylo velmi obtížné.

---

1 Software, který pracuje jako doplňkový modul jiné aplikace. V tomto případě umožňuje zobrazit konstrukce z Cabri na webových stránkách.

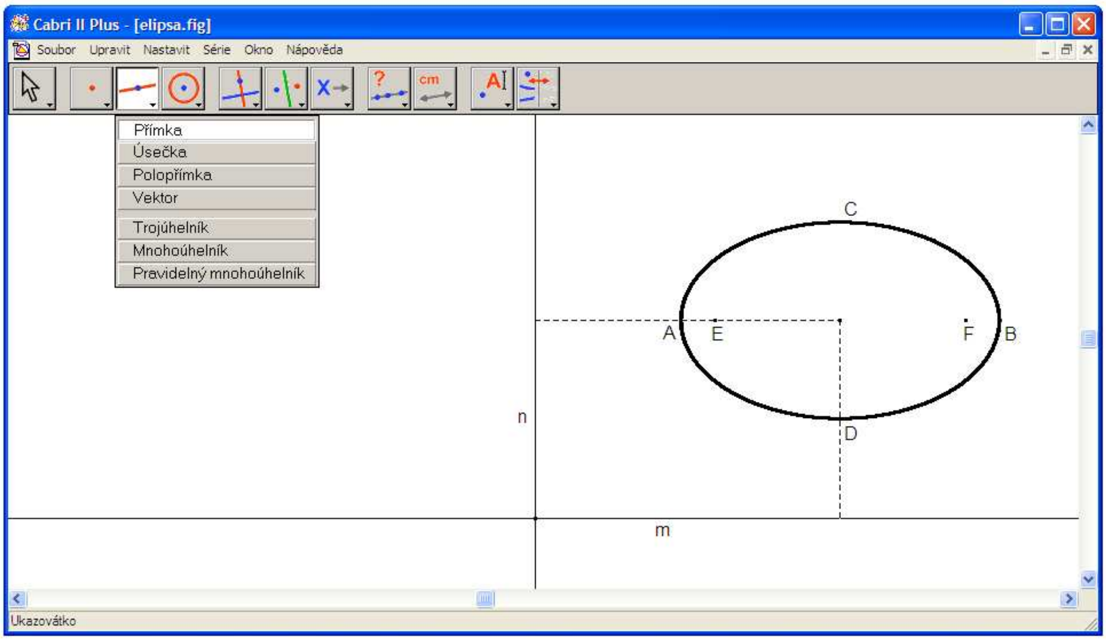
[2] Java je objektově orientovaný jazyk nezávislý na platformě.

[3] Například Kočandrle, 1995, Kuřina, 1996, Hlaváček, 1965, aj.

[4]Jedná se především o výpočty a řešení Úkolem bývá například vyjádřit tečnu ke kuželosečce procházející daným bodem pomocí rovnice, zjistit s využitím soustavy rovnic společné body kuželosečky a přímky nebo například početně zkoumat, co tvoří množinu bodů daných vlastností.

2. Cabri Geometrie

Cabri Géomètre[1] je komerční výukový program. Je vyvíjen od roku 1985, kdy ho vytvořil Jean-Marie Laborde na univerzitě Josepha Fouriera (Université Joseph Fourier) v Grenoblu ve Francii. Jedná se o interaktivní program dynamické geometrie, který vznikl s cílem usnadnit výuku geometrie, díky tomu, že umožňuje nejen vytvářet dynamické geometrické konstrukce, ale i dál s nimi pracovat. Software vytváří tým odborníků z oblasti matematiky, informačních technologií, vzdělávaní i učitelů z praxe. V současné době je program vyvíjen a distribuován společností Cabrilog. Díky snadnému intuitivnímu ovládání a velkému rozsahu funkcí může být využíván na všech typech a stupních škol. (Bainville, E. 2007, s. 2)



obr. 1 Pracovní plocha Cabri II Plus

V současné době existuje verze pro rovinnou geometrii (Cabri II Plus) i pro prostorovou geometrii (Cabri 3D). Cabri Géomètre II Plus je nyní poslední verzí nástroje Cabri pro rovinnou geometrii.[2] Je jedním z nejrozšířenějších a nejpoužívanějších programů dynamické geometrie pro podporu výuku matematiky

---

[1] Cabri Géomètre je původní francouzský název programu

[2] Srovnání verze Cabri II a Cabri II Plus se věnuje například Antonín Vrba, dostupné na WWW http://www.pf.jcu.cz/cabri/helpy/cplus/index.html

u nás. Velkou výhodou je snadné intuitivní ovládání bez nutnosti dlouhých přípravných kurzů. Je poměrně snadné se s programem naučit pracovat. Pro učitele existují přípravné kurzy[1], po jejichž absolvování mohou s Cabri seznámit i své žáky. Případně i na internetu lze najít spoustu informací o ovládání a základním i pokročilejším používání programu. Z toho důvodu je nástroj široce využitelný pro většinu uživatelů. Pro uživatele je velkou výhodou, že je program široce rozšířen již delší dobu. Z mnoha zdrojů na internetu lze stáhnout nepřeberné množství konstrukcí, případně si prohlédnout mnoho apletů[2] využitelných ve všech oblastech matematiky ale i jiných věd. Soubory vytvořené v Cabri II i v Cabri II Plus obsahují koncovku fig a jsou označeny touto ikonou .

Při práci s nástrojem Cabri se uživatel příliš nemusí zabývat technickou stránkou rýsování. Pro první seznámení s geometrií ještě žáci nemusí znát formální zápisy konstrukcí a mohou díky nabídce programu sestrojit rozličné geometrické útvary. Vedle běžného rýsování s využitím standardních rýsovacích pomůcek, jako je papír, tužka, pravítko, či kružítko, lze Cabri využít k trénování postupů některých geometrických konstrukcí či k odlišnému pohledu na průběh konstrukce. Pomocí některých nástrojů lze navíc konstrukci rozhýbat a sledovat, co se s objekty na ní děje. Poté, co již starší žáci zvládnou narýsovat základní geometrické útvary (bod, přímka, kružnice, trojúhelník, čtyřúhelník, aj.) a umí je zobrazovat v osové či středové souměrnosti,[3] je možné v Cabri použít nabídku předem připravených konstrukcí přímo z menu programu a není nutné ve složitějších úlohách všechny tyto dílčí konstrukce rýsovat celé. Mají poté více času na řešení hlavního problému zadané úlohy. Nemusí tedy opakovaně provádět základní konstrukce, ale jen využívají jejich výsledek při řešení složitějších úloh.

2.1. Možnosti práce s Cabri ve výuce

Existuje několik variant, jak Cabri do výuky zapojit. Za základní způsob je možné považovat prezentaci předem připravených konstrukcí v hodině. Za pomoci počítače se zpětným projektorem demonstruje žákům probíranou látku dynamicky, s různými

[1] Kurzy Cabri pro učitele jsou nabízený různými institucemi v rámci dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků.
[2] Aplet je program vytvořený v jazyce Java.
[3] Tyto postupy by měli ovládat za pomoci Cabri i s využitím běžných rýsovacích pomůcek.

obměnami konstrukce, ti mají díky tomu možnost pozorovat narýsované konstrukce v pohybu a lépe si tak celou situaci představit a pochopit. Počítač a audiovizuální technika při tom slouží pouze jako demonstrační prostředek. Pokud s počítačem již pracují sami žáci, lze ho považovat za jejich pracovní nástroj. S jeho pomocí žáci řeší úlohy samostatně pod dohledem učitele. Ideální stav by byl, kdyby každý z žáků měl k dispozici počítač s nainstalovaným programem. Podle potřeby by samozřejmě bylo možné pracovat ve dvojicích nebo ve větších skupinách, to už by záleželo na zvážení učitele, jak se s ohledem na danou situaci rozhodne. Poslední dobou se také ve stále větším množství škol využívají interaktivní tabule. Poskytují žákům mnohem více možností práce než běžná tabule, nebo zpětný projektor, mohou na nich sami s objekty pohybovat, měnit jejich pozici a tím hledat nové dimenze a řešení úlohy.

Ovládání Cabri je poměrně snadné a žáci se s programem mohou naučit pracovat i samostatně, případně jim může učitel v úvodní hodině základní postupy vysvětlit. Dokonce varianta, kdy žáci sami funkce nástroje postupně sami objevují, může být v mnohém přínosná.

Konstrukce v Cabri

základní konstrukce

Menu lze upravit tak, že některé nástroje nemusí být aktivní. Je tedy možné procvičovat zde i základní konstrukce, které by jinak tento nástroj zvládl. Příkladem může být osa úhlu, osa úsečky, otáčení, posouvání objektů či konstrukce obrazů souměrných podle osy, středu a dalších.

obtížnější konstrukce

Později při výuce geometrie, když už žáci základní konstrukce zvládají, mohou je při řešení úlohy uplatnit a nemusí je sami rýsovat. Připravené základní konstrukce mohou využít přímo z menu Cabri k rýsování složitějších úloh. Díky tomu potom pracují rychleji a efektivněji.

makrokonstrukce

Cabri ovšem neobsahuje všechny konstrukce, které jsou aktuálně potřebné pro vyřešení úlohy, či které v některé problematice často opakujeme. Nabízí ale možnost si je vytvořit a přiřadit jim i vlastní ikonu. Tato nabídka se nazývá makrokonstrukce. Pokud je tedy v průběhu konstrukce některý složitější nebo delší postup používán opakovaně, existuje zde možnost si ho uložit jako takzvanou makrokonstrukci. Nejprve je třeba nadefinovat základní, tzv. vstupní objekty, ze kterých se při makrokonstrukci vychází. Poté zbývá jen určit konečné, tzv. výstupní objekty, které jsou výsledkem konstrukce, a navrhnout k tomu vlastní ikonu. Později, kdykoli je potřeba uloženou makronstrukci opakovat, stačí jen kliknout na příslušnou ikonu a celý její postup provede Cabri.

2.2. Aspekty využití nástroje Cabri

Nástroje Cabri umožňují ve většině případů úlohu vyřešit rychleji než s pomocí běžných rýsovacích pomůcek. Obrázky vytvořené v Cabri lze velmi snadno vytisknout, vložit do textového editoru nebo prezentovat na internetu. Zároveň lze také z internetu získat spoustu již vytvořených konstrukcí, s kterými lze dále pracovat a studovat je.

Děti v dnešní době pracují s počítačem celkem samozřejmě, prostředí je to pro ně natolik známé, že si spoustu poznatků dokážou jeho prostřednictvím osvojit mnohem lépe než jinými způsoby běžně používanými ve škole. Škola by se proto měla přizpůsobit způsobům, jakými žáci nejlépe přijímají informace.

S pomocí Cabri lze částečně předcházet situacím, kdy žáci, kteří jsou méně zruční, méně pečliví nebo trpí některou z poruch učení, nedosáhnou správného výsledku. Příčinou špatného výsledku přitom často nebývá chybný postup, ale nepřesnosti v konstrukci. Pokud se jim podobný případ stane, tedy že i přes správný postup nedospějí ke správnému výsledku, může to v nich oslabovat zájem o matematiku, zejména potom o geometrii. Geometrie se obecně netěší příliš velkému zájmu žáků, bohužel ale ani u učitelů. Zde také může pomoci využití nástroje Cabri, zejména pokud je ve škole k dispozici interaktivní tabule. S využitím Cabri, nebo jiného nástroje dynamické geometrie se mohou žáci více soustředit na postup řešení úlohy a ne tolik na přesnost konstrukcí. Nejsou potom kladeny ani tak velké nároky na potřebné pomůcky. Cabri umožňuje s látkou pracovat v širších souvislostech a díky své dynamičnosti i proniknout hlouběji do řešeného problému.

Velkým přínosem Cabri je možnost vysvětlit různá na první pohled negeometrická témata prostřednictvím jejich geometrické interpretace. Velmi názorná může být například geometrizace algebraických operací, jako je například druhá mocnina. Cabri má hlavní oblast využití v matematice, umožňuje nacházet souvislosti mezi poznatky z různých částí geometrie i matematiky obecně, ale lze jej využít také pro vysvětlení a demonstraci různých problémů a modelaci úloh z oblasti fyziky, chemie, mechaniky a dalších oblastí.

Pokud škola program používá, je nainstalovaný na školních počítačích a žáci žádné další pomůcky pro práci s ním nepotřebují. S jistou nadsázkou by bylo tedy také možné za výhodu Cabri považovat skutečnost, že se s jeho zapojením do výuky nemůže stát, že by žákům chyběly ve škole pomůcky potřebné pro výuku geometrie. To ovšem neznamená, že by Cabri mělo zcela nahradit klasické rýsování, které u žáků zase rozvíjí.jiné kompetence. Využití Cabri pro doplnění a oživení výuky či ukázku nových pohledů na geometrii může být ale určitě velmi přínosné.

S využitím interaktivním programů ve výuce se mění i hodnocení práce žáků. Dochází k rychlejší zpětné vazbě. Roli učitele v tomto směru do jisté míry nahrazuje počítačový program. Zvyšuje se tím důraz na samostatnost a zodpovědnost žáka, který je tím pádem i méně závislý na učiteli. Takové hodnocení možná také lépe koresponduje s hodnocením v reálném světě. Podstatné je, zda žák zadaný úkol splnil či nikoli. Je při tom však nutné dávat pozor na to, aby žák vyřešil zadaný problém opravdu samostatně. To musí ale učitel kontrolovat při jakékoli jiné samostatné práci žáků.

Pokud se jedná o nevýhody programu Cabri, na prvním místě určitě stojí samotný fakt, že se jedná o počítačový program. Jeho uživatel musí mít tedy k dispozici přiměřeně výkonný počítač, kam program nainstaluje a příslušný hardware[1], aby s ním mohl pracovat. Pokud chce uživatel s programem pracovat, musí se ho nejprve naučit ovládat. To v případě Cabri není příliš obtížné, ale je potřeba to brát v úvahu. Navíc jsou s tím spojena všechna další omezení související s prací na počítači. Další podmínkou, a také největším problémem, který brání jeho většímu rozšíření, je skutečnost, že se jedná o komerční program. S tím jsou samozřejmě spojena licenční

[1] Jedná se hlavně o myš, případně touchpad a monitor, nebo jiné zobrazovací zařízení.

omezení. Pokud chce škola, nebo jakýkoli jiný uživatel s programem plnohodnotně pracovat, musí si ho nejprve koupit. Existuje i možnost nainstalovat demo verzi programu, která slouží pouze k prohlížení konstrukcí, ty ale potom nelze dále upravovat ani ukládat žádné změny a práce s ním je velmi omezená.

Další komplikace při práci s Cabri se mohou projevit při samotném užívání programu. Rozlišují se na hardwarová a softwarová. K omezením daným hardwarově patří parametry monitoru, například rozlišení, způsob zobrazování obrazovky monitoru, nebo nepřesnosti vzniklé při pohybu myší či touchpadem. Omezení daná softwarově způsobují nepřesnosti při zaokrouhlování a výpočtech, omezení pracovní plochy.

S větším zapojením počítačů do výuky geometrie mohou existovat také obavy, že žáci již nebudou umět rýsovat klasickým rýsovacími pomůckami. Stejně tak, jako by žáci měli být schopni spočítat základní výpočty bez použití kalkulačky, měli by i získat i základní zručnost v rýsování tužkou a pravítkem. Zároveň ale v matematice nejde jen o přesné rýsování podle pravítka, velmi významnou roli v geometrii hraje i kreslení náčrtů konstrukce od ruky. Důležitý je při tom všem samotný proces poznávání.

3. CabriJava

CabriJava je software založený na jazyce Java[1], který byl vytvořen pro vkládání konstrukcí vytvořených v Cabri na www stránky. Na webové stránky se umisťují tzv. aplety, tedy programy napsané v jazyce Java. CabriJava aplety jsou aktivní prvky umístěné na webových stránkách, v rámci kterých lze pohybovat některými body či objekty a měnit tak zobrazovanou konstrukci. Umožňují publikovat na webu konstrukce vytvořené v Cabri. Díky těmto apletům lze s obrázky pohybovat, modelovat různé obměny úloh v rámci vytvořené konstrukce. Možnosti jsou ovšem omezené. Do konstrukce v okně apletu nelze přidávat další objekty, pokračovat v konstrukci dál nebo modifikovat postup konstrukce. (Lávička M., 2000)

S obrázky vytvořenými v Cabri lze prostřednictvím internetového prohlížeče pracovat bez toho, že by uživatel musel mít ve svém počítači nainstalován program Cabri. Také je možné konstrukce stáhnout do svého počítače, kde je Cabri nainstalované, a tam s nimi libovolně pracovat. Pro plnohodnotnou práci s konstrukcí je třeba mít nainstalovanou verzi programu se zakoupenou licencí, pro pouhé prohlížení a manipulaci bez možnosti ukládání stačí demoverze.

3.1. Jak publikovat Cabri konstrukce na webu?

V současné době existují tři základní způsoby, jak zobrazit konstrukce vytvořené v Cabri Geometrii prostřednictvím internetových stránek. Zásadní okolnost, která má přitom vliv na zvolený prostředek je skutečnost, zda jsou konstrukce vytvořené v Cabri II nebo v Cabri II Plus.

Pokud byly vytvořeny ve starší verzi Cabri II, nabízejí se dvě možnosti. Buď přímý zápis pomocí html kódu nebo využití pomocné aplikace CabriWeb.

[1] Java je objektově orientovaný programovací jazyk, který je nezávislý na platformě.

Přímý zápis html kódu

Nejprve je Cabri II vytvořena konstrukce a zároveň je připraven soubor v jazyce html[1] s průvodním textem. Nejjednodušší je umístit do jedné složky soubor CabriJava.jar,[2] konstrukci vytvořenou v Cabri i html stránku.

Pomocná aplikace CabriWeb[3]

V tomto případě je nutné do jedné složky umístit konstrukci vytvořenou v Cabri, soubor CabriJava.jar, soubor CabriWeb.jar[4] a CabriWeb.bat[5]. K vytvoření webové stránky s apletem stačí spustit CabriWeb.bat, otevřít příslušnou Cabri konstrukci a nastavit aplet podle potřeby a uložit jako html soubor. Poté už nezbývá než spustit takto vytvořený soubor v internetovém prohlížeči a zkontrolovat, zda vše funguje tak, jak bylo nastaveno. Později je možné soubor ještě dál upravovat, buď přímo na úrovni html kódu, nebo opět v aplikaci CabriWeb. Pro publikování na webu je třeba umístit do jedné složky tři soubory: konstrukci z Cabri s koncovkou fig, html soubor a soubor CabriJava.jar.

Pro konstrukce v Cabri II Plus nelze přímo použít aplikace CabriJava nebo CabriWeb. Existuje zde ale možnost uložit program ve starší verzi Cabri II a poté postupovat stejně, jako kdyby byla konstrukce vytvořena přímo v Cabri II. Je však třeba dávat pozor na jistou nekompatibilitu mezi oběma verzemi. Některé nové funkce či parametry nastavení, které nabízí Cabri II Plus, nepodporuje Cabri II.

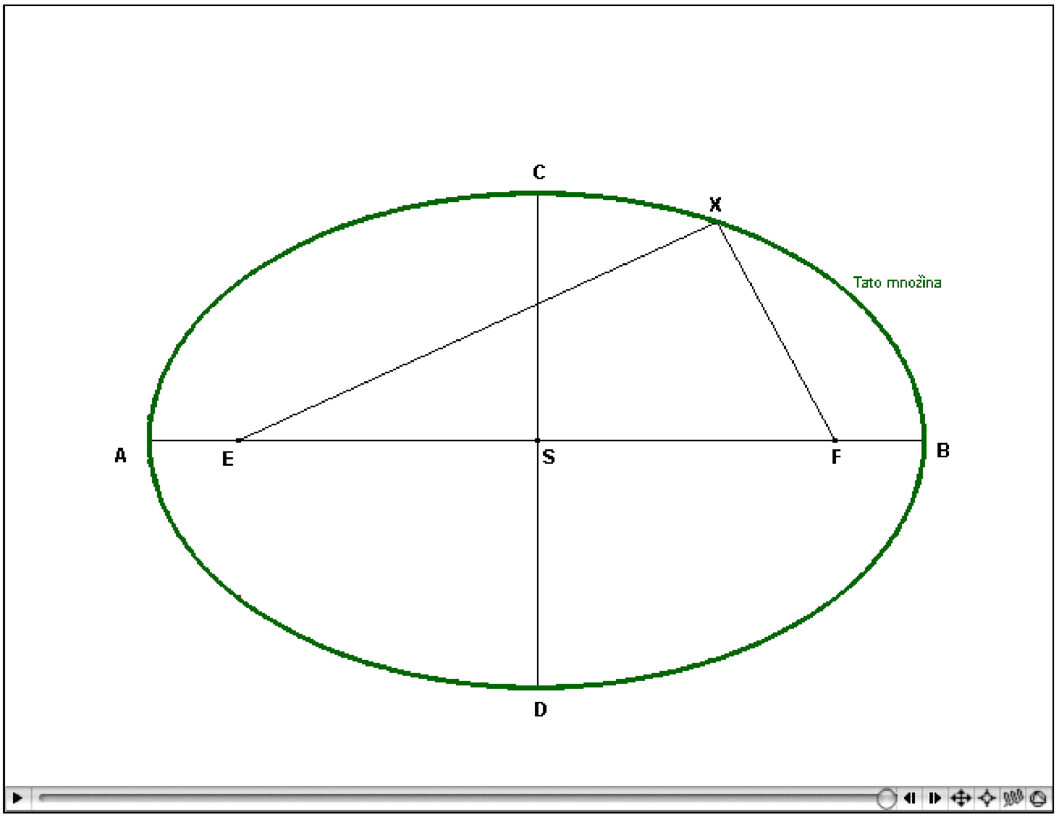
Použití pluginu

Tento způsob naopak funguje pouze pro Cabri II Plus. Zobrazí vše přesně tak, jak bylo vytvořeno v Cabri II Plus. Konstrukce se ale zobrazí pouze na počítačích, kde je nainstalován příslušný plug-in a navíc funguje pouze v prohlížeči Internet Explorer. V Cabri II Plus lze od verze 1.4 zvolený obrázek přímo exportovat do html kódu. Následně je možné html kód dále doplňovat a upravovat. Další variantu představuje

[1] Značkovací jazyk HTML umožňuje vytvářet www stránky.
[2] CabriJava.jar je archiv, který obsahuje v komprimované podobě všechny potřebné soubory CabriJava.
[3] Pomocný software, který umožňuje automaticky vygenerovat aplet přímo bez znalosti kódů.
[4] CabriWeb.jar ke stažení na http://www-cabri.imag.fr/cabrijava/CabriWeb.html
[5] CabriWeb.bat ke stažení na http://www-cabri.imag.fr/cabrijava/CabriWeb.html

přímé vložení příslušného kódu do html stránky. Konstrukce vytvořená v Cabri II Plus by přitom měla být umístěna ve stejné složce jako soubor html.

V této práci jsou konstrukce zobrazeny s využitím apletů CabriJava, kde sice nelze uplatnit funkce, které se objevily až v Cabri II Plus, neboť CabriJava aplety fungují jen pro soubory verze Cabri II, ale pro práci s konstrukcemi přes webové rozhraní nabízí širší možnosti využití.



obr. 2 Ukázka CabriJava apletu

3.2.Ovládání CabriJava[1]

 - spustí animaci celé konstrukce

 - pohyb po jednotlivých krocích konstrukce

 - nastavení pohybu bodů (pružina)

 - nastavení posunu obrázku (umožňuje pohybovat obrázkem v apletu)

[1] Kunz, G.: *CabriJava Handbook*, 2003

 - nastavení stopy objektu

 - stažení obrázku ve formátu fig

 - nástrojová lišta

3.3.Parametry CabriJava[1]

povinné parametry Java (ve značce applet)

CODE	označuje vykonaný kód po načtení apletu
HEIGHT	určuje výšku oblasti, kde bude výsledný aplet zobrazen
WIDTH	určuje šířku oblasti, kde bude výsledný aplet zobrazen

volitelné parametry Java (ve značce applet)

ALIGN	určuje pozici apletu vzhledem k okolí (top, bottom, left, right, middle,...)
ARCHIVE	určuje název komprimovaného souboru tříd potřebného pro spuštění apletu
CODEBASE	určuje cestu k adresáři, kde jsou umístěny soubory tříd jazyka Java (i na jiném serveru)

povinné parametry CabriJava (v párové značce param umístěné ve značce applet)

FILE	určuje název a cestu k zobrazovanému Cabri souboru
LANG	určuje jazyk prostředí (např. en, fr, de, cz,...)

volitelné parametry CabriJava (v párové značce param umístěné ve značce applet)

AUTOCONTROL	zobrazení ovládací lišty (výchozí hodnota "false")
BACKGROUND	obrázek na pozadí apletu
BGCOLOR	barva na pozadí apletu (defaultně nastavena bílá)
BORDER	rámeček apletu (šířka orámování přednastavena na hodnotu 1)
BORDERCOLOR	barva ohraničení (defaultně nastavena černá)
CONTROLLER	zobrazení ovládací lišty (výchozí hodnota nastavena "true")

[1] Kunz, G. *CabriJava Handbook*, 2003

LOOP	konstrukce se samovolně automaticky provádí po jednotlivých krocích (výchozí hodnota nastavena "false")
OPAQUE	nastavení neprůhlednosti výplně kružnic a mnohoúhelníků (výchozí hodnota nastavena "true")
SPRING	definuje natažení pružiny (např. point 5 size 30,-20)
STEP	definuje poslední objekt, který se zobrazí po nahrání apletu, ostatní zobrazuje uživatel stiskem tlačítka "krok vpřed" (např. point 6)
TRACE	definuje objekty, které mají v případě pohybu zanechat stopu (např. point 10)
XPOSITION	určuje horizontální posun konstrukce (v pixelech, kladná hodnota vpravo)
YPOSITION	určuje vertikální posun konstrukce (v pixelech, kladná hodnota dolů)

Takto může například vypadat praktická ukázka CabriJava apletu vloženého do těla webové stránky zapsané v html kódu. Přímo v kódu apletu je nastavena výška a šířka prostoru, kam bude konstrukce vložena. Dále je zde s pomocí parametrů nadefinováno, jaký obrázek má být zobrazen, jaká bude barva pozadí, že používaným jazykem bude čeština a že lišta bude na webové stránce zobrazena.

```
  <APPLET CODE=CabriJava.class ARCHIVE="CabriJava.jar"
WIDTH=650 HEIGHT=500 >
    <PARAM NAME="file" VALUE="hyperbola.fig">
    <PARAM NAME="bgcolor" VALUE="#E6FFF5">
    <PARAM NAME="lang" VALUE="cs">
    <PARAM NAME="autocontrol" VALUE="true">
  </APPLET>
```

4. Metodika

4.1. Programy interaktivní, dynamické geometrie

Svět, ve kterém žijeme je stále více medializován. V současné době jsou i pro děti již od raného věku počítače a internet naprosto běžnou součástí jejich života. Práce s počítačem či komunikace přes internet jsou pro spoustu z nás již téměř každodenní záležitostí. Digitální technologie jsou běžným zdrojem informací, zábavy i komunikačním prostředkem. Poznatky získané prostřednictvím počítače by tedy mohly být pro žáky a studenty srozumitelnější a snadněji pochopitelné. Výuka ve školách se tomuto trendu postupně přizpůsobuje a zapojení informačních a komunikačních technologií do výuky je stále aktuálnějším tématem.

Programy interaktivní, případně dynamické geometrie umožňují vytvářet geometrické konstrukce a zobrazovat je na obrazovce počítače, na displeji kalkulačky, případně na jiném audiovizuálním zařízení. Uživatel nemusí do potřebných výpočtů a následné algebraizace těchto objektů nijak aktivně zasahovat, pouze provádí jednotlivé konstrukční kroky, případně nastavuje různé vlastnosti vytvářených objektů (formát písma, tloušťka a typ čáry, barva objektů, barva pozadí,…). Objekty, které vyváří mohou být volné, které vznikají nezávisle na předchozí konstrukci (bod, přímka,…). Ostatní objekty jsou vázané, které jsou závislé na nějakém již vytvořeném objektu (bod na kružnici, střed úsečky, kolmice, rovnoběžka, osa úhlu,…). Pokud se později jakkoli mění některý z objektů, na který jsou vázané, mění se podle něj. Přitom ale také záleží na vztahu, jak jsou vázané objekty definovány. Jedná-li se například o bod na objektu, na daném objektu jím lze pohybovat. V případě, že je to ale třeba kolmice na danou přímku nebo osa úhlu, samostatně s nimi nijak manipulovat nelze. Rozhodně ale pro oba typy vázaných objektů platí, že když je odstraněn objekt, na kterém jsou závislé, odstraníme s nimi i ten vázaný objekt. Pokud je tedy smazána osa souměrnosti, smažou se spolu s ní i všechny objekty, které byly podle ní zobrazeny.

Vytvořené objekty lze popisovat, nechat zobrazit jejich velikost nebo analytické vyjádření, případně pomocné konstrukce skrýt pro lepší přehlednost výsledku. Další nástroj, který poskytují programy interaktivní geometrie je stopa, díky níž může objekt, kterým je manipulováno, na místech, kudy se pohybuje, zanechat stopu.

Dynamická geometrie umožňuje přemístit či změnit bod, objekt, nebo velikost objektu v konstrukci. Tím se změní i poloha dalších bodů a objektů, které na něm závisí. Celá konstrukce se tak na základě provedené změny překreslí. Například pro demonstraci kružnice vepsané trojúhelníku tupoúhlému, pravoúhlému i ostroúhlému stačí pouze jeden obrázek. Ten lze pohybem jediného bodu postupně měnit z tupoúhlého na pravoúhlý, až ostroúhlý. Poté již stačí jen sledovat, jaké souvislosti tyto změny provází. Podobné je to v případě kuželoseček. Ke konstrukci libovolné kuželosečky může být využita jednoohnisková definice, zde skutečnost, která z kuželoseček vznikne, závisí na poměru vzdáleností od daného bodu a od dané přímky. V Cabri lze pohybem jediného bodu měnit velikost toho poměru, čímž se postupně mění nejen tvar kuželosečky, ale i její druh. Na stejném příkladě lze i ukázat, že například princip konstrukce tečny ke kuželosečce je pro všechny typy kuželoseček stejný. Díky dynamickým konstrukcím se otvírají možnosti, které tradiční způsoby řešení úloh neposkytují.

Rýsování s použitím běžných rýsovacích pomůcek klade na žáky poměrně velké nároky na geometrickou představivost. Je od nich vyžadována značná míra abstrakce. Právě na geometrickou představivost je při dnešní výuce geometrie kladen velký důraz. Dynamická geometrie umožňuje ukázat pohyb či dynamiku objektů, různé polohy řešené úlohy a tím mnohem lépe získat potřebnou geometrickou představivost. Nároky na žáky by se s větší mírou zapojení interaktivních nástrojů do výuky mohly snížit a pomohlo by to jistě i lepšímu pochopení řešených problémů. Zároveň s tím lze díky Cabri lépe objasnit spoustu geometrických poznatků, zejména díky lepšímu vhledu do celé problematiky. Využití dynamické geometrie umožňuje podrobněji prozkoumat řešení do větší hloubky.

Výhodou nástroje Cabri je v tomto případě také intuitivní a snadném ovládání. Stačí pár kliknutí myší a můžeme vytvořit jednoduché, ale i složitější geometrické konstrukce. Kritérium času je zde ve srovnání s běžným rýsováním na papír nebo na tabuli naprosto neoddiskutovatelné. Poté, co je konstrukce dokončena stačí jen pohybovat základními prvky konstrukce a sledovat jak se v závislosti na změně v zadání mění výsledek úlohy. Žáci tak mohou méně času věnovat rýsování a více se věnovat rozboru úlohy a diskusi nad možnými řešeními. Nástroje dynamické geometrie zároveň zaručují i potřebný vhled do řešení úlohy s nižšími nároky na geometrickou představivost. Snižuje se tím i zátěž na aktuální paměť žáka, klesají i nároky na jeho představivost a soustředění. To umožňuje i slabším či mladším žákům lepší pochopení úlohy. Potom může žák geometrickou představivost i lépe procvičovat. (Vaníček, J., 2000)

Interaktivní geometrie

Nezbytnými předpoklady pro využití interaktivní či dynamické geometrie v hodinách matematiky je jednak znalost práce s výpočetní technikou, jednak dostupnost potřebných programů. Problémy s využitím Cabri z důvodu finanční náročnosti byly již probrány v předchozí kapitole, nezbytností je zde dostatečná vybavenost škol, a to jak po stránce technické, tak i programové. Znalosti práce s výpočetní technikou, případně přímo s programem jsou nutnou podmínkou k jeho zapojení do výuky. Možná by se v dnešní době už dalo předpokládat, že by v tomto směru měli být žáci i učitelé na práci s využitím informačních technologií do vyučování připraveni, ale nelze se na to stoprocentně spolehnout. Navíc, aby učitelé mohli zapojit prvky interaktivní výuky do svých hodin, musí tomu nutně přizpůsobit i svůj styl učení i částečně změnit své dosavadní postupy. Začíná to již přípravou na vyučování, kdy si musí vytvořit nové, interaktivní pomůcky, dále je třeba jinak postavit a organizovat vyučovací hodiny.

Žáci mohou pracovat samostatně, nebo ve skupinách. Je jistě vhodné kombinovat obě formy práce, žáci se tak učí řešit úkoly samostatně i spolupracovat se spolužáky. Pozitivním přínosem je také individualizace výuky. Každý žák může pracovat svým tempem a učitel ho průběžně kontroluje, neboť právě s využitím dynamické geometrie je kontrola žákovských řešení výrazně snadnější. Díky tomu má učitel více času věnovat se všem žákům a nestává se tak často, že by ti slabší brzdili zbytek třídy nebo naopak nestíhali příliš rychlému tempu ostatních. Dochází i k lepší komunikaci učitele se žáky, protože se spolu baví individuálně o konkrétním problému. Při takové organizaci práce v hodině jsou ovšem na učitele kladeny mnohem větší požadavky a vyžaduje to od něj výrazně pečlivější přípravu. Navíc existují názory, že se zapojením programů dynamické geometrie do výuky lze prostřednictvím zvýšené motivace žáků dosáhnout i lepší kázně v hodinách.[1]

V poslední době se o nezbytnosti zařazení počítačů do výuky mluví stále častěji. Mělo by to platit pro všechny oblasti vzdělávání, ale v matematice je to zcela evidentní. V praxi, zejména pak v technicky zaměřených oborech se s počítači setkáváme denně. Mnoho úkonů si bez nich nelze ani představit. Dalo by se dokonce s jistou nadsázkou říci, že dnešní doba je na počítačích závislá. Trendu většího zapojení počítačů do praxe je třeba se přizpůsobit i na základních a středních školách. Je nezbytné, aby žáci byli připraveni na to, co je po ukončení školy čeká. Pokud se zaměříme jen na technické obory, kde se všude matematické poznatky využívají, je zde role počítačů nezastupitelná. Díky matematickým programům se navíc otvírají nové pohledy na pojetí matematiky i nová témata k řešení, proto se by se mělo změnit i pojetí výuky matematiky na školách.

Při využívání počítačů ve výuce je však třeba respektovat hlavní didaktické zásady, jako jsou aktivita (žák se sám aktivně podílí na vzdělávacím procesu, čímž se zvyšuje jeho motivace), přiměřenost (nelze opomíjet individuální rysy jedince a úroveň jeho znalostí a dovedností, zejména potom při práci s počítačem), posloupnost (postup od jednoduššího ke složitějšímu, od analýzy k syntéze přes indukci k systematizaci a třídění), samostatnost (ta se uplatňuje při aplikaci získaných znalostí a vědomostí v praxi). Zkušenosti ukazují, že přímá obsluha počítače samotnými žáky je mnohem efektivnější a pro žáky zajímavější, než používání počítače pouze učitelem ve výuce. (Terms Vališová A., Kasíková H. aj., 2007, s. 218)

4.2.Konstruktivismus

Žáci si mnohem lépe zapamatují postupy, které si mohou sami vyzkoušet a vyřešit. Uplatňují se tady i prvky konstruktivismu. V konstruktivismu si sám učící se subjekt vytváří, neboli konstruuje poznatky. Žáci se tak učí tím, že sami něco dělají. Zařazení konstruktivistické výuky do vyučování také naplňuje cíle Rámcových vzdělávacích programů. Pro rozvoje představivosti, logického myšlení, samostatnosti či rozvíjení fantazie, můžeme využít postupy, které aktivizují žákovy poznávací procesy a které

[1] Tento názor zastává například Jiří Vaníček (Vaníček, J., 2000)

povedou k jeho rozvoji. V konstruktivismu je velmi důležité zadání úlohy, které poté žák na základě dřívějších znalostí a zkušeností řeší, přičemž spolu s aktivním myšlenkovým postupem objevuje nové poznatky. Uplatnění konstruktivistických přístupů ve vyučování matematice umožňuje přiblížit se přirozenému způsobu poznávání u dětí. Mohou také kultivovat a dále rozvíjet jejich myšlení. S využitím konstruktivních přístupů lze snížit míru formálních znalostí a dovedností žáků. (Hejný, Kuřina, 2001)

4.3.Problémové vyučování

Díky využití Cabri můžeme do výuky také více zařadit prvky problémového vyučování. Problémové vyučování, pro něž je typické, že žák nemá všechny údaje potřebné k vyřešení zadaného úkolu a sám aktivně využívá vlastní poznávací aktivitu. Zapojení problémových situací do vyučování matematiky umožní žákům tvořit, hledat a objevovat. Při problémovém vyučování žáci aktivně objevují a následně si osvojují poznatky a činnosti v souladu se stanovenými cíly, často za pomoci učitele. Žáci při tom využívají dosud známých nástrojů a postupů, které jim při řešení pomohou.

„Problémové vyučování v matematice je takový systém vyučování, kdy žák samostatným zkoumáním dané problémové situace, formulací a řešením úloh dospívá k pochopení a tvorbě matematických pojmů a postupů, k řešení problémů.“ (Kuřina, 1976)

Fakt, že problémové situace, či přímo samotné uvědomění si problému stojí na počátku celého procesu myšlení, zastávali v minulosti mnozí filozofové i představitelé přírodních i společenských věd, jako Aristoteles, Bacon, Descartes, Dewey, Piaget nebo Rubinštejn.

Učitel má při zařazování prvků problémové výuky do vyučování velmi zásadní roli v tom, jaký konkrétní problém k řešení zvolí. Musí při tom brát v úvahu složitost (dané podmínky, vzdálenost mezi otázkou a odpovědí na ni, soustava řešení) a obtížnost úlohy (formulace úlohy, míra zobecnění, podíl využití známých algoritmů a vlastního produktivního myšlení). Účinnost problémové úlohy potom vychází ze stanovení cílů výuky, výběru vhodného učiva a jeho důkladné didaktické analýzy, znalosti žáků a kolektivu třídy, volby vhodných metod a forem problémového vyučování, přiměřené náročnosti, vhodné motivace žáků, schopností učitele, schopnosti žáků řešit úlohy a vybavenosti školy. (Skalková, 1999, s. 142)

4.4.Klasická výuka

Cabri umožňuje vyučovat geometrii jinak, netradičně, ale zároveň ho lze využít i k podpoře tradičního pojetí výuky matematiky. Jednou z možností, jak pouze doplnit dosavadní formy práce v hodinách, je převést sadu příkladů řešených v učebnici do Cabri. Pro žáky může být určitě velmi zajímavé vidět obrázky, které mají v učebnicích, v pohybu. Díky dynamickým obrázkům lze lépe, důkladněji a hlavně snadněji provést diskusi k řešení. Případně je možné je využít i při zavádění nových pojmů. Například velmi často se pomocí Cabri demonstruje například důkaz Pythagorovy věty.

4.5.Možnosti zapojení dynamické geometrie do vyučování

Existuje několik možností, jak dynamickou geometrii zapojit do výuky. Ty by se daly rozdělit podle toho, zda hlavní aktivita spočívá na straně žáka či na straně učitele. Učitel může využívat dynamické konstrukce pro svou vlastní přípravu na vyučování pro lepší pochopení řešené problematiky, dále může nástrojů dynamické geometrie použít pro přípravu písemek či testů pro žáky, aby nemusel konstrukce ručně rýsovat. Je to jistě rychlejší i jednodušší pro různé obměny úloh nebo pozdější opětovné využití. Dále se nabízí možnost ukazovat žákům v průběhu hodiny předem připravené konstrukce. Pro demonstraci problému je určitě lepší alespoň pozorovat dynamický obrázek než vše studovat jen z učebnice či tabule. Žák má možnost sledovat vliv prováděných změn na řešení úlohy. Ideálním případem ovšem je, pokud mohou žáci s programem pracovat samostatně. I zde máme několik variant, jak to může probíhat. První z nich je, že žáci na základě předem daného postupu tvoří konstrukci.

Další formou může být využití dřívějších znalostí a zkušeností k hledání vlastních postupů konstrukce, případně s minimem znalosti potřebných algoritmů pracovat metodou pokus - omyl. Také je možné na již hotových řešeních zkoumat různé obměny úloh, zaměřit se na diskusi k řešením na základě změn v zadání. Případně při zavádění nových poznatků, ať už je předem hotová jen část konstrukce, nebo celý postup, může žák objevit novou, dosud neznámou skutečnost. Dále se lze také zaměřit na hledání chyb v postupu řešení a jejich následnou opravu.

Díky pohyblivému náčrtku má žák možnost získat lepší vhled do řešení úlohy, napomáhá to i lepšímu pochopení vazeb mezi jednotlivými objekty v konstrukci. U objektů významných pro konstrukci lze nastavit zobrazení jejich rozměrů, ty se potom přepočítávají podle změn provedených v postupu řešení. Dynamizaci může tedy provádět sám učitel a žáci ji pouze pozorují, nebo žáci na základě instrukcí učitele s úlohou pracují a objevují nové poznatky samostatně. Manipulace s objekty s sebou přináší možnost rychleji pochopit a osvojit si novou látku. Žáci si mnohem více zapamatují z toho, co si sami vyzkouší, než když si to jen přečtou nebo je jim to předloženo jako fakt.

4.6. WWW stránky www.kuzelosecky.cz

Tato kapitola se věnuje informacím o www stránkách, vytvořených na podporu výuky kuželoseček a zároveň poskytuje stručný návod k jejich používání. Nedílnou součást bakalářské práce tvoří www stránky, kde je prezentován výukově zaměřený materiál. Jedná se zejména o konstrukce vytvořené v Cabri, které jsou zobrazeny na webových stránkách díky CabriJava apletům.

Nejedná se o souvislý text, který by nahrazoval učebnici, jen je u každé kapitoly uvedena nezbytná teorie vztahující se k probírané látce. Stěžejní část práce tvoří obrázky vytvořené pomocí Cabri II případně Cabri II Plus převedené do CabriJava apletů, s kterými je možné dále manipulovat a řešit zadané příklady, případně jen sledovat řešený problém z různých pohledů a v různých situacích. U příkladů je vždy nejprve uvedeno zadání příkladu, které mohou studenti sami nakreslit pomocí Cabri, pod ním je výsledek konstrukce s vyznačením význačných prvků konstrukce. U toho jsou uvedeny instrukce, jak s konstrukcí manipulovat, což by mělo umožnit hlubší proniknutí do řešeného problému. Výhodou jistě je, že studenti ani nemusí mít Cabri nainstalované a mohou pracovat pouze s využitím prohlížeče, který podporuje Javu. Pouhým kliknutím a pohybem myší mohou ovládat volné body či objekty konstrukce a mohou si také nechat přehrát celý postup zobrazené konstrukce. Navíc je možné konstrukce stáhnout do vlastního počítače a pracovat s nimi přímo v Cabri.

Struktura www stránek je navržena tak, aby byl oddělen teoretický úvod a část, která je konkrétně zaměřená na kuželosečky. V levé části okna je nabídka kapitol z oblasti kuželoseček, z nichž je každá dále rozdělená do podkapitol podle jednotlivých typů kuželoseček.

Po technické stránce je interaktivní část práce vytvořena za pomoci freeware editoru PSPad, který slouží k tvorbě www stránek, s využitím jazyka HTML a s podporou skriptovacího jazyka PHP. Vnější úprava webových stránek je provedena pomocí kaskádových stylů CSS. Všechny stránky jsou validní a optimalizované pro všechny základní typy dnes běžně používaných prohlížečů.

5. Kuželosečky

Kuželosečky jsou křivky, ve kterých rovina seče rotační kuželovou plochu, odtud pochází jejich označení. Jedná se tedy o množiny bodů v rovině, které vzniknou průnikem roviny rotační kuželovou plochou, v případě elipsy navíc může jít i válcovou plochu. Všechny body kuželosečky leží v rovině, to je jasné už ze zadání, že se jedná o množinu bodů společných kuželové ploše a rovině. Mezi základní kuželosečky, kterými se tato práce bude zabývat, patří elipsa[1], hyperbola a parabola, navíc se mezi kuželosečky řadí i dvojice přímek nebo bod, v případě, že sečná rovina je vrcholová. Elipsa a hyperbola jsou středově souměrné, označují se také jako středové kuželosečky, parabola střed souměrnosti nemá, označuje se tedy jako nestředová kuželosečka.

Problematikou kuželoseček se zabývá zejména deskriptivní geometrie, která zároveň zkoumá i řezy na kuželové a válcové ploše. Dále i analytická geometrie, která převádí geometrické úlohy na úlohy algebraické a následně výsledek interpretuje opět geometricky. Používanými algebraickými metodami jsou hlavně metody souřadnic a metody vektorové algebry, ty se souhrnně nazývají analytické metody.[2] Útvary se analyticky nejčastěji vyjadřují pomocí rovnic nebo nerovnic, případně jejich soustav. Mluví se potom o rovnici přímky, kružnice, hyperboly.

Kuželosečky je možné definovat[3] jako:

- Množinu bodů společných rovině a kuželové či válcové ploše,[4]
- množinu bodů, které mají stejný poměr vzdáleností od dané pevné přímky a od daného pevného bodu,
- množinu bodů, které mají stejný součet či rozdíl vzdáleností od dvou daných pevných bodů,[5]
- množinu bodů daných vlastností.

[1] Kružnice je zvláštním případem elipsy a samostatně se jí tato práce zabývat nebude.
[2] Analytické vyjádření geometrického útvaru označuje vztah, který splňují právě jen souřadnice bodů tohoto útvaru.
[3] V Cabri lze všechny takto definované kuželosečky narýsovat.
[4] Válec lze chápat jako degenerovaný kužel, jehož vrcholový bod je nevlastní.
[5] Nejčastější středoškolská definice kuželoseček.

5.1. Kuželosečky – historie[1]

Problém zdvojení krychle

Objevení kuželoseček souvisí s jedním ze tří proslulých problémů středověku, zdvojením krychle (lat. duplicatio cubi).[2] Jeho řešení se věnovali Archimédes, Menaechmos a Eratosthenés a výsledkem zkoumání byl právě objev kuželoseček, i když v jiném podání než jsou známy dnes. První teoretické pojednání o kuželosečkách pochází od Apollonia z Pergy. Ve třetím století před naším letopočtem zavedl kuželosečky jako rovinné řezy na rotační kuželové ploše. Až v 19. století však odvodili belgičtí matematici A. L. Quetelete a J. P. Dandeline ohniskové vlastnosti těchto křivek. (Kuřina, 1996 s. 71)

Z Apolloniova osmisvazkového díla *O kuželosečkách* se zachovaly čtyři díly psané v řečtině, tři psané v arabštině, osmá kniha dosud nebyla nalezena. V prvních čtyřech knihách jsou shrnuty poznatky od Apolloniových předchůdců, ale jsou probrány přesněji a do větší hloubky. Další knihy obsahují původní Apolloniovy myšlenky například o normálách kuželoseček, o středu křivosti a dalších. Kuželosečky definoval pomocí řezů kuželu rovinou. Ve svém díle značně předběhl dobu, ve které žil, když ve svých objevech dospěl k asymptotám hyperboly.[3] (Schmarge, 1999)

Elipsa[4]

Elipsa pochází z řeckého *ellipsis*, což znamená nedostatečné nebo také zmenšující se. Podle Apollonia to souvisí s jeho pracemi, které jsou založené na základní vlastnosti, kterou Kepler později nazývá excentricita. Johannes Kepler se také objevil, že orbity,

---

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/kuzelosecky.php.

[2] Zdvojením krychle je myšleno nalezení krychle, jejíž objem je roven dvojnásobku objemu zadané krychle. S úlohou o zdvojení krychle je spojena legenda, jedna z jejích variant je: Na ostrově Délos vypukla epidemie moru, obyvatelé umírali. Vypravili proto poselstvo do delfské věštírny s důležitým posláním: zjistit, jakým způsobem si naklonit bohy, aby mor pominul. Pýthie odpověděla, že je třeba zdvojit oltář boha Apollóna, který měl tvar krychle a byl ze zlata. Byla tedy odlita druhá zlatá krychle, stejně velká, a postavena na krychli první. Mor však trval. Poselstvo se opět vydalo do delfské věštírny. Dozvěděli se, že je třeba navíc zachovat tvar oltáře. Tuto úlohu však na ostrově Délos řešit neuměli. Obrátili se s prosbou o pomoc na Platóna. Ten jim však pravil: "Bohové se na vás hněvají, neboť se málo věnujete geometrii." Proto se také o duplikaci krychle mluví jako o délském problému. (Historie matematiky I, str. 71)

[3] Ke každé hyperbole lze sestrojit dvojici přímek takových, že se k větvím hyperboly neomezeně blíží, ale nikdy je neprotnou.

[4] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/elipsa.php

po kterých rotují planety kolem, Slunce mají tvar elipsy. Pokud je excentricita menší než jedna, výsledkem je elipsa (nedostačující), pokud je větší než jedna, je to hyperbola (přebytečné). (Frachebourg, 2008)

Hyperbola[1]

Hyperbola pochází z řeckého *hyperbolé*, což je z *hyper* = za, *ballein* = hodit; tedy vrhnout za hranice. *Hyperballein* znamená také překročit, přesáhnout; navíc hyperbola je antonymem k elipse. (Frachebourg, 2008)

Parabola[2]

Parabola z řeckého *parabolê*, *para* = vedle, u, *ballein* = házet, vrhat. Parabola připomíná trajektorii střely vystřelené a dopadající na zem. Tento termín pochází od Apollonia z Pergy. (Frachebourg, 2008)

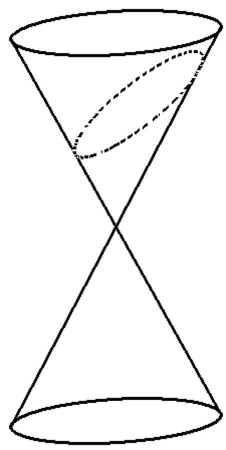
[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/hyperbola.php
[2] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/parabola.php

5.2. Množina bodů společných kuželové ploše a rovině[1]

Množiny bodů v rovině, které vzniknou průnikem roviny rotační kuželovou nebo válcovou plochy s rovinou, se nazývají kuželosečky. Výsledkem tohoto řezu je elipsa, pokud rovina není kolmá ani rovnoběžná s osou plochy. Úhel, který svírá

Elipsa[2]

Jestliže rovina ρ protíná všechny povrchové přímky rotační kuželové plochy K, není kolmá k její ose a neprochází vrcholem, je průnikem $\rho \cap K$ elipsa. Ohnisky této elipsy jsou body dotyku kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše K, s rovinou ρ. (Kuřina, 1996, s. 217)



obr. 3 Řez dvojkuželu rovinou - elipsa

Důkaz toho, že řezem na dvojkuželu vznikne elipsa: (Kuřina, 1996, s. 218)

K důkazu je využit pravoúhlý průmět prostorové situace do roviny kolmé k rovině ρ (ta se v průmětu jeví jako přímka). Kulová plocha M se dotýká rotačního kužele v kružnici, jejímž průmětem je úsečka M_1M_2. F je bod dotyku kulové plochy a roviny π_1, která je kolmá k nákresně a je různoběžná s rovinou ρ. Průnikem rovin ρ a π_1 je přímka, jejímž průmětem je bod. Kulová plocha N se dotýká rotačního kužele v kružnici, jejímž průmětem je úsečka N_1N_2. E je bod dotyku kulové plochy a roviny π_2, která je kolmá k nákresně a různoběžná s rovinou ρ. Průnikem rovin ρ a π_2 je přímka,

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/rezy.php
[2] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/rez_e.php.

jejímž průmětem je bod. Z libovolného bodu jsou vždy délky všech tečen ke kuželové ploše stejně dlouhé.

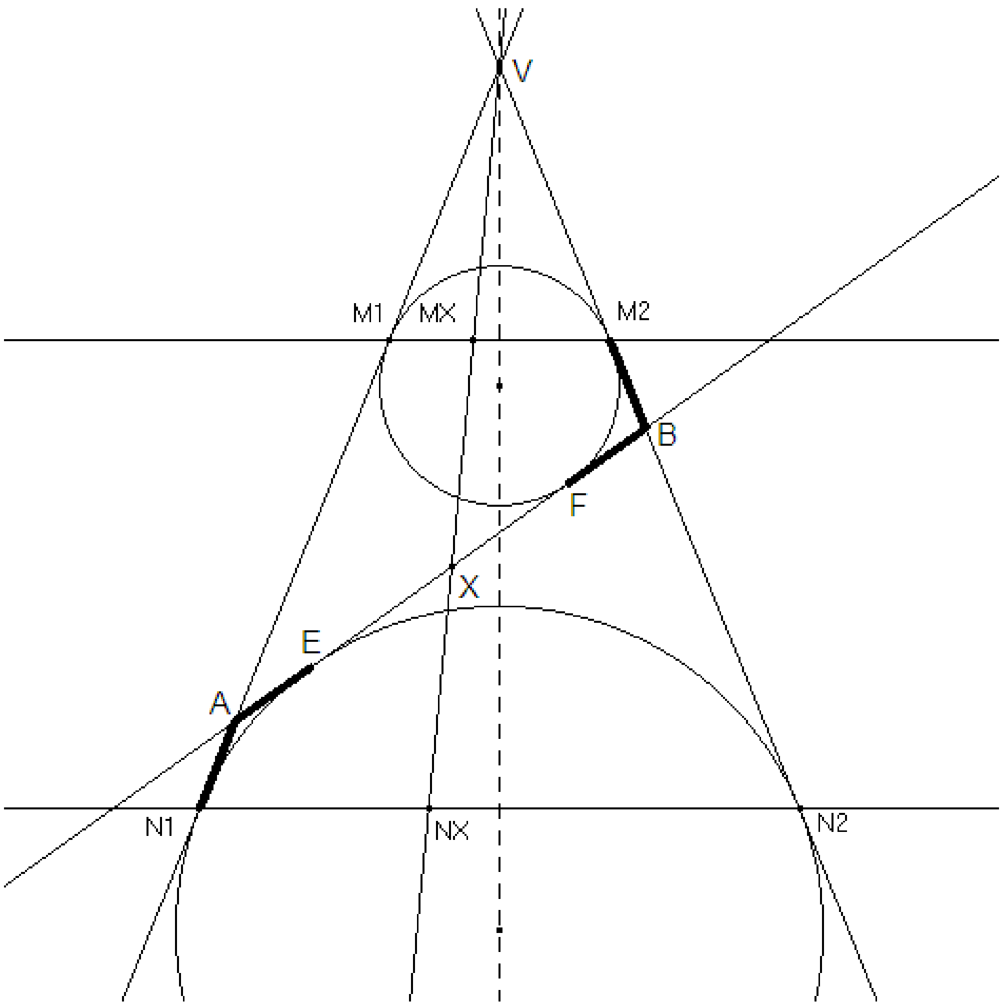
Pro délky tečen z bodu A ke kuželové ploše N proto platí: $|AN_1| = |AE|$

Pro délky tečen z bodu A ke kuželové ploše M potom platí: $|AM_1| = |AF|$

Pro délky tečen z bodu B ke kuželové ploše N proto platí: $|BN_2| = |BE|$

Pro délky tečen z bodu B ke kuželové ploše M potom platí: $|BM_2| = |BF|$

Označme délky $|AN_1| = |AE| = x$ a délky $|BM_2| = |BF| = y$



obr. 4 Důkaz, že řezem kuželové plochy rovinou je elipsa

Podle prostorového obrázku je zřejmé, že platí: $|M_2N_2| = |M_1N_1| = |M_XN_X|$. M_XN_X je úsečka, kterou vytínají roviny π_1 a π_2 na libovolné povrchové přímce procházející bodem X.

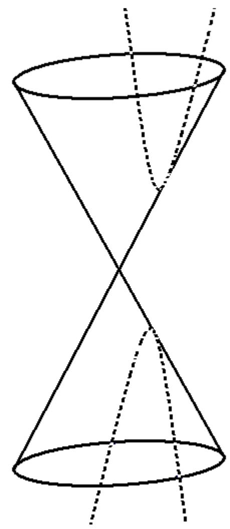
$|AM_1| + x = |BN_2| + y$, $|AF| + y = |BE| + x$ a protože $|AM_1| = |AF|$ a $|BN_2| = |BE|$, je možné dosadit: $|AM_1| + x = |BN_2| + y$, $|AM_1| + y = |BN_2| + x$ a odečíst druhou rovnici od první, výsledkem je rovnost: $x - y = y - x$, tedy $x = y$.

Dále platí $|XE| = |XN_x|$ a $|XF| = |XM_x|$. S využitím předchozích výsledků stačí dosadit: $|XE| + |XF| = |XN_x| + |XN_x| = |M_xN_x| = |AB|$. Délka $|AB|$ je hlavní osa elipsy, tedy 2a.

Závěr: Libovolný bod X průniku $\rho \cap K$ má tedy konstantní součet vzdáleností od dvou pevných bodů E, F (ohnisek) $|XE| + |XF| = 2a$.

Hyperbola[1]

Jestliže rovina ρ je rovnoběžná se dvěma povrchovými přímkami rotační kuželové plochy K a neprochází vrcholem, je průnikem $\rho \cap K$ hyperbola. Ohnisky této hyperboly jsou body dotyku kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše K, s rovinou ρ. (Kuřina, 1996, s. 221)



obr. 5 Řez dvojkuželu rovinou - hyperbola

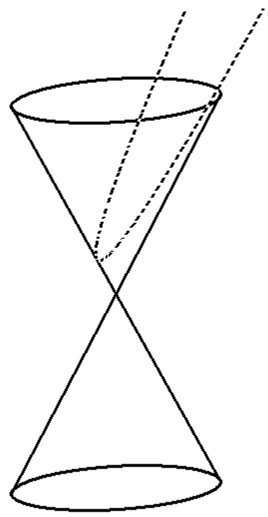
[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/rez_h.php.

Důkaz toho, že řezem na dvojkuželu vznikne hyperbola:

Důkaz pro hyperbolu je velmi podobný jako u elipsy, jen se jedná o rozdíl a ne součet vzdáleností.

Parabola[1]

Jestliže rovina ρ je rovnoběžná s jedinou povrchovou přímkou rotační kuželové plochy K, není kolmá k její ose a neprochází vrcholem, je průnikem $\rho \cap K$ parabola. Ohniskem této paraboly je bod dotyku kulové plochy, která je vepsaná kuželové ploše K, s rovinou ρ. (Kuřina, 1996, s. 220)



obr. 6 Řez dvojkuželu rovinou - parabola

Důkaz toho, že řezem na dvojkuželu vznikne parabola: (Kuřina, 1996, s. 220)

K důkazu využijeme pravoúhlý průmět prostorové situace do roviny kolmé k rovině ρ (ta se v průmětu jeví jako přímka). Je-li bod X libovolný bod průniku $\rho \cap K$, sestrojíme povrchovou přímku VX kuželové plochy a bod dotyku této přímky s kulovou plochou M označíme ho M_X. Z libovolného bodu jsou vždy délky všech tečen ke kuželové ploše stejně dlouhé. Pro délky tečen z bodu X ke kuželové ploše M proto platí: $|XM_X| = |XF|$. F je bod dotyku kulové plochy M vepsané kuželové ploše a roviny ρ. Kulová plocha M se dotýká rotačního kužele v kružnici, jejímž průmětem je úsečka M_1M_2. Tato kružnice je částí roviny π_1. Přímku d, která tvoří průnik rovin ρ a π_1

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/rez_p.php.

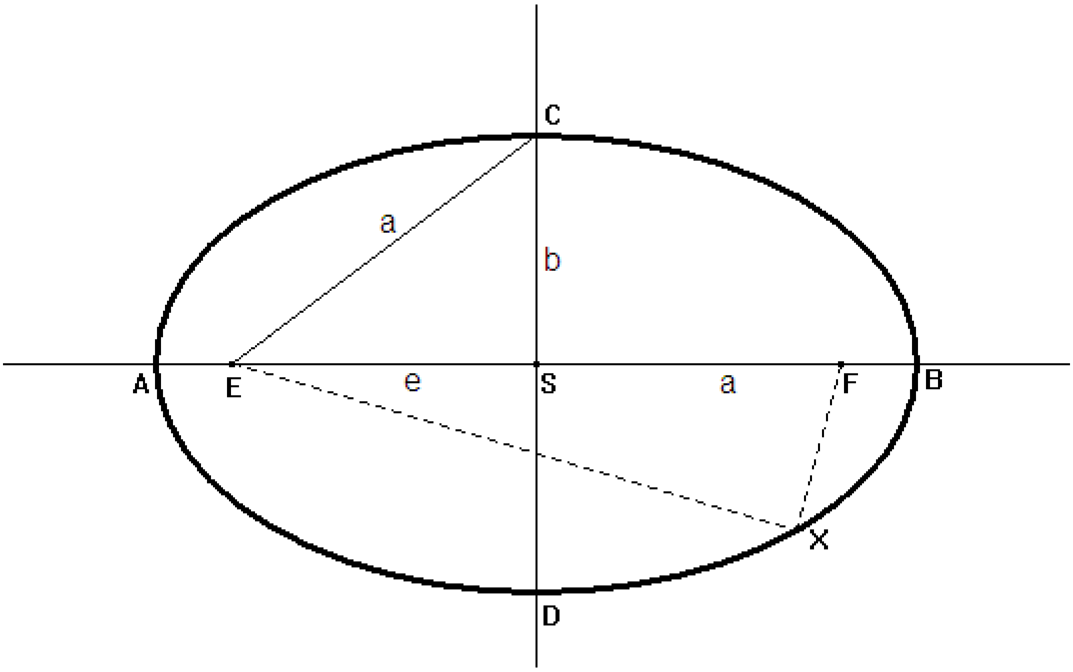
označujeme jako řídicí přímku paraboly. Jejím průmětem je bod A. Pro body X, M_X M_2 a C platí: $|XM_X| = |M_2C| = |DA|$. Vzdálenost $|XA|$ reprezentuje vzdálenost bodu X od řídicí přímky. Protože je podle konstrukce trojúhelníka trojúhelník XAC rovnoramenný, platí: $|XA| = |CA| = |XF|$. Každý bod průniku ρ ∩ K má tedy stejnou vzdálenost od ohniska jako od řídicí přímky d (definice paraboly).

5.3.Konstrukce kuželoseček podle definice[1]

Elipsa[2]

Def.1 Geometrické místo všech bodů v rovině, které mají stejný součet vzdáleností od dvou různých daných pevných bodů, se nazývá elipsa. (Menšík, 1981, s. 26)

Def. 2 V rovině jsou dány dva body E, F. Množina všech bodů X v rovině, pro které je součet $|XF| + |XF|$ vzdálenosti bodu X od bodů E a F roven danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá elipsa. (Kočandrle, 2000, s. 156)



obr. 7 Elipsa - popis

E, F - ohniska elipsy ($|EF| = 2e, |ES| = |FS| = e$ $|EC| = a, |AS| = a, |CS| = b, |ES| = e$)

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/definice.php.
[2] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/definice_e.php

S - střed elipsy

A, B - hlavní vrcholy elipsy ($|AS| = |BS| = a, |AB| = 2a|EC| = a, |AS| = a, |CS| = b, |ES| = e$), přímka AB - hlavní osa elipsy

C, D - vedlejší vrcholy elipsy ($|CS| = |DS| = b, |CD| = 2b$), přímka CD - vedlejší osa elipsy

EX, FX - průvodiče bodu X

a - hlavní poloosa elipsy

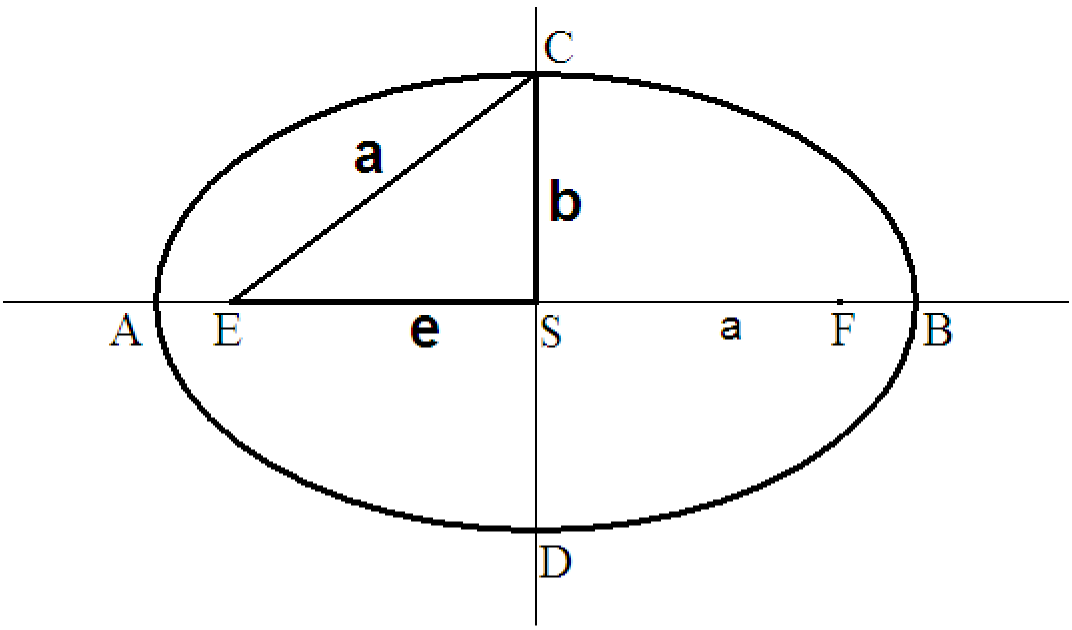
b - vedlejší poloosa elipsy

e - excentricita elipsy

Vztahy, které zde platí:

$|EX| + |FX| = 2a$, $|EF| < 2a$, $|EC| = |FC| = a$, $|ED| = |FD| = a$

Trojúhelník ESC se nazývá charakteristický trojúhelník elipsy a pro jeho strany platí rovnost: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + e^2}$



obr. 8 Charakteristický trojúhelník elipsy

Aby byla splněna trojúhelníková nerovnost, musí pro libovolný bod X elipsy platit:

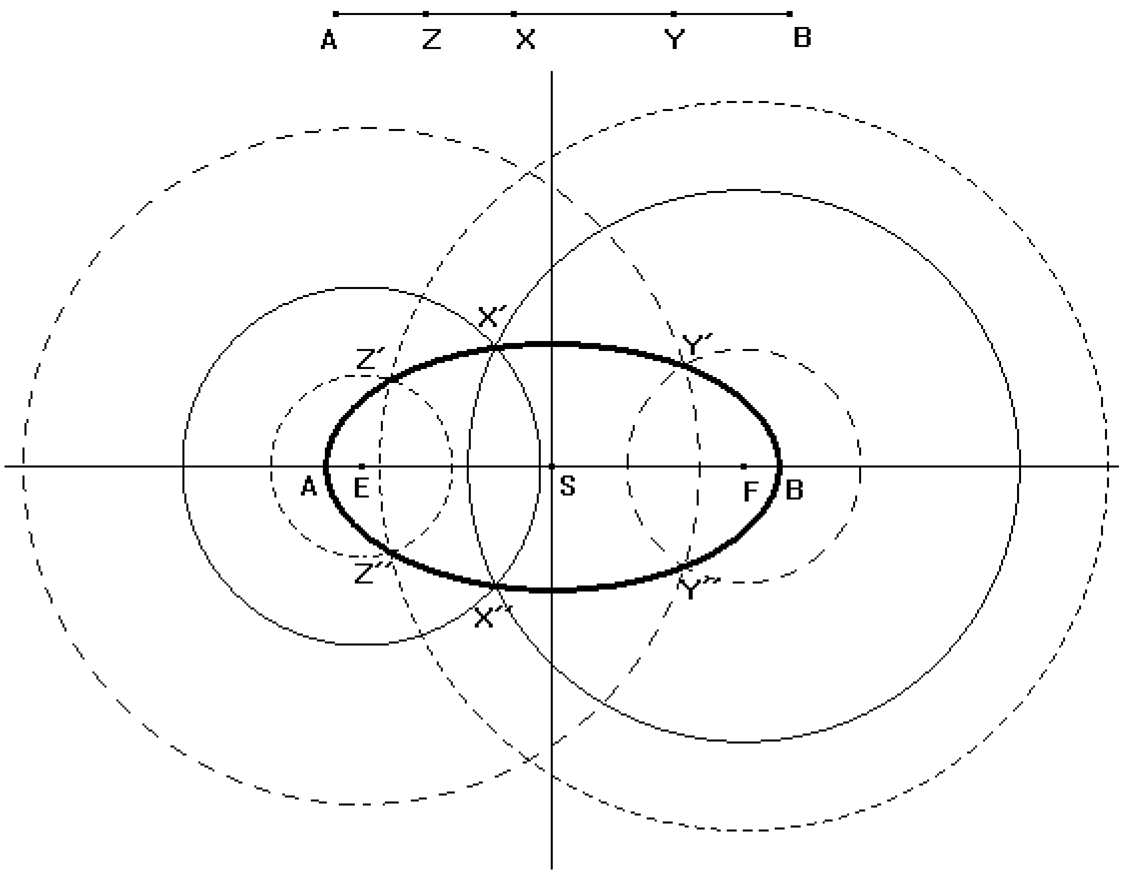
$|XE| + |XF| \geq |EF|$

Konstrukce elipsy podle definice (bodová konstrukce elipsy):

Zvolíme libovolný bod Z na úsečce AB, čímž získáme 2 úsečky o délkách $|AZ|$ a $|BZ|$.

Sestrojíme kružnici se středem E a poloměrem $|AZ|$ a kružnici se středem F a poloměrem$|BZ|$. V průsečících obou sestrojených kružnic leží první dva body elipsy.

Dále můžeme sestrojit ještě kružnici se středem F a poloměrem $|AZ|$ a kružnici se středem E a poloměrem $|BZ|$. Postup opakujeme, dokud nezískáme potřebný počet bodů nezbytných k sestrojení elipsy.



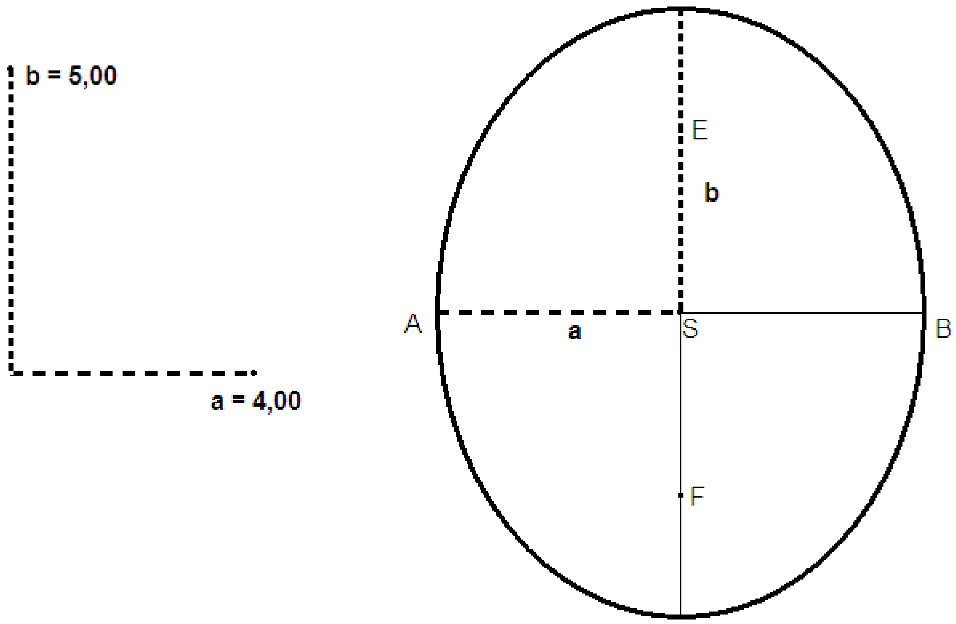
obr. 9 Konstrukce elipsy podle bodové definice

Pro poloměry pomocných kružnic platí: $r_1 + r_2 = 2a$

Elipsa je osově souměrná podle hlavní osy i podle vedlejší osy, zároveň je středově souměrná podle středu elipsy.

Příklady:

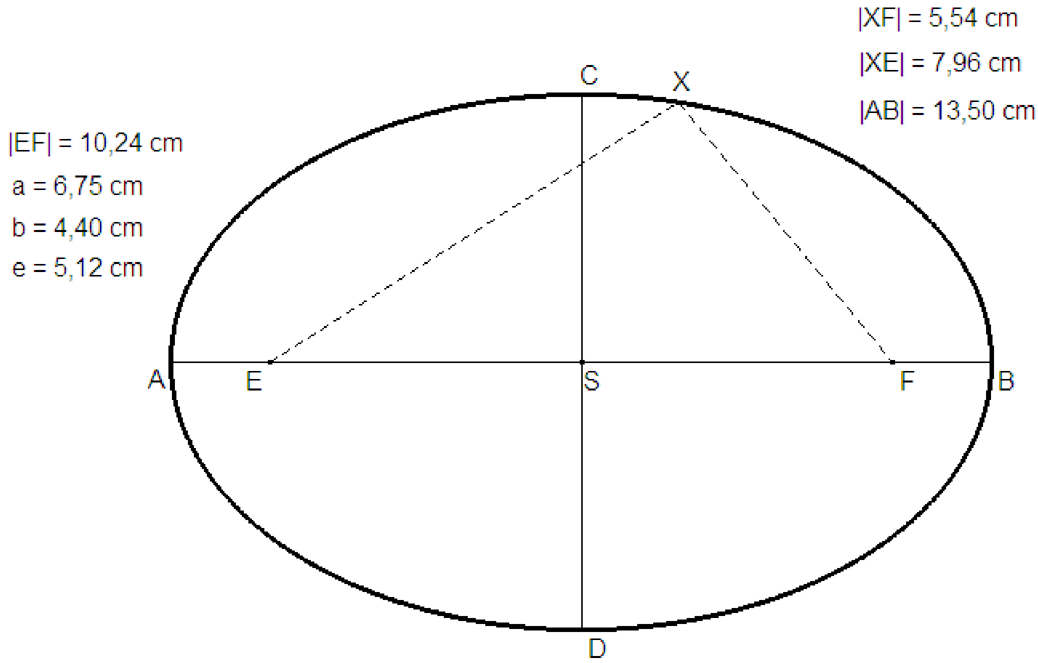
1. Sestrojte kuželosečku, kterou tvoří množina bodů, které mají stejný součet vzdáleností od dvou daných pevných bodů.



obr. 7 Řešení - poloosy

V konstrukci můžeme pohybovat bodem S a měnit velikost poloos a a b.

a) Jaký vliv má změna polohy bodu S na tvar elipsy?
b) Co na elipse ovlivňuje změna pozice bodu S?
c) Jak se elipsa mění, když měníme pouze velikost poloosy a?
d) Jak se elipsa mění, když měníme pouze velikost poloosy b?
e) Jaká tvar má elipsa v případě, kdy se velikost poloosy a rovná velikosti poloosy b?
f) Jaký tvar má elipsa, když je velikost poloosy a větší než velikost poloosy b?
g) Jaký tvar má elipsa, když je velikost poloosy b větší než velikost poloosy a?
h) Co můžeme říci o vlivu poměru a:b na tvar elipsy?



obr. 8 Řešení - body elipsy

V konstrukci lze pohybovat body A, B, E, X.

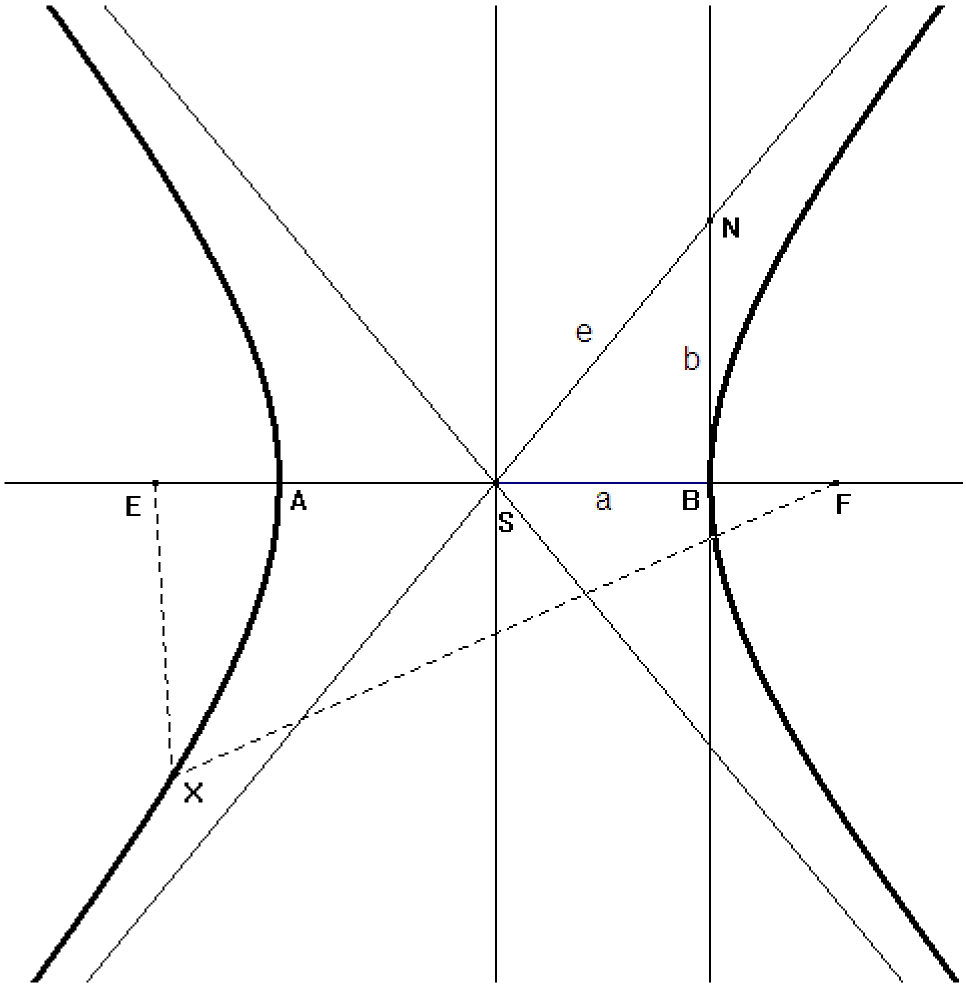
a) Pohybujte bodem X po elipse a sledujte, že součet vzdáleností bodu X od obou ohnisek je konstantní a je opravdu roven velikosti úsečky AB.
b) Jak se mění tvar elipsy, když pohybujeme ohniskem E?
c) Co platí pro velikosti poloos a a b a pro excentricitu e v případě, kdy obě ohniska splynou se středem S?
d) Jaký má elipsa tvar v momentě, kdy obě ohniska splynou se středem S?
e) Co by se stalo s velikostmi poloos a, b a s excentricitou e, kdybychom pohybovali bodem A po kružnici se středem S a poloměrem |AB| ?

Hyperbola[1]

Def.1 Geometrické místo všech bodů v rovině, které mají stejný rozdíl vzdáleností od dvou různých daných pevných bodů, se nazývá hyperbola. (Menšík, 1981, s. 37)

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/definice_h.php

Def. 2 V rovině jsou dány dva různé body E, F. Množina všech bodů X v rovině, pro které je rozdíl vzdáleností bodu X od bodů E a F ($\left||XF| - |XF|\right|$) roven danému kladnému číslu menšímu než $|EF|$se nazývá hyperbola. (Kočandrle, 2000, s. 182)



obr. 9 Hyperbola - popis

E, F - ohniska hyperboly ($|EF| = 2e, |ES| = |FS| = e\ |EC| = a, |AS| = a, |CS| = b, |ES| = e$)

S - střed hyperboly

A, B - hlavní vrcholy hyperboly ($|AS| = |BS| = a, |AB| = 2a|EC| = a, |AS| = a, |CS| = b, |ES| = e$), přímka AB - hlavní osa hyperboly

EX, FX - průvodiče bodu X

a - hlavní poloosa hyperboly

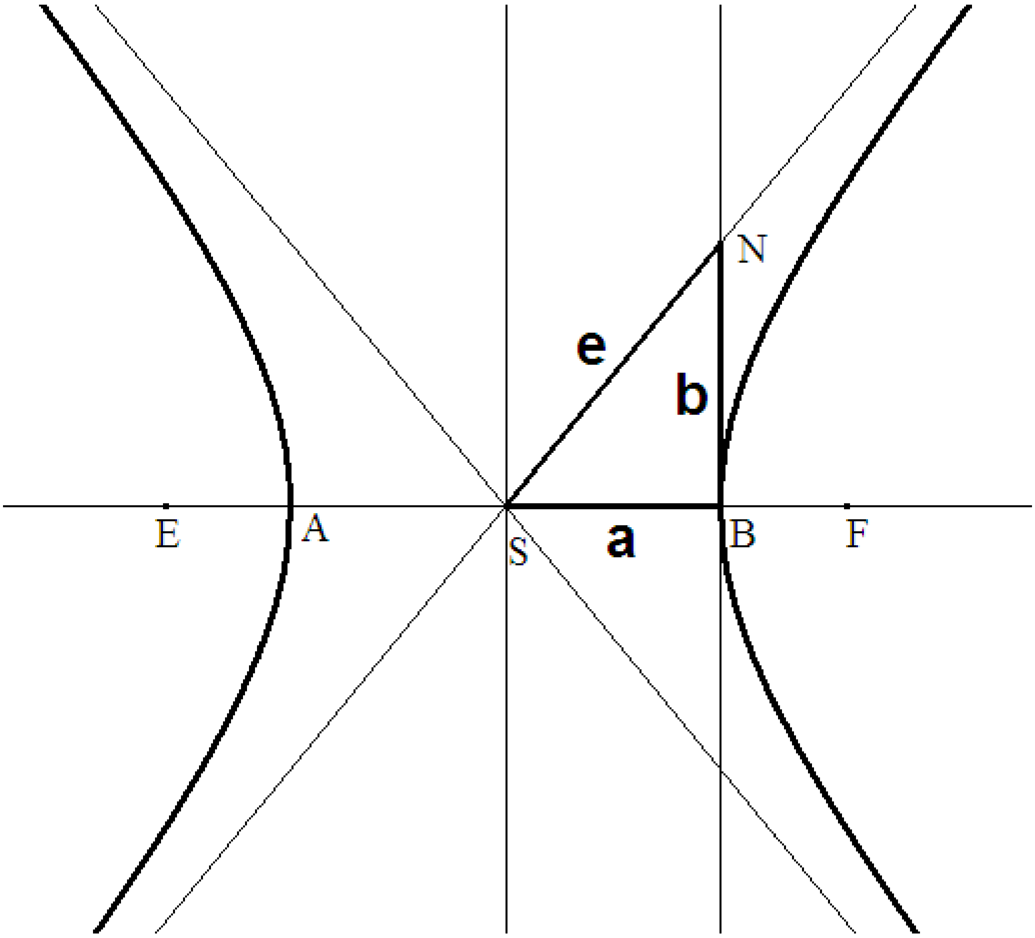
b - vedlejší poloosa hyperboly

e - excentricita hyperboly

Vztahy, které zde platí:

$\big||EX| - |FX|\big| = 2a$, $|EF| > 2a$, $|EN| = e$, $|BN| = b$

Trojúhelník SBN se nazývá charakteristický trojúhelník hyperboly a pro jeho strany platí rovnost: $\boldsymbol{e^2 = a^2 + b^2}$



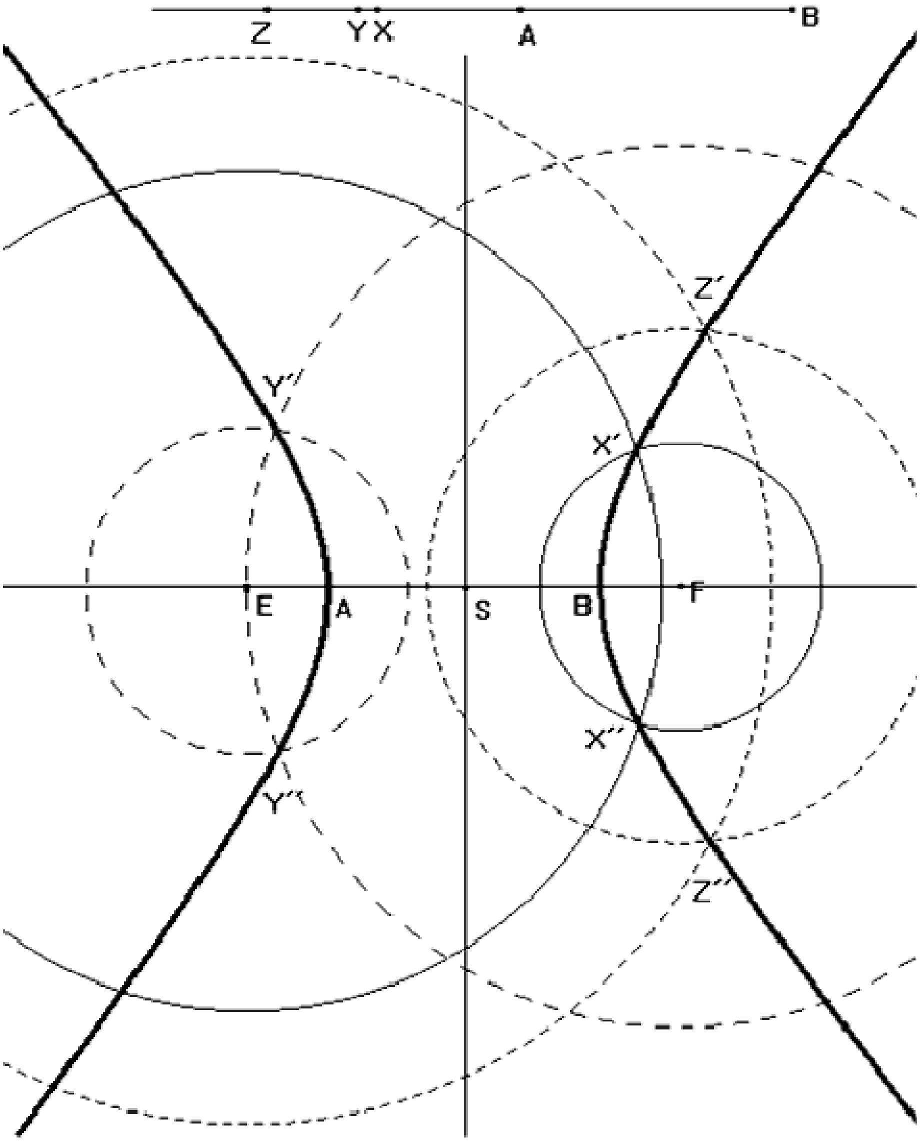
obr. 10 Charakteristický trojúhelník hyperboly

Aby byla splněna trojúhelníková nerovnost, musí pro libovolný bod X hyperboly platit:

$|XE| + |XF| \geq |EF|$

Konstrukce hyperboly podle definice (bodová konstrukce hyperboly):

Zvolíme libovolný bod Z na polopřímce BA, tak aby platilo: , tím získáme dvě úsečky o délkách a . Sestrojíme kružnici se středem E a poloměrem a kružnici se středem F a poloměrem . V průsečících obou sestrojených kružnic leží první dva body hyperboly. Dále můžeme sestrojit ještě kružnici se středem F a poloměrem a kružnici se středem E a poloměrem .Postup opakujeme, dokud nezískáme potřebný počet bodů nezbytných k sestrojení hyperboly.



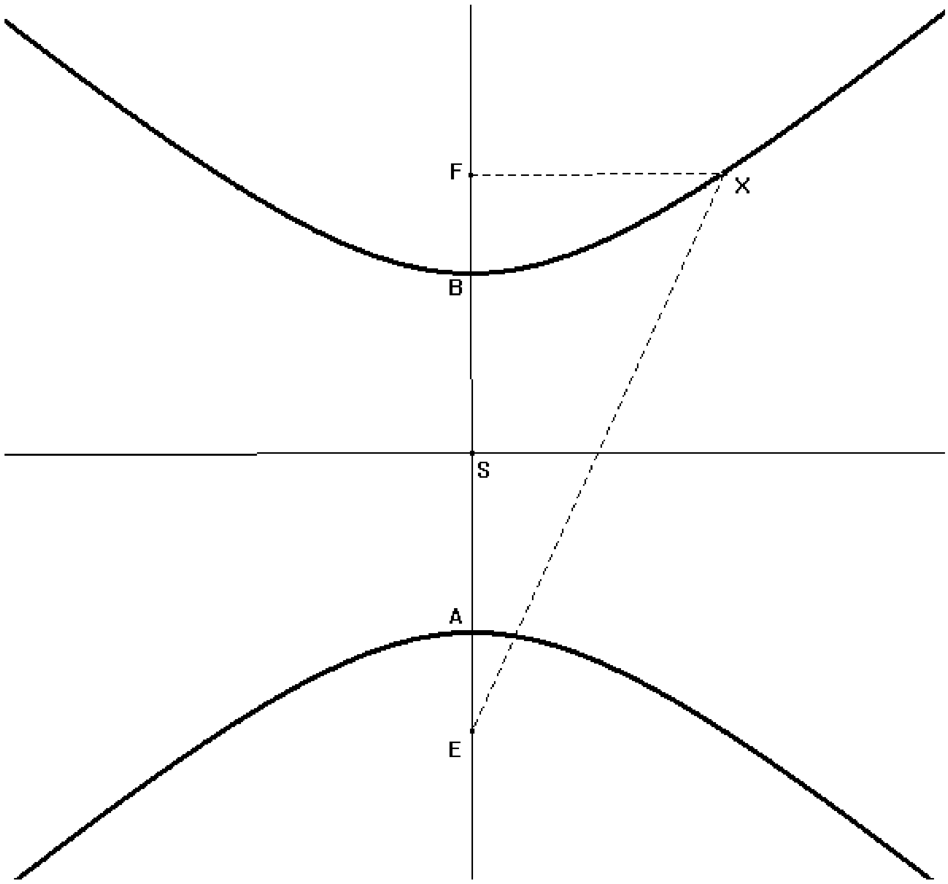
obr. 11 Konstrukce hyperboly podle definice

Pro poloměry pomocných kružnic platí:$|\, r_1 - \, r_2| = 2a$

Hyperbola je osově souměrná podle hlavní osy i podle vedlejší osy, zároveň je středově souměrná podle středu hyperboly.

Příklady:

1. Sestrojte množinu bodů, které mají stejný rozdíl vzdáleností od dvou daných pevných bodů.



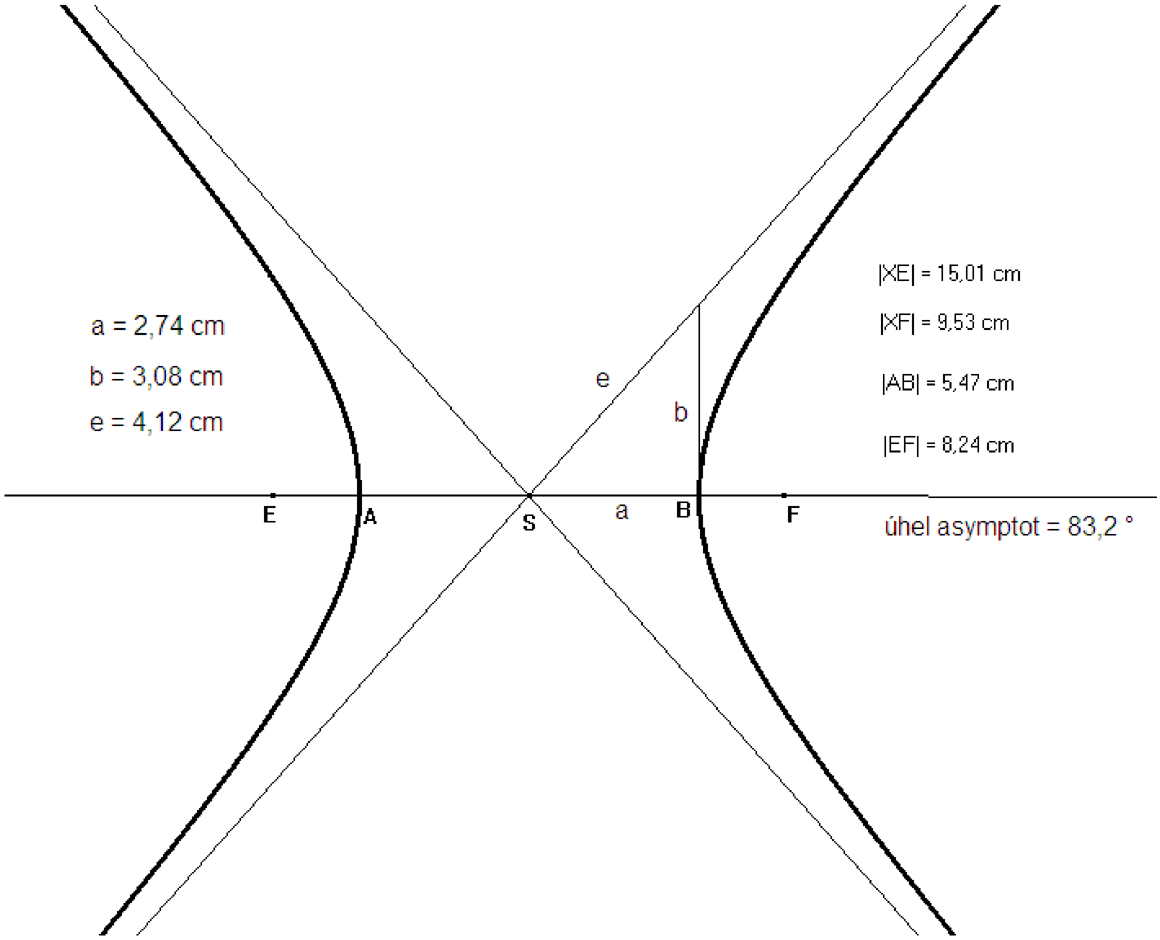
obr. 12 Řešení - bod na hyperbole

V konstrukci můžete pohybovat bodem X, ohniskem E a body A a B na pomocné polopřímce BA.

a) Jak se mění vzdálenost ohnisek E, F, při pohybu bodu X po hyperbole?
b) Jaké změny na tvaru hyperboly pozorujeme, pohybujeme-li ohniskem E směrem od středu S, případně ke středu S?

c) Co se s parabolou stane, když ohniska splynou s vrcholy hyperboly? Proč se to tak stane?

d) Vyjádřete poměr vzdáleností ohniska F od středu S hyperboly ke vzdálenosti vrcholu A od středu S, aby hyperbola byla rovnoosá?



obr. 13 Řešení - asymptoty

e) Pohybujte body A, B, E tak, aby asymptoty svíraly pravý úhel. Co poté platí pro velikosti poloos a, b a excentricitu e?

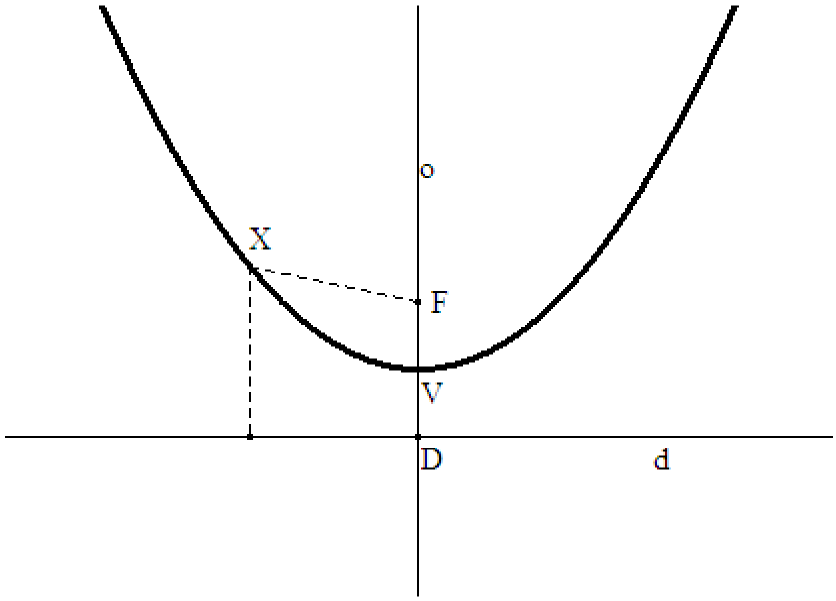
f) Jak se nazývá hyperbola, jejíž osy svírají pravý úhel?

g) Jaká může být nejmenší a největší velikost úhlu, který svírají asymptoty hyperboly?

Parabola

Def.1 Geometrické místo všech bodů v rovině, které mají od pevné dané přímky *d* a od pevného daného bodu *F* (bod *F* neleží na přímce *d*) stejnou vzdálenost, se nazývá parabola.(Menšík, 1981, s. 43)

Def. 2 V rovině je dán bod *F* a přímka *d*, která jím neprochází. Množina všech bodů *X* v rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu *F* a od přímky *d*, se nazývá parabola. (Kočandrle, 2000, s. 170)



obr. 14 Parabola - popis

F - ohnisko paraboly

V - vrchol paraboly

d - řídicí přímka paraboly

EX, FX - průvodiče bodu X

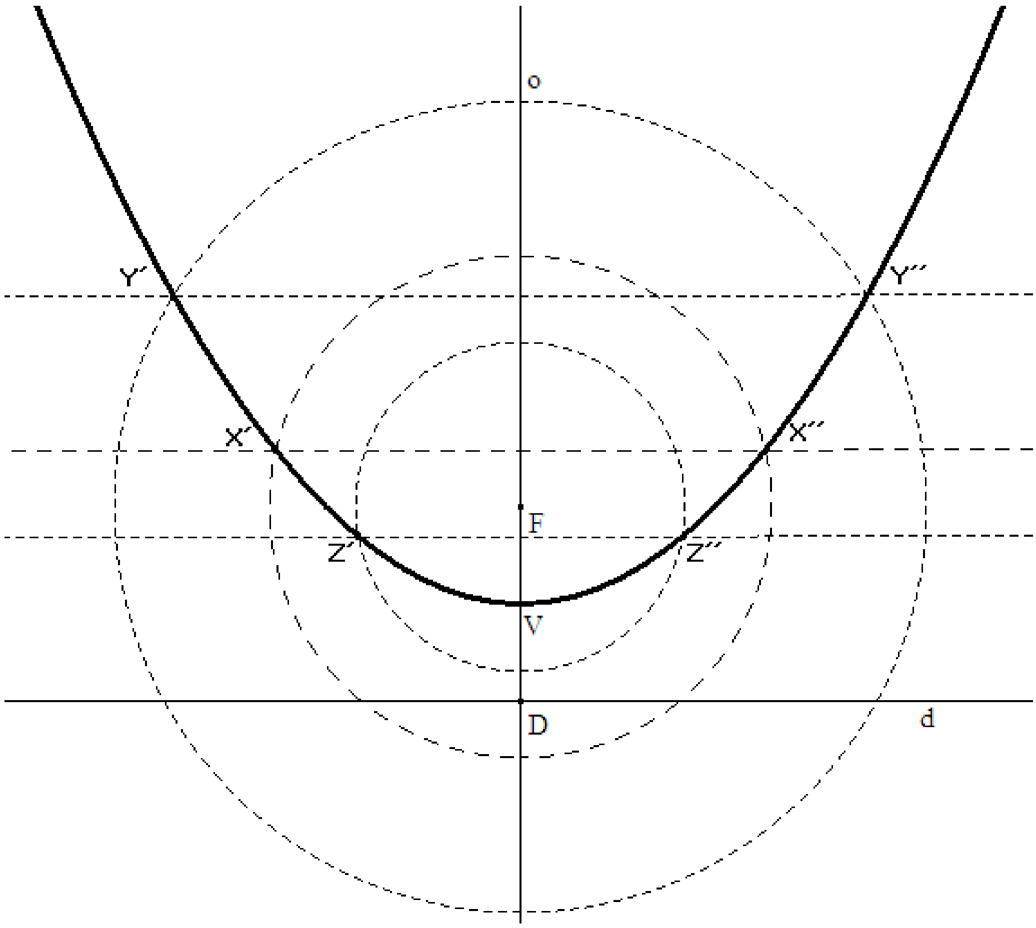
DF - parametr

Vztahy, které zde platí:

$|Xd| = |XF|$, $|DV| = |VF|$, $|XE| = |XF|$ (průvodiče jsou stejně dlouhé)

Konstrukce paraboly podle definice (bodová konstrukce paraboly)

Sestrojíme rovnoběžku s řídicí přímkou ve vzdálenosti *a*, sestrojíme kružnici se středem *F* a poloměrem *a*. V průsečících přímky a kružnice leží první dva body paraboly. Další body paraboly sestrojíme obdobně, jen měníme velikost úsečky *a*. Postup opakujeme, dokud nezískáme potřebný počet bodů nezbytných k sestrojení paraboly.

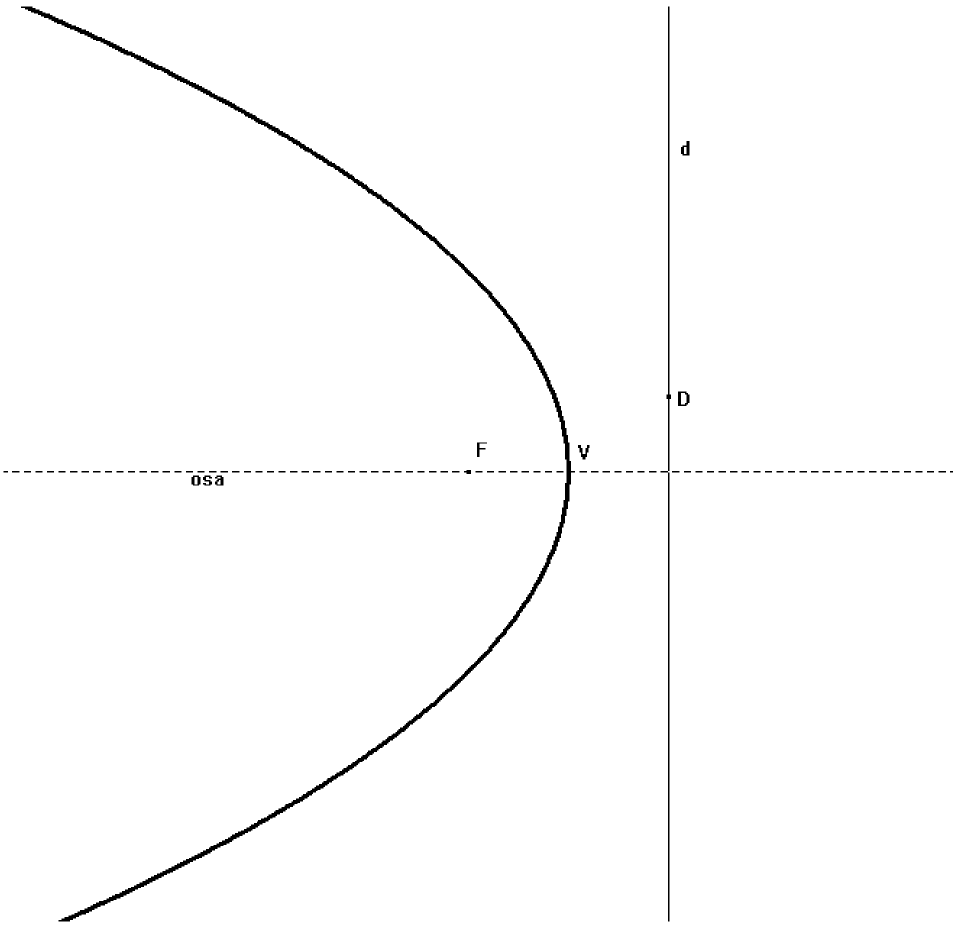


obr. 15 Konstrukce paraboly podle definice

Parabola je osově souměrná podle osy o, která prochází ohniskem a je kolmá k řídící přímce.

Příklady:

1. Narýsujte kuželosečku, kterou tvoří množina bodů stejně vzdálených od daného bodu jako od dané přímky.



obr. 16 Řešení - bod na parabole

V konstrukci je možné pohybovat body F a D a přímkou d.

a) Jak se mění tvar paraboly, když pohybujeme ohniskem F po ose paraboly?
b) Co se s parabolou děje, když ohnisko přibližujeme k přímce d a co naopak nastává, když ohnisko od přímky d oddalujeme?
c) Co pozorujeme při pohybu ohniska F rovnoběžně s přímkou d?
d) Jak se parabola mění, když přechází ohnisko F z jedné poloroviny určené přímkou d do druhé poloroviny?
e) Sledujte a popište změnu tvaru paraboly a změny parametru paraboly při pohybu bodu D.
f) Jak závisí tvar paraboly na vzdálenosti ohniska od řídicí přímky?
g) Při pohybu kterých objektů se podaří parabolu zmenšit, aby si po změně zachovala stejný tvar?

5.4. Analytické vyjádření kuželoseček[1]

Elipsa[2]

Elipsa je definována jako množinu všech bodů X v rovině, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou různých pevných daných bodů, E a F. Dané pevné body se nazývají ohniska elipsy. Platí tedy, že $|XE| + |XF| = k$, přitom musí platit, že $|XE| + |XF| > |EF|$. Častěji se ale zapisuje, že $|XE| + |XF| = 2a$, kde $2a$ značí vzdálenost dvou nevzdálenějších bodů elipsy. $|EF| = 2e$. Platí tedy vztah, že $2e < 2a$, tedy $e < a$. Přímka EF se nazývá hlavní osa elipsy a kolmice na hlavní osu procházející středem S se nazývá vedlejší osa elipsy. Elipsa je středově souměrná podle středu S a osově souměrná podle hlavní i vedlejší osy. Průsečíky elipsy s hlavní osou se nazývají hlavní vrcholy elipsy a průsečíky elipsy s vedlejší osou se nazývají vedlejší vrcholy elipsy. Dále se a označuje jako hlavní poloosa, b jako vedlejší poloosa a e jako excentricita (výstřednost), platí pro ně vztah: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$|AB| = 2a, |CD| = 2b, |EC| = a, |AS| = a, |CS| = b, |ES| = e$

Čím více se ohniska blíží ke středu, tím se excentricita zmenšuje a elipsa se „rozšiřuje“ a podobá se kružnici. V okamžiku, kdy ohniska splynou se středem, dostáváme zvláštní případ elipsy nazývaný kružnice. Elipsa se středem S[m, n], jejíž hlavní i vedlejší poloosa jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic, má rovnici ve tvaru: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, případně $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, když platí, že hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

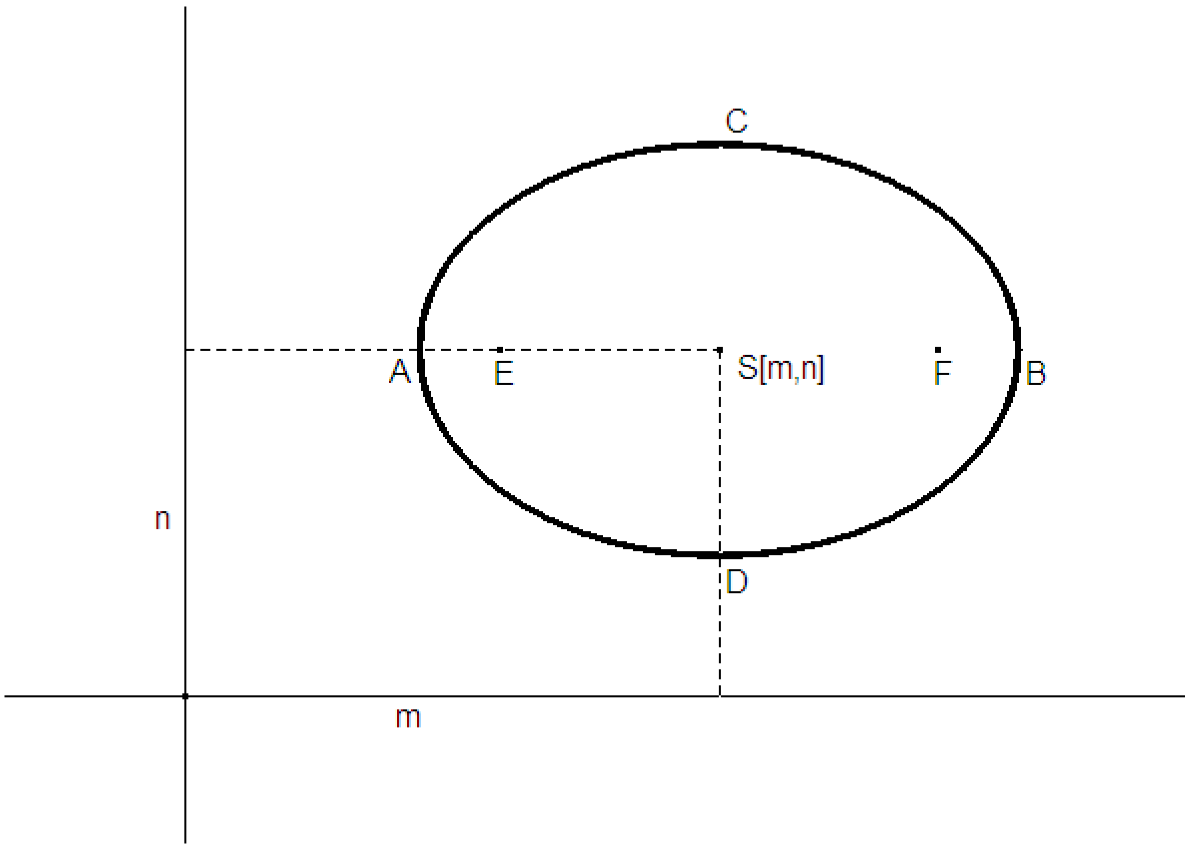
Rovnici elipsy odvodíme z vyjádření vzdálenosti libovolného bodu elipsy X[x, y] od středu S[m, n]. Tato rovnice se nazývá středová rovnice elipsy nebo případně středový tvar elipsy.

Tu ještě můžeme upravit na tvar $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$, kde platí, že

$|a| \neq |b|, a.b > 0$. Toto vyjádření nazýváme obecná rovnice elipsy, nebo také obecný tvar elipsy.

---

[1] Dostupné z http://www.kuzelosecky.cz/analyticky.php
[2] Dostupné z http://www.kuzelosecky.cz/anaylticky_e.php



obr. 17 Analytické vyjádření elipsy

Kružnice

V planimetrii je kružnice definována jako množina všech bodů X, které mají stejnou vzdálenost od daného pevného bodu. Daný pevný bod se nazývá střed kružnice a značí se *S*. Daná vzdálenost se nazývá poloměr kružnice a značíme ho *r*. V rovině bývá zvolena kartézská soustava souřadnic. Střed kružnice *S* má souřadnice [m, n]. Pak je bod X[x, y] bodem této kružnice právě tehdy, když platí, že vzdálenost bodu X od středu kružnice je rovna poloměru kružnice. Tedy $|XS| = r$ je možné vyjádřit jako: $\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$. Následnou úpravou této rovnice (umocněním na druhou) $\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$ se vztah upraví na $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, který se nazývá středová rovnice kružnice nebo středový tvar kružnice. Rovnici lze ještě dále upravit na tvar $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$, který je ale častěji zapisován v podobě $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \neq 0$, ten se označuje jako obecná rovnice kružnice nebo také obecný tvar kružnice. V případě, že má kružnice svůj střed v počátku soustavy souřadnic, její rovnice se zjednoduší na tvary: $x^2 + y^2 = r^2$ pro středovou rovnici a $x^2 + y^2 + c = 0$ pro obecnou rovnici.

Hyperbola[1]

Hyperbolu je definována jako množinu všech bodů X v rovině, které mají konstantní rozdíl vzdáleností od dvou různých pevných daných bodů. Dané pevné body se nazývají ohniska hyperboly. Platí tedy, že $\big||XE| - |XF|\big| = k$, přitom musí platit, že $|XE| - |XF| < |EF|$. Častěji se ale zapisuje, že $\big||XE| - |XF|\big| = 2a$, kde $2a$ značí vzdálenost dvou vrcholových bodů hyperboly. $|EF| = 2e$.

Platí tedy vztah, že $2e > 2a$, tedy $e > a$. Přímka EF se nazývá hlavní osa hyperboly a kolmice na hlavní osu procházející středem S se nazývá vedlejší osa hyperboly. Hyperbola je středově souměrná podle středu S a osově souměrná podle hlavní i vedlejší osy. Průsečíky hyperboly s hlavní osou se označují hlavní vrcholy hyperboly. Jejich vzdálenost je rovna *2a*. Dále se a označuje jako hlavní poloosa, b jako vedlejší poloosa a *e* jako excentricita (výstřednost), platí pro ně vztah: $e = \sqrt{a^2 + b^2}$. Proto b je možné vyjádřit jako $b = \sqrt{e^2 - a^2}$

$|AB| = 2a$, $|CD| = 2b$, $|AS| = a, |CS| = b, |ES| = e$

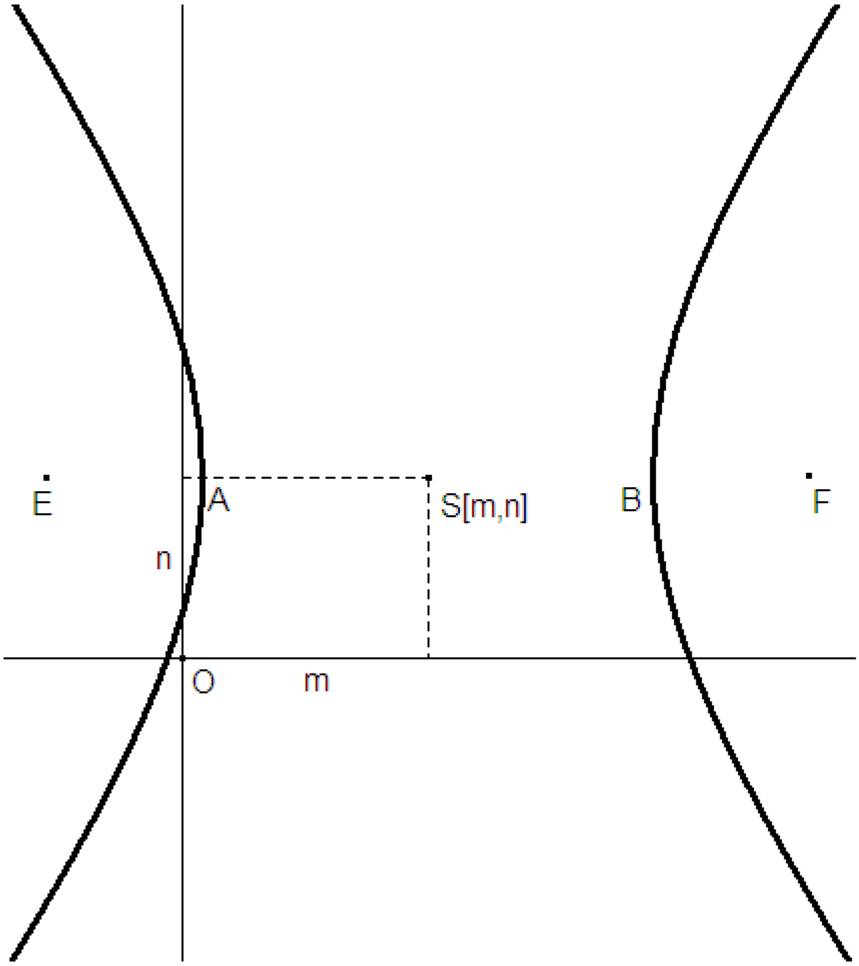
Hyperbola není na rozdíl od elipsy nebo paraboly souvislá křivka, je složena ze dvou částí, které se nazývají větve hyperboly. Větve hyperboly se blíží ke dvěma přímkám, asymptotám. Je-li $a = b$, potom hyperbolu nazýváme rovnoosou hyperbolou. Hyperbola se středem S[m, n], jejíž hlavní i vedlejší poloosa jsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy souřadnic, má rovnici ve tvaru: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, případně $-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, když platí, že hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

Rovnice hyperboly se odvozuje z vyjádření vzdálenosti libovolného bodu hyperboly X [x, y] od středu S [m, n]. Tato rovnice se nazývá středová rovnice hyperboly nebo případně středový tvar hyperboly. Ta ještě můžeme být upravena na tvar

$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$, kde platí, že

[1] Dostupné z http://www.kuzelosecky.cz/analyticky_h.php

$a.b < 0$. Toto vyjádření se nazývá obecná rovnice hyperboly, nebo také obecný tvar hyperboly.



obr. 18 Analytické vyjádření hyperboly

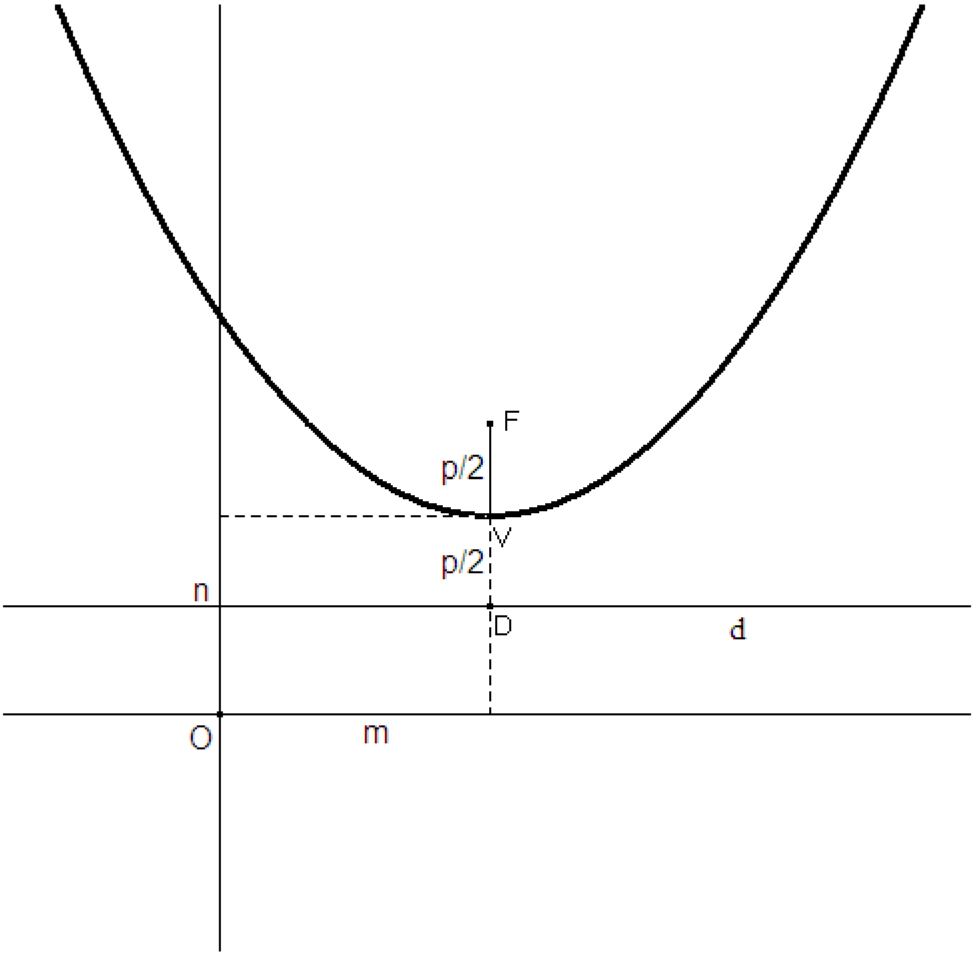
Parabola[1]

Parabola je definována jako množina všech bodů X v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného pevného bodu a od dané pevné přímky, která tím bodem neprochází. Daný pevný bod se nazývá ohnisko paraboly a značí se ho F, daná pevná přímku se nazývá řídicí přímka a značí se d. Kolmice k řídicí přímce, která prochází ohniskem, se nazývá osa paraboly. Průsečík osy paraboly s řídicí přímkou se označuje D a průsečík osy paraboly s parabolou se označuje V, jako vrchol. Pro libovolný bod paraboly X[x, y] potom platí, že $|Xd| = |XF|$. Vzdálenost ohniska od řídicí přímky p se označuje jako parametr paraboly.

[1] Dostupné z http://www.kuzelosecky.cz/analyticky_p.php

$p = |FD|$

Parabola, která má vrchol V[m, n] a osu rovnoběžnou s osou x kartézské soustavy souřadnic má rovnici tvaru: $(y-n)^2 = 2p(x-m)$, nebo $(y-n)^2 = -2p(x-m)$. Parabola, která má osu rovnoběžnou s osou y kartézské soustavy souřadnic má tvar $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ nebo $(x-m)^2 = -2p(y-n)$. Tyto rovnice se nazývají vrcholové rovnice paraboly, nebo také osové rovnice paraboly. Rovnice je ještě možné upravit na obecnou rovnici paraboly: $x^2 + ax + by + c = 0$, kde platí, že $b \neq 0$, nebo $y^2 + ax + by + c = 0$, kde platí, že $a \neq 0$. Parabola je osově souměrné podle své osy.



obr. 19 Analytické vyjádření paraboly

5.5. Jednoohnisková definice kuželoseček[1]

Jednoohnisková definice nebo také definice s pomocí řídicí přímky a ohniska. Je to definice, kterou lze využít pro všechny tři typy kuželoseček. Obecně je možné ji zapsat takto: V rovině je dána přímka d a bod *F*, který na ní neleží. Excentricita je kladné reálné číslo *e* takové, že pro přímku *d*, ohnisko *F* a bod *X* v rovině platí:

$|XF| = e.|Xd|, e \in R^+$

$|XF|$ - vzdálenost bodu *X* od ohniska *F*

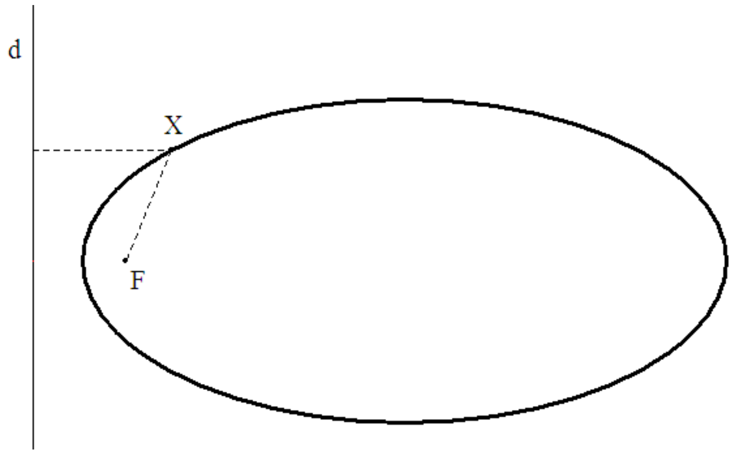
$|Xd|$ - vzdálenost bodu *X* od řídicí přímky *d*

Jako výsledná kuželosečka může vzniknout elipsa, hyperbola nebo parabola. Elipsa je uzavřená omezená křivka, parabola je naopak otevřená a neomezená, nekonečná. Hyperbola je složena ze dvou větví symetrických podle průsečíku jejich společných asymptot, je také otevřená a neomezená. (Weisstein, 1999)

Elipsa[2]

V rovině je dána přímka *d* a bod *F*, který na ní neleží. Elipsa je množina všech bodů roviny, které mají poměr vzdáleností od bodu *F* a od řídicí přímky *d* (která jím neprochází) rovný danému kladnému číslu *e*, které je menší než 1. (Kuřina, 1996, s. 223)

$$|XF| = e.|Xd|, e < 1$$



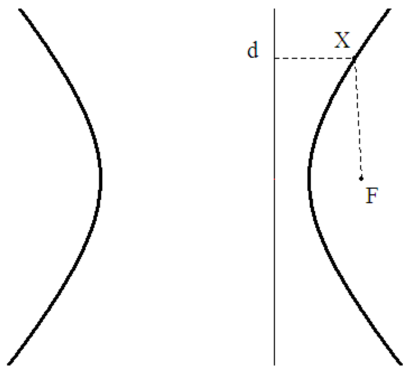
obr. 20 Elipsa sestrojená podle řídicí přímky

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/jednoohnisko.php
[2] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/jednoohnisko_e.php

Hyperbola[1]

V rovině je dána přímka d a bod F, který na ní neleží. Hyperbola je množina všech bodů roviny, které mají poměr vzdáleností od bodu F a od řídicí přímky d (která jím neprochází) rovný danému kladnému číslu e, které je větší než 1. (Kuřina, 1996, s. 224)

$$|XF| = e.|Xd|, e > 1$$

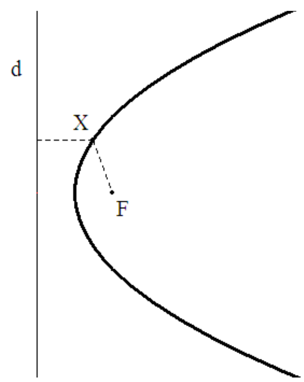


obr. 21 Hyperbola sestrojená podle řídicí přímky

Parabola[2]

V rovině je dána přímka d a bod F, který na ní neleží. Parabola je množina všech bodů roviny, které mají poměr vzdáleností od bodu F a od řídicí přímky d (která jím neprochází) roven danému kladnému číslu e = 1.

$$|XF| = e.|Xd|, e = 1$$

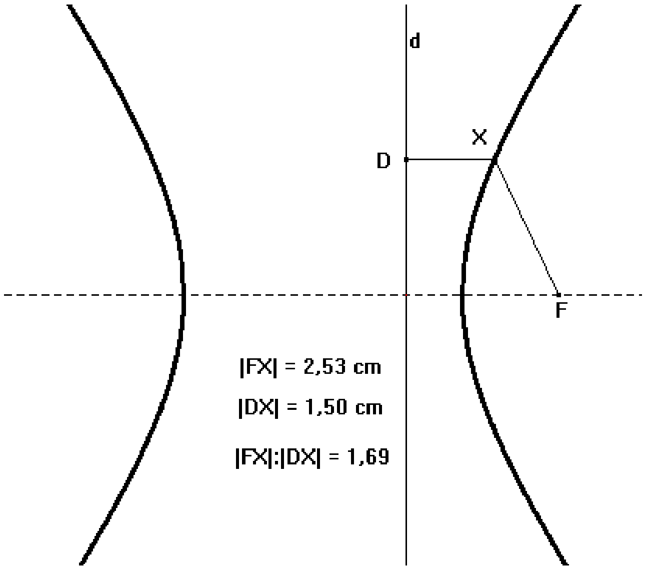


obr. 22 Parabola sestrojená podle řídicí přímky

Příklady[1]:

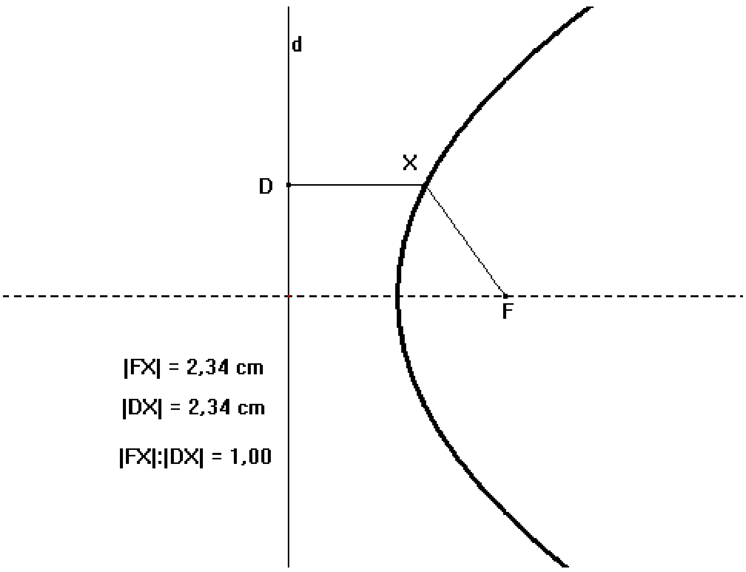
[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/jednoohnisko_h.php
[2] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/jednoohnisko_p.php

Sestrojte množinu bodů, které mají stejný poměr vzdáleností od dané přímky a od daného bodu. Co může být touto množinou? Na čem řešení závisí?



obr. 23 Řešení - hyperbola

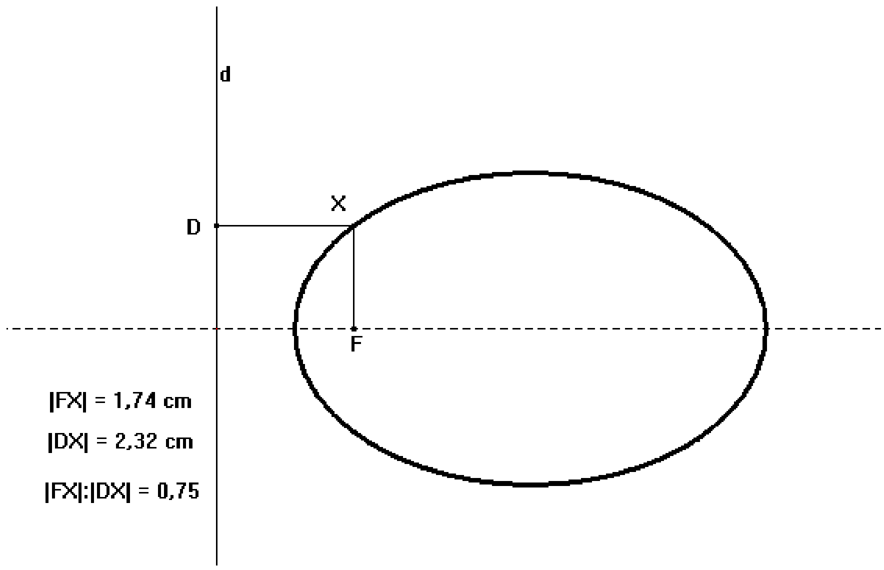
Pro poměr vzdáleností |FX| : |DX| > 1 je výslednou kuželosečkou hyperbola.



obr. 24 Řešení - parabola

Pro poměr vzdáleností |FX| : |DX| = 1 je výslednou kuželosečkou parabola.

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/jednoohnisko.php



obr. 25 Řešení - elipsa

Pro poměr vzdáleností |FX| : |DX| < 1 je výslednou kuželosečkou elipsa.

Záleží na poměru vzdáleností hledaného bodu X od bodu a od přímky. Výsledkem může být parabola, hyperbola i elipsa.

Pohybovat můžeme body X a F. Tím, jak pomocí pohybu těchto bodů upravujeme poměr vzdáleností |FX| : |DX|, dostaneme postupně všechny tři základní typy kuželoseček.

a) Co se stane v okamžiku, kdy splyne bod F s bodem X?
b) Co nastane v okamžiku, kdy splyne bod F s bodem D?
c) Co nastane v okamžiku, kdy splyne bod X s bodem D?

5.6.Kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností[1]

Kuželosečky je možné definovat také jako množiny bodů daných vlastností. Tato kapitola bude zaměřena především na příklady, proto nebude tak, jako ostatní kapitoly vztahující se ke kuželosečkám dělena zvlášť na část o elipse, část o hyperbole a část o parabole, protože ze zadání příkladu není předem jasné, která z kuželoseček bude jeho řešením.

Příklady[2]

Kuželosečky jako množiny středů kružnic určité vlastnosti, případně středů úseček

1. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných kružnic m a n, jestliže kružnice m je částí vnitřní oblasti kružnice n (kružnice m, n nejsou soustředné)
2. Najděte geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice a procházejí daným bodem. (bod leží vně kružnice, bod leží uvnitř kružnice)
3. Najděte geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají dvou daných kružnic, které nemají žádný společný bod a jedna neleží uvnitř druhé.
4. Určete množinu středů kružnic, které se dotýkají dané pevné kružnice a její dané pevné tečny.(parabola)
5. Co je geometrickým místem bodů, z nichž se jeví daná parabola v pravém úhlu (průsečíky tečen, které svírají pravý úhel)? (přímka kolmá na osu dané paraboly = její řídicí přímka)
6. Vyšetřete vzájemnou polohu přímky a paraboly v závislosti na parametru p. (přímka: $2x - 5y + p = 0$, parabola: $x^2 = 4y - 2x + 4$)
7. Určete nejkratší vzdálenost bodu na parabole od přímky.
8. Najděte tečnu paraboly v daném bodě.
9. Najděte bod, ve kterém svírá tečna paraboly s řídicí přímkou paraboly úhel 45°.
10. Jaký úhel svírá tečna s osou paraboly?
11. Najděte společné tečny elipsy a hyperboly.
12. Najděte množinu bodů, které tvoří vrcholy trojúhelníka s pevnou danou stranou.

---

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/mnoziny.php
[2] Příklady jsou převážně čerpány z Hlaváček, 1965, Menšík, Setzer, 1976, Kuřina 1996, Kočandrle, 1995

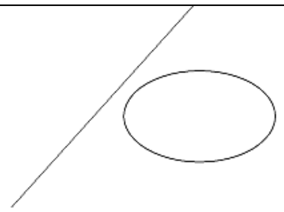
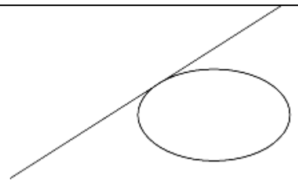
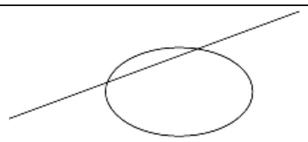
13. Určete množinu středů kružnic, které se dotýkají dvou daných kružnic o poloměrech r_1 a r_2 a délce středné a. (Jak se mění řešení, když se mění poměr $r_1 : r_2$? Jak se mění řešení se změnou délky středné a?
14. Určete množinu středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice a leží v dané vzdálenosti od středu kružnice? (Jak se mění řešení v závislosti na změně poloměru zadané kružnice? Jak se mění řešení v závislosti na vzdálenosti daného bodu od středu dané kružnice?)
15. Jak závisí délka tětivy, která prochází středem elipsy, na úhlu, který svírá s hlavní (vedlejší) osou elipsy?
16. Jak závisí velikost strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného elipse (jeden z vrcholů trojúhelníka leží ve vedlejším vrcholu elipsy) na vzdálenosti ohnisek, na vzdálenosti vrcholů elipsy?
17. Tečna z bodu ke kuželosečce (bod na kuželosečce leží/neleží).
18. Tečna daným směrem ke kuželosečce.
19. Určete množinu středů tětiv hyperboly, které svírají s osou y úhel 45°.
20. Co tvoří geometrické místo bodů stejně vzdálených od daného bodu a od dané přímky? (parabola)
21. Dáno 5 bodů v soustavě souřadnic, které určují kuželosečku. Jak se mění kuželosečka, když měním souřadnice bodů?

5.7.Kuželosečka a přímka[1]

V případě vztahu kuželosečky a přímky, které obě leží v jedné rovině, mohou nastat tři případy. Kuželosečka může mít s přímkou jeden společný bod, dva společné body nebo nemají žádný společný bod. Podle počtu společných bodů rozlišujeme přímky na tečny, sečny a vnější přímky (nesečny) kuželoseček.

Elipsa[2]

Přímka ležící ve stejné rovině s elipsou mohou mít jeden společný bod, potom se přímka nazývá tečna, mohou mít i dva společné body, potom se přímka nazývá sečna. Pokud nemají elipsa s přímkou žádný společný bod, nazývá se přímka vnější přímka elipsy, případně nesečna.

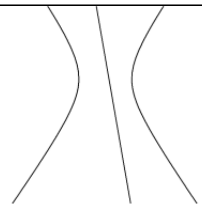
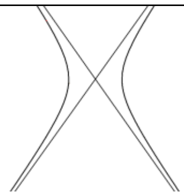
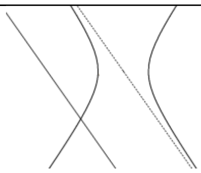
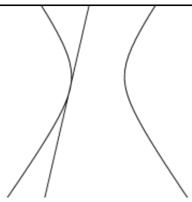
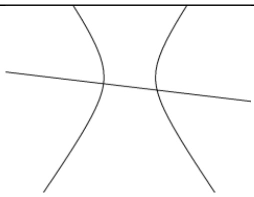
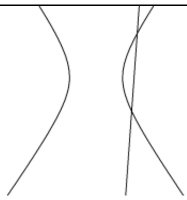
Obrázek	**Počet společných bodů**	**Vzájemná poloha přímky a elipsy**
	0	vnější přímka
	1	tečna
	2	sečna

Hyperbola[3]

Přímka ležící ve stejné rovině s hyperbolou mohou mít jeden společný bod, potom je to buď tečna, nebo sečna, která je rovnoběžná s asymptotou. Mohou mít společné i dva body, ať už jen na jedné větvi nebo na obou větvích, potom se přímka nazývá sečna.

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/primky.php
[2] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/primky_e.php
[3] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/primky_h.php

Pokud nemají hyperbola s přímkou žádný společný bod, nazývá se přímka vnější přímka hyperboly, (případně nesečna) nebo se jedná o asymptotu.

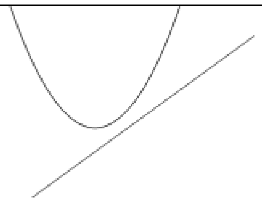
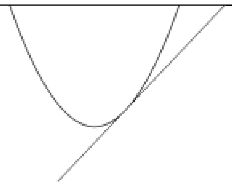
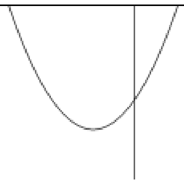
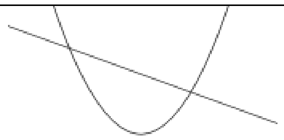
Obrázek	**Počet společných bodů**	**Vzájemná poloha přímky a paraboly**
	0	vnější přímka
		asymptoty
	1	sečna rovnoběžná s asymptotou
		tečna
	2	sečna
		

Parabola[1]

Přímka ležící ve stejné rovině s parabolou mohou mít jeden společný bod, potom se jedná buď o tečnu, nebo sečnu rovnoběžnou s osou paraboly. Dále mohou mít dva

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/primky_p.php

společné body, potom se přímka nazývá sečna. Pokud nemají parabola s přímkou žádný společný bod, nazývá se přímka vnější přímka paraboly, případně nesečna.

Obrázek	**Počet společných bodů**	**Vzájemná poloha přímky a hyperboly**
	0	vnější přímka
	1	tečna
		sečna rovnoběžná s osou paraboly
	2	sečna

5.8.Tečny kuželoseček[1]

Přímka *t*, která má s kuželosečkou právě jeden společný bod *T* a neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky, se nazývá *tečna kuželosečky*. (Polák, 1991, s. 582) Bod T se nazývá dotykový bod nebo bod dotyku přímky a kuželosečky.

Rovnice tečen ke kuželosečkám v bodě $T[x_T, y_T]$

Rovnice kuželosečky	***Rovnice tečny ke kuželosečce***
Rovnice elipsy ve středovém tvaru	Rovnice tečny k elipse

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/tecny.php

hlavní osa rovnoběžná s osou x	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x_T-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_T-n)(y-n)}{b^2}=1$
hlavní osa rovnoběžná s osou y	$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$	$\frac{(x_T-m)(x-m)}{b^2}+\frac{(y_T-n)(y-n)}{a^2}=1$
Rovnice hyperboly ve středovém tvaru		Rovnice tečny k hyperbole
hlavní osa rovnoběžná s osou x	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x_T-m)(x-m)}{a^2}-\frac{(y_T-n)(y-n)}{b^2}=1$
hlavní osa rovnoběžná s osou y	$-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$	$-\frac{(x_T-m)(x-m)}{b^2}+\frac{(y_T-n)(y-n)}{a^2}=1$
Rovnice paraboly ve středovém tvaru		Rovnice tečny k parabole
hlavní osa rovnoběžná s osou x	$(y-n)^2=2p(x-m)$ $(y-n)^2=-2p(x-m)$	$(y_T-n)(y-n)=p(x-m)+p(x_T-m)$ $(y_T-n)(y-n)=-p(x-m)-p(x_T-m)$
hlavní osa rovnoběžná s osou y	$(x-m)^2=2p(y-n)$ $(x-m)^2=-2p(y-n)$	$(x_T-m)(x-m)=p(y-n)+p(y_T-n)$ $(x_T-m)(x-m)=-p(y-n)-p(y_T-n)$

Elipsa[1]

Elipsa a přímka mají právě jeden společný bod, nazýváme ho bod dotyku. Geometricky je tečna k elipse přímka, která půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku, také můžeme říct, že je to osa vnějšího úhlu průvodičů bodu dotyku. Vnější úhel průvodičů je ten úhel, v kterém neleží střed elipsy. Analyticky získáme bod dotyku jako řešení soustavy dvou rovnic, z nichž jedna popisuje přímku (tečnu) a druhá je vyjádřením elipsy.

Příklady:

1. Sestrojte tečnu k elipse procházející bodem, který leží na elipse.

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/tecny_e.php

a) Kolik tečen můžeme sestrojit v libovolném bodě elipsy? Proč tomu tak je?
b) Pohybujte bodem T a sledujte, jak se mění rovnice tečny.
c) Pohybujte ohniskem, vrcholem elipsy, pozorujte a popište, jaký vliv mají tyto změny na tečnu.

2. Sestrojte tečnu elipsy bodem ležícím mimo elipsu.
   a) Kolik tečen můžeme sestrojit z bodu ležícího mimo elipsu? Proč tomu tak je?
   b) Pohybujte bodem M a sledujte, jak se mění rovnice tečny.
   c) Pohybujte vrcholem a ohniskem elipsy. Pozorujte a popište, jaký vliv to má na tečnu?
3. Sestrojte tečnu elipsy rovnoběžnou s daným směrem.
   a) Můžeme sestrojit tečnu rovnoběžnou s libovolným směrem?
   b) Můžeme sestrojit tečnu procházející středem elipsy?
   c) Je možné sestrojit tečnu procházející vrcholem elipsy? Co pro ni platí?
   d) Lze některou z tečen zkonstruovat jednodušším postupem než tím, který platí obecně pro libovolný bod elipsy?
   e) Musíme mít narýsovanou celou elipsu, abychom mohli zkonstruovat její tečnu? Které prvky jsou pro konstrukci tečny nezbytně nutné?

Hyperbola[1]

Hyperbola a přímka mají právě jeden společný bod, nazýváme ho bod dotyku.

Geometricky je tečna k hyperbole přímka, která půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku, také můžeme říct, že je to osa vnějšího úhlu průvodičů bodu dotyku. Vnější úhel průvodičů je ten úhel, v kterém neleží střed hyperboly.

Analyticky získáme bod dotyku jako řešení soustavy dvou rovnic, z nichž jedna popisuje přímku (tečnu) a druhá je vyjádřením hyperboly.

Příklady:

1. Sestrojte tečnu k hyperbole procházející bodem, který náleží hyperbole.
   a) Kolik tečen můžeme sestrojit v libovolném bodě hyperboly? Proč tomu tak je?
   b) Pohybujte bodem T a sledujte, jak se mění rovnice tečny.

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/tecny_h.php

c) Pohybujte ohniskem a vrcholem hyperboly, pozorujte a popište, jaký vliv mají tyto změny na tečnu.

2. Sestrojte tečnu hyperbole bodem, který na hyperbole neleží.
   a) Kolik tečen můžeme sestrojit z bodu ležícího mimo hyperbolu? Proč tomu tak je?
   b) Pohybujte bodem M a sledujte, jak se mění rovnice tečny.
   c) Pohybujte vrcholem a ohniskem hyperboly. Pozorujte a popište, jaký vliv to má na tečnu?
3. Sestrojte tečnu hyperboly rovnoběžnou s daným směrem.
   a) Můžeme sestrojit tečnu rovnoběžnou s libovolným směrem?
   b) Můžeme sestrojit tečnu procházející středem hyperboly?
   c) Je možné sestrojit tečnu procházející vrcholem hyperboly? Co pro ni platí?
   d) Lze některou z tečen zkonstruovat jednodušším postupem než tím, který platí obecně pro libovolný bod hyperboly?
   e) Musíme mít narýsovanou celou hyperbolu, abychom mohli zkonstruovat její tečnu? Které prvky jsou pro konstrukci tečny nezbytně nutné?

Parabola[1]

Parabola a přímka mají právě jeden společný bod, nazýváme ho bod dotyku.

Geometricky je tečna k parabole přímka, která půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku, také můžeme říct, že je to osa vnějšího úhlu průvodičů bodu dotyku. Vnější úhel průvodičů je ten úhel, v kterém neleží střed paraboly.

Analyticky získáme bod dotyku jako řešení soustavy dvou rovnic, z nichž jedna popisuje přímku (tečnu) a druhá je vyjádřením paraboly.

Příklady:

1. Sestrojte tečnu k parabole procházející bodem ležícím na parabole.
   a) Kolik tečen můžeme sestrojit v libovolném bodě paraboly? Proč tomu tak je?
   b) Pohybujte bodem T a sledujte, jak se mění rovnice tečny.

[1] Dostupné na http://www.kuzelosecky.cz/tecny_p.php

c) Pohybujte ohniskem a řídicí přímkou paraboly, pozorujte a popište, jaký vliv mají tyto změny na tečnu.

2. Sestrojte tečnu paraboly, která prochází bodem ležícím mimo parabolu.
   a) Kolik tečen můžeme sestrojit z bodu ležícího mimo parabolu? Proč tomu tak je?
   b) Pohybujte bodem M a sledujte, jak se mění rovnice tečny.
   c) Pohybujte vrcholem a řídicí přímkou paraboly. Pozorujte a popište, jaký vliv to má na tečnu?
3. Sestrojte tečnu paraboly rovnoběžnou s daným směrem.
   a) Můžeme sestrojit tečnu rovnoběžnou s libovolným směrem?
   b) Můžeme sestrojit tečnu procházející vrcholem paraboly? Co pro ni platí?
   c) Lze některou z tečen zkonstruovat jednodušším postupem než tím, který platí obecně pro libovolný bod paraboly?
   d) Proč je v každém bodě paraboly právě jedna tečna?
   e) Musíme mít narýsovanou celou parabolu, abychom mohli zkonstruovat její tečnu? Které prvky jsou pro konstrukci tečny nezbytně nutné?

6. Závěr

Cílem práce bylo ukázat možnost použití Cabri ve výuce matematice. Práce proto demonstruje na příkladech geometrické vztahy, které pro kuželosečky platí. S daným cílem byl zvolen i trochu odlišný přístup, než dnes při výuce kuželoseček ve školách převažuje, méně zaměřený na výpočty a více na syntetickou geometrii, práci s objekty. Využití nástroje dynamické geometrie v případě kuželoseček může studentům pomoci pochopit, jaké vztahy pro kuželosečky platí. Například jim pomáhá uvědomit si, že soustava souřadnic, do které často kuželosečky umisťujeme, je v některých případech jen pomocným nástrojem pro lepší čitelnost konstrukcí a snadnější výpočty. Vztahy, které jsou pro kuželosečky definovány a také jsou na nich zkoumány, platí obecně, ať je kuželosečka v jakékoli pozici.

Obsah práce je určen především studentům středních a vysokých škol, kde se zabývají kuželosečkami ale i dalším zájemcům o geometrii. Teoretická část práce zaměřená na oblast kuželoseček vychází zejména ze středoškolských učebnic geometrie. Navíc by webové stránky vytvořené jako součást práce by mohly sloužit učitelům k seznámení s dynamickou geometrií a jako inspirace, jak je možné prvky dynamickou geometrie zapojit do výuky, případně zobrazené aplety by mohly být využity přímo jako materiály pro výuku. Právě díky zpracování ve formě www stránek se práce stává široce přístupnou. Navíc umožňuje využívat mnoho výhod Cabri bez nutnosti jakékoli instalace programu.

Pro své webové stránky jsem zvolila prezentaci s podporou CabriJava. Umožňuje to využít alespoň z části interaktivní funkce, kterými Cabri disponuje. Uživatel při tom není omezen používaným prohlížečem a při zobrazování konstrukcí lze nastavit různé parametry. Nevýhodou této metody však je, že CabriJava nezobrazuje soubory vytvořené v novější verzi Cabri II Plus pouze z Cabri II. Z Cabri II Plus lze sice soubory do Cabri II převést, ale může nastat problém s nekompatibilitou použitých funkci.

Nástroj dynamické geometrie Cabri nabízí možnost studovat kuželosečky jako geometrické útvary, u nichž lze nastavovat a měnit libovolné parametry či pozorovat jejich tvar v různých obměnách zadání. V tom je jeden z hlavních rozdílů ve srovnání s pohledem zaměřeným na jejich analytické vlastnosti studované hlavně algebraicky, který v současné době převládá. Cabri umožňuje názorně ukázat všechny vztahy a vlastnosti kuželoseček. Další, velmi podstatnou výhodu, kterou lze právě u kuželoseček využít je to, že v Cabri je možné kuželosečky velmi přesně narýsovat. Na papíře nebo na tabuli s využitím běžných rýsovacích prostředků se to podaří jen s velkými obtížemi a vyžaduje to také větší míru představivosti. Dalo by se říci, že jejich výsledný tvar je založen na odhadu na základě několika bodů, které jsou sestrojeny. V případě mnoha jiných geometrických konstrukcí Cabri především usnadní a urychlí práci. Dynamická geometrie otvírá vedle toho ale pro kuželosečky spoustu dalších možností práce. Například je díky Cabri možné názorně demonstrovat, kolik toho mají jednotlivé typy kuželoseček společného a jak moc si jsou blízké.

Apollonius z Pergy definoval kuželosečky jako množiny bodů, které jsou společné rotační kuželové ploše a rovině, která ji protíná. (Fuchs, E., Bečvář, J., 1993, str. 13) Skutečnost, která z kuželoseček vznikne, zde záleží pouze na velikosti úhlu, který svírá řezná rovina s osou kuželové plochy. Cabri dovoluje sečnou rovinou natáčet, pozorovat tuto závislost a postupně tak sledovat všechny kuželosečky na jediném obrázku. Další definice zavádí kuželosečky jako množiny bodů, které mají určitý poměr vzdáleností od řídicí přímky a od daného pevného bodu. I zde je možnost narýsovat zároveň všechny kuželosečky v jediné konstrukci. Stačí měnit poměr vzdáleností bodů od přímky a od ohniska a a díky tomu pozorovat postupně elipsu, parabolu i hyperbolu. Tím, že měníme vstupní parametry, mění se postupně i výsledná kuželosečka. S použitím běžných rýsovacích pomůcek je výsledkem obdobné konstrukce jen jedna kuželosečka, a pro narýsování dalších je nutné s obměněným zadáním začít znovu celou konstrukci od začátku. Díky Cabri mohou být všechny vztahy mezi kuželosečkami mnohem lépe a rychleji pochopitelné.

Literatura

[1] BAINVILLE, E. *Manuel de Cabri II Plus*. Grenoble : Cabrilog SAS, 2007

[2] BEČVÁŘ, J., FUCHS, E. *Historie matematiky I.* Brno: Komise pro vzdělávání učitelů Jednoty českých matematiků a fyziků, 1994

[3] BOČEK, L. *Analytická geometrie kuželoseček : pro 3. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku,* Praha : SPN, 1977

[4] FRACHEBOURG, P. *Cours sour les coniques*. Collège de l'Abbaye de St-Maurice, 2008 [online] Dostupné na WWW <http://www.lyca.ch/~pfrache//3os/Cours2-coniques/coniques.pdf>

[5] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4

[6] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK v Praze, PedF, 2004. ISBN 80-7290-189-3

[7] HEJNÝ, M., aj. *Teória vyučovania matematiky II*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3

[8] HLAVÁČEK, A. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky* I. Vydání 2. změněné. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971

[9] KOČANDRLE, M., BOČEK, L.: *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie*. Dotisk 2. upraveného vydání. Praha: Prométheus, 2003. ISBN 80-7196-163-9

[10] KUNTZ, G. *CabriJava Project.* 2004 [online] Dostupné na WWW <http://cabri.net/cabrijava>

[11] KUŘINA, F. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR ve spolupráci s nakladatelstvím ALBRA, 1996

[12] KUŘINA, F., PŮLPÁN, Z. *Podivuhodný svět vyšší matematiky*. Praha : Academia, 2006. ISBN 80-200-1366-0

[13] KUŘINA, F. *Problémové vyučování v geometrii*. Praha : SPN, 1976

[14] LÁVIČKA, M. *CabriJava - dynamická geometrie na WWW.* Dostupné na WWW <http://http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/ITG/texty/CabriJava_navod.pdf >

[15] MÍDA: *Analytická geometrie kuželoseček,* Praha : Karolinum, 1992. ISBN 80-7066-699-4

[16] MENŠÍK, M., SETZER, O., ŠPAČEK, K. *Deskriptivní geometrie*. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1976

[17] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 6. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-267-8

[18] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*. Dotisk 2. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-079-9

[19] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. Dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-045-4

[20] SCHMARGE, K. *Conic Sections in: Ancient Greece.* In: History of Mathematics. Rutgers University, 1999, [online]. Dostupné na WWW <http://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers1999/schmarge.html>

[21] VALIŠOVÁ, A., KASÍKOVÁ H. aj. *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada Publishing, 2007

[22] VANÍČEK, J. *Dynamická geometrie*. [online]. Dostupné na WWW <http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_4296>

[23] VANÍČEK, J. *Počítačem podporovaná výuka matematiky*. [online]. Dostupné na WWW <http://www.eamos.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_9782>

[24] VANÍČEK, J. *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ.* [online]. Dostupné na WWW: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/metodika/index.html>

[25] VOPĚNKA, P. *Rozpravy s geometrií*. Praha: Panorama 1989, ISBN 80-7038-031-4

[26] VOPĚNKA, P. *Smysl matematiky*. In: Mezinárodní konference kateder matematiky připravující učitele matematiky, Liberec 2000

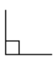
[27] VRBA, J. *Geometrie na počítači*. [online].]. Dostupné na WWW: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/kurz/>

[28] VRBA, J., VŠETULOVÁ, M. *Multimediální technologie ve vzdělávání.* Olomouc: Vydavatelství UP, 2003

[29] WEISSTEIN, E. W. *Conic Section Directrix*. In MathWorld, 1999, [online] Dostupné na WWW <http://mathworld.wolfram.com/ConicSectionDirectrix.html>

Příloha

Přehled použitých značení a pojmů

a, b, c, ...	malá písmena arabské abecedy označují přímky či kružnice
A, B, C, ...	velká písmena arabské abecedy označují body
α, β, γ, ...	písmena řecké abecedy značí úhly
AB	úsečka AB
|AB|	velikost úsečky AB
AB	přímka AB
AB	polopřímka AB, bod A je její počáteční bod
AVB	úhel AVB s vrcholem u bodu V
|AVB|	velikost úhlu AVB
∆ABC	trojúhelník ABC
□ABCD	čtverec ABCD
k(S, r)	kružnice k se středem S a poloměrem r
$A \in p$	bod A leží na p
$A \notin p$	bod A neleží na p
p || q	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$\rho \cap \pi$	průnik roviny ρ s rovinou π
$p \cap q = A$	bod A je průsečíkem přímek p, q
	označení pravého úhlu v Cabri II