Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁRSKA PRÁCA

Silvia Balážová

Dynamika replikátorovej rovnice

Katedra matematickej analýzy

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Študijný odbor: Obecná matematika

2009

Rada by som poďakovala vedúcemu práce doc. RNDr. Daliborovi Pražákovi, Ph.D. za možnosť spracovať túto zaujímavú tému a za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pri písaní práce pomáhali, Martinovi Havránkovi za pomoc s tvorbou obrázkov a rodičom za neustálu podporu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 5.8.2009 Silvia Balážová

Obsah

Názov práce: Dynamika replikátorovej rovnice
Autor: Silvia Balážová
Katedra: Katedra matematickej analýzy
Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
e-mail vedoucího: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá hrami v normálnom tvare. Obsahuje základné pojmy a definície z teórie hier a predstavuje hry kameň-papier-nožnice, jastraby a hrdličky a väzňovo dilema. Skúma replikátorovú rovnicu a jej vlastnosti. Zaoberá sa systémami nelineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu. Práca je ukončená analýzou replikátorovej dynamiky vyššie uvedených hier.

Kľúčové slová: hra v normálnom tvare, replikátorová rovnica, kameň-papier-nožnice, jastraby a hrdličky, väzňovo dilema

Title: Replicator dynamics
Author: Silvia Balážová
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: prazak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This work deals with normal form games. It contains basic terms and definitions of the game theory and introduces principle of Rock-scissors-paper game, Hawk-Dove game and Prisoner's Dilemma. It explores replicator equation and its properties. It deals with systems of first-order non-linear differential equations. This work ends with analysis of replicator dynamics in above mentioned games.

Keywords: normal form game, replicator equation, Rock-scissors-paper game, Hawk-Dove game, Prisoner's Dilemma

Kapitola 1

Úvod

„Všetci sa hráme.“ Podľa teórie hier to robíme aj vtedy, keď o tom nevieme a to vždy, keď robíme nejaké rozhodnutie. Teória hier je odvetvím aplikovanej matematiky, ktoré skúma predpokladané a skutočné správanie sa jednotlivcov v hrách (tj. rozhodovacích situáciách) a hľadá optimálne stratégie. Aplikácie teórie hier nájdeme v rôznych oblastiach, napr. v ekonomike, politológii, psychológii, informatike, atď.

V tejto práci sa budeme zaoberať najmä dynamikou a evolučnou teóriou hier, ktorá má aplikácie predovšetkým v biológii.

V druhej kapitole uvádzame základné pojmy teórie hier (hra, hráč, stratégia, výplatná funkcia). Definujeme v nej hru v normálnom tvare a pojmy ako rovnovážny stav, zmiešaná stratégia, sedlový bod alebo očakávaná hodnota výhry. Uvádzame rozdiel medzi antagonistickými a neantagonistickými hrami. Na konci kapitoly si predstavíme princíp hier kameň-papier-nožnice, jastraby a hrdličky a väzňovo dilema a nájdeme v týchto hrách rovnovážne body. V tejto kapitole čerpáme predovšetkým z [3], [4] a [8].

V tretej kapitole si predstavíme model evolučnej teórie hier a definujeme pojem evolučne stabilnej stratégie (ESS). Ďalej odvodíme replikátorovú rovnicu. Vychádzame z [2], [6], [9] a [10]. Uvedieme základné vlastnosti replikátorovej rovnice (tj. vetu o existenciu a jednoznačnosti riešenia). Zistíme, že replikátorová rovnica je systémom nelineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu a teda si uvedieme niektoré pojmy, definície a vety z teórie ODR. Zdrojom je najmä [5], ale odkazujeme aj na [1] a [7].

V poslednej kapitole analyzujeme dynamiku replikátorovej rovnice pre hry kameň-papier-nožnice, jastraby a hrdličky a väzňovo dilema.

Kapitola 2

Základy teórie hier

2.1 Základné pojmy

- **Konflikt -** je špeciálnym prípadom obecnejších rozhodovacích situácií, v ktorých dochádza k vážnejším či miernejším stretnutiam záujmov účastníkov v nich vystupujúcich. Inak povedané, konflikt je rozhodovacia situácia, v ktorej vystupujú aspoň dvaja hráči.

- **Hra -** je prípravou na reálny konflikt, tzn. model konfliktu.

- **Hráč -** v každej rozhodovacej situácii vystupujú osoby, ktoré môžu svojím rozhodnutím ovplyvňovať konečné výsledky. Tieto osoby nazývame hráči. Hráčov bude vždy konečný počet, budeme ich označovať $1, 2, ..., N$. Hráčov rozdeľujeme na:

    - *racionálnych (inteligentných)* - ich rozhodovanie je uvedomelé, zamerané na určitý cieľ, využívajú všetky objektívne dostupné informácie o dôsledkoch volieb jednotlivých alternatív,
    - *neracionálnych (indiferentných),* - ktorí sú ľahostajní k dôsledkom rozhodovania. Hry proti takýmto hráčom sa niekedy nazývajú hry proti prírode.

- **Stratégia -** je to pravidlo, ktoré hráčovi hovorí, ako sa má rozhodnúť v každom okamihu hry. Stratégie delíme na čisté (rýdze) a zmiešané, tieto pojmy si vysvetlíme neskôr.

- **Výplatná funkcia -** je to funkcia, ktorá udáva hodnotu úžitku, ktorý získa hráč použitím svojej stratégie. Ak je jej hodnota pre daného hráča kladná, hovoríme o zisku, ak je záporná, hovoríme o strate.

2.2 Hra v normálnom tvare

Definícia 2.2.1. Nech je daná konečná neprázdna $n-$prvková množina $Q = \{1, 2, ..., n\}$, n množín $S_1, S_2, ..., S_n$ a n reálnych funkcií $u_1, u_2, ..., u_n$ definovaných na kartézskom súčine $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Hrou n hráčov v normálnom tvare rozumieme usporiadanú $(2n + 1)-$ticu

$$\{Q; S_1, S_2, ..., S_n; u_1(s_1, s_2, ..., s_n), u_2(s_1, s_2, ..., s_n), ..., u_n(s_1, s_2, ..., s_n)\}.$$

Množinu Q nazývame množinou hráčov, množinu S_i nazývame priestorom stratégií hráča i, prvok $s_i \in S_i$ nazývame stratégiou hráča i a funkciu $u_i(s_1, s_2, ..., s_n)$ nazývame výplatnou funkciou hráča i.

Definícia 2.2.2. Hru n hráčov v normálnom tvare nazývame konečnou, ak priestory stratégií všetkých hráčov sú konečné množiny. V opačnom prípade hovoríme o nekonečnej hre.

Definícia 2.2.3. Hra n hráčov v normálnom tvare, pre ktorú platí

$$\forall i \in Q \qquad \forall s_i \in S_i \qquad \sum_{i \in Q} u_i(s_1, s_2, ..., s_n) = K,$$

kde K je konštanta nezávislá na voľbe stratégií $s_1, s_2, ..., s_n$, sa nazýva hrou s konštantným súčtom. Ak $K = 0$, hovoríme o hre s nulovým súčtom. Ak súčet závisí na zvolených stratégiách, hovoríme o hre s nekonštantným súčtom.

Definícia 2.2.4. $n-$tica stratégií $\mathbf{s}^* = (s_1, s_2, ..., s_n)$ sa nazýva rovnovážnym bodom hry n hráčov v normálnom tvare, práve keď pre každé $i \in \{1, 2, ..., n\}$ a všetky $s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \leq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*).$$

Stratégiu s_i^* nazývame rovnovážnou stratégiou hráča i.

Poznámka 2.2.5. Rovnovážny bod hry niekedy nazývame aj Nashova rovnováha, prípadne Nashovo ekvilibrium. Je to taký stav hry, kedy žiadny hráč nemôže zlepšiť svoju situáciu zmenou len svojej vlastnej stratégie.

Definícia 2.2.6. Uvažujme konečnú hru n hráčov v normálnom tvare. Počet prvkov priestoru stratégií S_i ľubovoľného hráča i označme symbolom m_i. Zmiešanou stratégiou hráča i sa nazýva vektor pravdepodobností

$$\mathbf{p}^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_{m_i}^i),$$

kde

$$p_j^i \geq 0 \qquad \text{pre všetky } 1 \leq j \leq m_i, \qquad \sum_{j=1}^{m_i} p_j^i = 1.$$

Zmiešaná stratégia je teda pre každého hráča vektor, ktorého $j-$ta zložka udáva pravdepodobnosť, s ktorou hráč volí $j-$tu stratégiu zo svojho priestoru stratégií.

Pre odlíšenie sa prvky priestoru stratégií S_i nazývajú čisté (rýdze) stratégie.

Množina všetkých zmiešaných stratégií teda tvorí simplex

$$\Delta^{m_i-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{m_i} : p_j \geq 0 \text{ pre všetky } 1 \leq j \leq m_i, \sum_{j=1}^{m_i} p_j = 1\}.$$

Krajné body simplexu zodpovedajú čistým stratégiám, vnútro simplexu tvoria také stratégie, pre ktoré je $p_j > 0$ pre všetky j.

Poznámka 2.2.7. Množina $A \in \mathbb{R}^n$ je simplex, ak je konvexná a každý jej bod sa dá vyjadriť jednoznačne určenou konvexnou lineárnou kombináciou jej krajných bodov. Platí, že ak má simplex dimenziu n, potom má práve $n+1$ krajných bodov a je ich konvexným obalom.

Veta 2.2.8. ***(Nash)*** *V zmiešaných stratégiách má každá konečná hra aspoň jeden rovnovážny bod.*

2.2.1 Antagonistické hry

O antagonistickom konflikte hovoríme v prípade, že sa ho zúčastňujú 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry. Ide o hru s konštantným súčtom, preto platí, že výhra jedného hráča ide na úkor druhého hráča.

Definícia 2.2.9. Nech

$$\{Q = \{1,2\}; S_1, S_2; u_1(s_1,s_2), u_2(s_1,s_2)\}$$

je hra v normálnom tvare s konštantným súčtom. Stratégie $s_1^* \in S_1$ a $s_2^* \in S_2$ nazveme rovnovážne, ak pre $\forall s_1 \in S_1$ a $\forall s_2 \in S_2$ je

$$\begin{aligned} u_1(s_1, s_2^*) &\leq u_1(s_1^*, s_2^*) \\ u_2(s_1^*, s_2) &\leq u_2(s_1^*, s_2^*). \end{aligned}$$

Dvojicu (s_1^*, s_2^*) budeme nazývať rovnovážnou stratégiou hry.

V prípade hry s nulovým súčtom platí

$$u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2).$$

$u(s_1^*, s_2^*)$ sa nazýva sedlový bod a predstavuje tzv. cenu hry.

Definícia 2.2.10. Maticovou hrou nazveme každú hru dvoch hráčov s nulovým súčtom, ktorá je určená reálnou maticou $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i \in S_1, j \in S_2}$. Platí $a_{i,j} = u(i,j)$.

Veta 2.2.11. *Stratégie (i^*, j^*) sú rovnovážne stratégie maticovej hry určenej $\mathbb{A}$ práve vtedy, keď*

$$max_{i \in S_1} min_{j \in S_2} a_{i,j} = min_{j \in S_2} max_{i \in S_1} a_{i,j} = a_{i^*,j^*}.$$

Prvok a_{i^*,j^*} sa nazýva sedlový bod matice.

Dôkaz. Viď [8], str.12. □

Veta 2.2.12. *Maticová hra má riešenie v obore čistých stratégií práve vtedy, keď má sedlový bod.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z predchádzajúcej vety. □

Definícia 2.2.13. Nech je daná maticová hra určená maticou $\mathbb{A}$. Hru dvoch hráčov s nulovým súčtom s priestormi stratégií

$$S^S = \{\mathbf{p}; \mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \mathbf{p} \geq 0\}$$

$$T^S = \{\mathbf{q}; \mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n), \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \mathbf{q} \geq 0\}$$

a s výplatnou funkciou

$$\pi(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{i,j} q_j = \mathbf{p}\mathbb{A}\mathbf{q}^T$$

nazveme zmiešaným rozšírením pôvodnej maticovej hry.

Veta 2.2.14. ***(Základná veta maticových hier)*** *Zmiešané rozšírenie každej maticovej hry má riešenie v rovnovážnych stratégiách.*

Dôkaz. Viď [8], str.15. □

2.2.2 Neantagonistické hry

O neantagonistickom konflikte hovoríme v prípade, že záujmy hráčov sú len čiastočne protichodné, tzn. každý účastník má možnosť viac či menej realizovať svoje ciele.

Neantagonistické hry ďalej delíme na *kooperatívne* a *nekooperatívne* podľa toho, či sa hráči medzi sebou môžu alebo nemôžu dohadovať.

Definícia 2.2.15. Dvojmaticovou hrou rozumieme hru dvoch hráčov, kde množina stratégií prvého hráča $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ je konečná, množina stratégií druhého hráča $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ je konečná, výhra prvého hráča pri voľbe stratégií (s_i, t_j) je $a_{i,j} = u_1(s_i, t_j)$ a výhra druhého hráča je $b_{i,j} = u_2(s_i, t_j)$; u_i je výplatnou funkciou i-teho hráča, $i = 1, 2$.

Definícia 2.2.16. Očakávaná hodnota výhry prvého hráča je

$$\pi_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{i,j} q_j$$

Očakávanú hodnotu výhry druhého hráča analogicky definujeme ako

$$\pi_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{i,j} q_j.$$

Hykšová v [4] na str. 33 uvádza nasledujúci obecný návod na nájdenie rovnovážneho bodu dvojmaticovej hry v zmiešaných stratégiách:

Očakávané hodnoty výplatných funkcií môžeme vyjadriť ako funkcie premenných $p_1, p_2, ..., p_{m-1}$; $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$, kde $p_i \geq 0$, $q_j \geq 0$ pre všetky i, j, $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$; $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$.

Uvažujme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_i} &= 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned}$$

pre všetky $i = 1, 2, ..., m-1$, $j = 1, 2, ..., n-1$.

Potom každé riešenie tejto sústavy $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ predstavuje rovnovážny bod v zmiešaných stratégiách.

2.3 Hry, ktorými sa budeme zaoberať

2.3.1 Kameň-papier-nožnice

Kameň-papier-nožnice je detská hra, často používaná pri jednoduchom rozhodovaní (napr. kto zje posledný kus koláča, kto vynesie odpadky a pod.). Princíp tejto hry pozná takmer každý, napriek tomu si ho stručne pripomenieme.

Hru hrajú dvaja hráči proti sebe. Po skončení odpočítavania, ktoré predstavuje vopred dohodnutá trojica alebo štvorica určitých slov, každý z hráčov ukáže jeden z troch možných symbolov: kameň (reprezentuje ho zovretá päsť), papier (predstavuje ho otvorená dlaň) alebo nožnice (znázorňuje ich vystretý prostredník a ukazovák). Platí, že kameň otupí nožnice, nožnice prestrihnú papier a kameň môžeme zabaliť do papiera, teda kameň víťazí nad nožnicami, nožnice víťazia nad papierom a papier víťazí nad kameňom. V prípade, že obaja hráči ukážu rovnaký symbol, nastáva remíza.

Z hľadiska teórie hier ide o antagonistickú hru dvoch hráčov s nulovým súčtom. Nech títo dvaja hráči hrajú o 1 jednotku. Ten, kto vyhrá, získa túto jednotku, naopak porazený musí túto jednotku odovzdať. Výplata výhercu je teda rovná 1, porazeného -1. Pri remíze sú výplaty nulové. Výplatnú funkciu znázorňuje nasledujúca tabuľka (v riadkoch sú stratégie prvého hráča, v stĺpcoch stratégie druhého hráča):

	kameň	*papier*	*nožnice*
kameň	0,0	-1,1	1,-1
papier	1,-1	0,0	-1,1
nožnice	-1,1	1,-1	0,0

Našim cieľom je nájsť stabilnú stratégiu. Vidíme, že výplatná matica pre túto hru nemá žiadny sedlový bod, a teda ani rovnovážny bod v čistých stratégiách. To overíme jednoduchou úvahou. Vezmime si napr. bod (*kameň*, *papier*). Tento bod nie je rovnovážnym bodom pre prvého hráča, pre ktorého by pri stratégii *papier* druhého hráča bolo výhodnejšie použiť stratégiu *nožnice*. Tým sa dostávame do bodu (*nožnice*, *papier*). Ak by však prvý hráč použil stratégiu *nožnice*, druhý hráč by radšej použil stratégiu *kameň*. Bod (*nožnice*, *kameň*) rovnako nie je rovnovážnym bodom, pretože v tomto prípade by prvý hráč použil stratégiu *papier*. Tým by hru posunul do bodu (*papier*, *kameň*), ktorý je zase nevýhodný pre hráča č.2. Pretože výplaty hráčov sú symetrické, podobnými úvahami by sme hru posunuli do bodu (*papier*, *nožnice*), z neho do bodu (*kameň*, *nožnice*) a nakoniec do bodu (*kameň*, *papier*), z ktorého sme vychádzali. Hra kameň-papier-nožnice teda nemá pri použití čistých stratégií rovnovážny bod.

Hľadajme teda rovnovážny bod v zmiešaných stratégiách. Nech prvý hráč volí stratégiu *kameň* s pravdepodobnosťou p_1, stratégiu *papier* s pravdepodobnosťou p_2 a stratégiu *nožnice* s pravdepodobnosťou $1-p_1-p_2$, $p_1, p_2 \geq 0$. Analogicky druhý hráč volí stratégiu *kameň* s pravdepodobnosťou q_1, stratégiu *papier* s pravdepodobnosťou q_2 a stratégiu *nožnice* s pravdepodobnosťou $1-q_1-q_2$, $q_1, q_2 \geq 0$. Dostaneme tabuľku:

	kameň	*papier*	*nožnice*	
kameň	0,0	-1,1	1,-1	p_1
papier	1,-1	0,0	-1,1	p_2
nožnice	-1,1	1,-1	0,0	$1-p_1-p_2$
	q_1	q_2	$1-q_1-q_2$	

Výplatné funkcie hráčov sú:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= -p_1q_2 + p_1(1-q_1-q_2) - p_2(1-q_1-q_2) - (1-p_1-p_2)q_1 \\
&\quad +(1-p_1-p_2)q_2 + p_2q_1 = -3p_1q_2 + 3p_2q_1 + p_1 - p_2 - q_1 + q_2 \\
\pi_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= p_1q_2 - p_1(1-q_1-q_2) + p_2(1-q_1-q_2) + (1-p_1-p_2)q_1 \\
&\quad -(1-p_1-p_2)q_2 - p_2q_1 = 3p_1q_2 - 3p_2q_1 - p_1 + p_2 + q_1 - q_2
\end{aligned}$$

Použijeme obecný návod pre nájdenie zmiešaného rovnovážneho bodu (viď str.10) a dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= -3q_2 + 1,\\ \frac{\partial \pi_1}{\partial p_2} &= 3q_1 - 1,\\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_1} &= -3p_2 + 1,\\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= 3p_1 - 1.\end{aligned}$$

Ak položíme dané rovnosti 0, získame riešenie $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$.

Jedinou stabilnou stratégiou v hre kameň-papier-nožnice pre oboch hráčov je náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou striedať všetky 3 symboly.

Poznámka 2.3.1. Toto riešenie je pomerne intuitívne. Ak predpokladáme, že hru hrajú dvaja racionálni hráči viackrát za sebou a jeden z hráčov používa jednu zo stratégií častejšie než ostatné, druhý hráč si to určite všimne a využije to vo svoj prospech.

2.3.2 Jastraby a hrdličky

Uvažujme jedincov určitej populácie rovnakého druhu súperiacich o nejakú korisť hodnoty V (územie, potrava a pod.) Pri vzájomnom stretnutí si protivníci môžu vybrať jednu z dvoch možných variant správania: *jastrab* - začne hrozbou, potom zaútočí a bojuje až kým nezvíťazí alebo kým nie je zranený; *hrdlička* - začne hrozbou, ale ak protivník zaútočí, utečie. *Jastrab* teda predstavuje agresívnu stratégiu, *hrdlička* pasívnu.

Predpokladajme, že víťazstvo v súboji znamená zisk celej koristi, je teda rovný V, zranenie (prehra v súboji) naopak znamená stratu C, $V > C$. Pri stretnutí *jastraba* s *jastrabom* dochádza k boju, ktorý končí až vo chvíli, keď je jeden, z hráčov zranený. Hráč má v boji rovnakú šancu na víťazstvo (zisk koristi), ako na prehru (zranenie), jeho zisk z tohto súboja je teda rovný $\frac{V-C}{2}$. Ak sa stretnú dve *hrdličky*, k boju nedôjde a o korisť sa rozdelia rovnakým dielom, ich zisk je teda $\frac{V}{2}$. Ak sa stretne *jastrab* s *hrdličkou*, *jastrab* zaútočí a *hrdlička* utečie. *Jastrab* teda získa celú korisť bez boja, jeho výplata je rovná V. *Hrdlička* z boja utečie, nezíska teda korisť, ale ani nie je zranená. Jej zisk sa teda nemení, je rovný 0.

Z hľadiska teórie hier ide o nekooperatívnu hru dvoch hráčov s nekonštantným súčtom. Situáciu znázorňuje nasledujúca tabuľka:

	jastrab	*hrdlička*
jastrab	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$V, 0$
hrdlička	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

Hľadajme stabilnú stratégiu. Bod (*jastrab*, *hrdlička*) nie je rovnovážnym bodom, pretože pri stratégii *jastrab* prvého hráča je pre druhého hráča výhodnejšie uprednostniť stratégiu *jastrab* a získať tým výplatu $\frac{V-C}{2} > 0$. Analogicky ak druhý hráč hrá stratégiu *jastrab*, prvému hráčovi prinesie väčší zisk zvolenie stratégie *jastrab*, preto ani bod (*hrdlička*, *jastrab*) nie je rovnovážny. Ak prvý hráč hrá stratégiu *hrdlička*, druhý hráč v snahe maximalizovať svoje zisky by zvolil stratégiu *jastrab*, teda bod (*hrdlička*, *hrdlička*) rovnako nie je rovnovážny. Vidíme, že jediným rovnovážnym bodom tejto hry v čistých stratégiách je bod (*jastrab*, *jastrab*).

Hľadajme ďalej rovnovážny bod v zmiešaných stratégiách. Nech prvý hráč volí stratégiu *jastrab* s pravdepodobnosťou p_1 a stratégiu *hrdlička* s pravdepodobnosťou $p_2 = 1 - p_1$, $p_1, p_2 \geq 0$. Podobne druhý hráč volí stratégiu *jastrab* s pravdepodobnosťou q_1, stratégiu *hrdlička* s pravdepodobnosťou $q_2 = 1 - q_1$, $q_1, q_2 \geq 0$. Dostaneme tabuľku:

	jastrab	*hrdlička*	
jastrab	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$V, 0$	p_1
hrdlička	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$	$1 - p_1$
	q_1	$1 - q_1$	

Výplatné funkcie hráčov sú:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= p_1 q_1 \frac{V-C}{2} + p_1(1-q_1)V + (1-p_1)(1-q_1)\frac{V}{2} = \\
&= p_1 \frac{V}{2} + \frac{V}{2} - q_1 \frac{V}{2} - p_1 q_1 \frac{C}{2} \\
\pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= p_1 q_1 \frac{V-C}{2} + q_1(1-p_1)V + (1-p_1)(1-q_1)\frac{V}{2} = \\
&= q_1 \frac{V}{2} + \frac{V}{2} - p_1 \frac{V}{2} - p_1 q_1 \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Použijeme obecný návod pre nájdenie zmiešaného rovnovážneho bodu (viď str.10) a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= \frac{V}{2} - q_1 \frac{C}{2}, \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial q_1} &= \frac{V}{2} - p_1 \frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

Ak položíme dané rovnosti 0, získame riešenie $p_1 = q_1 = \frac{V}{C}$, $p_2 = q_2 = 1 - \frac{V}{C}$.

Hra jastrabov a hrdličiek má teda dve rovnovážne stratégie, jednu v čistých a jednu v zmiešaných stratégiách.

2.3.3 Väzňovo dilema

Princíp hry je nasledujúci: Dvojica zločincov je zatknutá kvôli podozreniu zo spáchania závažného trestného činu a každý z podozrivých je umiestnený do samostatnej cely. Polícia však nemá dostatok dôkazov a podozrivým môže dokázať len malý zločin (napr. krádež auta, ktoré bolo k spáchaniu trestného činu použité). Každý z podozrivých má pri výsluchu dve možnosti - buď poprie svoju vinu, alebo sa prizná a tým usvedčí svojho komplica.

Ak vinu poprú obaja podozriví, polícia ich môže odsúdiť len za malý zločin. Ak sa jeden z podozrivých prizná a tým polícii umožní usvedčiť druhého podozrivého, dostane ako odmenu len symbolický trest, kým jeho spolupáchateľ bude odsúdený a potrestaný prísnym trestom. Ak sa obidvaja väznení priznajú, budú odsúdení za spáchanie závažného trestného činu, ale ich trest bude miernejší, pretože priznanie sa považuje za poľahčujúcu okolnosť.

Z hľadiska teórie hier ide o nekooperatívnu hru dvoh hráčov s nekonštantným súčtom. Situáciu môžeme znázorniť nasledujúcou tabuľkou (v riadkoch sú stratégie prvého hráča, v stĺpcoch stratégie druhého hráča):

	spolupráca	*zrada*
spolupráca	R,R	S,T
zrada	T,S	P,P

R (reward) je odmena za vzájomnú spoluprácu, P (punishment) naopak označuje trest za zradu. S (sucker's payoff) značí hlupákov zisk, okradnutie. Je to výplata dôverčivého hráča, ktorý spolupracuje a neprizná sa, ale jeho protihráč ho podrazí. Nakoniec T (temptation) označuje pokušenie zradiť súpera a získať maximum. Medzi týmito výplatami musia platiť nasledujúce vzťahy:

(1) $T > R > P > S$,

(2) $2R > T + S$.

Podmienka (2) znamená, že súčet výplat hráčov v prípade spolupráce je vyšší, než v prípade, keď jeden hráč spolupracuje a druhý zrádza.

Hľadajme stabilnú stratégiu. Bod (*spolupráca*, *zrada*) nie je rovnovážnym bodom, pretože ak sa druhý hráč prizná, je pre prvého hráča výhodnejšie tiež priznať vinu, $P > S$. Pretože hra je symetrická, analogicky zistíme, že ani bod (*zrada*, *spolupráca*) nie je rovnovážny. Ak sa druhý hráč rozhodne spolupracovať, výhodnou reakciou prvého hráča by bolo zradiť a tým získať výplatu $T > R$, preto ani bod (*spolupráca*, *spolupráca*) nie je rovnovážny. Zostáva bod (*zrada*, *zrada*). Ten je rovnovážnym bodom hry, pretože ak sa prvý hráč prizná, je pre druhého hráča výhodné tiež priznať vinu, a naopak.

Pre oboch hráčov by však bolo výhodnejšie spolupracovať a získať tak výplatu $R > P$. Z toho pochádza názov dilema - žiadny obvinený totiž nevie, či jeho spoluhráč nepodľahne pokušeniu priznať sa a získať výplatu T.

Uvažujme ďalej situáciu, že sa hra bude opakovať. V jednokolovej verzii hry existujú len dve možné stratégie. Ak však túto hru rozšírime na viac kôl za predpokladu, že hráči si výsledky predchádzajúcich kôl pamätajú, vzrastá počet stratégií exponenciálne.

Ak je počet kôl vopred známy, rovnovážna stratégia sa nemení, zostáva ňou *zrada*. To môžeme odôvodniť nasledovne: Nech má hra n kôl. Vychádzajme zo situácie v poslednom kole hry. Tá je podobná jednokolovej verzii (nebude nasledovať žiadne opakovanie), v ktorej dominuje nekooperatívna stratégia. Racionálny hráč sa teda v poslednom kole prizná, pretože vie, že jeho protihráč ho za túto zradu už nebude môcť potrestať. V situácii, keď vieme, ako skončí posledné kolo, sa problém neistoty presúva na kolo predposledné a tým sa problém zužuje na hru, ktorá má $n - 1$ kôl. Pretože hra má rekurentný charakter, vidíme, že hráči budú počas hry stále voliť stratégiu *zrada*.

Poznámka: Stratégiou v opakovanej hre rozumieme kompletný plán, ako sa hráč zachová v priebehu celej hry vo všetkých možných situáciách, v ktorých sa môže ocitnúť.

V prípade, že sa hra opakuje neznámy počet kôl, situácia sa mení a objavujú sa dokonca nové stabilné rovnovážne body. Problematikou neznámeho alebo nekonečného počtu opakovaní väzňovho dilematu sa na tomto mieste nebudeme zaoberať, pre zaujímavosť si len uvedieme niektoré zo stratégií v týchto hrách:

- *Dôverčivý hlupák* - vždy spolupracuje, nezávisle na správaní komplica.
- *Zradca* - vždy zradí komplica.
- *Náhodná stratégia* - spolupracuje s pravdepodobnosťou p, p je vopred dané.
- *Striedavá stratégia* - striedavo spolupracuje a nespolupracuje.
- *Tit-for-tat (Oko za oko)* - v prvom ťahu spolupracuje, potom opakuje komplicov predchádzajúci ťah, inak povedané spolupracuje, pokiaľ ho komplic nezradil v predchádzajúcom ťahu.
- *Zlostník* - spolupracuje, až kým ho komplic nezradí, potom už vždy zrádza.
- *Pavlovova stratégia* - spolupracuje, ak obaja zvolili v predchádzajúcom kole tú istú možnosť.

Kapitola 3

Replikátorová rovnica

3.1 Úvod do evolučnej teórie hier

Evolučná hra je model strategického pôsobenia v čase, v ktorom

- stratégie s vyššou výplatou nahrádzajú stratégie s nižšou výplatou („prežitie najsilnejšieho“)
- existuje nejaká zotrvačnosť (správanie sa nemení príliš náhle)
- hráči sa nepokúšajú systematicky ovplyvňovať iných hráčov.

Evolučná teória hier predpokladá populáciu, v ktorej jedinci môžu používať odlišné stratégie, ktoré sú interpretované ako rôzne fenotypy. Rozlišujeme dve možnosti: buď všetci jedinci používajú rovnakú stratégiu (monomorfná populácia), alebo používajú odlišné fenotypy (polymorfná populácia). Predpokladáme, že potomkovia dedia fenotyp po rodičoch a počet potomkov je úmerný výplate (zisku) daného jedinca, preto sa fenotypy s vyššou výplatou v populácii rozšíria. Evolučná teória hier pomáha študovať stabilnú rovnováhu evolúcie a preto sa používa najmä v biológickej teórii, aj keď v súčasnosti sa začala využívať aj na vysvetľovanie javov v iných odboroch (ekonomika, sociológia, medzinárodné vzťahy,...).

3.2 ESS

Definícia 3.2.1. Hovoríme, že stratégia $\sigma^* \in \Delta^n$ je evolučne stabilná, ak pre každú inú stratégiu $\rho \neq \sigma^*$ existuje $\overline{\varepsilon}(\rho) > 0$ také, že

$$\pi(\sigma^*, \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)\sigma^*) > \pi(\rho, \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)\sigma^*)$$

platí pre každé $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$.

Táto definícia hovorí, že ak je evolučne stabilná stratégia prijatá všetkými členmi populácie, potom je táto populácia odolná voči všetkým mutantným stratégiám.

Pripomenutie: Δ^n označuje množinu všetkých zmiešaných stratégií a funkcia π výplatnú funkciu.

Poznámka 3.2.2. Ak je funkcia π lineárna v druhom argumente (čo je prípad maticových hier), môžeme nerovnosť prepísať do tvaru

$$(1-\varepsilon)(\pi(\sigma^*, \sigma^*) - \pi(\rho, \sigma^*)) + \varepsilon(\pi(\sigma^*, \rho) - \pi(\rho, \rho)) > 0$$

pre každé $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$. To znamená, že σ^* je evolučne stabilná stratégia (ESS) práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) podmienka rovnováhy

$$\sigma^* \mathbb{A} (\sigma^*)^T \geq \rho \mathbb{A} (\sigma^*)^T \qquad \text{pre všetky } \rho \in S_n$$

(ii) podmienka stability

$$\text{ak } \rho \neq \sigma^* \text{ a } \sigma^* \mathbb{A} (\sigma^*)^T = \rho \mathbb{A} (\sigma^*)^T, \text{ potom } \sigma^* \mathbb{A} \rho^T > \rho \mathbb{A} \rho^T,$$

kde $\mathbb{A}$ je výplatná matica uvažovanej maticovej hry.

Definícia ESS vyžaduje, aby pre každú mutantnú stratégiu ρ existovala tzv. bariéra invázie $\overline{\varepsilon}(\rho) > 0$ závislá na stratégii ρ. Platí:

Veta 3.2.3. *Pre maticové hry môže byť bariéra invázie vybraná nezávisle na mutantnej stratégii.*

Dôkaz. Viď [6], str.12. □

Pre maticové hry ďalej platí nasledujúca veta:

Veta 3.2.4. *Stratégia $\sigma^* \in \Delta^n$ je ESS práve vtedy, keď*

$$\pi(\sigma^*, \rho) > \pi(\rho, \rho)$$

pre každé $\rho \neq \sigma^*$ v nejakom okolí $\sigma^* \in \Delta^n$.

Dôkaz. Viď [6], str.13. □

3.3 Odvodenie replikátorovej rovnice

Uvažujme, že množina čistých stratégií $S = (s_1, s_2, ..., s_m)$.

(i) *Diskrétny čas*

V tomto prípade predpokladáme $t = 1, 2, ...$ Označme

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_i(t))_{i=1,2,...,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i(t) = 1$$

profil populácie v čase t, tzn. $x_i(t)$ označuje podiel jedincov hrajúcich stratégiu s_i v populácii $\boldsymbol{x}$ v čase t. Uvažujme, že každý člen populácie žije len jeden časový okamih (napr. z času $t = 1$ do času $t = 2$) a zanecháva po sebe potomka, ktorý zdedil rovnaký fenotyp ako jeho rodič. Predpokladáme ďalej, že reprodukcia je asexuálna, tj. každý jedinec má len jedného rodiča. Počet potomkov závisí na výplate (zisku) rodiča. Špeciálne v tejto časti prijímame čisto biologický prístup, že výplata jedinca sa rovná očakávanému počtu jeho potomkov. Teda ak jedinec generácie t hrá stratégiu s_i proti populácii $\boldsymbol{x}(t)$, očakávaný počet jeho potomkov sa rovná $\pi(s_i, \boldsymbol{x}(t)) = \pi_i(\boldsymbol{x}(t))$.

Nech veľkosť populácie je rovná 1. Potom ak je profil populácie v čase t rovný $\boldsymbol{x}(t)$, veľkosť populácie v čase $t + 1$ je daná výrazom

$$\sum_{i=1}^{m} x_i(t)\pi_i(\boldsymbol{x}(t)).$$

Podiel jedincov hrajúcich s_i v populácii v čase $t + 1$ môžeme vyjadriť nasledovne:

$$x_i(t+1) = x_i(t)\frac{\pi_i(\boldsymbol{x}(t))}{\sum_{j=1}^{m} x_j(t)\pi_j(\boldsymbol{x}(t))}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Ak označíme priemernú výplatu $\hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t)) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t)\pi_j(\boldsymbol{x}(t))$, môžeme predchádzajúcu rovnosť vyjadriť v tvare

$$x_i(t+1) - x_i(t) = x_i(t)\frac{\pi_i(\boldsymbol{x}(t)) - \hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))}{\hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))}. \tag{3.1}$$

Ak uvažujeme $x_i(t) > 0$, dostávame

$$\frac{\Delta x_i(t)}{x_i(t)} = \frac{x_i(t+1) - x_i(t)}{x_i(t)} = \frac{\pi_i(\boldsymbol{x}(t)) - \hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))}{\hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))}.$$

Toto vyjadrenie môžeme interpretovať tak, že podiel populácie, ktorá hrá ktorúkoľvek z daných stratégií sa mení v pomere k jej priemernej výplate.

(ii) *Spojitý čas*

Ak predpokladáme rozdiely medzi jednotlivými časovými okamihmi dostatočne malé, môžeme model s diskrétnym časom nahradiť modelom so spojitým časom. Výhodou takéhoto modelu je jeho väčšia vierohodnosť, pretože v skutočnosti je čas spojitou premennou.

Uvažujme model s diskrétnym časom s premennou dĺžkou periódy $\Delta > 0$. Predpokladajme, že v každej perióde dĺžky Δ je len časť Δ populácie nahradená potomkami, zvyšok populácie zostáva nezmenený. Podobnými úvahami ako v diskrétnom modele dostaneme

$$x_i(t+\Delta) = \frac{x_i(t)\Delta\pi_i(\boldsymbol{x}(t)) + x_i(t)(1-\Delta)}{\sum_{j=1}^{m}[x_j(t)\Delta\pi_j(\boldsymbol{x}(t)) + x_j(t)(1-\Delta)]}$$

alebo

$$x_i(t+\Delta) - x_i(t) = \frac{x_i(t)[\Delta\pi_i(\boldsymbol{x}(t)) - \sum_{j=1}^{m} x_j(t)\Delta\pi_j(\boldsymbol{x}(t))}{\sum_{j=1}^{m}[x_j(t)\Delta\pi_j(\boldsymbol{x}(t))] + (1-\Delta)}.$$

Ak tento výraz vydelíme Δ, potom limitným prechodom pre $\Delta \to 0$ získame

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{x_i(t+\Delta) - x_i(t)}{\Delta} = \dot{x}_i(t) = x_i(t)[\pi_i(\boldsymbol{x}(t)) - \hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))]; \qquad (3.2)$$

Táto rovnosť býva označovaná ako replikátorová rovnica, pretože modeluje proces replikácie pozdĺž danej množiny stratégií. Alternatívna formulácia

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)\frac{[\pi_i(\boldsymbol{x}(t)) - \hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))]}{\hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))}; \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad (3.3)$$

pripomína (3.1) a má rovnaké kvalitatívne vlastnosti ako (3.2). Výraz $\hat{\pi}(\boldsymbol{x}(t))$ v menovateli (3.3) je totiž spoločný pre všetkých m rovníc a preto neovplyvňuje trajektórie systému.

Uvažujme ďalej maticovú hru danú maticou $\mathbb{A}$. V tomto prípade je:

$$\begin{aligned} \pi(s_i, \boldsymbol{x}) &= \pi_i(\boldsymbol{x}) &= \sum_j a_{i,j} x_j = (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i \\ \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= \hat{\pi}(\boldsymbol{x}) &= \sum_j x_i (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = (\boldsymbol{x})^T \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

kde $a_{i,j} = \pi(s_i, s_j)$.

Replikátorovú rovnicu (3.2) teda môžeme prepísať do tvaru

$$\dot{x}_i = x_i[(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i - (\boldsymbol{x})^T \mathbb{A}\boldsymbol{x}], \tag{3.4}$$

čo je systém kubických diferenciálnych rovníc na $\mathbb{R}^m$.

Poznámka 3.3.1. Ak pripočítame k stĺpcu matice $\mathbb{A}$ nejakú konštantu, výplaty všetkých stratégií vzrastú rovnako, a teda dynamika systému sa nezmení. Preto ak odčítame vhodnú konštantu od každého stĺpca, môžeme maticu $\mathbb{A}$ zjednodušiť na maticu $\mathbb{A}^*$, ktorá bude mať na diagonále samé nuly.

3.4 Základné vlastnosti rovnice (3.4)

Uvažujme obecnú sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_1, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_1, ..., x_n) \\ \dots & \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_1, ..., x_n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Túto sústavu môžeme zapisovať vo vektorovom tvare nasledovne

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3.6}$$

Predpokladajme, že premenné $x_1, x_2, ..., x_n$ aj funkcie $f_1, f_2, ..., f_n$ sú reálne a že vektorová funkcia $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ je definovaná a spojitá na istej otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definícia 3.4.1. Hovoríme, že vektorová funkcia $\boldsymbol{x}(t)$ je na otvorenom intervale $I \subset \mathbb{R}^1$ riešením rovnice (3.6), ak existuje derivácia $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ spojitá v I, platí $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in G$ pre $t \in I$ a $\boldsymbol{x}(t)$ spĺňa (3.6) pre $t \in I$.

Veta 3.4.2. *Nech G je otvorená množina, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ funkcia definovaná a spojitá na G. Nech $(t_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) \in G$ a $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(t_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) \equiv \mathcal{U}$ je okolie bodu $(t_0, \tilde{\boldsymbol{x}})$ také, že*

$$\mathcal{U} \subset G, \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq K \text{ pre všetky } (t, \boldsymbol{x}) \in U, K\alpha \leq \beta \text{ (}K \text{ závisí na } \alpha, \beta)$$

a nech funkcia $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ spĺňa na $\mathcal{U}$ Lipschitzovu podmienku vzhľadom k premennej $\boldsymbol{x}$, tj. nech existuje číslo $L > 0$ také, že platí

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \text{ pre všetky } (t, \boldsymbol{x}) \in U, (t, \boldsymbol{y}) \in U.$$

Potom existuje riešenie rovnice (3.6) definované na intervale $\langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\rangle$ spĺňajúce podmienku $\boldsymbol{x}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{x}}$ a platí

$$\|\boldsymbol{x}(t_2) - \boldsymbol{x}(t_1)\| \leq K\|t_2 - t_1\| \text{ pre } (t_1, t_2) \in \langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\rangle,$$

$$(t_i, \boldsymbol{x}(t_i)) \in U, i = 1, 2.$$

Ak je $\boldsymbol{y}(t)$ riešenie rovnice (3.6) definované na intervale (a, b), kde $t_0 \in (a, b)$ a spĺňajúce podmienku $\boldsymbol{y}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{x}}$, potom $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pre t z intervalu $\langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\rangle \cap (a, b)$.

Dôkaz. Viď [5], str.234. □

Poznámka 3.4.3. Symbolom $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(t_0, \tilde{\boldsymbol{x}})$ označujeme množinu všetkých $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, pre ktoré $|t - t_0| \leq \alpha, \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \leq \beta, \alpha > 0, \beta > 0$.

Definícia 3.4.4. Hovoríme, že funkcia $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ spĺňa lokálne Lipschitzovu podmienku vzhľadom k premennej $\boldsymbol{x}$ v množine $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ak existuje ku každému bodu $(t_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) \in G$ okolie $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_{\alpha,\beta}(t_0, \tilde{\boldsymbol{x}}) \subset G$ a číslo $L > 0$ také, že funkcia $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ spĺňa na U Lipschitzovu podmienku vzhľadom k premennej $\boldsymbol{x}$ s konštantou L.

Veta 3.4.5. *Nech je daná sústava (3.5), kde pravé strany $f_i(t, x_1, x_1, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$ sú spojité na otvorenej množine G a nech na G existujú spojité parciálne derivácie $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, ..., n$. Potom funkcia $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ spĺňa lokálne Lipschitzovu podmienku vzhľadom k premennej $\boldsymbol{x}$.*

Dôkaz. Viď [5], str.238. □

Predchádzajúce vety nám hovoria, že ak je funkcia $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ spojitá a lokálne lipschitzovská vzhľadom k $\boldsymbol{x}$ (teda má spojité parciálne derivácie), potom máme (lokálnu) existenciu a jednoznačnosť riešenia sústavy (3.6).

Pre replikátorovú rovnicu (3.4) platí, že pravé strany $f_i(t, x_1, x_1, ..., x_n)$ sú rovné polynómom pre všetky $i = 1, 2, ..., n$. Pretože polynómy sú spojité a majú spojité parciálne derivácie, máme zaručenú lokálnu existenciu a jednoznačnosť riešenia replikátorovej rovnice.

Vieme, že každým bodom prechádza práve jedna trajektória (inak by sme dostali spor s jednoznačnosťou). Pretože hranice simplexu tvoreného množinou všetkých zmiešaných stratégií sú riešeniami pre podhry, v ktorých uvažujeme len dve stratégie (a preto sú riešeniami celej hry), dostávame, že žiadne riešenie replikátorovej rovnice nemôže opustiť simplex. To znamená, že žiadne riešenie neopustí kompaktnú množinu, čo nám dáva globálnu jednoznačnosť a existenciu riešenia.

3.5 Stabilita a riešenie replikátorovej rovnice

Uvažujme autonómnu sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc (tj. systém rovníc, ktorých pravá strana nezávisí explicitne na t)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{3.7}$$

Krivky $C(t) = \{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t); t \in I\}$, ktoré sú určené partikulárnymi riešeniami daného dynamického systému, sa nazývajú trajektórie (orbity) tohto systému. Množina všetkých trajektórií dynamického systému sa nazýva jeho fázovým portrétom. Špeciálne postavenie medzi trajektóriami majú tzv. pevné body.

Definícia 3.5.1. Bod $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ nazývame pevným (stacionárnym, kritickým) bodom sústavy (3.7), ak $f(\boldsymbol{u}) = 0$.

Definícia 3.5.2. Trajektória $C(t)$ sa nazýva stabilná podľa Ljapunova, ak ku každému danému $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že pre $t \geq 0$ a všetky $i = 1, 2, ..., n$ platí

$$|\bar{x}_i(0) - x_i(0)| < \delta \Rightarrow |\bar{x}_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon,$$

Poznámka 3.5.3. Trajektória $C(t)$ sa nazýva nestabilná podľa Ljapunova, ak nie je stabilná.

Vieme, že v prípade replikátorovej rovnice (3.4) má funkcia $\boldsymbol{f}$ spojité parciálne derivácie. Nech $\boldsymbol{u}^*$ je pevným bodom sústavy (3.7). Použitím Taylorovej vety na zložku $f_i, i = 1, 2, ..., n$ funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{u}^*$ dostaneme pre všetky $\boldsymbol{u}$ z nejakého okolia bodu $\boldsymbol{u}^*$

$$f_i(\boldsymbol{u}) = f_i(\boldsymbol{u}^*) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{u}^*)}{\partial x_j}(u_j - u_j^*) + g_i(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*), \tag{3.8}$$

kde $g_i, i = 1, 2, ..., n$ je funkcia s vlastnosťou

$$\lim_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}^*} \frac{g_i(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*)}{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*\|} = 0.$$

Ak položíme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*$ a využijeme vzťahy $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*) = 0$ a (3.8), môžeme (3.7) zapísať v tvare

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbb{J}\boldsymbol{x} + g(\boldsymbol{x}),$$

kde

$$\mathbb{J} = \left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{u}^*)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$$

je Jakobiho matica funkcie f v bode $\boldsymbol{u}^*$. Lineárnu sústavu

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbb{J}\boldsymbol{x}$$

nazývame linearizáciou sústavy (3.7) v pevnom bode $\boldsymbol{u}^*$.

Veta 3.5.4. *Ak majú vlastné čísla Jakobiho matice $\mathbb{J}(\boldsymbol{u}^*)$ záporné reálne časti, je pevný bod $\boldsymbol{u}^*$ sústavy (3.7) asymptoticky ljapunovsky stabilný. Ak má aspoň jedno vlastné číslo Jakobiho matice $\mathbb{J}(\boldsymbol{u}^*)$ kladnú reálnu časť, je pevný bod $\boldsymbol{u}^*$ sústavy (3.7) ljapunovsky nestabilný.*

Dôkaz. Viď [5]. □

Definícia 3.5.5. Pevný bod $\boldsymbol{u}^*$ sústavy (3.7) nazývame

- repelor (zdroj, nestabilný uzol), ak všetky vlastné čísla Jakobiho matice $\mathbb{J}(\boldsymbol{u}^*)$ majú kladné reálne časti,

- atraktor (odtok, stabilný uzol), ak všetky vlastné čísla Jakobiho matice $\mathbb{J}(\boldsymbol{u}^*)$ majú záporné reálne časti,

- sedlo, ak všetky vlastné čísla Jakobiho matice $\mathbb{J}(\boldsymbol{u}^*)$ majú nenulové reálne časti a existuje aspoň jedno vlastné číslo so zápornou a aspoň jedno vlastné číslo s kladnou reálnou časťou.

Veta 3.5.6. ***(Grobman-Hartman)*** *Predpokladajme, že $\boldsymbol{u}^*$ je hyperbolickým pevným bodom sústavy (3.7). Potom existuje okolie $\mathcal{U}$ bodu $\boldsymbol{u}^*$ a homeomorfizmus h okolia $\mathcal{U}$ na $\mathbb{R}^n$ taký, že h zobrazuje trajektórie fázového portrétu v $\mathcal{U}$ sústavy (3.7) na trajektórie fázového portrétu linearizácie tejto sústavy v pevnom bode $\boldsymbol{u}^*$.*

Dôkaz. Viď [1], str.349. □

Poznámka: Bod $\boldsymbol{u}^*$ sa nazýva hyperbolickým pevným bodom, ak všetky vlastné čísla matice $\mathbb{J}(\boldsymbol{u}^*)$ majú nenulové reálne časti.

Veta 3.5.7. ***(Poincaré-Bendixson)*** *Predpokladajme, že Ω je neprázdna uzavretá a ohraničená limitná množina dynamického toku v rovine. Potom nastáva jedna z troch možností:*

(a) Ω je rovnovážny bod,

(b) Ω je periodické riešenie (cyklus),

(c) Ω obsahuje množinu ekvilibrií a trajektórie spájajúce tieto ekvilibriá.

Dôkaz. Viď [7], str.245. □

Poznámka 3.5.8. Poincaré-Bendixsonova veta hovorí, že každá trajektória, ktorá zostáva v kompaktnej oblasti stavového priestoru 2-dimenzionálneho rovinného spojitého dynamického systému sa buď blíži k pevným bodom, alebo je periodickou trajektóriou.

Záver: Nech $\boldsymbol{u}^*$ je pevným bodom sústavy (3.7). Ak si vyčíslime Jakobiho maticu funkcie $\boldsymbol{f}$ v tomto bode, môžu nám znamienka reálnych častí vlastných čísel tejto matice naznačiť, ako vyzerá fázový portrét sústavy (3.7) v nejakom okolí $\mathcal{U}$ bodu $\boldsymbol{u}^*$.

Pri analýze konkrétnych príkladov môže pomôcť nasledujúca veta:

Veta 3.5.9. *Nech je daná autonómna sústava nelineárnych diferenciálnych rovníc $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Predpokladajme, že $\boldsymbol{x}(t)$ je riešením tejto sústavy, funkcia $\boldsymbol{f}$ je spojitá a platí $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$. Potom $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = 0$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Nech $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, tj. existuje index i taký, že $f_i(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať, že $f_i(\boldsymbol{x}_0) > 0$. Dostávame

$$\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}) \to f_i(\boldsymbol{x}_0) > 0.$$

Teda musí platiť $x_i(t) \to \infty$ pre $t \to \infty$ a to je spor s predpokladom konvergencie riešenia. □

Najjednoduchšie na riešenie sú hry, ktoré zahŕňajú len dve čisté stratégie. Dôvodom je, že v tomto prípade uvažujeme 1-dimenzionálny simplex (úsečku) a trajektórie tohto systému musia ísť pozdĺž tejto úsečky, buď jedným, alebo druhým smerom. Platí:

Lemma 3.5.10. *Uvažujme hru s dvoma stratégiami a výplatnou maticou*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Položme $a = t - v$, $b = u - s$. Ak $a, b > 0$, potom bod $\boldsymbol{e} = (\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b})$ je ESS, zároveň je atraktorom systému a jeho oblasťou priťahovania je vnútro zodpovedajúceho simplexu.

Dôkaz. Zjednodušená matica (viď Poznámka 3.3.1) uvažovanej hry je $\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Teda

$$\mathbb{A}^*\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^T\mathbb{A}^*\boldsymbol{x} = ax_0x_1 + bx_0x_1 = x_0x_1(a+b),$$

replikátorová rovnica je daná systémom

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = & \; x_0(ax_1 - x_0x_1(a+b)) = & x_0x_1(a - x_0(a+b)) \\ \dot{x}_1 = & \; x_1(bx_0 - x_0x_1(a+b)) = & x_0x_1(b - x_1(a+b)). \end{aligned}$$

Pretože platí $x_0 + x_1 = 1$, môžeme tento systém prepísať do tvaru

$$\dot{x}_0 = x_0(a(1-x_0) - x_0(1-x_0)(a+b)) = x_0(1-x_0)(a - x_0(a+b)),$$

z ktorého okamžite vidíme, že pevné body sú $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = \frac{a}{a+b}$. Nás zaujíma posledný z týchto bodov, zodpovedajúci $\boldsymbol{e}$. Jakobiho matica v tomto bode je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} a - 2ax_0 - 2(a+b)x_0 + 3(a+b)x_0^2 \end{pmatrix} = -\frac{ab}{a+b}.$$

Obr. 3.1: Tok na simplexe dimenzie 1 pre $a, b > 0$

Vlastné číslo tejto matice je $-\frac{ab}{a+b} < 0$ a teda bod $\boldsymbol{e}$ je lokálnym atraktorom systému. Naviac jeho oblasťou priťahovania je vnútro zodpovedajúceho simplexu, pretože platí $\dot{x}_0 > 0$ pre $\dot{x}_0 \in (0, \frac{ab}{a+b})$, $\dot{x}_0 = 0$ pre $\dot{x}_0 = \frac{ab}{a+b}$ a $\dot{x}_0 < 0$ pre $\dot{x}_0 \in (\frac{ab}{a+b}, 1)$. Tok tohto systému ukazuje obrázok 3.1 a bod $\boldsymbol{e}$ je globálnym atraktorom.

Ďalej platí

$$\boldsymbol{e}^T \mathbb{A}^* \boldsymbol{e} \;\; = \boldsymbol{x}^T \mathbb{A}^* \boldsymbol{e} = \;\; \frac{ab}{a+b}$$

pre všetky $\boldsymbol{x} \in \Delta^1$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^T \mathbb{A}^* \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \mathbb{A}^* \boldsymbol{x} &= \frac{a^2 x_1 + b^2 x_0}{a+b} - x_0 x_1 (a+b) \\
&= \frac{a^2 - a^2 x_0 + b^2 x_0 - x_0(1-x_0)(a+b)^2}{a+b} \\
&= \frac{a^2 + x_0(b^2 - a^2) - x_0(1-x_0)(a+b)^2}{a+b} \\
&= \frac{a^2}{a+b} + x_0(b-a) - x_0(1-x_0)(a+b) \\
&= \frac{a^2}{a+b} - 2ax_0 + (x_0)^2(a+b) \\
&= (a+b)(\frac{a}{a+b} - x_0)^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

pre všetky $\boldsymbol{x} \in \Delta^1 - \boldsymbol{e}$, bod $\boldsymbol{e}$ teda spĺňa podmienky rovnováhy a stability z Poznámky 3.2.2, čím sme ukázali, že $\boldsymbol{e}$ je ESS. □

Opačne, ak je v systéme atraktor, potom $a, b > 0$. Ak $a, b < 0$, potom bod e je repelor. Ak a, b majú rôzne znamienka a zároveň nie sú obe nulové, potom jedna zo stratégií prebíja druhú. Nakoniec ak $a = b = 0$, obe stratégie prinášajú rovnaké zisky, hráč je indiferentný medzi svojimi stratégiami a každý bod je pevným bodom systému.

Poznámka 3.5.11. Atraktor je bod, množina alebo priestor, ku ktorému sa systém nezvratne vyvíja, ak naň nepôsobia žiadne vonkajšie vplyvy. Teda atraktor priťahuje všetky riešenia v istom okolí, toto okolie nazývame oblasť priťahovania. Naopak repelor riešenia v istom okolí odpudzuje.

3.6 ESS a replikátorová rovnica

Definícia 3.6.1. Nech $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ je dynamický systém v $\mathbb{R}^n$. Bod $\boldsymbol{x}^*$ je asymptoticky stabilné ekvilibrium tohto systému, ak:

(i) pre každé okolie $\mathcal{U}_1$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ existuje okolie $\mathcal{U}_2$ bodu $\boldsymbol{x}^*$, také, že všetky trajektórie s $\boldsymbol{x}(0) \in \mathcal{U}_2$ spĺňajú $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{U}_1, \forall t \geq 0$.

(ii) existuje nejaké okolie $\mathcal{V}$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ také, že všetky trajektórie začínjúce vo $\mathcal{V}$ spĺňajú $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}^*$ pre $t \to \infty$.

Pre zaujímavosť si ešte uvedieme niekoľko viet týkajúcich sa ESS a replikátorovej rovnice. Tieto vety nebudeme dokazovať, záujemci dôkazy môžu nájsť napr. v [9].

Veta 3.6.2. *Nech σ^* je ESS. Potom stav $\xi^* = \sigma^*$ je asymptoticky stabilné ekvilibrium replikátorovej rovnice.*

Veta 3.6.3. *Ak ξ^* definuje symetrickú Nashovu rovnováhu, potom je stacionárnym stavom replikátorovej rovnice, tj. spĺňa*

$$\xi^*(\mathbb{A}_i\xi^* - \xi^*\mathbb{A}(\xi^*)^T) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Opačný výrok obecne neplatí.

Veta 3.6.4. *Nech ξ^* je asymptoticky stabilné ekvilibrium replikátorovej rovnice. Potom (ξ^*, ξ^*) je Nashova rovnováha.*

Kapitola 4

Analýza modelov

4.1 Kameň-papier-nožnice

Princíp tejto hry sme si uviedli v 2.3.1. Pripomeňme, že výplatná matica má tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde prvý riadok zodpovedá stratégii *kameň*, druhý riadok stratégii *papier* a posledný riadok stratégii *nožnice*. Táto matica už má na diagonále samé nuly, nebudeme ju teda zjednodušovať (viď Poznámka 3.3.1).

Najskôr si vypočítame tok na hranici simplexu, tzn. budeme sa zaoberať podhrami s dvoma stratégiami. Pri analýze sa budeme odvolávať na Lemma 3.5.10. Vezmime si dvojicu (*kameň*, *papier*). Výplatná matica pre túto podhru je

$$\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme $b > 0$, $a < 0$, stratégia *papier* prebíja stratégiu *kameň*, bod zodpovedajúci stratégii *papier* je teda atraktorom tejto podhry. Pretože pre dvojice (*nožnice*, *kameň*) a (*papier*, *nožnice*) máme výplatné matice rovné matici $\mathbb{A}_0$, platí, že stratégia *kameň* je atraktorom podhry (*nožnice*, *kameň*) a stratégia *nožnice* je atraktorom podhry (*papier*, *nožnice*).

Vráťme sa k riešeniu pôvodnej hry. Platí:

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_0 - x_2 \\ -x_0 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_0 - x_2 \\ -x_0 + x_2 \end{pmatrix} \\
&= -x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_0 x_1 - x_1 x_2 - x_0 x_2 + x_1 x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Replikátorovú rovnicu teda tvorí systém:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_0(-x_1 + x_2) \\
\dot{x}_1 &= x_1(x_0 - x_2) \\
\dot{x}_2 &= x_2(-x_0 + x_2),
\end{aligned}
$$

kde x_0 označuje podiel hráčov v populácii hrajúcich stratégiu *kameň*, x_1 označuje podiel hráčov v populácii hrajúcich stratégiu *papier* a x_2 označuje podiel hráčov v populácii hrajúcich stratégiu *nožnice*. Vieme, že $x_2 = 1 - x_0 - x_1$, predchádzajúci systém môžeme prepísať do tvaru:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_0(-x_1 + 1 - x_0 - x_1) = x_0(1 - x_0 - 2x_1) \\
\dot{x}_1 &= x_1(x_0 - 1 + x_0 + x_1) = x_1(x_1 + 2x_0 - 1).
\end{aligned}
$$

Pevné body tohto systému sú: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Jakobiho matica je

$$
\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0 - 2x_1 & -2x_0 \\ 2x_1 & 2x_1 + 2x_0 - 1 \end{pmatrix}.
$$

Túto matica postupne vyčíslime v pevných bodoch:

(1) v $(0,0)$ je

$$
\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Vlastné čísla tejto matice vypočíme z rovnice $det(\mathbb{J} - \lambda\mathbb{I}) = 0$. Teda

$$
(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0,
$$

riešením je

$$
\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1.
$$

Vlastné čísla maju kladnú aj zápornú reálnu časť, bod $(0,0)$ je preto sedlovým bodom linearizovaného dynamického systému.

(2) v $(0,1)$ je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teda

$$(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1.$$

Bod $(0,1)$ je preto sedlovým bodom linearizovaného dynamického systému.

(3) v $(1,0)$ je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teda

$$(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1.$$

Bod $(0,1)$ je tiež sedlovým bodom linearizovaného dynamického systému.

(4) nakoniec v $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Teda

$$(-\frac{1}{3}-\lambda)(\frac{1}{3}-\lambda) + \frac{4}{9} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda + \lambda^2 + \frac{4}{9} = \lambda^2 + \frac{1}{9} = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = \frac{i}{3}, \lambda_1 = -\frac{i}{3}.$$

Vlastné čísla majú obe reálne časti nulové, bod $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ je preto centrom linearizovaného dynamického systému.

Pretože pevný bod $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nie je hyperbolický, nemôžeme aplikovať Vetu 3.5.6. Dynamiku v tomto príklade však môžeme zdôvodniť iným spôsobom. Platí, že funkcia

$$\xi(t) = x_0(t)x_1(t)x_2(t)$$

je konštantná pre všetky t, teda je konštantná pozdĺž akejkoľvek trajektórie. To overíme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \dot{x}_0(t)x_1(t)x_2(t) + x_0(t)\dot{x}_1(t)x_2(t) + x_0(t)x_1(t)\dot{x}_2(t) \\
&= x_1(t)x_2(t)x_0(t)(-x_1(t) + x_2(t)) + x_0(t)x_2(t)x_1(t)(x_0(t) - x_2(t)) \\
&\quad +x_0(t)x_1(t)x_2(t)(-x_0(t) + x_2(t)) \\
&= -x_0(t)x_1^2(t)x_2(t) + x_0(t)x_1(t)x_2^2(t) + x_0^2(t)x_1(t)x_2(t) \\
&\quad -x_0(t)x_1(t)x_2^2(t) - x_0^2(t)x_1(t)x_2(t) + x_0(t)x_1^2(t)x_2(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

To znamená, že všetky trajektórie sú cykly okolo bodu $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ a každá z týchto trajektórií sa zhoduje s množinou $\{\boldsymbol{x} \in \Delta^2 : x_0x_1x_2 = K\}$, pre nejaké $0 \leq K \leq \frac{1}{27}$. Fázový portrét pre hru kameň-papier-nožnice je teda ako na obrázku 4.1, str. 41.

4.2 Jastraby a hrdličky

Princíp tejto hry sme si uviedli v 2.3.2. Výplatná matica má tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{V-C}{2} & V \\ 0 & \frac{V}{2} \end{pmatrix},$$

kde prvý riadok zodpovedá stratégii *jastrab*, druhý stratégii *hrdlička*. Zjednodušená matica (viď Poznámka 3.3.1) je

$$\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{V}{2} \\ -\frac{V-C}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretože ide o hru s dvoma stratégiami, môžeme sa pri analýze odvolávať na Lemma 3.5.10. Rozlišujeme nasledujúce tri prípady:

(1) $V > C$

V tomto prípade máme $a > 0$, $b < 0$ a stratégia *jastrab* poráža stratégiu *hrdlička*, pretože hráčovi prináša vyššie výplaty.

(2) $V = C$

V tomto prípade máme $a > 0$, $b = 0$, stratégia *jastrab* znovu poráža stratégiu *hrdlička*, pretože hráčovi prináša vyššie výplaty.

(3) $C > V$

V tomto prípade máme $a > 0$, $b > 0$, a preto má systém atraktor v bode $(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C})$.

Interpretácia týchto výsledkov je nasledovná:

- ak $V \geq C$: Nech hráč hrá stratégiu *jastrab*. Bez ohľadu na to, akú stratégiu hrá v súboji jeho protivník, výplaty *jastraba* sú vyššie (alebo rovnaké), ako výplaty, ktoré by v týchto súbojoch získal hráč hrajúci *hrdličku*, $\frac{V-C}{2} \geq 0$, $V > \frac{V}{2}$. Pretože vyšší zisk znamená viac potomkov, stratégia *jastrab* sa bude v populácii šíriť, naopak stratégia *hrdlička* bude postupne eliminovaná. Stratégia *jastrab* je teda evolučne stabilná;

- ak $C > V$: Uvažujme populáciu, v ktorej majú prevahu *hrdličky*. V takejto populácii bude hráč hrajúci *jastraba* stretávať prevažne *hrdličky* a pretože pri súboji s *hrdličkou* je zisk *jastraba* vyšší ako zisk *hrdličky*, $V > 0$, bude sa *jastrab* v takejto populácii šíriť. Čím viac bude v populácii *jastrabov*, tým častejšie sa budú stretávať medzi sebou, čo je stretnutie, ktoré neprináša zisk, ale stratu. Preto sa v populácii, v ktorej prevažujú *jastraby* začnú šíriť *hrdličky*. Celý tento proces sa nakoniec ustáli v bode, v ktorom je podiel *jastrabov* a *hrdličiek* taký, že priemerné výplaty oboch stratégií sú zhodné. Týmto evolučne stabilným bodom je bod $(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C})$. To overíme veľmi jednoducho: ak je podiel *jastrabov* v populácii rovný $\frac{V}{C}$, potom priemerný zisk tejto stratégie je
$$\frac{V}{C} \cdot \frac{V-C}{2} + (1 - \frac{V}{C})V = \frac{V(C-V)}{2C},$$
priemerný zisk stratégie *hrdlička* je
$$\frac{V}{C} \cdot 0 + (1 - \frac{V}{C})\frac{V}{2} = \frac{V(C-V)}{2C}.$$

4.3 Väzňovo dilema

Princíp hry sme si uviedli v 2.3.3. Pri skúmaní dynamiky však hru trochu upravíme. Predpokladajme, že hra sa opakuje, pravdepodobnosť ďalšieho kola nech je $\delta = \frac{2}{3}$. Uvažujme tri stratégie:

(i) *spolupráca* - hráč v každom kole spolupracuje,

(ii) *zrada* - hráč v každom kole zrádza,

(iii) *oko za oko* - hráč v prvom kole spolupracuje a ďalej opakuje ťah protihráča v predchádzajúcom kole.

Položme $R = 3$, $S = 0$, $T = 4$ a $P = 1$. Podmienky $T > R > P > S$ a $2R > T + S$ sú v tomto prípade splnené. Výplaty stratégií *spolupráca* a *zrada* sú rovnaké ako v jednokolovej verzii, pretože hráči nereagujú na správanie protihráča. Zostáva nám teda vypočítať výplaty pre stratégiu *oko za oko*. Ak stretne hráč hrajúci *oko za oko* protihráča hrajúceho *oko za oko* alebo *spolupráca*, budú obaja hráči počas celej hry spolupracovať, výplata oboch hráčov teda bude rovná $R = 3$. Ak však stretne hráč hrajúci *oko za oko* protihráča hrajúceho stratégiu *zrada*, potom v prvom kole spolupracuje a ďalej až do skončenia hry zrádza. V prvom kole je teda výplata tohto hráča nulová. V druhom kole, ktoré sa bude hrať s pravdepodobnosťou δ, zradí a jeho zisk za prvé dve kolá je $0 + 1 \cdot \delta$. Tretie kolo sa hrá s pravdepodobnosťou δ^2, výplata po troch kolách je rovná $0 + 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta^2$, atď. Počas celej hry teda hráč získa výplatu zodpovedajúcu súčtu geometrického radu s koeficientom δ, ktorého prvý člen je δ. Priemerný zisk za jedno kolo dostaneme, ak výplatu z celej hry vydelíme dĺžkou hry, ktorá je rovná $(1 + \delta + \delta^2 + ...) = \frac{1}{1-\delta}$.

$$\pi(\textit{oko za oko}, \textit{zrada}) = (0 + \delta + \delta^2 + ...)(1 - \delta) = \frac{\delta}{1-\delta}(1 - \delta) = \delta = \frac{2}{3}.$$

Podobnou úvahou zistíme, že

$$\pi(\textit{zrada}, \textit{oko za oko}) = (4+\delta+\delta^2+...)(1-\delta) = (4+\frac{\delta}{1-\delta})(1-\delta) = 4-3\delta = 2.$$

Dostávame výplatnú maticu

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix},$$

kde prvý riadok zodpovedá stratégii *spolupráca*, druhý riadok stratégii *zrada* a tretí riadok stratégii *oko za oko*. Túto maticu zjednodušíme (viď Poznámka 3.3.1), dostaneme

$$\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Najskôr si vypočítame tok na hranici simplexu, tzn. budeme sa zaoberať podhrami s dvoma stratégiami. Pri analýze sa budeme odvolávať na Lemma 3.5.10. Vezmime si dvojicu (*spolupráca*, *zrada*). Zjednodušená matica je

$$\mathbb{A}_0^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme $b > 0$, $a < 0$, stratégia *zrada* prebíja stratégiu *spolupráca*. Pre (*spolupráca*, *oko za oko*) je zjednodušená matica

$$\mathbb{A}_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obe stratégie prinášajú rovnaké zisky, každý bod tejto podhry je pevným bodom. Nakoniec pre (*zrada*, *oko za oko*) máme

$$\mathbb{A}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$a < 0$, $b < 0$ a preto bod $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ je repelorom uvažovanej podhry.

Vráťme sa k riešeniu pôvodnej hry. Platí:

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_0 - x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\mathbb{A}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_0 - x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1 \end{pmatrix} \\ &= -x_0x_1 + x_0x_1 - x_1x_2 - \frac{1}{3}x_1x_2 = -\frac{4}{3}x_1x_2 \end{aligned}$$

Replikátorovú rovnicu teda tvorí systém:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0(-x_1 + \frac{4}{3}x_1x_2) \\ \dot{x}_1 &= x_1(x_0 - x_2 + \frac{4}{3}x_1x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_1x_2). \end{aligned}$$

Vieme, že $x_2 = 1 - x_0 - x_1$, predchádzajúci systém môžeme prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_0(-x_1 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{4}{3}x_1x_0) \\
&= x_0(\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{4}{3}x_1x_0) \\
\dot{x}_1 &= x_1(x_0 - 1 + x_0 + x_1 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{4}{3}x_1x_0) \\
&= x_1(-1 + 2x_0 + \frac{7}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{4}{3}x_1x_0).
\end{aligned}$$

Pevné body tohto systému sú: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,\frac{3}{4})$. Jakobiho matica je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{8}{3}x_1x_0 & \frac{1}{3}x_0 - \frac{4}{3}x_0^2 - \frac{8}{3}x_1x_0 \\ \\ 2x_1 - \frac{4}{3}x_1^2 & -1 + 2x_0 + \frac{14}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_1x_0 - 4x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Túto matica postupne vyčíslime v pevných bodoch:

(1) v $(0,0)$ je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastné čísla tejto matice vypočíme z

$$(-\lambda)(-1-\lambda) = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = -1.$$

Jedno z vlastných čísel má nulovú reálnu časť, bod $(0,0)$ nie je hyperbolickým bodom dynamického systému.

(2) v $(0,1)$ je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Teda

$$(-1-\lambda)(-\frac{1}{3} - \lambda) = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = -1, \lambda_1 = -\frac{1}{3}.$$

Obe vlastné čísla majú zápornú reálnu časť, ide teda o atraktor linearizovaného dynamického systému.

(3) v $(1,0)$ je

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teda

$$(-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1.$$

Jedno z vlastných čísel má nulovú reálnu časť, bod $(1,0)$ nie je hyperbolickým bodom dynamického systému.

(4) nakoniec v $(0, \frac{3}{4})$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Teda

$$(-\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{4} - \lambda) = 0,$$

riešením je

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = \frac{1}{4}.$$

Vlastné čísla majú kladnú aj zápornú reálnu časť, bod $(0, \frac{3}{4})$ je preto sedlom linearizovaného dynamického systému.

Pretože body $(1,0,0)$ a $(0,0,1)$ nie sú hyperbolické, nemôžeme na ne aplikovať Vetu 3.5.6 a napriek zdĺhavému výpočtu sme o fázovom portréte nezistili takmer nič. Uvidíme však, že tento fázový portrét môžeme odvodiť jednoduchými úvahami.

Uveďme si znovu replikátorovú rovnicu:

$$\dot{x}_0 = x_0 x_1(-1 + \frac{4}{3}x_2) \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_1 = x_1(x_0 - x_2 + \frac{4}{3}x_1 x_2) \tag{4.2}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 x_1(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_2). \tag{4.3}$$

Z rovnice (4.3) vidíme, že pre $x_2 = \frac{1}{4}$ je $\dot{x}_2 = 0$, teda

$$\begin{aligned} x_2 &\equiv \frac{1}{4} \\ \dot{x}_0 &= x_0 x_1 (-\frac{2}{3}) \\ \dot{x}_1 &= x_1 (x_0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} x_1) \end{aligned}$$

je riešením replikátorovej rovnice. Trajektória tohto riešenia nám simplex rozdelí na dve disjunktné oblasti (z jednoznačnosti vieme, že trajektórie sa nemôžu „pretnúť“). Označme ich

(I) $x_2 \in (0, \frac{1}{4})$,

(II) $x_2 \in (\frac{1}{4}, 1)$.

Skúmajme (I): V tomto prípade z (4.2) vidíme, že $\dot{x}_0 < 0$, teda funkcia $x_0(t)$ je klesajúca. Rovnako z (4.3) dostaneme $\dot{x}_2 < 0$, funkcia $x_2(t)$ je tiež klesajúca. Tieto funkcie sú monotónne a ohraničené, sú preto konvergentné. Z rovnosti $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ vyplýva konvergencia funkcie $x_1(t)$. Tým máme splnené predpoklady Vety 3.5.9 a všetky trajektórie skúmanej oblasti musia konvergovať k niektorému z pevných bodov.

V tejto oblasti máme nasledujúce pevné body: $(0, 1, 0)$, $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$,$(1, 0, 0)$ a body tvaru $(x_0, 0, x_2)$, kde $x_2 \in (0, \frac{1}{4})$, ktoré zodpovedajú úsečke spájajúcej body $(1, 0, 0)$ a $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$.

Pretože v celej tejto oblasti máme, že $x_0(t)$ je klesajúca funkcia, nemôže byť limitou bod $(1, 0, 0)$ a ani žiadny z bodov na úsečke $(x_0, 0, x_2)$, $x_2 \in (0, \frac{1}{4})$. Ďalej vieme, že $x_2(t)$ je klesajúca funkcia, preto limitou nemôže byť ani bod $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Všetky trajektórie v oblasti (I) teda musia konvergovať k bodu $(0, 1, 0)$.

Skúmajme (II): V tomto prípade z (4.2) dostaneme $\dot{x}_0 > 0$, teda funkcia $x_0(t)$ je rastúca. Podobne z (4.3) máme $\dot{x}_2 > 0$, $x_2(t)$ je rastúca. Znovu teda máme monotónne ohraničené funkcia a môžeme použiť Vetu 3.5.9.

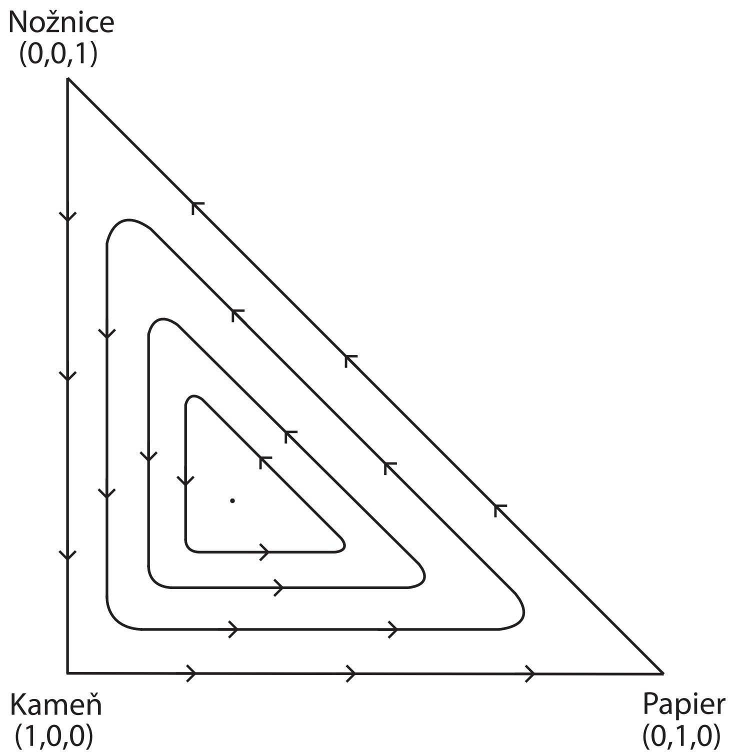
Pevné body v tejto oblasti sú: $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$,$(0, 0, 1)$ a ďalej body $(x_0, 0, x_2)$, kde $x_2 \in (\frac{1}{4}, 1)$, ktoré zodpovedajú úsečke spájajúcej body $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ a $(0, 0, 1)$.

Pretože v celej tejto oblasti máme, že $x_0(t)$ je rastúca funkcia, nemôže byť limitou bod $(0, 0, 1)$. Ďalej vieme, že $x_2(t)$ je tiež rastúcou funkciou, preto limitou nemôže byť ani bod $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Všetky trajektórie v oblasti (II) teda musia konvergovať k bodom úsečky spájajúcej body $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ a $(0, 0, 1)$.

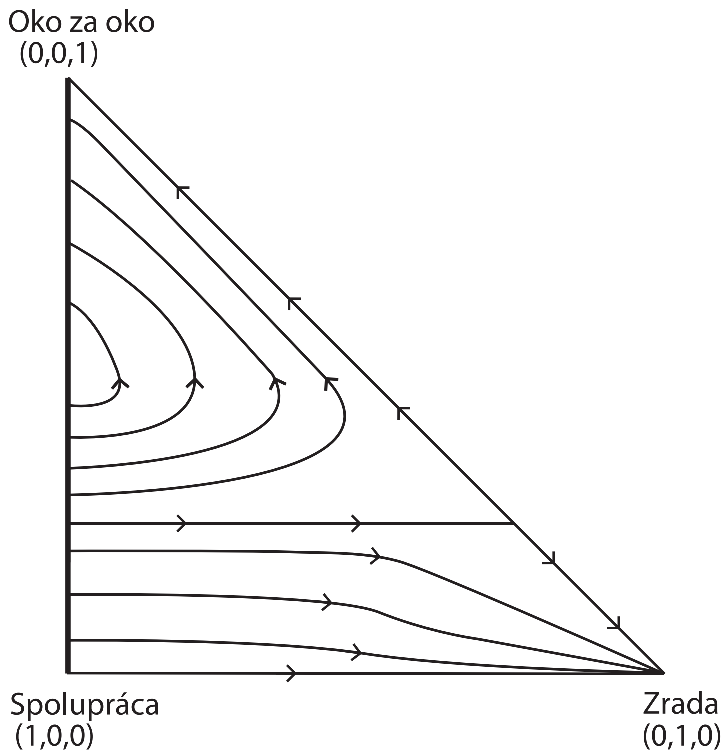
Dostávame teda fázový portrét ako na obrázku 4.2, str. 42.

Interpretácia týchto výsledkov je nasledovná:

Predpokladajme, že v populácii je len malý zlomok hráčov hrajúcich stratégiu *oko za oko* a prevahu v populácii majú hráči hrajúci *spoluprácu*. V takejto populácii sa začne stratégia *zrada* veľmi rýchlo šíriť. To môžeme ukázať nasledovne: Ak *zrada* stretne *spoluprácu*, zisk hráča hrajúceho stratégiu *zrada* je 4, kým zisk hráča hrajúceho stratégiu *spolupráca* je nulový. Rovnako v prípade stretnutia s hráčom hrajúcim *oko za oko* je zisk hráča hrajúceho *zradu* vyšší ako zisk hráča hrajúceho *oko za oko*. Na druhej strane, čím rozšírenejšia bude stratégia *zrada*, tým častejšie budú hráči hrajúci stratégie *spolupráca* alebo *oko za oko* stretávať hráčov hrajúcich *zradu*, a teda v populácii vyhynú. Ak však podiel hráčov hrajúcich stratégiu *oko za oko* v populácii je vyšší než $\frac{1}{4}$, potom sa situácia mení a v populácii dokonca vyhynie stratégia *zrada*.



Obr. 4.1: Fázový portrét hry kameň - papier - nožnice



Obr. 4.2: Fázový portrét pre väzňovo dilema

Literatúra

[1] Chicone, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Second Edition, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2006

[2] Hofbauer, J. and Sigmund, K., *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, 1998

[3] Hykšová, M., *Teorie her a optimální rozhodování*, http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/

[4] Hykšová, M., *Dvojmaticové hry*, Slidy k přednáškám, http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/prednaska_dvojmat.pdf

[5] Kofroň, J., *Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru*, Univerzita Karlova v Praze - Nakladatelství Karolinum, 2004

[6] Křivan, V., *Evolutionary games and population dynamics*, Lecture notes for Seminar in Differential Equations, Kamenice nad Lipou, May 19-23, 2008

[7] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2006

[8] Peško, Š., *Teória hier*, http://frcatel.fri.uniza.sk/users/pesko/TH/th2.pdf

[9] Vega-Redondo, F., *Evolution, Games and Economic Behaviour*, Oxford University Press, New York, 1996

[10] Zeeman, E. C., *Dynamics of the Evolution of Animal Conflicts*, Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, England, 1980