Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michaela Tichá

St. Petersburg paradox

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: *Ing. Marek Omelka, Ph.D.*
Studijní program: *Matematika, obecná matematika*

2010

Poděkování: Chtěla bych poděkovat vedoucímu práce za cenné rady a připomínky, Petru Poštovi za značnou pomoc s TeXem a Danielu Krýchovi za kolegiální výpomoc.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1. 4. 2010 Michaela Tichá

Obsah

Název práce: St. Petersburg paradox
Autor: Michaela Tichá
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D.
E-mail vedoucího: omelka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt:
Práce pojednává o možných vysvětleních Petrohradského paradoxu a snaží se najít souvislost mezi vysvětleními paradoxu a reálnými jevy. Nejprve je objasněno, v čem spočívá podstata paradoxu. Poté se práce zabývá vysvětlením pomocí aplikace zákonu velkých čísel. Následně rozebírá užitkovou funkci a její souvislost s Petrohradským paradoxem, zabývá se jejími důsledky pro daňovou spravedlnost a hodnotí daňový systém ČR. Nakonec jsou pak zmíněna další přijatelná řešení jako omezenost užitkové funkce, hráčova averze k riziku a nereálnost celé hry vzhledem k neuskutečnitelnosti neomezené výhry.

Klíčová slova:
Petrohradský paradox, Daniel Bernoulli, daňová spravedlnost

Title: St. Petersburg paradox
Author: Michaela Tichá
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Ing. Marek Omelka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: omelka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract:
The concern of this thesis is to discuss possible interpretations of the St. Petersburg paradox. In the first instance the keystone of the paradox will be introduced. Subsequently we will deal with application of the law of large numbers, as well as the utility function and its consequences for the concept of tax equity. The results in this field play an important role in general evaluation of the tax system. Eventually other acceptable solutions will be mentioned, such as finiteness of the utility function, player's aversion to risk and irrationality of the whole game considering the impracticability of unlimited winnings.

Keywords: St. Petersburg paradox, Daniel Bernoulli, tax equity

Úvod

Cílem této bakalářské práce je především uvést čtenáře do problematiky Petrohradského paradoxu a seznámit ho s některými možnými vysvětleními. Téma jsem si vybrala proto, že je poměrně zajímavé, a zároveň mě značně upoutala jeho souvislost s daňovou spravedlností, jelikož teorie daní je mi velmi blízká. Dále bych se proto také pokusila pojednat o myšlenkách, které nám Petrohradský paradox přináší do daňové problematiky, a poskytnout celkový pohled zejména na spravedlnost zdanění, která je v ČR nadmíru aktuální.

Téma Petrohradského paradoxu spadá do teorie her, disciplíny aplikované matematiky, která je využívána v mnoha oblastech lidské činnosti. Je to relativně mladá disciplína, vznikla až v roce 1944, patří však mezi velice zajímavé oblasti matematiky. Stejně jako jiné problémy z teorie her poskytuje řešení Petrohradského paradoxu vysvětlení pro další otázky v mnoha jiných oborech, především v ekonomii a v již zmíněné daňové teorii.

V roce 1738 jej předložil Daniel Bernoulli (1700 - 1782) před Petrohradskou akademií věd (odtud název Petrohradský paradox). Jedná se o hypotetickou situaci: Kasino nabízí následující hru - hráč hází mincí tak dlouho, dokud nepadne hlava. Nechť hlava padne poprvé po n hodech. Pak hráč získá výhru 2^n Kč (Bernoulli samozřejmě předpokládal rubly, ale my budeme kalkulovat s Kč), tj. 2 Kč, pokud padne hlava napoprvé, 4 Kč, pokud padne napodruhé, 8 Kč, padne-li napotřetí atd. Otázkou je, kolik by měl hráč zaplatit kasinu, aby mohl hrát tuto hru. Očekávaná výhra je nekonečná:

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Hráč by tedy měl být ochoten nabídnout libovolně vysokou částku, aby tuto hru mohl hrát. Nikdo však nezaplatí za tuto hru neomezeně vysokou cenu, většina lidí je dokonce ochotna zaplatit jen velmi malou částku, řádově dvoucifernou.

Práce se zabývá jednak stanovením ceny hry, aby byla v jistém smyslu spravedlivá, a jednak vysvětlením, proč hráč není ochoten vsadit do hry vysokou částku, přestože střední hodnota výhra je neomezená.

V první kapitole je předložena definice a na základě této definice je stanovena a dokázána v jistém smyslu férová cena pro obě strany. V této kapitole je zřejmá analogie se známým slabým zákonem velkých čísel, jehož důkaz je velmi podobný.

Ve druhé kapitole práce pojednává o vysvětlení paradoxu na základě užitkové funkce. Toto vysvětlení nabídl již v 18. století sám Bernoulli. Tuto teorii užitku dále použijeme pro stanovení spravedlivého daňového systému. Protože však daně nejsou jen záleži-tostí matematického či ekonomického charakteru, nýbrž se jedná také o politický problém, budu se snažit veškeré výpočty zařadit do kontextu.

Ve třetí kapitole jsou pak nabídnuty některá další možná řešení, která stojí za zmínku: upravená užitková funkce, která se od té Bernoulliovy liší tím, že je omezená; nereálnost celé hry, která nabízí neomezenou výhru, ačkoli nikdo není schopen nabídnout neomezené množství peněz, hráč s tím tedy předem podvědomě počítá; nakonec pak psychologický efekt - averze k riziku, která též nabízí možné vysvětlení.

Jako základní literaturu jsem použila knihu profesora Fellera, která nabízí krásný matematický důkaz, dále text doktora Nečase z VŠE, který se zabývá užitkovou funkcí a souvislostí s daňovou soustavou, a ekonomickou knihu profesorky Kubátové z katedry veřejných financí VŠE.

Aplikace v ekonomii je mi jako absolventce VŠE a studentce směřující na ekonometrii velice blízká, proto je jí v celé práci věnována taková pozornost.

Kapitola 1

Aplikace zákonu velkých čísel

Pokusíme se najít v jistém smyslu spravedlivou částku, kterou by měl hráč zaplatit za možnost hrát naši hru, aby byla přijatelná jak pro hráče, tak pro kasino. Ačkoli se nám může zdát „spravedlivá“ libovolně vysoká částka, protože očekávaná výhra roste nade všechny meze, tak je na první pohled zřejmé, že tomu tak není. Protože střední hodnota výhry je nekonečná, budeme uvažovat více partií her a částka bude záviset na počtu her, které hráč může absolvovat. To by sice nebylo pro skutečné kasino ideální - není obvyklé hráči nabízet jiný vstupní poplatek, bude-li hrát tři hry, a jiný vstupní poplatek, bude-li hrát třicet her - avšak žádná herna tuto hru stejně nemůže reálně nabízet, neboť nikdo nemá neomezené zdroje. Zabýváme se tedy řešením pouze z teoretického hlediska, kde nám to nepřekáží. Předpokládáme kladnou očekávanou výhru a za spravedlivou budeme považovat hru tehdy, pokud se podíl součtu výher a součtu zaplacených poplatků bude s rostoucím počtem her blížit jedné.

Definice 1

Řekneme, že hra je spravedlivá v klasickém smyslu, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left\{\left|\frac{S_n}{e_n} - 1\right| > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0, \text{ pro } n \longrightarrow \infty$$

kde n je počet pokusů, S_n je součet zisků z jednotlivých her a e_n je součet zaplacených vstupních poplatků.

Nyní ukážeme, že uvedenou definici splňuje vstupní poplatek $\log_2 n$, tj. součet poplatků $e_n = n \log_2 n$.

Věta 1

Hra v Petrohradském kasinu je dle definice 1 spravedlivá tehdy, pokud $e_n = n \log_2 n$, tj. poplatek za hru je stanoven jako $\log_2 n$, to znamená, že za n pokusů zaplatíme $n \log_2 n$ Kč. Všimneme si, že věta je určitou analogií slabého zákonu velkých čísel, ve kterém se ve jmenovateli nenachází $n \log_2 n$ n, ale nEX_1.

Důkaz

Budeme ji dokazovat metodou odříznutí, kdy jev rozdělíme na nízké výhry a výhry s malou pravděpodobností.

Definujeme si proměnné U_k a V_k takto:

$$U_k = X_k, V_k = 0 \text{ pokud } X_k \le n \log_2 n$$

$$U_k = 0, V_k = X_k \text{ pokud } X_k > n \log_2 n$$

Pak si definujeme jevy A, B, C:

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \left| \frac{S_n}{n \log_2 n} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \\ B &:= \{|U_1 + \cdots + U_n - n \log_2 n| > \varepsilon n \log_2 n\} \\ C &:= \{V_1 + \cdots + V_n \neq 0\} \end{aligned}$$

a pro tyto jevy platí

$$A \subset (B \cup C)$$

protože buď

(i) existuje i takové, že $V_i \neq 0$, z čehož plyne C, nebo

(ii) pro každé i platí $V_i = 0, U_i = X_i$, tj. $U_1 + \cdots + U_n = S_n$ a tedy po vydělení nerovnosti výrazem $n \log_2 n$ vidíme, že $B \cap C^c = A$, tj. nastává jev B.

Z monotonie míry pak platí:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{S_n}{n\log_2 n}-1\right|>\varepsilon\right\} &\leq P\left\{|U_1+\cdots+U_n-n\log_2 n|>\varepsilon n\log_2 n\right\} \\ &+ P\left\{V_1+\cdots+V_n\neq 0\right\} \end{aligned}$$

Nyní dokážeme

(i) $P\left\{V_1+\cdots+V_n\neq 0\right\}\longrightarrow 0$

(ii) $P\left\{|U_1+\cdots+U_n-n\log_2 n|>\varepsilon n\log_2 n\right\}\longrightarrow 0$

(i) nejprve ukážeme $P\left\{V_1+\cdots+V_n\neq 0\right\}\leq nP\left\{X_1>n\log_2 n\right\}$:

Víme

$$P\left\{V_i\neq 0\right\}=P\left\{X_i>n\log_2 n\right\}$$

X_i jsou stejně rozdělené, a tedy

$$P\left\{V_i\neq 0\right\}=P\left\{X_1>n\log_2 n\right\},$$

takže

$$P\left\{V_1+\cdots+V_n\neq 0\right\}\leq P\left\{V_1\neq 0\right\}+\cdots+P\left\{V_n\neq 0\right\}=nP\left\{X_1>n\log_2 n\right\}.$$

Dále ukážeme

$$P\left\{X_1>n\log_2 n\right\}\leq\frac{2}{n\log_2 n}.$$

Pravděpodobnost, že výhra bude větší než $n\log_2 n$, je součtem pravděpodobností možných výher vyšších než $n\log_2 n$.

Pravděpodobnost výhry 2^a je 2^{-a}. Spočteme si nejnižší možnou výhru vyšší než $n\log_2 n$.

$$\begin{aligned} 2^a &> n\log_2 n \\ a &> \log_2 n+\log_2\log_2 n \\ a &= \lceil\log_2 n+\log_2\log_2 n\rceil \end{aligned}$$

Tedy nejnižší možná výhra je $2^{\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil}$ a její pravděpodobnost $2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil}$, druhá nejnižší možná výhra je $2^{\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil + 1}$ s pravděpodobností $2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil - 1}$, třetí nejnižší možná výhra je $2^{\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil + 2}$ s pravděpodobností $2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil - 2}$ atd.

Nyní sečteme pravděpodobnosti všech vyšších výher:

$$\begin{aligned}
P\{X_1 > n \log_2 n\} &= 2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil} + 2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil - 1} + 2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil - 2} + \cdots \\
&= 2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) \\
&= 2 \cdot 2^{-\lceil \log_2 n + \log_2 \log_2 n \rceil} \\
&\leq 2 \cdot \frac{1}{2^{\log_2 n + \log_2 \log_2 n}} = \frac{2}{n \log_2 n}
\end{aligned}$$

Tedy máme

$$P\{V_1 + \cdots + V_n \neq 0\} \leq nP\{X_1 > n \log_2 n\} \leq \frac{2n}{n \log_2 n} \longrightarrow 0$$

(ii) dokážeme $P\{|U_1 + \cdots + U_n - n \log_2 n| > \varepsilon n \log_2 n\} \longrightarrow 0$:

označme

$$\mu_n = E(U_k)$$

$$\sigma_n^2 = var(U_k)$$

Veličiny μ_n a σ_n závisí na n, ale jsou stejné pro $U_1, U_2, \cdots, U_n$.

Označme r největší celé číslo, pro které platí $2^r \leq n \log_2 n$. Pak

$$\mu_n = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^r \cdot \frac{1}{2^r} = r$$

Odhadneme μ_n pro vhodně velké n:

$$\log_2 n < \mu_n \leq \log_2 n + \log_2 \log_2 n$$

tj.

$$n < 2^r \leq n \log_2 n$$

První nerovnost platí pro vhodně velké r.

Druhá nerovnost plyne přímo z definice r.

Podobně odhadneme σ_n^2:

$$\sigma_n^2 = E\left(U_k^2\right) - \left(E\left(U_k\right)\right)^2 \leq E\left(U_k^2\right) = 2^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(2^2\right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \left(2^3\right)^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + \left(2^r\right)^2 \cdot \frac{1}{2^r} =$$

$$= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^r < 2^{r+1} = 2 \cdot 2^r \leq 2n \log_2 n.$$

Poslední nerovnost plyne z definice r.

Takže máme

$$\sigma_n^2 < 2n \log_2 n.$$

Definujeme si náhodnou veličinu $Y_n = \sum_{i=1}^n U_n$, její střední hodnota pak je $n\mu_n$ a rozptyl je $n\sigma_n^2$.

Nyní použijeme Čebyševovu nerovnost, tj.:

$$P\left\{|X - EX| > \delta\right\} \leq \frac{varX}{\delta^2}$$

Aplikujeme ji na veličinu Y_n:

$$P\left\{|U_1 + \cdots + U_n - n\mu_n| > \varepsilon n\mu_n\right\} = P\left\{|Y_n - EY_n| > \varepsilon n\mu_n\right\}$$

$$\leq \frac{n\sigma_n^2}{\varepsilon^2 n^2 \mu_n^2} \leq \frac{n \cdot 2n \log_2 n}{\varepsilon^2 n^2 \mu_n^2} < \frac{2n^2 \log_2 n}{\varepsilon^2 n^2 \log_2^2 n} = \frac{2}{\varepsilon^2 \log_2 n} \longrightarrow 0$$

Protože jsme si dokázali, že $\mu_n \sim \log_2 n$, pak ze spojitosti míry platí i

$$P\left\{|U_1 + \cdots + U_n - n \log_2 n| > \varepsilon n \log_2 n\right\} \longrightarrow 0.$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{S_n}{n \log_2 n} - 1\right| > \varepsilon\right\} &\leq P\left\{|U_1 + \cdots + U_n - n \log_2 n| > \varepsilon n \log_2 n\right\} \\ &+ P\left\{V_1 + \cdots + V_n \neq 0\right\} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Dokázali jsme tedy, že dle naší definice spravedlivou cenu za n her je částka $n \log_2 n$ Kč. Měli bychom si však také uvědomit, že pro tuto definici spravedlivé hry není důležitý podíl výhry a zaplacené částky pro nízký počet pokusů. Pokud tedy budeme brát

$n = 1$, vyjde nám, že bychom hru neměli hrát za žádnou kladnou částku, což není racionální. Při jedné hře totiž máme zaručenou výhru 2 Kč, tedy minimálně 2 Kč bychom měli kasinu nabídnout, i kdybychom nebyli ochotni vůbec riskovat. Pokud bychom měli možnost hrát 2 hry, zaplatili bychom 2 Kč, ačkoli zaručená výhra je 4 Kč. Teprve při 4 pokusech bychom zaplatili 8 Kč, což by se právě vyrovnalo se zaručenou výhrou 8 Kč. Pro řádově vyšší počty pokusů již nám naše řešení dává reálnější výsledky. Například pokud bychom měli možnost hrát 100 her, zaplatili bychom cca 664 Kč.

Kapitola 2

Maximalizace užitku a důsledky pro progresivitu zdanění

V Petrohradském paradoxu automaticky předpokládáme, že hráč se rozhoduje pouze na základě maximalizace očekávané hodnoty výhry. Tento přístup však úplně neodpovídá chování racionálního ekonomického subjektu. Lidé se nerozhodují na základě očekávané hodnoty zisku, ale na základě užitku z této očekávané hodnoty zisku. Užitek z hodnoty výhry záleží na několika faktorech a především sice roste s výhrou, ale nikoli lineárně. Což je snadné si uvědomit, když se zamyslíme, jaký užitek by mohl mít hráč ze skutečně astronomických výher. Zřejmě jen o málo vyšší než z nějaké hraniční hodnoty, kterou je ještě schopen za svůj život reálně využít. To pak ukazuje naši hru ve zcela jiném světle. Podíváme se zejména na standardní užitkovou funkci, kterou předložil Bernoulli. Na základě této užitkové funkce si ukážeme, že užitek z očekávané výhry je nejen konečný, ale dokonce velmi malý, což vysvětluje malou ochotu hráče platit za hru vyšší částky.

Dále bychom ještě rozebrali, jak výše uvedená vysvětlení souvisí s progresivitou zdanění. Nelineární vnímání peněz totiž poskytuje trochu jiné pojetí spravedlnosti daní. Přijde mi užitečné zhodnotit, jak může Petrohradský paradox nabídnout vysvětlení ke zdánlivě nesouvisejícím věcem. Protože však teorie daní je velice komplikovaná oblast, kde není podstatná pouze matematická a ekonomická stránka, ale je třeba ji vnímat i z politického a morálního hlediska, pokusím se situaci vyhodnotit komplexně.

2.1 Maximalizace užitku

Nahlédneme nyní na řešení, které přednesl Bernoulli. Ten vysvětloval Petrohradský paradox právě tím, že reální rozhodovatelé se rozhodují na základě užitku z případné výhry. Poukázal právě na to, že funkce užitku v závislosti na množství peněz není lineární. Na základě nějakých předpokladů stanovil i její konkrétní tvar.

Vycházel z toho, že tato funkce je rostoucí a rychlost jejího růstu postupně klesá (což je v ekonomii známo jako zákon klesajícího mezního užitku). Vyjádřeno matematicky:
Nechť R je příjem z výhry, jíž odpovídá užitek U. Pak

$$\frac{\partial U}{\partial R} > 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} < 0.$$

Skutečnou funkci pak odvodil na základě dalších již ne tak zřejmých předpokladů. Počítal s tím, že mezní užitek z peněžní jednotky je nepřímo úměrný bohatství subjektu, tj. že užitek z každé další peněžní jednotky nepřímo úměrně závisí na tom, kolik peněžních jednotek subjekt již vlastní:

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{a}{R}.$$

Na tomto místě by bylo vhodné poznamenat, že sice můžeme vcelku beztrestně uvažovat nepřímou úměru mezi mezním užitkem z peněžní jednotky a již vlastněným množstvím peněžních jednotek, avšak to odpovídá obecné rovnici

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{f\left(R\right)},$$

kde funkce f je rostoucí.

Bernoulli očekával $f(R) = \frac{R}{a}$, což je poměrně diskutabilní, budeme však nadále pracovat s tímto jeho předpokladem.

Integrací získáme rovnici

$$U(R) = a \cdot \ln R + c. \tag{2.1}$$

Pro konstantu c platí $c = U(1)$, je to tedy užitek z peněžní jednotky. Užitek z peněžní jednotky může být pro různé subjekty odlišný. Pro jednoduchost můžeme v některých případech definovat $U(1) = 1$, tedy $c = 1$. Stále však budeme spíše počítat s c, aby se nám někde neztratil jeho význam.

Konstanta a může být nejen pro různé subjekty, ale i pro různé situace odlišná. Pro zjednodušení můžeme volit $a = 1$. Považuji však za nezbytné vysvětlit její účel, pokusím se to znázornit na reálném příkladě. Zjistili jsme, že užitek subjektu z konkrétní částky x je $a \cdot \ln x + U(1)$. Bude-li náš subjekt žít v nějaké rozvojové zemi, bude jeho užitek z částky jistě jiný, než pokud by žil např. v New Yorku. Ani taková situace však ještě neukazuje konkrétní rozdíl. Pokud by částka x byla rozumně vysoká (v řádech milionů Kč), byl by vyšší užitek subjektu žijího v USA, protože v rozvojové zemi by neměl jak peníze utratit. Naopak pokud by částka x byla rozumně nízká (v řádech několika tisíců Kč), byl by vyšší užitek subjektu žijícího v rozvojové zemi, neboť tam by za takové množství peněz mohl nějakou dobu průměrně žít, kdežto v USA by zřejmě ani neměl kde bydlet. Tím jsem chtěla poukázat na to, že konstanta a je hodně variabilní a vyrovnává mnohé rozdíly odlišných situací.

Nyní jsme si odvodili konkrétní užitkovou funkci a předpokládáme, že subjekt se rozhoduje na základě užitku z případné výhry. Můžeme tedy spočítat očekávaný užitek:

$$\begin{aligned}
EU &= U(2)\cdot\frac{1}{2}+U\left(2^2\right)\cdot\frac{1}{2^2}+U\left(2^3\right)\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}U\left(2^i\right)\cdot\frac{1}{2^i}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(a\cdot\ln 2^i+c\right)\cdot\frac{1}{2^i}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(a\cdot\ln 2^i\right)\cdot\frac{1}{2^i}+\sum_{i=1}^{\infty}c\cdot\frac{1}{2^i}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(a\cdot i\cdot\ln 2\right)\cdot\frac{1}{2^i}+c\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\
&= a\cdot\ln 2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}+c\\
&= 2\cdot a\cdot\ln 2+c,
\end{aligned}$$

kde jsme využili, že $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=2$.

Nyní můžeme spočítat spravedlivou cenu za hru.

Máme užitek z výhry R z (2.1) a zároveň očekávaný užitek ze hry v petrohradském kasinu

$$EU = 2\cdot a\cdot\ln 2+c,$$

tedy počítáme, že férová cena je taková částka, která mi přinese stejný užitek, jako je očekávaný užitek ze hry:

$$\begin{aligned}
a\cdot\ln R+c &= 2\cdot a\cdot\ln 2+c\\
a\cdot\ln R+c &= a\cdot\ln 2^2+c,
\end{aligned}$$

z čehož vidíme, že platí

$$R=4.$$

Spočítali jsme tedy, že očekávaný užitek ze hry je $a\cdot\ln 2^2+c$ a spravedlivá cena za hru je 4 Kč.

Je poměrně pozoruhodné, že cena za hru nezávisí na konstantách a a c. Je to proto, že se navzájem vyruší. Pokud pro mě mají 4 Kč velký užitek, tak ale budu mít i

velký očekávaný užitek, protože užitky z možných výher budou vyšší, než kdyby pro mě znamenaly dané 4 Kč menší užitek. A naopak.
Pro zajímavost ještě spočítáme, pro jaký počet pokusů se tento výsledek bude rovnat výsledku z kapitoly 2.1:

$$\begin{aligned} n \cdot 4 &= n \log_2 n \\ 4 &= \log_2 n \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Tedy při hraní 16 her bychom za ně zaplatili stejně jak při použití Definice 1 spravedlivého hry, tak při počítání podle Bernoulliho užitkové rovnice.

2.2 Důsledky pro zdanění příjmů

Nyní bychom se podívali, co nám takové pojetí přináší pro teorii daní. Daňová sazba může být progresivní (se zvyšující se sazbou pro vysokopříjmové skupiny), lineární (stejná sazba nezávislá na velikosti příjmu) nebo regresivní (to je třeba tzv. daň na hlavu, tj. že každý platí stejnou částku, tím pádem lidé s vysokými příjmy odvádí nejnižší část svého příjmu, regresivní však jsou i například daně ze spotřeby, které platí každý stejně).

Budeme se nyní zajímat aktuálně nejdiskutovanější daní z příjmu fyzických osob. Standardně jsou na ni dva názory. Z levé strany politického spektra se ozývá volání po progresivní dani, nejlépe s ještě větší progresivitou, než byla před daňovou reformou. Pravá strana politického spektra v roce 2008 prosadila daňovou reformu, která zavedla tzv. rovnou daň (lineární daňovou sazbu) ve výši 15 procent, od roku 2009 pak $12,5$ procenta.

Pravice argumentuje především tím, že je stejná sazba daně spravedlivější. Kalkuluje s tím, že lidé s vysokými příjmy při progresivní sazbě odvádí nejen absolutně vyšší částku do státního rozpočtu, ale navíc i vyšší procento svého příjmu, což není zrovna spravedlivé. Avšak výše jsme vysvětlili, že lidé se nerozhodují na základě absolutní částky peněz, ale na základě užitku z této částky. Mohli bychom i při sazbě daně počítat tak, aby lidé přispívali do státní kasy nikoli stejnou část svého příjmu, ale odváděli stejnou část užitku, jaký ze svého příjmu mají.

Nejprve se vrátíme k naší užitkové funkci (2.1), konstantu a pro zjednodušení stejně jako Bernoulli zanedbáme, zvolíme tedy $a = 1$ a upravíme konstantu c do jiné podoby.

$$\begin{aligned} U(R) &= \ln R + \ln e^c \\ U(R) &= \ln (R \cdot e^c) \\ U(R) &= \ln \left(\frac{R}{e^{-c}} \right) \end{aligned}$$

Označíme si e^{-c} jako R_0, bude pro nás představovat jakousi prahovou hodnotu, částku, kterou jsme poprvé schopni zaregistrovat. Pro naše počítání se nám bude hodit zvolit si R_0 jako minimální mzdu. Ta je v ČR aktuálně 8000 Kč pro zaměstnance odměňovaného měsíční mzdou při týdenní pracovní době 40 hodin (jak stanovuje nařízení vlády č. 567/2006 Sb. ze dne 6. prosince 2006).

Nadále tedy budeme používat užitkovou funkci ve tvaru

$$U(R) = \ln \left(\frac{R}{R_0} \right).$$

Zaměstnanci pobírají hrubou mzdu R_b, kterou tvoří čistá mzda R_n a daň d:

$$R_b = R_n + d.$$

Hrubému příjmu pak odpovídá užitek

$$U(R_b) = \ln \left(\frac{R_b}{R_0} \right)$$

a čistému příjmu užitek

$$U(R_n) = \ln \left(\frac{R_n}{R_0} \right).$$

Rovnou daň bychom si tedy rozumně představovali tak, že každý odvede stejnou část svého užitku, tj.

$$U(R_n) = \alpha \cdot U(R_b)$$

pro nějaké $0 \leq \alpha \leq 1$.

Z rovnice pro čistý užitek bychom si tedy vyjádřili R_n

$$R_n = R_0 \cdot e^{U(R_n)}$$

a dále dosadíme

$$\begin{aligned}
R_n &= R_0 \cdot e^{U(R_n)} \\
&= R_0 \cdot e^{\alpha \cdot U(R_b)} \\
&= R_0 \cdot e^{\alpha \cdot \ln \frac{R_b}{R_0}} \\
&= R_0 \cdot \left(\frac{R_b}{R_0}\right)^{\alpha} \\
&= R_b^{\alpha} \cdot {R_0}^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Teď se můžeme podívat na velikost a sazbu daně.

Velikost daně určíme jako rozdíl hrubého a čistého příjmu.

$$\begin{aligned}
d &= R_b - R_n \\
&= R_b \left(1 - R_b^{\alpha-1} \cdot {R_0}^{1-\alpha}\right) \\
&= R_b \left(1 - \left(\frac{R_b}{R_0}\right)^{\alpha-1}\right)
\end{aligned}$$

Sazbu daně φ pak určíme jako podíl daně a hrubého příjmu.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{d}{R_b} \\
&= 1 - \left(\frac{R_b}{R_0}\right)^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Nyní budeme brát $R_0 = 8000$ Kč a vytvoříme tabulku „spravedlivých“ daňových sazeb pro různě zvolená α. Konstanta α má význam toho, kolik chceme na daních vybrat. Pokud bychom potřebovali daňový příjem zvýšit, snížíme α, pokud bychom jej chtěli snížit, zvýšíme α.

Výše hrubého příjmu	$\alpha = 1$	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 0,8$	$\alpha = 0,7$
8 000 Kč	0,000	0,000	0,000	0,000
9 000 Kč	0,000	0,012	0,023	0,035
10 000 Kč	0,000	0,022	0,044	0,065
11 000 Kč	0,000	0,031	0,062	0,091
12 000 Kč	0,000	0,040	0,078	0,115
13 000 Kč	0,000	0,047	0,093	0,136
14 000 Kč	0,000	0,054	0,106	0,155
15 000 Kč	0,000	0,061	0,118	0,172
16 000 Kč	0,000	0,067	0,129	0,188
17 000 Kč	0,000	0,073	0,140	0,202
18 000 Kč	0,000	0,078	0,150	0,216
19 000 Kč	0,000	0,083	0,159	0,229
20 000 Kč	0,000	0,088	0,167	0,240
21 000 Kč	0,000	0,092	0,176	0,251
22 000 Kč	0,000	0,096	0,183	0,262
23 000 Kč	0,000	0,100	0,190	0,272
24 000 Kč	0,000	0,104	0,197	0,281
25 000 Kč	0,000	0,108	0,204	0,290
30 000 Kč	0,000	0,124	0,232	0,327
35 000 Kč	0,000	0,137	0,256	0,358
40 000 Kč	0,000	0,149	0,275	0,383
45 000 Kč	0,000	0,159	0,292	0,404
50 000 Kč	0,000	0,167	0,307	0,423
75 000 Kč	0,000	0,201	0,361	0,489
100 000 Kč	0,000	0,223	0,397	0,531
500 000 Kč	0,000	0,339	0,563	0,711
1 000 000 Kč	0,000	0,383	0,619	0,765

V uvedené tabulce vidíme, že „spravedlivá“ daňová sazba je progresivní. Její progresivita lze tedy vysvětlit nikoli jako daň za úspěch, nýbrž jako důsledek logaritmického vnímání peněz. Pro zajímavost se podíváme, jak bychom mohli vypočtené daňové sazby porovnat s nastavenou progresivitou před reformou veřejných financí. V následující tabulce si ukážeme, jaká byla měsíční daňová sazba v roce 2006 a 2007.

Základ daně od	**do**	**daň**	**ze základu přesahujícího**
8 000 Kč	10 100 Kč	12%	
10 100 Kč	18 200 Kč	1 212 Kč + 19%	10 100 Kč
18 200 Kč	27 600 Kč	2 751 Kč + 25%	18 200 Kč
27 600 Kč	a více	5 101 Kč + 32%	27 600 Kč

V další tabulce si teď ukážeme, že takto nastavená progresivita velmi dobře odpovídá naší odvozené užitkové funkci. Poměrně dobře vystihovala zdanění tak, aby každý odvedl takovou částku, ze které má stejný podíl užitku jako ostatní. Výpočty s různými α se ukázala jako nejlépe odpovídající $\alpha = 0,849$. Různými posouváními o tisíciny nahoru či dolů bychom měli nejpřesnější shodu u různých příjmových skupin, konkrétní $\alpha = 0,849$ jsem stanovila tak, aby se přesně shodovala příjmová skupina s platy kolem 21 000 Kč, jelikož je nejblíže mediánu (ten byl 20 908 Kč v roce 2007, jak uvádí ČSÚ).

Daňová sazba však není jediná věc, která reálně určuje daň, v praxi se používá mnoho odpočtů od základu daně, slev na dani a dalších výjimek, není v našich možnostech to vše zahrnout. Zahrneme tam však slevu na dani na poplatníka, která byla 600 Kč na každého poplatníka bez výjimky, a je tedy snadné a užitečné ji tam zařadit.

Tabulka tedy ukazuje u každého platu daň v roce 2007, daň po slevě na poplatníka, spočtenou sazbu daně po slevě na poplatníka, navrhovanou daňovou sazbu pro $\alpha = 0,849$ a rozdíl mezi tehdejší daňovou sazbou a navrhovanou sazbou.

Příjem	**daň**	**daň po slevě**	**sazba daně**	**sazba pro** $0,849$	**rozdíl**
8 000 Kč	960 Kč	360 Kč	0,045	0,000	0,045
9 000 Kč	1 080 Kč	480 Kč	0,053	0,018	0,036
10 000 Kč	1 200 Kč	600 Kč	0,060	0,033	0,027
11 000 Kč	1 320 Kč	720 Kč	0,065	0,047	0,019
12 000 Kč	1 440 Kč	840 Kč	0,070	0,059	0,011
13 000 Kč	1 763 Kč	1 163 Kč	0,089	0,071	0,019
14 000 Kč	1 953 Kč	1 353 Kč	0,097	0,081	0,016
15 000 Kč	2 143 Kč	1 543 Kč	0,103	0,091	0,012
16 000 Kč	2 333 Kč	1 733 Kč	0,108	0,099	0,009
17 000 Kč	2 523 Kč	1 923 Kč	0,113	0,108	0,006
18 000 Kč	2 713 Kč	2 113 Kč	0,117	0,115	0,002
19 000 Kč	2 951 Kč	2 351 Kč	0,124	0,122	0,001
20 000 Kč	3 201 Kč	2 601 Kč	0,130	0,129	0,001
21 000 Kč	3 451 Kč	2 851 Kč	0,136	0,136	0,000
22 000 Kč	3 701 Kč	3 101 Kč	0,141	0,142	-0,001
23 000 Kč	3 951 Kč	3 351 Kč	0,146	0,147	-0,002
24 000 Kč	4 201 Kč	3 601 Kč	0,150	0,153	-0,003
25 000 Kč	4 451 Kč	3 851 Kč	0,154	0,158	-0,004
30 000 Kč	5 701 Kč	5 101 Kč	0,170	0,181	-0,011
35 000 Kč	6 951 Kč	6 351 Kč	0,181	0,200	-0,018
40 000 Kč	9 069 Kč	8 469 Kč	0,212	0,216	-0,004
45 000 Kč	10 669 Kč	10 069 Kč	0,224	0,230	-0,006
50 000 Kč	12 269 Kč	11 669 Kč	0,233	0,242	-0,008
75 000 Kč	20 269 Kč	19 669 Kč	0,262	0,287	-0,025
100 000 Kč	28 269 Kč	27 669 Kč	0,277	0,317	-0,040
500 000 Kč	156 269 Kč	155 669 Kč	0,311	0,464	-0,153
1 000 000 Kč	316 269 Kč	315 669 Kč	0,316	0,518	-0,202

Vidíme tedy, že daňová sazba v roce 2007 a navrhovaná sazba se podstatněji odlišuje pouze u příliš nízkých a příliš vysokých příjmů, jinak takřka zcela odpovídá.

Vzhledem k obsáhlosti a komplikovanosti nastavení daňového zatížení z hlediska spravedlnosti bych se nyní věnovala poskytnutí pohledu na danou problematiku v širších souvislostech.

Výše jsme spočítali, že je spravedlivé, aby sazba daně byla progresivní. Skutečný daňový systém je však mnohem složitější. Daň z příjmu fyzických osob je jen jedním z daňových příjmu veřejného sektoru. Jedná se nám zejména o daňové břemeno občanů, vypustíme tedy daň z příjmu korporací. Není však možné pominout majetkové daně a především daně ze spotřeby, které celkové daňové zatížení silně ovlivňují. Daně ze spotřeby nelze nastavit se zohledněním příjmů, jsou tedy de facto výhodnější pro vysokopříjmové skupiny. První z otázek tedy je, jak nastavit poměr výnosu daně z důchodu a výnosu daní ze spotřeby. Pomineme-li selektivní daně ze spotřeby, které mají i jiný účel než příjem do státní kasy, zůstane nám všeobecná daň ze spotřeby - daň z přidané hodnoty. Co se týče majetkových daní, jejich výnos je vůči dani z příjmu a dani z přidané hodnoty zanedbatelný. Je to zejména proto, že majetek musel být nabyt z nějakého příjmu a ten již byl zdaněn. Kromě toho majetek nemusí příliš vypovídat o skutečné aktuální platební způsobilosti majitele. Považuji tedy za správné, aby majetkové daně byly nastaveny jako nízké a spíše jako doplněk k ostatním daním.

Aktuální daňové zatížení je nastaveno tak, že poměr příjmu daně z přidané hodnoty a daně z příjmu fyzických osob je přibližně 1:1. Je věcí názoru a spíše filozofickou otázkou, zda je spravedlivější zdaňovat důchod či spotřebu. Pro zdanění spotřeby hovoří například to, že motivuje člověka méně utrácet a plýtvat a zároveň nedemotivuje k práci. Není důvod „trestat“ vytrvale pracující lidi, nýbrž je lepší zdanit člověka až při spotřebě, která mimojiné zohledňuje i užitkovou funkci poplatníka - ten totiž při koupi věci vždy porovnává užitek z daného zboží a užitek z ceny zboží. Jiným argumentem pro zdanění spotřeby je nezanedbatelný psychologický efekt. Daň je totiž započítána v ceně zboží a není tolik vidět, kolik platíme státu jako u daně z příjmu. Nicméně pro zdanění důchodu hovoří zejména to, že může být nastaveno progresivně, což je jediný nástroj pro určitou redistribuci. Celkový poměr těchto daní pak záleží na tom, které důvody jsou preferovány. Vždy by však mělo být nastaveno takové rozdělení, aby výnos z žádné z nich nebyl zanedbatelný, protože každá má určité klady i zápory.

Vrátíme se nyní k naší dani z příjmu fyzických osob. Sazba daně není jediným ovlivňujícím faktorem. Konečné daňové zatížení záleží také na různých odpočtech od základu daně a slevách na dani. Ty se snaží učinit daň spravedlivější, je to však na úkor toho, že dělají daňový systém složitější. U nás to před reformou vedlo až k tomu, že mnozí daňoví poplatníci místo, aby ušetřili na nějakých výjimkách, na tom ve výsledku tratili, neboť byli nuceni si platit daňové poradce. Jednoduše už nebyli schopni se v tom sami vyznat. Velké množství různých výjimek tedy žádoucí rozhodně není a dle mého názoru by se od toho mělo upouštět.

Reforma veřejných financí zavedla sice lineární daň, zároveň však přidala mnohé další slevy na dani, čímž se snažila vyrovnat původní progresi daňové sazby. Otázkou však potom zůstává, jaký byl účel. Skutečný účel není těžké odhadnout, ten byl zejména v tom udělat na oko velkou reformu, aby strana vyhrála volby, o mnoho více bych v našich poměrech nečekala, problémem ale je, zda to k něčemu bylo dobré. Jediná změna zřejmě byla pro vysokopříjmové zaměstnance, kterým se daň výrazně snížila. Lidé mající příjmy ze živnosti, z firmy apod. si to obvykle vždy nějak zařídí, aby neměli papírově vysoké příjmy. Pro ostatní se daňové zatížení příliš nezměnilo, skutečná změna po naší reformě tedy byla spíše estetická.

Pomineme-li nyní různé odpočty a slevy, které by dle mého názoru měly být z velké části zcela zrušeny, zbývá nám otázka samotné sazby daně. Vypočítali jsme si, že pokud bychom zdaňovali podle stejného relativního užitku, bylo by spravedlivé, aby byla nastavena progrese zhruba jako před reformou. Jednak je to však pouze jedna možnost a jednak jsme zanedbali spoustu okolností.

Zdanění podle užitku se jeví jako nejlepší ve smyslu nejspravedlivější. Mohli bychom však zdaňovat nejen tak, že každý odvede stejnou část užitku, ale třeba tak, že by

každý odvedl takovou částku, která pro něj znamená stejný absolutní užitek jako pro ostatní poplatníky. To by za našeho předpokladu logaritmické funkce užitku vedlo k lineární sazbě:
Máme příjem x, užitek z příjmu $a \cdot \log x + c$, užitek snížený o u: $a \cdot \log x + c - u$, jemu odpovídající částka $e^{\frac{(a \cdot \log x + c - u) - c}{a}} = e^{\log x - \frac{u}{a}} = x \cdot e^{-\frac{u}{a}}$ a daň $x - x \cdot e^{-\frac{u}{a}}$. Tedy sazba daně by byla $\frac{x - x \cdot e^{-\frac{u}{a}}}{x} = 1 - e^{-\frac{u}{a}}$.

Ještě jinou možností zdanění podle užitku by bylo zdanění podle zásad paretovského optima, to znamená, že bychom provedli redistribuci tak, aby byl nejvyšší možný užitek společnosti. To by znamenalo, že by nebylo možné přerozdělit další finance tak, aniž by došlo ke snížení celkového užitku společnosti. Za předpokladu naší užitkové funkce a pokud bychom očekávali, že mají všichni stejnou užitkovou funkci, vedlo by toto přerozdělení k úplnému vyrovnání důchodů. Sazba daně by byla ostře progresivní. Tento model je pochopitelně nerealizovatelný, neboť by lidé neměli žádnou motivaci pracovat. Je to však jedna z možností redistribuce podle užitku a některé extrémně levicové názory ji považují za nejspravedlivější, neboť jejím výsledkem je nejvyšší možný užitek celé společnosti.

Kromě jiných možností přerozdělení podle užitku jsme však zanedbali značně důležitý aspekt. Předpokládali jsme, že všichni mají užitkovou funkci stejnou, to je ale poměrně hodně vzdálené od reality. A není možné, abychom pro každého uvažovali jeho vlastní užitkovou funkci, jednak je to nezjistitelné a navíc by pak v podstatě každý měl své daňové sazby. To skutečně není ani vzdáleně realizovatelné. Je pak otázkou, zda je zdanění podle užitku skutečně spravedlivé vzhledem k tomu, že jej neumíme určit.

Neměli bychom také zapomenout na to, že spravedlnost daňového zatížení ovlivňuje nejen papírově nastavená daň, ale i skutečnost, jak je daň prakticky vybírána. Jsou tedy velice důležité jasně nastavené zákony a důsledná kontrola, zda jsou daně odváděny tak, jak by měly být.

Shrneme-li to, nejdůležitější funkcí daně je fiskální funkce, tj. získávání financí do veřejného rozpočtu. Nicméně podstatnou je i redistribuční funkce - navození pocitu spravedlnosti zdanění ve společnosti. Její špatné nastavení vyvolává velkou nevraživost chudých vůči bohatým a naopak, což neprospívá žádné společnosti. Jistá progresivita je žádoucí zejména z historických důvodů - progresivita tu vždy byla, lidé si na ni zvykli. Její zrušení vyvolá drobné nadšení vysokopříjmových skupin, ale zároveň velkou nenávist lidí s nižšími příjmy k bohatším. Naopak nesmí být příliš vysoká. To sice nevede k tak velké zášti bohatých vůči chudým jako v opačném případě, ale zase to prospívá šedé a černé ekonomice, případně přesunu schopné pracovní síly do zahraničí. Můj osobní názor je, že pro naši republiku byl co do spravedlnosti ideální systém daňových sazeb v letech 2006 a 2007 před zavedením rovné daně, která korespondovala i s naším teoretickým výpočtem. Jeho změna vyvolala velké nepokoje a opětovné zavedení, které zřejmě po dalších volbách nastane, bude stejně rozporuplné. Takové věci je lepší měnit jen pozvolně.

Kapitola 3

Další možná vysvětlení

3.1 Horní hranice užitku

Většina nabízených vysvětlení Petrohradského paradoxu automaticky předpokládá, že s rostoucím ziskem se zvyšuje i užitek z něj bez ohledu na výši výhry. To je ovšem relativně snadno napadnutelné. Těžko si umíme představit, jak se užitek zvyšuje až do nekonečna. Ve skutečnosti bychom spíše očekávali, že mezní užitek z každého dalšího znásobení výhry se postupně snižuje, až se při dostatečně vysoké částce dostane na nulu. To znamená, že výhra nad nějakou subjektivní hranici x již pro nás neznamená žádný užitek. Zřejmě bychom si uměli představit i to, že se užitek začne s nějakou více než astronomickou výhrou snižovat. Pokud by například někdo skutečně vyhrál třeba několikanásobek světového HDP (a to ještě není zdaleka tak vysoká částka, která nám žene očekávanou výhru do nekonečna), jaký by to asi mělo dopad na světovou ekonomiku? Předpokládala bych hyperinflaci a globální rozpad ekonomiky a znehodnocení peněz. To by jistě výherci nepřineslo očekávaný astronomický užitek.

Pokud tedy přijmeme představu, že užitková funkce je omezená nějakou hodnotou, můžeme snadno vypočítat očekávaný užitek, který odpovídá určité částce. Není ani třeba použít užitkovou funkci $U(R) = a \cdot \ln R + c$ odvozenou ve druhé kapitole.

Budeme nyní předpokládat původní podstatu paradoxu, tj. že $U(R) = R$. Zároveň očekáváme, že tato funkce je však omezená horní hranicí, nad níž se již užitek nezvyšuje. Zvolíme např. výši světového HDP z roku 2009, která je $57,530,000$ milionů USD (jak uvádí CIA World Factbook), tedy v přepočtu přibližně 10^6 miliard Kč.

Nyní tedy chceme určit, při kolikátém padnutí orla se užitek přestane zvyšovat. Tj. musíme vyřešit rovnici

$$10^{15} = 2^x.$$

Snadno vyřešíme, že rovnice je splněna pro $x \doteq 50$. Z toho vyplývá, že do 50. padnutí orla se bude užitek stále zvyšovat společně s výhrou, dále však zůstane užitek stejný, stále 10^{15}, nezávisle na tom, zda padne orel stokrát nebo tisíckrát. Teď tudíž můžeme spočítat očekávanou hodnotu užitku:

$$\begin{aligned} EU(R) &= U(2) \cdot \frac{1}{2} + U\left(2^2\right) \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + U\left(2^{50}\right) \cdot \frac{1}{2^{50}} + U\left(2^{51}\right) \cdot \frac{1}{2^{51}} + \cdots \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 2^{50} \cdot \frac{1}{2^{50}} + 2^{50} \cdot \frac{1}{2^{51}} + 2^{50} \cdot \frac{1}{2^{52}} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 51 \end{aligned}$$

Vypočítali jsme tedy očekávaný užitek 51, což z našich předpokladů odpovídá 51 Kč. To je značně nízká částka, přestože jsme předpokládali růst užitku až do hodnoty světového HDP. Mohli bychom navíc počítat nejen stejný užitek od určité částky, ale také snižující se užitek. To by však ovlivnilo konečný výsledek jen nepatrně, neboť jsme si mohli všimnout, že připočtený užitek z případných vyšších výher než 10^{15} Kč byl pouze 1.

Je trochu filozofická otázka, zda je užitková funkce skutečně omezená, neboť jak známo, čím víc lidé mají, tím více chtějí. Po tom, co by si koupili vše, co skutečně chtějí, mohou chtít totéž pro rodinu, následně pro kamarády, známé, nakonec třeba pro celý svět. Skutečné vysvětlení omezenosti užitkové funkce proto vidím zejména v zasazení do reálného kontextu. Jak jsem předeslala výše, výhra neuvěřitelných částek by s největší pravděpodobností vedla k rozpadnutí hodnoty peněz a hyperinflaci. Z čehož by měl jakýkoli užitek asi málokdo.

3.2 Omezené zdroje kasina

Další potíž v reálném světě přináší předpoklad neomezené výhry. To však není uskutečnitelné. Nikdo nemá a nemůže nabídnout neomezené zdroje. Mohli bychom říci, že hráč s tím podvědomě počítá, a tím si sám představuje nikoli neomezenou očekávanou výhru, ale mnohem nižší částku. Tato překážka úzce souvisí s tou předchozí. Její konkrétní výpočet je podobný, neboť po překročení určité hranice již nepřipočteme k očekávané výhře nic, zatímco v předchozím případě jsme pouze přičítali nepatrné částky. Pokud bychom tedy zůstali u toho, že kasino je schopno nabídnout hodnotu světového HDP (což už je samo o sobě pohádka, ale budiž), dostali bysme se podle výše uvedeného výpočtu k očekávané výhře 50 Kč.

Osobně si myslím, že toto vysvětlení spíše vychází z omezenosti užitkové funkce. Jsem schopna si teoreticky představit, že mi někdo může nabídnout neomezenou výhru a kalkulovat s tím. Ale pokud už bych tedy měla možnost neomezené výhry, tak si již neumím představit, jak by to reálně vypadalo, že bych měla k dispozici neomezené množství financí.

3.3 Averze k riziku

Kromě veškerých početních řešení se nabízí i podívat se na věc z psychologického hlediska. Lidské jednání totiž ovlivňují i jiné věci, než je racionální zhodnocení situace. Petrohradský paradox je jako mnohé jiné hry riziko. Platíme přiměřeně nízkou částku, abychom za ni získali pravděpodobnost, že vyhrajeme vyšší částku. Naše hra nabízí vysokou pravděpodobnost malé výhry a velmi malou pravděpodobnost vysokých výher. Je spousta lidí, kteří riziko nemají rádi, a tak by nezaplatili vyšší částky už jen z principu, že by museli riskovat a to je uvádí do stresu. Možná výhra jim proto musí vynahradit i tento stres a to snižuje očekávanou hodnotu výhry. Je významné procento lidí, které takřka dává vždy přednost holubu v hrsti než vrabci na střeše.

Na druhou stranu je podivuhodné, že podobně nízká pravděpodobnost avšak mnohem menších výher žene každý den tisíce lidí do různých sázkových kanceláří. A jsem zcela přesvědčena o tom, že ani tito lidé by za naši hru nebyli ochotni zaplatit nijak významně vysokou částku. Můžeme se tedy ptát, proč lidé jsou ochotni zaplatit desítky korun za hry, kde očekávaná výhra je řádově v korunách, ale ve hře s neomezenou výhrou by nejspíš nevsadili o mnoho významnější částku. Odpověď bych viděla ve dvou věcech. Jednak komerční hry jsou dost promyšlené, aby si lidi neuvědomovali zcela bezvýznamnou pravděpodobnost vyšší výhry. To dokládá například to, že lidé na otázku, proč například ve sportce nesází čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 odpoví, že to je příliš malá pravděpodobnost, že by byla vylosována. Neuvědomují si, že je stejná pravděpodobnost, že padne 1, 2, 3, 4, 5, 6, jako že padnou čísla z dat narození jejich dětí. A ti, kteří si to uvědomují, obvykle nesázejí. V naší hře je naopak přímočaře vidět, jak malá je pravděpodobnost, že padne třeba třicetkrát za sebou orel. A druhý problém bych viděla v tom, že obecně pouze skuteční gambleři jsou ochotni vsadit vyšší cifry. Drtivá většina lidí zariskuje a vsadí částky řádově v desítkách korun, protože jim to přijde zanedbatelné. Avšak pokud takto někdo sází téměř každý den, jak tomu často bývá, dalo by se o tom úspěšně polemizovat. Jsem však přesvědčena o tom, že kdyby všechny sázkové kanceláře u všech her hodnotu vkladů i výher vynásobili deseti, sázkařů by výrazně ubylo. Proto ani v případě hry s nekonečnou očekávanou výhrou lidé nechtějí riskovat vyšší sumy peněz.

Pro vysvětlení pomocí averze k riziku by však bylo možná lepší použít jiný výklad naší hry. Mnohé zdroje představují hru tak, že máme možnost hrát výše popsanou hru a je otázkou, za kolik bychom byli ochotni prodat možnost hrát někomu jinému. Tím se nám nabízí dvě příležitosti: buď hrát hru nebo získat jistou částku. Tím bychom averzi k riziku převedli na stranu nákladů, jak je častěji vykládána.

Averze k riziku tedy odrazuje velkou část lidí, aby byli ochotni vsadit více, přestože by očekávaná výhra byla nekonečná. Jakkoli se toto vysvětlení může zdát prosté, nebýt předchozích dostatečně výmluvných nabízených řešení, mohlo by mít skutečně podstatný význam.

Závěr

V práci jsem se zabývala různými řešeními Petrohradského paradoxu. Nejprve jsem v první kapitole s pomocí knihy profesora Fellera dokázala větu, že na základě uvedené definice spravedlivá cena za n her je $\log_2 n$ Kč. Tento důkaz je analogický se zákonem velkých čísel.

Ve druhé kapitole jsem se nejdříve zaměřila na řešení, s kterým přišel Bernoulli, a to, že lidé nejednají na základě hodnoty výhry, nýbrž na základě užitku z výhry. Na základě uvedených předpokladů jsem odvodila, že funkce užitku sice také roste, ale její růst se zpomaluje. Tím se pak částka odpovídající očekávanému užitku dramaticky snížila na pouhé 4 Kč.

Dále jsem pak předvedla souvislost řešení paradoxu pomocí užitkové funkce s daňovou teorií, konkrétně s daňovou spravedlností. Poukázala jsem na to, že pokud přijmeme hypotézu, že lidé se nerozhodují na základě absolutní částky, ale na základě užitku z této částky - a o tuto hypotézu se opírá i mikroekonomie - pak se zdá spravedlivější progresivní daňová sazba, nikoli lineární, tzv. rovná daň, kterou se teď snaží více či méně úspěšně prosadit pravicové strany v mnohých evropských státech. Zabývala jsem se matematickým podkladem tohoto tvrzení, stanovením konkrétních „spravedlivých“ daňových sazeb, srovnáním s daňovým systémem České republiky a zhodnocením daňové problematiky.

Ve třetí kapitole jsem pak uvedla další faktory, které mají na paradox určitý vliv. Předně je vcelku zřejmé a zároveň zásadní, že růst užitkové funkce, o níž pojednávala druhá kapitola, nejen klesá, ale dokonce klesá k nule, případně od určité meze může užitková funkce dokonce začít celkově klesat. Pokud jde o mne, považuji tento fakt za okolnost, která v reálu nejvíce ovlivňuje částku, kterou je hráč ochoten vsadit. Úzce to souvisí též s nerealizovatelným požadavkem na neomezené finanční možnosti kasina. Naše hra je pouze teoretická a nepočítá s tím, že kasino nejen nemůže mít neomezený zdroj peněz, ale ani není pro člověka žádoucí, aby vyhrál nepředstavitelné částky. Spočetla jsem tedy očekávanou výhru s původní lineární užitkovou funkcí s předpokladem, že nejvyšší realizovatelná částka by byla světový HDP, a ta vyšla přibližně 50 Kč. Dále jsem pak v této kapitole ještě krátce pojednala o averzi k riziku. Nelze totiž opomenout, že člověk nejedná jen na základě logických úvah. Nicméně vzhledem k dostatečně vysvětlujícím jiným řešením, je averze k riziku pouze doplňujícím objasněním.

Jsem toho názoru, že předložená řešení jsou dostatečně výmluvná a po přečtení práce je vcelku zřejmé, proč jsou hráči ochotni zaplatit za hru pouze nízkou cenu. Zajímavý je důkaz profesora Fellera, výsledek by však v reálné situaci nebyl aplikovatelný. Myslím, že nejdůležitějším vlivem, který ovlivňuje rozhodnutí hráče, je výše zmíněný fakt, že ve skutečnosti není pro hráče prospěšná výhra v řádech milionů miliard a vyšší.

Zároveň považuji za užitečný rozbor situace v daňovém systému. Je škoda, že s tímto vysvětlením progresivity nepřijdou levicové strany. Možná by nezískali příznivce ve vysokopříjmových skupinách obyvatel, ale přinejmenším by si nadělali méně odpůrců než názorem „bohatí si své peníze nezaslouží, tak ať alespoň platí jak mourovatí“.

Literatura

[1] FELLER W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, Wiley; 3 edition (1968), 243-253.

[2] KUBÁTOVÁ, K.: *Daňová teorie a politika*, ASPI, a.s., 4. vydání (2006), 101-113.

[3] MARKL, J.: *Domácí stránka* [online]. 2006 [cit. 2010-03-06]. Rozhodování za rizika a při více kriteriích. Dostupné z WWW: „http://www.cs.vsb.cz/markl/teh/data/TEH_4_2006.pdf".

[4] NEČAS, J.: *Petrohradský paradox a rovná daň*. Politická ekonomie [online]. 2006, 1, [cit. 2010-03-06]. Dostupný z WWW: „http://www.vse.cz/polek/abstrakt.php3?IDcl=546".

[5] *Stanford Encyklopedia of Philosophy* [online]. 1998 [cit. 2010-03-06]. The St. Petersburg Paradox. Dostupné z WWW: „http://plato.stanford.edu/entries/paradox-stpetersburg".