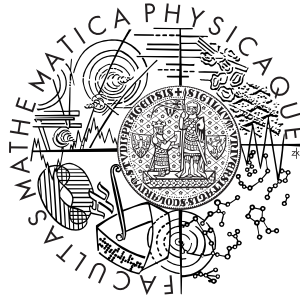


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petr Petráček

Besicovitchova množina

Katedra Matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program : Obecná matematika

2009

Chtěl bych zde poděkovat vedoucímu doc. Miroslavu Zelenému za trpělivost a radu. Také bych rád poděkoval rodině a přátelům za trpělivost a pochopení.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 06.08.2009

Petr Petráček

Obsah

1 Úvod	5
2 Besicovitchova množina, překrývací konstrukce	6
3 Kakeyova množina	14
Literatura	25

Název práce: Besicovitchova množina
Autor: Petr Petráček
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
e-mail vedoucího: Miroslav.Zeleny@mff.cuni.cz

Abstrakt: V první kapitole prezentované práce popisujeme překrývací konstrukci Besicovitchovy množiny, přičemž se zároveň zabýváme horním odhadem její míry. V závěru kapitoly dokazujeme ještě s pomocí této konstrukce dodatečné tvrzení. V druhé kapitole se zabýváme otázkou míry množin v rovině, ve kterých lze spojitě otočit jednotkovou úsečku (pro účely této práce nazýváme tyto množiny Kakeyovy) a představujeme konstrukci, která nám umožňuje zkonstruovat takovou množinu libovolně malé míry. Klíčová slova: Besicovitchova množina, Kakeyova množina, konstrukce

Title: Besicovitch set
Author: Petr Petráček
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Miroslav.Zeleny@mff.cuni.cz

Abstract: In the first chapter of the presented work we describe overlapping construction of Besicovitch set while at the same time we concern ourselves with upper estimation of its measure. In the end of the chapter we use the described construction to prove additional theorem. In the second chapter we concern ourselves with the question of measure of plain sets in which we can continuously turn a unit segment (for purposes of this work we call such sets Kakeya sets) and present a construction which allows us to construct such sets of arbitrarily small measure. Keywords: Besicovitch set, Kakeya set, construction

Kapitola 1

Úvod

V této práci se budeme zabývat konstrukcí obecné Besicovitchovy množiny stejně jako jejího speciálního typu Kakeyovy množiny. Pojem Besicovitchovy množiny je znám již od dvacátých let minulého století a nachází uplatnění hlavně v harmonické analýze ([2]). Kapitola o překrývací konstrukci vychází z knihy [3, str. 434–440], kapitola o konstrukci Kakeyovy množiny z článku [1].

Kapitola 2

Besicovitchova množina, překrývací konstrukce

Definice 2.1. (Besicovitchova množina)

Množinu v euklidovském prostoru, která obsahuje jednotkovou úsečku v každém směru, nazýváme *Besicovitchovou množinou*.

Poznámka 2.2. V dalším budeme všechny objekty uvažovat v \mathbb{R}^2 , dvojrozměrnou Lebesgueovu míru budeme značit jako λ_2 a délku úsečky AB budeme značit $|AB|$.

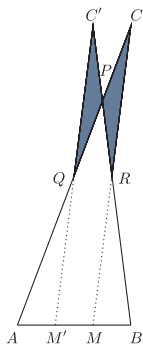
Věta 2.3. (*existence Besicovitchovy množiny libovolně malé míry*)

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje Besicovitchova množina \tilde{B} , pro kterou platí $\lambda_2(\tilde{B}) < \varepsilon$.

Konstrukce 2.4. (obrazec $\Phi(T)$)

Nechť T je trojúhelník ABC orientovaný tak, že jeho základna AB leží na ose x . Dále nechť $1/2 < \alpha < 1$. Označíme nyní M jako bod průsečíku těžnice T procházející bodem C se základnou T . Vzniklý trojúhelník AMC fixujeme a trojúhelník MBC posuneme v záporném směru osy x a to tak, aby délka podstavy vzniklého útvaru byla α -násobkem délky úsečky AB . Takto vzniklý útvar pak nazveme $\Phi(T)$ (viz obr. 2.1).

Poznámka 2.5. Trojúhelník vzniklý posunutím trojúhelníku MBC v konstrukci 2.4 budeme dále značit $M'B'C'$. Průsečík úseček AC a $B'C'$ budeme značit P , průsečík úseček $M'C'$ a AC budeme značit jako Q a průsečík $B'C'$ a MC jako R (viz obr. 2.1).



Obrázek 2.1: $\Phi(T)$

Definice 2.6. (hlava $\Phi(T)$ a tělo $\Phi(T)$)

Nechť $\Phi(T)$ je jako na obrázku 2.1. Pak $\triangle AB'P$ označíme jako $\Phi_t(T)$ a nazveme tělem $\Phi(T)$. Sjednocení trojúhelníků QPC' a PRC označíme $\Phi_h(T)$ a nazveme hlavou $\Phi(T)$.

Pozorování 2.7. (míra obrazců $\Phi(T)$, $\Phi_t(T)$ a $\Phi_h(T)$)

Nechť T a $\Phi(T)$ jsou jako v předchozím, pak platí rovnosti

$$\begin{aligned}\lambda_2(\Phi_t(T)) &= \alpha^2 \lambda_2(T), \\ \lambda_2(\Phi_h(T)) &= 2(1 - \alpha)^2 \lambda_2(T),\end{aligned}$$

a je tedy

$$\lambda_2(\Phi(T)) = \lambda_2(\Phi_t(T)) + \lambda_2(\Phi_h(T)) = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) \lambda_2(T). \quad (2.1)$$

Důkaz. (i) Rovnost $\lambda_2(\Phi_t(T)) = \alpha^2 \lambda_2(T)$ zřejmě platí. (Z konstrukce plyne, že

$$\angle BAC = \angle B'AP$$

a

$$\angle ABC = \angle AB'P.$$

Trojúhelníky ABC a $AB'P$ jsou tedy podobné, navíc $|AB'| = \alpha|AB|$.) (ii) Soustředíme se dále na $\Phi_h(T)$. Veďme bodem P přímkou rovnoběžnou s AB' . Její průsečík s úsečkou QC' označme jako D a průsečík s RC označme jako E (viz obr.2.2). Z konstrukce vyplývá, že

$$\lambda_2(DPC') = (1 - \alpha)^2 \lambda_2(M'B'C')$$

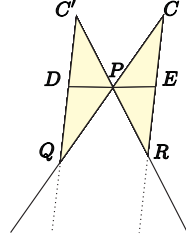
a

$$\lambda_2(PEC) = (1 - \alpha)^2 \lambda_2(AMC).$$

Trojúhelníky DPQ a PEC (a tedy i trojúhelníky PER a DPC') jsou si zřejmě podobné, z konstrukce navíc plyne, že $|DP| = |PE|$, a proto platí:

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Phi_h(T)) &= (\lambda_2(DPC') + \lambda_2(PER)) + (\lambda_2(PEC) + \lambda_2(DPQ)) \\ &= 2(1 - \alpha)^2 (\lambda_2(M'B'C') + \lambda_2(AMC)) \\ &= 2(1 - \alpha)^2 \lambda_2(T). \end{aligned}$$

□



Obrázek 2.2: $\Phi_h(T)$

Konstrukce 2.8. (obrazce $\Psi^1(ABC, n)$, $\Psi_t^1(ABC, n)$, $\Psi_h^1(ABC, n)$)

Nechť $T = \triangle ABC$ je pevně daný se základnou AB na ose x . Stejně tak necht' jsou $n \in \mathbb{N}$ a $1/2 < \alpha < 1$ pevně daná. Zkonstruujeme ekvidistantní dělení úsečky AB na 2^n částí a označme body tohoto dělení popořadě jako $A = A_0, \dots, A_{2^n} = B$. Rozdělili jsme tak T na 2^{n-1} trojúhelníků $A_{2^j}A_{2^{j+2}}C$, $0 \leq j < 2^{n-1}$. Nyní můžeme pro každý z těchto trojúhelníků zkonstruovat $\Phi(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)$. Z Konstrukce 2.4 vyplývá, že pravá strana trojúhelníku $\Phi_t(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)$ je rovnoběžná s $A_{2^{j+2}}C$ a stejně tak i levá strana trojúhelníku $\Phi_t(A_{2^{j+2}}A_{2^{j+4}}C)$ pro $0 \leq j \leq 2^{n-1} - 2$. Můžeme tedy vhodným posunutím trojúhelníku $A_{2^{j+2}}A_{2^{j+4}}C$ v záporném směru osy x zkonstruovat trojúhelník $A'_{2^{j+2}}A'_{2^{j+4}}C_{j+1}$ tak, aby se levá strana $\Phi_t(A'_{2^{j+2}}A'_{2^{j+4}}C_{j+1})$ shodovala s pravou stranou $\Phi_t(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C_j)$ (přičemž značíme $C_0 := C$). Zkonstruujeme tedy postupně $\triangle A_0A_2C = \triangle A'_0A'_2C_0, \triangle A'_2A'_4C_1, \dots, \triangle A'_{2^{n-1}-1}A'_{2^n}C_{2^{n-1}-1}$ a de-

finujeme:

$$\Psi^1(ABC, n) := \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \Phi(A_{2j}(A'_{2j+2}C_j)),$$

$$\Psi_t^1(ABC, n) := \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \Phi_t(A'_{2j}A'_{2j+2}C_j) \quad (\text{tělo } \Psi^1(ABC, n)),$$

$$\Psi_h^1(ABC, n) := \Psi^1(ABC, n) \setminus \Psi_t^1(ABC, n) \quad (\text{hlava } \Psi^1(ABC, n)).$$

Poznámka 2.9. Povšimněme si, že $\Psi^1(ABC, n)$ jsme vlastně zkonstruovali pouze posouváním trojúhelníků $A_jA_{j+1}C$, $0 \leq j \leq 2^{n-1}$ po úsečce AB .

Pozorování 2.10. (odhad míry $\Psi^1(ABC, n)$)

Nechť $\Psi^1(ABC, n)$ a α jsou jako v předchozím, pak platí následující:

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Psi_t^1(ABC, n)) &= \alpha^2 \lambda_2(\Delta ABC), \\ \lambda_2(\Psi_h^1(ABC, n)) &\leq 2(1 - \alpha)^2 \lambda_2(\Delta ABC). \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Psi^1(ABC, n)) &= \lambda_2(\Psi_t^1(ABC, n)) + \lambda_2(\Psi_h^1(ABC, n)) \\ &\leq (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) \lambda_2(\Delta ABC). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Důkaz. Z rovností $\lambda_2(\Delta A'_{2j}A'_{2j+2}C') = 2^{-(n-1)} \lambda_2(\Delta ABC)$ a Pozorování 2.7 plyne, že

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Psi_t^1(ABC, n)) &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \lambda_2(\Phi_t(A'_{2j}A'_{2j+2}C')) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} 2^{-(n-1)} \alpha^2 \lambda_2(\Delta ABC) \\ &= \alpha^2 \lambda_2(\Delta ABC). \end{aligned}$$

Podobně pro $\Psi_h^1(ABC, n)$ platí

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Psi_h^1(ABC, n)) &\leq \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \lambda_2(\Phi_h(A'_{2j}A'_{2j+2}C')) \\ &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} 2^{-(n-2)} (1 - \alpha)^2 \lambda_2(\Delta ABC) \\ &= 2(1 - \alpha)^2 \lambda_2(\Delta ABC). \end{aligned}$$

□

Definice 2.11. (obrazce $\Psi^i(ABC, n)$, $\Psi_t^i(ABC, n)$, $\Psi_h^i(ABC, n)$)
 Necht' $\Psi^1(ABC, n)$ je jako v předchozím a $n > 2$ je pevné celé. $\Psi_t^1(ABC, n)$ je dáno jako sjednocení $2^{(n-1)}$ trojúhelníků, které jsou navíc obsaženy v trojúhelnících $A_j A_{j+1} C$, $0 \leq j \leq 2^{n-1}$. Posouváním těchto 2^n trojúhelníků pak zkonstruujeme $\Psi^2(ABC, n) := \Psi^1(\Psi_t^1(ABC, n), n-1)$ (viz. Poznámka 2.9). Budeme dále značit:

$$\begin{aligned}\Psi_t^2(ABC, n) &:= \Psi_t^1(\Psi_t^1(ABC, n), n-1), \\ \Psi_h^2(ABC, n) &:= \Psi_h^1(\Psi_t^1(ABC, n), n-1).\end{aligned}$$

Analogicky pak definujeme

$$\begin{aligned}\Psi^i(ABC, n) &:= \Psi^1(\Psi_t^{i-1}(ABC, n), n-(i-1)), \\ \Psi_t^i(ABC, n) &:= \Psi_t^1(\Psi_t^{i-1}(ABC, n), n-(i-1)), \\ \Psi_h^i(ABC, n) &:= \Psi_h^1(\Psi_t^{i-1}(ABC, n), n-(i-1)), \quad 2 < i \leq n.\end{aligned}$$

Z Pozorování 2.10 pak plynou následující vztahy

$$\begin{aligned}\lambda_2(\Psi_t^i(ABC, n)) &= \alpha^{2i} \lambda_2(\triangle ABC), \\ \lambda_2(\Psi_h^i(ABC, n)) &\leq 2(1-\alpha)^2 \cdot \alpha^{2(i-1)} \lambda_2(\triangle ABC), \quad 1 \leq i \leq n.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Pozorování 2.12. (odhad míry $\Psi^n(ABC, n)$)

Necht' $\Psi^n(ABC, n)$ je jako v předchozím, pak platí následující nerovnost:

$$\lambda_2(\Psi^n(ABC, n)) \leq (\alpha^{2n} + 2(1-\alpha)) \cdot \lambda_2(\triangle ABC).\tag{2.4}$$

Důkaz. Z (2.3) a konstrukce $\Psi^n(ABC, n)$ plyne, že

$$\begin{aligned}\lambda_2(\Psi^n(ABC, n)) &\leq \lambda_2(\Psi_t^n(ABC, n)) + \sum_{i=1}^n \lambda_2(\Psi_h^i(ABC, n)) \\ &\leq (\alpha^{2n} + 2(1-\alpha)^2 + \dots + 2(1-\alpha)^2 \alpha^{2n-2}) \cdot \lambda_2(ABC).\end{aligned}$$

Odtud (2.4) plyne s využitím následující nerovnosti:

$$\begin{aligned}2(1-\alpha)^2 + \dots + 2(1-\alpha)^2 \alpha^{2n-2} &\leq 2(1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} = \\ &= \frac{2(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2} \leq 2(1-\alpha).\end{aligned}$$

□

Důkaz věty 2.3. Necht' $\varepsilon > 0$ je libovolné pevné. Necht' $\triangle ABC$ je rovnostranný o délce výšky 2. Zkonstruujme nyní $\Psi^N(ABC, N)$ přičemž $\alpha < 1$ a N volme tak, aby

$$\lambda_2(\Psi^N(ABC, N)) \leq (\alpha^{2N} + 2(1 - \alpha)) \cdot \lambda_2(\triangle ABC) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Připomeňme, že obrazec $\Psi^N(ABC, N)$ vznikl ekvidistantním rozdělením podstavy AB trojúhelníku ABC na 2^N úseček a posouváním vzniklých trojúhelníků po úsečce AB . Z toho vidíme, že obrazec $\Psi^N(ABC, N)$ obsahuje jednotkovou úsečku v rozsahu daném vnitřním úhlem trojúhelníku ABC , tedy šedesát stupňů. Vezmeme-li nyní šest obrazců $\Psi^N(ABC, N)$, přičemž každý otočíme oproti předchozímu o šedesát stupňů, dostaneme množinu, která obsahuje jednotkovou úsečku v každém směru a je to tedy Besicovitchova množina. Zároveň je však její míra menší než ε . \square

Konstrukce obrazce $\Psi^n(ABC, n)$ nám umožňuje dokázat ještě jiné tvrzení, které nyní pro zajímavost uvedeme.

Definice 2.13. (obdélník R a \tilde{R})

Necht' R je obdélník o stranách 1 a 2^{-N} , kde N je přirozené číslo. Potom obdélník \tilde{R} vytvoříme následujícím způsobem: pokud je delší strana R rovnoběžná s osou y , posuneme R podél této strany o dvě jednotky v kladném směru osy y . Ve všech ostatních případech posuneme R podél delší strany o dvě jednotky v kladném směru osy x .

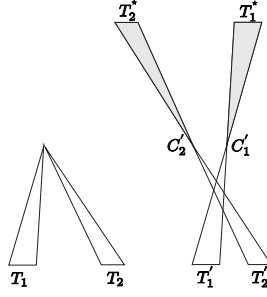
Věta 2.14. *Pro každé ε kladné existuje N přirozené a obdélníky R_1, \dots, R_{2^N} o stranách 1 a 2^{-N} takové, že*

$$(i) \quad \lambda_2(\bigcup_{j=1}^{2^N} R_j) < \varepsilon$$

$$(ii) \quad \tilde{R}_j \text{ jsou po dvou disjunktní, a tedy } \lambda_2(\bigcup_{j=1}^{2^N} \tilde{R}_j) = 1.$$

Pozorování 2.15.

Mějme trojúhelník ABC a konstruujme $\Psi^n(ABC, n)$. Označme trojúhelníky $A_j A_{j+1} C$ jako T_j , $0 \leq j \leq 2^n - 1$ a trojúhelníky vzniklé jejich posunutím při konstrukci $\Psi^n(ABC, n)$ jako T'_j . Zřejmě T_j mají společný vrchol C . Značme C'_j odpovídající vrcholy T'_j a T_j^* jako středově souměrné obrazy trojúhelníků T'_j podle C'_j . Pak T_j^* jsou po dvou disjunktní. Je-li totiž $0 \leq j_1 < j_2 \leq 2^n - 1$, jsou základny $T_{j_1}^*$ a $T_{j_2}^*$ zřejmě disjunktní (při středově souměrném zobrazení trojúhelníků T_{j_1} a T_{j_2} podle C se T_{j_2} zobrazí nalevo od T_{j_1}), navíc posun při konstrukci $\Psi^n(ABC, n)$ zaručuje, že C'_{j_2} se nachází nalevo od C'_{j_1} (viz obr. 2.3).

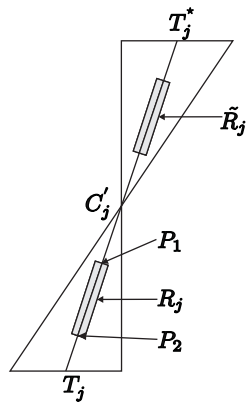


Obrázek 2.3: T'_1, T'_2, T_1^*, T_2^*

Důkaz věty 2.14. Nechť je $\triangle ABC$ rovnostranný o výšce 2 a T'_j je jako v předchozím. Veďme bodem C'_j těžnici a označme na ní body P_1 (resp. P_2) ve vzdálenosti $1/2$ (resp. $3/2$) od C_j . Dále nechť R_j je obdélník o stranách 1 a 2^{-N} , jehož podélnou osou je P_1P_2 . Zde $N = n + c_1$, kde c_1 je pevně přirozené číslo takové, aby $R_j \subset T'_j$. Takové c_1 existuje, neboť úhel při vrcholu C_j je jistě větší než $c_2 \cdot 2^{-n}$ pro dostatečně malé kladné c_2 . Nyní zřejmě $\tilde{R}_j \subset T_j^*$ (viz obr.2.4). Z Pozorování 1.1.13 zároveň plyne, že \tilde{R}_j jsou po dvou disjunktní pro $0 \leq j \leq 2^n - 1$. Vezmeme-li nyní disjunktní sjednocení 2^{c_1} množin $\Psi^n(ABC, n)$, dostáváme 2^N obdélníků R_j o stranách 1 a 2^{-N} takových, že \tilde{R}_j jsou po dvou disjunktní. R_j jsou však obsaženy v množině, jejíž míra je nejvýše

$$2^{c_1} \cdot (\alpha^{2n} + 2(1 - \alpha)) \cdot \lambda_2(ABC). \quad (\text{viz (2.4)})$$

Tento výraz ale můžeme libovolně zmenšit, pokud vezmeme N dostatečně velké a α dostatečně blízko jedné. \square



Obrázek 2.4: R_j, \tilde{R}_j

Kapitola 3

Kekeyova množina

Dále uvedeme konstrukci speciálního typu Besicovitchovy množiny, který budeme nazývat Kekeyovou množinou. Ukážeme, že můžeme požadovat dokonce její omezenost. Dále budeme opět všechny objekty uvažovat v \mathbb{R}^2 se standardní euklidovskou metrikou.

Definice 3.1. (spojité otočení úsečky)

Řekneme, že úsečku AB jsme spojitě otočili v čase $0 < T < \infty$, jestliže její pohyb můžeme popsat dvojicí spojitých funkcí $\phi_A(t)$ a $\phi_B(t)$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$, pro které je $\phi_A(0) = \phi_B(T)$ a $\phi_B(0) = \phi_A(T)$, a zároveň je $|\phi_A(t)\phi_B(t)| = |AB|$ pro všechna $t \in \langle 0, T \rangle$.

Definice 3.2. *Kekeyovou množinou* nazýváme množinu, ve které můžeme jednotkovou úsečku spojitě otočit.

Poznámka 3.3. Dodejme pouze, že v literatuře (kupříkladu [3]) se často mezi názvy Kekeyova a Besicovitchova množina nerozlišuje.

Věta 3.4. (*existence omezené Kekeyovy množiny libovolně malé míry*)

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje Kekeyova množina \tilde{K} taková, že $\lambda_2(\tilde{K}) < \varepsilon$ a navíc je \tilde{K} obsažena v jednotkovém kruhu.

Tvrzení 3.5. Požadavek na jednotkový poloměr kruhu v předchozí větě již nelze zlepšit.

Důkaz. Uvažujme kruh K o poloměru $r < 1$ a bod P takový, že $|KP| \leq 1 - r$ a umístíme do tohoto bodu počátek souřadnic. Pak $K \setminus P$ již není Kekeyova množina. Skutečně, předpokládejme pro spor, že jsme v této množině schopni jednotkovou úsečku AB spojitě otočit v čase $0 < T < \infty$. Existují tedy

spojité funkce $\phi_A(t) = [\phi_{Ax}(t), \phi_{Ay}(t)]$ a $\phi_B(t) = [\phi_{Bx}(t), \phi_{By}(t)]$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$ udávající polohu koncových bodů této úsečky během procesu otáčení. Definujme dále funkci $\phi(t)$ následujícím způsobem:

$$\phi(t) := \begin{vmatrix} \phi_{Ax}(t) & \phi_{Ay}(t) \\ \phi_{Bx}(t) & \phi_{By}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Tato funkce je spojitou funkcí na uzavřeném intervalu. Navíc z Definice 3.1 plyne, že $\phi(0) = -\phi(T)$. Musí tedy existovat $t^* \in \langle 0, T \rangle$, pro které je $\phi(t^*) = 0$, což je hledaný spor. Znamená to totiž, že vektory $[\phi_{Ax}(t^*), \phi_{Ay}(t^*)]$ a $[\phi_{Bx}(t^*), \phi_{By}(t^*)]$ jsou lineárně závislé. Úsečka AB pak v čase t^* leží na přímce protínající bod P a není tedy celá obsažena v množině $K \setminus P$. Kakeyova množina \tilde{K} ležící v K tedy musí obsahovat všechny body jejichž vzdálenost od středu K je menší či rovna $1 - r$ a je tedy $\lambda_2(\tilde{K}) \geq \pi(1 - r)^2$. \square

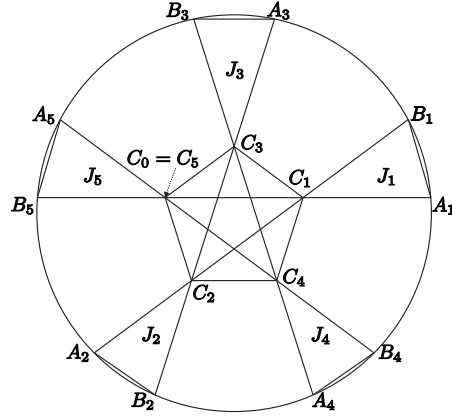
V konstrukci námi hledané Kakeyovy množiny využijeme její jednodušší typ (který vzápětí popíšeme), jehož strukturu budeme dále upravovat.

Konstrukce 3.6. (obrazec $S(Q, \varepsilon)$)

Buď Γ kruh o jednotkovém poloměru, Q buď přirozené liché a ε buď z otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$. Zkonstruujeme pravidelný Q -úhelník soustředný s Γ takový, aby kruh jemu opsaný měl dvourozměrnou Lebesgueovu míru rovnou $\varepsilon/2$. Plochu tímto Q -úhelníkem ohraničenou označme jako Ω . Jeho vrcholy značme jako $C_0, C_1, \dots, C_Q = C_0$ tak, aby pro $1 \leq q \leq Q - 1$ byl středový úhel mezi C_{q-1} a C_q (v záporném směru) roven $\pi Q / (Q + 1)$. Dále značme A_q (resp. B_q) průsečíky Γ s polopřímkami vycházejícími z bodů C_{q-1} (resp. C_{q+1}), jež prochází bodem C_q . Značme dále $J_q := \triangle A_q B_q C_q$ pro $1 \leq q \leq Q$. Pak $S(Q, \varepsilon) := \bigcup_{q=1}^Q J_q \cup \Omega$ (viz obrázek 3.1).

Poznámka 3.7. Množina $S(Q, \varepsilon)$ je zřejmě obsažena v jednotkovém kruhu.

Za předpokladu, že vzdálenost mezi dvěma (rovnoběžnými) úsečkami $C_{q-1}C_{q+1}$ a A_qB_q pro $1 \leq q \leq Q$ (kde $C_{Q+1} = C_1$) je rovna alespoň jedné, je $S(Q, \varepsilon)$ Kakeyova množina. Skutečně, umístíme-li pak jednotkovou úsečku na C_0A_1 , můžeme ji okolo C_1 otočit tak, aby ležela na C_2B_1 . Podél této úsečky ji můžeme posunout na C_1A_2 , pak otočit okolo C_2 tak, aby ležela na C_3B_2 , atd. Po Q takovýchto posunutích a otočeních se bude úsečka opět nacházet na C_0A_1 a neboť Q je liché, její koncové body si vymění pozice. Navíc vzdálenost mezi úsečkami $C_{q-1}C_{q+1}$ a A_qB_q je rovna $1 + \sqrt{\varepsilon/2\pi} \cos \frac{\pi}{Q}$,



Obrázek 3.1: obrazec $S(Q, \varepsilon)$

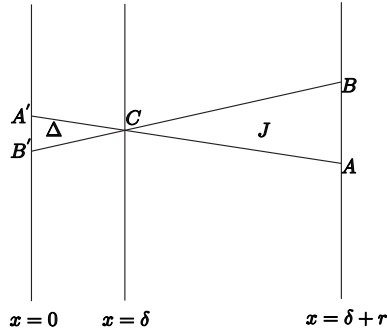
což pro Q jdoucí k nekonečnu konverguje k výrazu $1 + \sqrt{\varepsilon/2\pi}$, který je větší než 1 pro libovolné kladné ε a námi požadovaný předpoklad je tak splněn pro dostatečně velká Q .

Definice 3.8. (obrazec $(\triangle XYZ, \triangle XY'Z')$)

Bud' XYZ a $XY'Z'$ trojúhelníky takové, že $\triangle XYZ \cap \triangle XY'Z' = X$. Nechť jsou navíc úsečky YZ a $Y'Z'$ rovnoběžné s osou y , úsečky XY a XY' nechť leží na jedné přímce a stejně tak úsečky XZ a XZ' . Pak sjednocení těchto dvou trojúhelníků budeme značit $(\triangle XYZ, \triangle XY'Z')$.

Soustředíme se dále na problém pohybu jednotkové úsečky z $C_{q-1}A_q$ na $C_{q+1}B_q$. Na obrázku (3.2) je zobrazen útvar, který jsme k tomuto pohybu využili v obrazci $S(Q, \varepsilon)$. Pro zjednodušení jsme přeznačili C_{q-1} (resp. C_{q+1}) jako A' (resp. B') a u bodů A_q, B_q a C_q jsme vynechali indexy. Zavedli jsme také nový souřadný systém (x -ovou osu opět pro přehlednost nezobrazujeme). Dále značíme trojúhelník $A'B'C$ (resp. délku jeho výšky) jako Δ (resp. δ) a trojúhelník ABC (resp. délku jeho výšky) jako J (resp. r). Značme $K^0 := (\Delta, J)$. Povšimněme si ještě, že $r < 1$ (tento fakt využijeme později).

Poznámka 3.9. Správně bychom měli psát K_q^0 . Budeme se však nadále soustředit pouze na jeden takovýto útvar a proto spodní index pro větší přehlednost vynecháme.



Obrázek 3.2: obrazec K^0

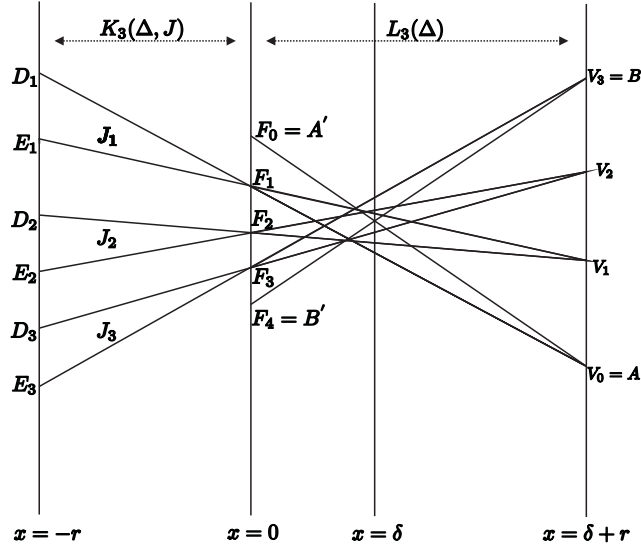
Konstrukce 3.10. (obrazce $K_m^1(\Delta, J)$, $K_m(\Delta, J)$, $L_m(\Delta)$ a (Δ_i, J_i))

Mějme K^0 jako v předchozím a m buď přirozené nenulové. Volme m bodů F_1, \dots, F_m na úsečce $A'B'$ a $m-1$ bodů V_1, \dots, V_{m-1} na úsečce AB , a to tak, aby platilo $A' > F_1 > \dots > F_m > B'$ a zároveň $A < V_1 < \dots < V_{m-1} < B$ (nerovnostmi zde myslíme nerovnosti ypsilonových složek bodů v uvažovaném souřadnicovém systému). Pro zjednodušení značme $F_0 := A'$, $F_{m+1} := B'$, $V_0 := A$, $V_m := B$. Dále značme D_i (resp. E_i) průsečíky přímek $F_i V_{i-1}$ (resp. $F_i V_i$) s přímkou $x = -r$ a F'_i (resp. F''_i) průsečíky přímek $D_i F_i$ (resp. $E_i F_i$) s přímkou $x = \delta$, pro $i = 1, \dots, m$. Pak nazveme $N_i := \triangle F_i V_i F_{i+1}$ pro $i = 0, \dots, m$, $J_i := \triangle D_i E_i F_i$ a $\Delta_i = F_i F'_i F''_i$ pro $i = 1, \dots, m$. Vidíme, že dvojice Δ_i, J_i splňují všechny vlastnosti popsané v Definicí 3.8 a můžeme tedy psát (Δ_i, J_i) pro $i = 1, \dots, m$. Nakonec označíme $K_m(\Delta, J) := \bigcup_{i=1}^m J_i$, $L_m(\Delta) := \bigcup_{i=0}^m N_i$ a $K_m^1(\Delta, J) := L_m(\Delta) \cup K_m(\Delta, J)$ (viz obrázek 3.3). Speciálně je $(\Delta_i, J_i) \subset K_m^1(\Delta, J)$ pro $j = 1, \dots, m$, čehož později využijeme.

Poznámka 3.11. $K_m^1(\Delta, J)$ zachovává pro nás důležitou vlastnost, kterou je možnost spojitého pohybu jednotkové úsečky z $A'A$ na $B'B$. Postupujeme následovně: umístíme naši úsečku na $A'A = F_0 V_0$, otočíme ji v N_0 okolo bodu V_0 tak, aby ležela na $F_1 V_0$. Dále ji podél této přímky posuneme mezi přímkou $x = -r$ a $x = \delta$, poté ji v (Δ_1, J_1) otočíme okolo bodu F_1 tak, aby ležela na $F_1 V_1$ a tak dále, dokud se úsečka nenachází na $F_{m+1} V_m = B'B$.

Pozorování 3.12. (vztah $\lambda_2(K_m(\Delta, J))$ a $\lambda_2(J)$)

Z konstrukce $K_m^1(\Delta, J)$ je patrné, že J_i jsou po dvou disjunktní. Také platí (z podobnosti J_i s $\triangle V_{i-1} F_i V_i$ pro $i = 1, \dots, m$), že $|A_i B_i| = r |V_{i-1} V_i|$.



Obrázek 3.3: obrazec $K_3^1(\Delta, J)$

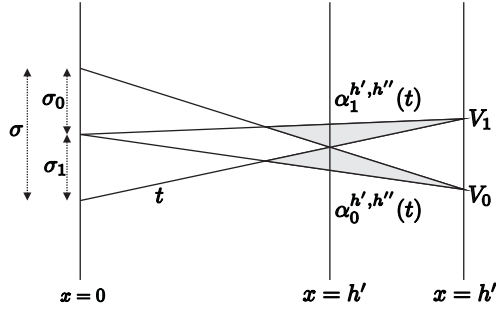
Kombinací těchto dvou faktů dostáváme:

$$\begin{aligned}
 \lambda_2(K_m(\Delta, J)) &= \sum_{i=1}^m \lambda_2(J_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} r |A_i B_i| \\
 &= r \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r |V_{i-1} V_i| = r^2 \frac{1}{2} |AB| \\
 &= r \lambda_2(J).
 \end{aligned}$$

Chceme dosáhnout podstatného zmenšení míry $K_m^1(\Delta, J)$ oproti K^0 . Dále ukážeme, že je možné (pomocí speciální konstrukce $L_m(\Delta)$) dosáhnout libovolného zmenšení míry $L_m(\Delta) \setminus \Delta$.

Konstrukce 3.13. (obrazce $\alpha_0^{h', h''}(t)$ a $\alpha_1^{h', h''}(t)$)

Bud' $0 < h' < h''$. Mějme trojúhelník t o základně σ ležící na přímce $x = 0$ a výšce h' . Označme horní (resp. dolní) polovinu úsečky σ (vůči ypsilonové ose) jako σ_0 (resp. σ_1). Dále proložme přímkou horním (resp. dolním) ramenem t (opět myšleno vůči ypsilonové ose) a její průsečík s přímkou $x = h''$ označme V_0 (resp. V_1) (viz obr. 3.4). Pak označíme jako $\alpha_0^{h', h''}(t)$ (resp. $\alpha_1^{h', h''}(t)$) trojúhelník o základně σ_0 (resp. σ_1) a vrcholu V_0 (resp. V_1).



Obrázek 3.4: obrazce $\alpha_0^{h',h''}(t)$ a $\alpha_1^{h',h''}(t)$

Pozorování 3.14. Po několika jednoduchých výpočtech (s využitím podobnosti trojúhelníků) zjistíme, že míra vybarvené oblasti na obrázku 3.4 je rovna $|\sigma| \frac{(h''-h')^2}{2h''-h'}$. V dalším nám bude stačit pouze hrubší odhad, a to sice $|\sigma| \frac{(h''-h')^2}{h''}$.

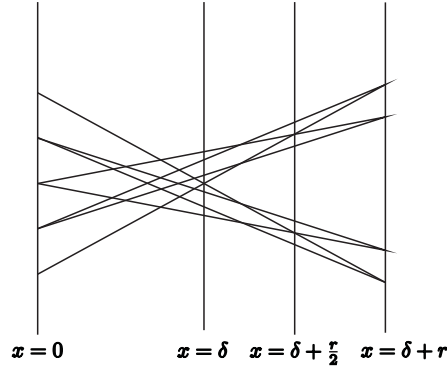
Konstrukce 3.15. (obrazec $L_m^*(\Delta)$)

Mějme obrazec Δ a souřadný systém jako v konstrukci 3.10. Definujme nejprve na intervalu $[\delta, \delta + r]$ na x -ové ose body $\delta = h_0, h_1, \dots, h_m = \delta + r$ tak, aby $|h_i - h_{i-1}| = \frac{r}{m}$, $i = 1, \dots, m$. Konstrukci $L_m^*(\Delta)$ rozdělme nyní do m kroků. V prvním kroku zkonstruujeme $\alpha_0^{h_0, h_1}(\Delta)$ a $\alpha_1^{h_0, h_1}(\Delta)$. V druhém kroku pak zkonstruujeme $\alpha_{i,j} := \alpha_j^{h_{i-1}, h_i}(\alpha_i^{h_0, h_1}(\Delta))$, $i, j \in \{0, 1\}$. Obecně v k -tém kroku zkonstruujeme $\alpha_{o,j} := \alpha_j^{h_{k-1}, h_k}(\alpha_o^{h_{k-2}, h_{k-1}}(\Delta))$, $j \in \{0, 1\}$, $o \in O_{k-1}$, kde O_{k-1} je množina $\{0, 1\}^{k-1}$. Označíme potom $L_m^*(\Delta) := \bigcup_{o \in O_m} \alpha_o(\Delta)$ (viz obrázek 3.5 pro $m = 2$).

Poznámka 3.16. $L_m^*(\Delta)$ je zřejmě speciálním případem $L_m(\Delta)$. Jeho vlastnosti nám usnadní další výpočty, a proto kdykoli budeme konstruovat obrazec typu L_m , zkonstruujeme ho rovnou jako L_m^* (speciálně i v Konstrukci 3.10).

Pozorování 3.17. ($\lambda_2(L_m^*(\Delta) \setminus \Delta)$)

V j -tém kroku konstrukce $L_m^*(\Delta)$ začínáme s 2^{j-1} trojúhelníky $\alpha_o^{h_{j-1}, h_j}(\Delta)$, $o \in O_{j-1}$, pro které $|\sigma| = 2^{-(j-1)}|A'B'|$, $|h_j - h_{j-1}| = \frac{r}{m}$ a $h_j > \delta$. Ze vzorce uvedeného v Pozorování 3.14 plyne, že v j -tém kroku můžeme odhadnout přírůstek míry obrazce výrazem $2^{j-1}(2^{-(j-1)}|A'B'| \frac{r^2}{m^2 \delta})$, tedy $\lambda_2(L_m^* \setminus \Delta) \leq |A'B'| \frac{r^2}{m \delta}$ a tento výraz lze libovolně zmenšit volbou dostatečně velkého m .



Obrázek 3.5: obrazec $L_2^*(\Delta)$

Smyslem předchozích bodů bylo ukázat, že obrazec K^0 lze nahradit obrazcem $K_m^1(\Delta, J)$ tak, že výraz $\lambda_2(K_m^1(\Delta, J) \setminus \Delta) - r\lambda_2(J)$ může být učiněn libovolně malým pro r pevné, menší než jedna (a to volbou dostatečně velkého m). V dalším této vlastnosti podstatně využijeme při konstrukci požadované Keakeyovy množiny.

Konstrukce 3.18. (obrazec $K^2(\Delta, J)$)

Mějme $K_m^1(\Delta, J)$ jako v předchozím. Připomeňme, že $(\Delta_i, J_i) \subset K_m^1(\Delta, J)$ pro $j = 1, \dots, m$. Volme n_1, \dots, n_m nenulová přirozená, a konstruuje pro $i = 1, \dots, m$ obrazce $K_{n(i)}^1(\Delta_i, J_i)$. Značme analogicky jako v 3.10 obrazce $(\Delta_{1,1}, J_{1,1}), \dots, (\Delta_{1,n_1}, J_{1,n_1}), \dots, (\Delta_{m,1}, J_{m,1}), \dots, (\Delta_{1,n_m}, J_{1,n_m}), L_{n(i)}^*(\Delta_i)$ a $K_{n(i)}(\Delta_i, J_i)$, pro $i = 1, \dots, m$. Potom označíme

$$K^2(\Delta, J) := \left(K_m^1(\Delta, J) \setminus \bigcup_{i=1}^m (\Delta_i, J_i) \right) \cup \bigcup_{i=1}^m K_{n(i)}^1(\Delta_i, J_i).$$

V dalším využijeme ještě jiného, ekvivalentního zápisu

$$K^2(\Delta, J) = L_m^*(\Delta) \cup \bigcup_{i=1}^m L_{n(i)}^*(\Delta_i) \cup \bigcup_{i=1}^m K_{n(i)}(\Delta_i, J_i). \quad (3.1)$$

Poznámka 3.19. Správně bychom měli zachovat značení a místo $K^2(\Delta, J)$ psát $K_{m,n_1,\dots,n_m}^2(\Delta, J)$, pro větší přehlednost ale spodní indexy vynecháváme. Jejich volba však má na vlastnosti $K^2(\Delta, J)$ vliv, jak zmíníme v dalším.

Poznámka 3.20. Všimněme si ještě několika faktů. Trojúhelníky J_1, \dots, J_m jsou zřejmě disjunktní, což plyne z Konstrukce 3.10. Analogicky jsou $J_{i,j}$

navzájem disjunktní pro pevné $1 \leq j \leq m$. Zároveň jsou $J_{i,j}$ pro takové pevné i obsaženy v $W_i := N_i \cap \{\delta \leq x \leq \delta + r\}$. Jelikož je $\lambda_2(W_i \cap W_j) = 0$ pro všechna $1 \leq i, j \leq m$ dostáváme, že $\lambda_2(J_{i,j} \cap J_{k,l}) = 0$ pro libovolné $J_{i,j}, J_{k,l} \in K^2(\Delta, J)$. Navíc zřejmě $\lambda_2(J_{i,j} \cap \Delta) = 0$ pro libovolné $J_{i,j} \in K^2(\Delta, J)$.

Poznámka 3.21. Důležitým faktem je, že v $K^2(\Delta, J)$ jsme stále schopni jednotkovou úsečkou spojitě pohybovat z $A'A$ na $B'B$. Postupujeme stejně jako při pohybu v $K^1(\Delta, J)$, ale namísto abychom úsečku otáčeli v obrazcích (Δ_i, J_i) okolo bodů C_i , otáčíme naši úsečku v obrazcích $K^1(\Delta_i, J_i)$ z $V_{i-1}C_i$ na V_iC_i analogicky jako v Pozorování 3.11.

Konstrukce 3.22. (obrazec $K^m(\Delta, J)$ pro $m > 2$)

Pro $m > 2$ celé konstruujeme obrazec $K^m(\Delta, J)$ iterativně. Pišme obrazec $K^{m-1}(\Delta, J)$ takto:

$$K^{m-1}(\Delta, J) = \left(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \bigcup_{s \in S} (\Delta_s, J_s) \right) \cup \bigcup_{s \in S} (\Delta_s, J_s),$$

kde S je příslušná indexová množina částí $K^{m-1}(\Delta, J)$. Volme pro $s \in S$ nějaká $n(s)$ nenulová celá a zkonstruujeme obrazce $K_{n(s)}^1(\Delta_s, J_s)$ a opět značme obrazce $(\Delta_{s,1}, J_{s,1}), \dots, (\Delta_{s,n_s}, J_{s,n_s}), L_{n(s)}^*(\Delta_s)$ a $K_{n(s)}(\Delta_s, J_s)$ jako v Konstrukci 3.10. Potom označíme

$$K^m(\Delta, J) := \left(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \bigcup_{s \in S} (\Delta_s, J_s) \right) \cup \bigcup_{s \in S} K_{n(s)}^1(\Delta_s, J_s).$$

V dalším opět využijeme ekvivalentního zápisu

$$K^m(\Delta, J) = (K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \bigcup_{s \in S} J_s) \cup \bigcup_{s \in S} L_{n(s)}^*(\Delta_s) \cup \bigcup_{s \in S} K_{n(s)}(\Delta_s, J_s). \quad (3.2)$$

Věta 3.23. *Mějme K^0 (a tedy speciálně i $r < 1$) jako v předchozím, buď $m \geq 2$ celé a $\varepsilon > 0$ buď libovolné pevné. Pak vhodnou konstrukcí $K^m(\Delta, J)$ lze docílit toho, aby platila nerovnost:*

$$\lambda_2(K^m(\Delta, J) \setminus \Delta) < \varepsilon + r^m \lambda_2(J).$$

Důkaz. Indukcí podle m . Pro $m = 2$ dostáváme s použitím zápisu (3.1)

$$\begin{aligned}
\lambda_2(K^2(\Delta, J) \setminus \Delta) &= \\
&= \lambda_2((L_m^*(\Delta) \setminus \Delta) \cup \bigcup_{i=1}^m (L_{n(i)}^*(\Delta_i) \setminus \Delta) \cup \bigcup_{i=1}^m (K_{n(i)}(\Delta_i, J_i) \setminus \Delta)) \\
&\leq \lambda_2((L_m^*(\Delta) \setminus \Delta)) + \sum_{i=1}^m \lambda_2(L_{n(i)}^*(\Delta_i) \setminus \Delta) + \sum_{i=1}^m \lambda_2(K_{n(i)}(\Delta_i, J_i)).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Jak jsme již ukázali v Pozorování 3.17, můžeme volit m tak, aby $\lambda_2(L_m^*(\Delta) \setminus \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Volme tedy takové m a k němu n_i pro $i = 1, \dots, m$ taková, aby $\lambda_2(L_{n(i)}^*(\Delta_i) \setminus \Delta) < \frac{\varepsilon}{2m}$. Pak z odhadu (3.3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\lambda_2(K^2(\Delta, J) \setminus \Delta) &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} + \sum_{i=1}^m \lambda_2(K_{n(i)}(\Delta_i, J_i)) \\
&< \varepsilon + \sum_{i=1}^m \lambda_2(K_{n(i)}(\Delta_i, J_i)),
\end{aligned}$$

což v kombinaci s rovností

$$\sum_{i=1}^m \lambda_2(K_{n(i)}(\Delta_i, J_i)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_2(J_{i,j}) = \sum_{i=1}^m r \lambda_2(J_i) = r^2 \lambda_2(J),$$

která plyne z Pozorování 3.12, dává požadovaný výsledek.

(ii) Přechod od $(m-1)$ -ního kroku k m -tému. Předpokládejme, že pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme zkonstruovat $K^{m-1}(\Delta, J)$ splňující požadovanou nerovnost. S využitím zápisu (3.2) dostáváme:

$$\begin{aligned}
\lambda_2(K^m(\Delta, J) \setminus \Delta) &\leq \lambda_2((K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \bigcup_{s \in S} J_s) \setminus \Delta) + \sum_{s \in S} \lambda_2(L_{n(s)}^*(\Delta_s) \setminus \Delta) \\
&+ \sum_{s \in S} \lambda_2(K_{n(s)}(\Delta_s, J_s)) \leq (\lambda_2(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \Delta) - \sum_{s \in S} \lambda_2(J_s)) \\
&+ \sum_{s \in S} \lambda_2(L_{n(s)}^*(\Delta_s) \setminus \Delta) + \sum_{s \in S} \sum_{j=1}^{n(s)} \lambda_2(J_{s,j}).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

V poslední nerovnosti jsme využili vlastností uvedených v 3.20, díky kterým

platí:

$$\begin{aligned}\lambda_2((K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \bigcup_{s \in S} J_s) \setminus \Delta) &= \lambda_2(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \Delta) - \lambda_2(\bigcup_{s \in S} J_s) \\ &= \lambda_2(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \Delta) - \sum_{s \in S} \lambda_2(J_s)\end{aligned}$$

Zkonstruujeme $K^{m-1}(\Delta, J)$ tak, aby platilo (v první rovnosti využíváme Pozorování 3.12):

$$\lambda_2(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \Delta) - \sum_{s \in S} \lambda_2(J_s) = \lambda_2(K^{m-1}(\Delta, J) \setminus \Delta) - r^{m-1} \lambda_2(J) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Existenci takové konstrukce nám zaručuje indukční předpoklad.) Označme $|S|$ počet prvků S a pro $s \in S$ volme $n(s)$ tak, aby $\lambda_2(L_{n(s)}^*(\Delta_s) \setminus \Delta) < \frac{\varepsilon}{2|S|}$ (viz Pozorování 3.17). Z odhadu (3.4) pak (s opětovným využitím Pozorování 3.12) dostáváme:

$$\begin{aligned}\lambda_2(K^m(\Delta, J) \setminus \Delta) &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{s \in S} \frac{\varepsilon}{2|S|} + \sum_{s \in S} \sum_{j=1}^{n(s)} \lambda_2(J_{s,j}) \\ &< \varepsilon + r \sum_{s \in S} \lambda_2(J_s) \\ &< \varepsilon + r^m \lambda_2(J).\end{aligned}$$

□

Důkaz věty 3.4. Nechtě $\varepsilon > 0$ je libovolné pevné. Pak námi hledanou Kakyovu množinu zkonstruujeme následovně: uvažujme $S(Q, \varepsilon)$ jako v Konstrukci 3.6. Značme $K_q^0 := (C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q)$ a volme N přirozené tak, aby $r^N \lambda_2(J_q) < \frac{\varepsilon}{4Q}$. Z Věty 3.23 plyne, že obrazce K_q^0 můžeme nahradit obrazci $K_q^N(C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q)$ tak, aby platilo:

$$\lambda_2(K_q^N(C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q) \setminus \Delta C_{q-1}C_qC_{q+1}) < \frac{\varepsilon}{4Q} + r^N \lambda_2(J_q) < \frac{\varepsilon}{2Q}.$$

Proveďme tedy toto nahrazení pro všechna q a označme

$$\tilde{K} := \bigcup_{q=1}^Q K_q^N(C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q).$$

Potom

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \bigcup_{q=1}^Q (K_q^N(C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q) \setminus \Delta C_{q-1}C_qC_{q+1}) \cup \bigcup_{q=1}^Q \Delta C_{q-1}C_qC_{q+1} \\ &= \bigcup_{q=1}^Q (K_q^N(C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q) \setminus \Delta C_{q-1}C_qC_{q+1}) \cup \Omega,\end{aligned}$$

a je tedy

$$\begin{aligned}\lambda_2(\tilde{K}) &= \lambda_2\left(\bigcup_{q=1}^Q (K_q^N(C_{q-1}C_qC_{q+1}, J_q) \setminus \Delta C_{q-1}C_qC_{q+1})\right) + \lambda_2(\Omega) \\ &< \sum_{q=1}^Q \frac{\varepsilon}{2Q} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Obrazec \tilde{K} je námi požadovaná Kakeyova množina, je zřejmě omezená, obsažena v jednotkovém kruhu. \square

Literatura

- [1] Cunningham F.: *The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets*, Am. Math. Monthly **78** (1971), 114–129.
- [2] Laba I.: *From harmonic analysis to arithmetic combinatorics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **69** (2009), no. 1, 77-115.
- [3] Stein, E., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1993.