Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marcel Šebek

Algebraická entropie

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Žemlička, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2010

Děkuji vedoucímu práce Mgr. Janu Žemličkovi, Ph.D. za čas, který věnoval konzultacím, a za cenné rady, které přispěly ke zdárnému dokončení práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 27. 5. 2010 Marcel Šebek

Obsah

Název práce: Algebraická entropie
Autor: Marcel Šebek
Katedra (ústav): Katedra algebry
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Žemlička, Ph.D.
e-mail vedoucího: zemlicka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Náplní práce je algebraická entropie Abelových grup a jejich endomorfismů. Jsou dokázány základní vlastnosti, mezi něž patří omezení na možné hodnoty entropie Abelovy grupy. Ta může být buď nulová, nebo nekonečná, odtud pramení klasifikace Abelových grup podle jejich algebraické entropie. Práce se zabývá třídou Abelových grup nekonečné entropie, konkrétně zkoumá postačující podmínky pro existenci endomorfismu nekonečné entropie. Je dokázáno několik alternativních charakterizací endomorfismů nulové entropie. Zmíněna je sčítací věta a je dokázán jeden její speciální případ. Krátce je zmíněno zobecnění algebraické entropie pro moduly.

Klíčová slova: entropie, Abelova grupa, endomorfismus

Title: Algebraic entropy
Author: Marcel Šebek
Department: Department of Algebra
Supervisor: Mgr. Jan Žemlička, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: zemlicka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The topic of the thesis is algebraic entropy of Abelian groups and their endomorphisms. Basic properties are proved, including the property that an Abelian group must have either zero or infinite algebraic entropy, giving raise to the entropy-based classification of Abelian groups. The thesis analyzes the class of Abelian groups of infinite entropy, for which sufficient conditions for existence of endomorphisms of infinite entropy are investigated. A few alternative characterizations of endomorphisms of zero entropy are proved. The addition theorem is mentioned and a special case is proved. A short note about generalized algebraic entropy for modules is made.

Keywords: entropy, Abelian group, endomorphism

Kapitola 1

Úvod

Entropie je pojem vyskytující se v rozličných podobách v mnoha vědeckých oborech. Nás bude zajímat její algebraická verze, která úzce souvisí s entropií topologickou. Obě se poprvé objevily v textu [AKM] v roce 1965. O algebraické entropii je zde však pouze krátká zmínka. Podrobněji se tématem zabýval až článek [W] z roku 1975, kde jsou dokázány základní vlastnosti algebraické entropie pro endomorfismy Abelových grup a je ukázána souvislost s topologickou entropií. Článek [P] upravuje definici entropie tak, aby měla význam i pro endomorfismy beztorzních a smíšených grup. Pro torzní grupy přitom obě definice splývají.

Následuje dvojice článků [DGSZ] a [SZ] z roku 2009. První z nich prohlubuje teorii algebraické entropie Abelových grup v té podobě, jak je definovaná ve [W], druhý definici entropie zobecňuje pro moduly a podrobněji zkoumá tzv. hodnostní entropii Abelových grup. Ta je v jistém smyslu duální k algebraické entropii definované ve [W], neboť má smysl pouze pro beztorzní grupy.

Obsahem této práce je přehledně zpracovat základní poznatky z [DGSZ]. Spíše informativně je také zmíněno zobecnění entropie z článku [SZ]. Většina vět a důkazů v tomto textu je převzata z [DGSZ] a [SZ] bez výslovného odkazu, důkazy jsou však zpracovány podrobněji a elementárněji.

1.1 Motivace

V této sekci si neklademe za cíl naše úvahy korektně matematicky formulovat, některé pojmy jsou používány velmi volně nemají žádný přesný smysl. Čtenáři nemajícímu v oblibě neformální úvahy nezbývá než vyčkat na první definici. Jak ale uvidíme ve zbytku práce, vše lze matematicky precizovat.

Algebraická entropie endomorfismu Abelovy grupy má vyjadřovat jakousi rozpínavost tohoto endomorfismu. Jinými slovy měří, jak rychle endomorfismus při opakovaném aplikování „nafukuje“ malé části grupy. My budeme za malé části považovat konečné podgrupy.

Zamysleme se nad tím, jaké vlastnosti by rozumná definice entropie měla mít. Měla by to být vlastnost asymptotická, tedy by nemělo záležet na konečně mnoha počátečních iteracích. Proto se zdá přirozené, když vyjde nulová pro konečné grupy. Uvažujme tedy nějaký jednoduchý nekonečný příklad — aditivní grupu celých čísel $\mathbb{Z}$. Všechny endomorfismy této grupy jsou určeny obrazem generátoru 1, tedy jsou tvaru $x \mapsto kx$. Je vidět, že takový endomorfismus žádnou podgrupu $\mathbb{Z}$ nezvětší, proto bychom rádi, pokud by měl entropii 0. K tomuto závěru můžeme dojít i jinak. Grupa $\mathbb{Z}$ má jedinou konečnou podgrupu a to je nulová grupa. Tato vlastnost je společná všem beztorzním grupám, proto pro ně vychází entropie nulová. Kdybychom uvažovali místo konečných podgrup konečné podmnožiny, nulová entropie už by vyjít nemusela. Touto variantou se zabývá [P].

Uvažme jiný příklad nekonečné grupy, spočetný direktní součet grup $\mathbb{Z}_n$ pro jedno konkrétní n. Snadno nahlédneme, že zobrazení, které prvku doplní zleva 0 a ostatní složky o jedno místo posune, je korektně definovaný endomorfismus. Vidíme, že tento endomorfismus každou podgrupu zvětšuje donekonečna a asymptoticky přibližně konstantní rychlostí, tj. o jednu složku doprava. Proto se zdá rozumné, aby měl tento endomorfismus entropii kladnou a její hodnota závisela jednak na tom, o kolik míst se při jedné iteraci grupa zvětší, jednak na velikosti $\mathbb{Z}_n$.

Jaký smysl by mělo mít tvrzení, že nějaký endomorfismus má entropii nekonečnou? Zdá se rozumné požadovat, aby ke každé hodnotě d existovala podgrupa, na které je rychlost nafukování alespoň d. Existuje vůbec takový endomorfismus? Nabízí se využít předchozí příklad, označme G_n grupu a ϕ_n endomorfismus z tohoto příkladu a vezměme direktní součet grup G_n přes všechna $n \in \mathbb{N}$. Na této grupě definujme endomorfismus ϕ „po složkách“ jako direktní součet endomorfismů ϕ_n. Entropie na jednotlivých složkách není omezena žádnou hodnotou, proto by celková entropie měla být ∞.

V tomto příkladu je vidět ještě jeden obecný princip. Entropie direktního součtu je součet entropií sčítanců. Je ovšem nutné, aby tento endomorfismus byl také direktním součtem, tj. jeho restrikce na direktní sčítanec byla endomorfismem tohoto direktního sčítance. Všimněme si, že rozklad G_n na grupy $\mathbb{Z}_n$ tento požadavek nesplňuje, entropii ϕ_n proto nelze počítat tímto způsobem. To však neznamená, že by nešla grupa G rozložit jiným způsobem, který již požadavkům vyhovuje. Časem uvidíme, že to možné je, pokud n není prvočíslo. Půjde o rozklad na tzv. p-komponenty.

Lze podat axiomatickou definici entropie, vlastnosti v ní požadované se příliš neshodují s těmi, které jsou zmíněny zde. Axiomatická definice však příliš nemotivuje konstruktivní definici, přenecháme ji proto až do závěru práce. Následuje soupis používaných pojmů, značení a základních vlastností zkoumaných objektů.

1.2 Značení, definice, základní vlastnosti

Všechny grupy v tomto textu jsou Abelovy, tento předpoklad nebude vždy důsledně uváděn. Používá se aditivní zápis. $A+B$ resp. $\sum_{i\in I} A_i$ bude značit spojení grup. Pro $\phi\colon G \to H$ homomorfismus a $H \leq G$ podgrupu bude ϕH označovat obraz grupy H při homomorfismu ϕ. Množina $\mathcal{F}(G)$ bude označovat množinu všech konečných podgrup grupy G. Symbolem F bude vždy míněna nějaká konečná grupa, tento předpoklad nemusí být explicitně uveden. Množina přirozených čísel bez nuly resp. s nulou bude označena $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{N}_0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ budeme definovat $G[n] = \{ g \in G \mid ng = 0 \}$ a $nG = \{ ng \mid g \in G \}$, jde zřejmě o podgrupy. Řád prvku označuje mohutnost cyklické grupy generované tímto prvkem. Grupa je omezená, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že všechny prvky mají řád nejvýše n, v tomto případě budeme také psát, že je grupa n-omezená.

Definice 1.1. Buď p prvočíslo. Abelova grupa G se nazývá

(i) *torzní*, pokud každý její prvek má konečný řád,

(ii) *bez torze*, pokud každý její nenulový prvek má nekonečný řád,

(iii) *p-grupa*, pokud každý její prvek má řád p^l pro nějaké $l \in \mathbb{N}_0$.

Torzní částí Abelovy grupy G rozumíme množinu všech prvků konečného řádu, označíme ji $t(G)$. Buď p prvočíslo, označme $t_p(G)$ množinu prvků řádu mocniny p a nazveme ji *p-komponenta* G. Obě tyto množiny jsou zřejmě podgrupy a p-komponenty jsou p-grupy.

Grupa G se nazývá

(i) *divizibilní*, pokud platí $G = nG$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

(ii) *redukovaná*, pokud nemá žádnou divizibilní podgrupu kromě nulové.

Spojení divizibilních grup je opět divizibilní grupa, proto existuje maximální divizibilní podgrupa grupy G, kterou budeme nazývat *divizibilní část* G.

Pro prvočíslo p položme $Z(p^\infty) = \{ \exp(2\pi \imath m/p^n) \mid m, n \in \mathbb{N} \}$, kde tuto grupu chápeme jako podgrupu multiplikativní grupy $\mathbb{C}^*$. $Z(p^\infty)$ se nazývá *Prüferova grupa*. Jde zřejmě o p-grupu.

Za okruh $\mathbb{Z}_n$ budeme považovat faktorokruh $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Prvky tohoto okruhu ztotožňujeme s celými čísly $\{ 0, \dots, n-1 \}$. Pokud je n prvočíslo, jde o těleso. Buď nyní p prvočíslo. Okruh p-adických celých čísel definujeme rovností $J_p = \mathbb{Z}_p[[p]]$, neboli J_p je okruh formálních mocninných řad nad $\mathbb{Z}_p$ jedné neurčité p. Okruh $\mathbb{Z}_{p^n}$ je izomorfní $J_p/p^k J_p$. V tomto izomorfismu odpovídjí prvkům $\mathbb{Z}_{p^n}$ jejich vyjádření v bázi p.

Občas budeme potřebovat vyjádřit Abelovu grupu jako direktní limitu systému jejích ϕ-invariantních podgrup. Jde sice o poněkud abstraktnější pojem, ale vždy lze situaci vhodným izomorfismem převést na tento jednodušší případ, který pro nás bude definicí:

Definice 1.2. Nechť G je Abelova grupa. Řekneme, že G je *direktní limitou* systému jejích podgrup $\{ G_i \mid i \in I \}$, pokud platí tyto dvě podmínky:

(i) $G = \sum_{i \in I} G_i$

(ii) $\forall i, j \in I \ \exists k \in I : G_i \leq G_k \ \& \ G_j \leq G_k$.

Kategorie Abelových grup je ekvivalentní kategorii (levých) $\mathbb{Z}$-modulů, přesněji řečeno na každou Abelovu grupu lze pohlížet jako na $\mathbb{Z}$-modul. Zároveň si jednoznačně odpovídají homomorfismy dvou Abelových grup a jim příslušné homomorfismy $\mathbb{Z}$-modulů.

Každou p-grupu G lze navíc považovat za J_p-modul. Skalární násobení prvkem $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_n p^n \in J_p$ definujeme rovností $ag = \sum_{i=0}^{\infty} a_n p^n g$, $g \in G$. Tento součet je pro každé konkrétní g konečný, neboť g má řád dělitelný p. Pokud je navíc G p^m-omezená, lze se při násobení omezit pouze ty prvky J_p, jejichž koeficienty u p^i jsou nulové pro $i \geq m$. Odtud vidíme, že G je také $J_p/p^m J_p \cong \mathbb{Z}_{p^m}$-modul. Speciálně $G[p]$ je $\mathbb{Z}_p$-modul, neboli vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_p$, budeme jej nazývat *dolní vrstva* p-grupy G.

Mějme (obecně nekomutativní) okruh R. Definujeme *centrum* okruhu R jako množinu všech prvků R komutujících s každým prvkem okruhu R. Jde zřejmě o podokruh.

Buď nyní $R \leq S$ rozšíření komutativních okruhů a $s \in S$. Řekneme, že s je *celistvý* nad R, pokud existuje monický polynom $f(x) \in R[x]$ takový, že $f(s) = 0$.

1.3 Použitá tvrzení

Věta 1.3 ([S, Teor. 1.2])**.** *Buď G torzní Abelova grupa. Pak G lze vyjádřit ve tvaru $\bigoplus_p t_p(G)$.*

Věta 1.4 ([S, Cor. 2.8])**.** *Abelova grupa je direktním součtem její divizibilní části a redukované grupy.*

Věta 1.5 ([S, Teor. 3.5])**.** *Konečná Abelova grupa je konečným direktním součtem konečných cyklických grup.*

Věta 1.6 ([S, Teor. 5.1])**.** *Pro divizibilní Abelovu grupu G existuje rozklad tvaru $\bigoplus_{i\in I} Q_i \oplus \bigoplus_{j\in J} Z_j$, přičemž každé Q_i je izomorfní aditivní grupě racionálních čísel a každé Z_j je izomorfní Prüferově grupě $Z\left(p_j^\infty\right)$ pro nějaké prvočíslo p_j.*

Věta 1.7 ([F1, Theor. 17.2])**.** *Omezenou Abelovu grupu lze vyjádřit jako direktní součet cyklických grup.*

Věta 1.8 ([F1, Property (D)])**.** *Homomorfní obraz divizibilní Abelovy grupy je divizibilní Abelova grupa.*

Věta 1.9 ([F2, Theor. 108.3])**.** *Nechť G je p-grupa. Pak centrum okruhu endomorfismů $\operatorname{End}(G)$ je rovno $\{\, g \in G \mapsto mg \mid m \in M \,\}$, kde $M = \mathbb{Z}_{p^n}$, pokud G je p^n-omezená a n je nejmenší možné. Pokud G není omezená, je $M = J_p$.*

1.4 Další vlastnosti Abelových grup

Lemma 1.10. *$t_p(G)$ je úplně charakteristická, tj. invariantní na endomorfismy G.*

Důkaz. Zvolme $\phi \in \operatorname{End}(G)$ a $g \in t_p(G)$, tedy platí $p^k g = 0$. Pak $p^k\phi(g) = \phi\left(p^k g\right) = 0$ a $\phi(g) \in t_p(G)$. □

Lemma 1.11. *Divizibilní část Abelovy grupy je úplně charakteristická.*

Důkaz. Podle věty 1.8 padne obraz divizibilní části do divizibilní části. $\square$

Lemma 1.12. *Nechť G je Abelova grupa, $n \in \mathbb{N}$. Pak $G[n]$ je úplně charakteristická. Speciálně dolní vrstva p-grupy $G[p]$ je úplně charakteristická.*

Důkaz. Pro $x \in G[n]$ platí $0 = \phi(nx) = n\phi(x)$, tedy $\phi(x) \in G[n]$. $\square$

Lemma 1.13. *Buď $\phi\colon G \to H$ homomorfismus Abelových grup, $\{G_i\}_{i \in I}$ soubor podgrup G. Pak $\phi \sum_{i \in I} G_i = \sum_{i \in I} \phi G_i$.*

Důkaz. Platí $\phi(y_1 + \cdots + y_n) = \phi(y_1) + \cdots + \phi(y_n)$, $y_k \in G_{i_k}$, tedy každý prvek levé strany rovnosti lze vyjádřit jako prvek pravé strany a naopak. $\square$

Pozorování 1.14. *Pro soubor Abelových grup $\{G_{i,j}\}$ platí $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} G_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} G_{i,j}$, tedy lze zaměnit nekonečná spojení grup.*

Důkaz. Plyne z konečnosti vyjádření prvků těchto spojení. $\square$

Lemma 1.15. *Konečné spojení konečných Abelových grup je opět konečná Abelova grupa.*

Důkaz. Stačí dokázat, že $F = G + H$ je konečná pro G a H konečné, zbytek plyne indukcí. To ale plyne z vyjádření spojení ve tvaru

$$F = \{\, f = g + h \mid g \in G \,\&\, h \in H \,\}. \qquad \square$$

Lemma 1.16. *Buď G p-grupa. Pak existuje $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ takové, že $|G| = p^k$.*

Důkaz. Pro G nekonečnou tvrzení platí, nechť $|G| < \infty$. Dle věty 1.5 G rozložíme na konečný direktní součet cyklických grup, které mají zřejmě mohutnosti p^{k_i} pro vhodná k_i, $i \in I$. Mohutnost grupy G je tedy rovna p^k, $k = \sum_{i \in I} k_i$. $\square$

Lemma 1.17. *Podgrupa a faktorgrupa torzní grupy (p-grupy) je opět torzní grupa (p-grupa).*

Důkaz. Buď $H \leq G$, $h \in H$. Řád prvku h je zřejmě stejný v H i v G. Buď $g + H \in G/H$. Z Lagrangeovy věty máme $|\mathbb{Z}g| = |(\mathbb{Z}(g + H))/H| \cdot |H|$, tedy řád $g + H$ dělí řád g. $\square$

Kapitola 2

Algebraická entropie pro Abelovy grupy

2.1 Definice entropie

Definice 2.1. Nechť G je Abelova grupa, F její konečná podgrupa, $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$ a $\phi : G \to G$ endomorfismus. Položme

$$
\begin{aligned}
T_n(\phi, F) &\stackrel{\text{def}}{=} F + \phi F + \cdots + \phi^{n-1} F = \sum_{i=0}^{n-1} \phi^i F \\
T(\phi, F) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\phi, F) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \phi^i F = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n F \\
T_n(\phi, x) &\stackrel{\text{def}}{=} T_n(\phi, \mathbb{Z}x) \\
T(\phi, x) &\stackrel{\text{def}}{=} T(\phi, \mathbb{Z}x) .
\end{aligned}
$$

Pokud nebude moci dojít k omylu, budeme $T_n(\phi, F)$ a $T_n(\phi, x)$ nahrazovat symbolem T_n a $T(\phi, F)$ symbolem G_F případně pouze T. T_n nazveme *n-tou částečnou ϕ-trajektorií F resp. x*, T pak *ϕ-trajektorií F* resp. x.

Poznámka 2.2. Přímo z definice plyne, že T_n i T jsou podgrupy G. Navíc každé T_n je konečná grupa, neboť jde o konečné spojení konečných grup. T je ϕ-invariantní z definice a je to jistě nejmenší podgrupa obsahující F resp. x s touto vlastností.

Lemma 2.3. *Mějme soubor konečných podgrup* $\{ F_i \mid i \in I \}$ *Abelovy grupy* G, *buď* $\sum_{i \in I} F_i$ *konečná a mějme* $\phi \in \operatorname{End}(G)$. *Pak platí* $\sum_{i \in I} T(\phi, F_i) = T\left(\phi, \sum_{i \in I} F_i\right)$.

Důkaz. Použijeme několikrát lemma 1.13 a pozorování 1.14:

$$T\left(\phi, \sum_{i \in I} F_i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \sum_{i \in I} F_i = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i \in I} \phi^j F_i = \\ = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j F_i = \sum_{i \in I} T(\phi, F_i).$$

□

Důsledek 2.4. $T(\phi, F)$ *je konečná, právě když pro každé* $x \in F$ *je* $T(\phi, x)$ *konečná.*

Důkaz. Máme $T(\phi, F) = \sum_{x \in F} T(\phi, x)$. Implikace zleva doprava je tedy ihned vidět, k důkazu opačné implikace použijeme navíc lemma 1.15. □

Definice 2.5. Označme

$$H_n(\phi, F) = \log |T_n(\phi, F)|$$
$$H(\phi, F) = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n(\phi, F)}{n}.$$

Opět budeme používat zkrácený zápis H_n a H. Uvidíme, že limita má vždy smysl. To bude vyplývat z tvrzení 2.14.

Definice 2.6 (Entropie)**.** Nechť G je Abelova grupa a ϕ endomorfismus G. Definujme *(algebraickou) entropii endomorfismu* ϕ rovností

$$\operatorname{ent}(\phi) = \sup_{F \in \mathcal{F}(G)} H(\phi, F)$$

a *(algebraickou) entropii grupy* G rovností

$$\operatorname{ent}(G) = \sup_{\phi \in \operatorname{End}(G)} \operatorname{ent}(\phi).$$

Příklad 2.7. Endomorfismus $\mu_k : g \mapsto kg$ má nulovou entropii pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. Každá podgrupa G je μ_k-invariantní, proto $T_n(\mu_k, F) = G_F = F$ a H_n je konstanta.

Příklad 2.8. Nechť K je torzní Abelova grupa a položme $K_i = K$, $G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Definujme Bernoulliův posunovací endomorfismus ϕ přiřazením $(k_1, k_2, \dots) \in G \mapsto (0, k_1, k_2, \dots)$. Dokážeme, že $\operatorname{ent}(\phi) = \log |K|$. Nejprve zkoumejme případ, kdy K je konečná. Pro volbu $F = K_1$ dostáváme $H_n(\phi, F) = \log |\bigoplus_{i=1}^{n} K_i| = \log |K|^n = n \log |K|$ a máme $\operatorname{ent}(\phi) \geq \log |K|$. Naopak zvolme $F' \in \mathcal{F}(G)$. Protože platí $G_F = G$, najdeme $m \in \mathbb{N}$ takové, aby $F' \leq T_m(\phi, F)$. Pak $H_n(\phi, F') \leq H_{n+m}(\phi, F)$ a

$$H(\phi, F') = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n(\phi, F')}{n+m} \cdot \frac{n+m}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{H_{n+m}(\phi, F)}{n+m} \cdot 1 = \log |K|.$$

Pokud je K nekonečná, volme za F konečnou podgrupu grupy K_1 a stejnou úvahou jako výše dostaneme $\operatorname{ent}(\phi) \geq \log |F|$. Protože mohutnost grupy F může překročit libovolnou konečnou hranici, je $\operatorname{ent}(\phi) = \infty$.

Entropie ϕ se tedy rovná buď logaritmu nějakého přirozeného čísla, pokud je K konečná, nebo ∞, pokud je K nekonečná.

Není náhoda, že nám vyšly zrovna takovéto hodnoty. Ukážeme totiž, že jiných hodnot entropie endomorfismu nabývat nemůže. Jako důsledek pak vyplyne, že entropie endomorfismu (resp. grupy) je buď ∞, nebo se nabývá pro vhodnou podgrupu (resp. endomorfismus a podgrupu). Předtím odvodíme několik izomorfismů.

Pozorování 2.9. *Platí $T_{n+1} = T_n + \phi^n F$, tedy speciálně $T_n \leq T_{n+1}$.* □

Důsledek 2.10. *Platí izomorfismus*

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} \cong \frac{\phi^n F}{T_n \cap \phi^n F}$$

Důkaz. Plyne z předchozího pozorování užitím 3. věty o izomorfismu. □

Lemma 2.11.

$$\frac{\phi T_n}{\phi T_{n-1}} \cong \frac{T_n}{T_{n-1} + (T_n \cap \operatorname{Ker} \phi)}$$

Důkaz. Definujeme homomorfismus $\psi \colon T_n \to \phi T_n / \phi T_{n-1}$ vztahem $t_n \in T_n \mapsto \phi(t_n) + \phi T_{n-1}$. Zobrazení ψ je zřejmě surjektivní, nalezneme jeho jádro. Máme $t_n \in \operatorname{Ker} \psi$, právě když $\phi(t_n) \in \phi T_{n-1}$, což nastane, právě když $t_n \in T_{n-1} + \operatorname{Ker} \phi\restriction_{T_n} = T_{n-1} + (T_n \cap \operatorname{Ker} \phi)$. Dokážeme poslední ekvivalenci. Pokud $t_n \in T_{n-1} + (T_n \cap \operatorname{Ker} \phi)$, pak $t_n = t_{n-1} + k_n$, kde $t_{n-1} \in T_{n-1}$ a $k_n \in T_n \cap \operatorname{Ker} \phi$. Pak $\phi(t_n) = \phi(t_{n-1}) + \phi(k_n) = \phi(t_{n-1}) \in \phi T_{n-1}$. Nechť naopak $\phi(t_n) = \phi(v_{n-1})$ pro nějaké $v_{n-1} \in T_{n-1}$. Pak $\phi(t_n - v_{n-1}) = 0$, proto $t_n - v_{n-1} \in T_n \cap \operatorname{Ker}\phi$. Existuje vyjádření $t_n = v_{n-1} + (t_n - v_{n-1})$, $v_{n-1} \in T_{n-1}$, $(t_n - v_{n-1}) \in T_n \cap \operatorname{Ker}\phi$. Tedy $\operatorname{Ker}\psi = T_{n-1} + (T_n \cap \operatorname{Ker}\phi)$ a výsledek plyne z 1. věty o izomorfismu. □

Položme $\tau_n = |T_n|$. Z Lagrangeovy věty dostáváme, že posloupnost (τ_n) je neklesající a τ_n dělí τ_{n+1}. Definujme $\alpha_{n+1} = \tau_{n+1}/\tau_n$. Uvidíme, že posloupnost (α_n) je naopak nerostoucí a α_{n+1} dělí α_n.

Lemma 2.12. *Buď $n > 1$, pak α_{n+1} dělí α_n. Speciálně posloupnost (a_n) je nerostoucí.*

Důkaz. Použijeme vztah $\phi T_{n-1} \leq T_n$ a 2. větu o izomorfismu:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} \cong \frac{\phi^n F}{T_n \cap \phi^n F} \cong \frac{\dfrac{\phi^n F}{\phi T_{n-1} \cap \phi^n F}}{\dfrac{T_n \cap \phi^n F}{\phi T_{n-1} \cap \phi^n F}}.$$

Označme $B_n = \phi^n F / (\phi T_{n-1} \cap \phi^n F)$. Pak α_{n+1} dělí $|B_n|$, neboť velikost faktorgrupy dělí velikost původní grupy. Dále si všimněme vztahu $\phi T_n = \phi T_{n-1} + \phi^n F$ a použijme postupně 3. větu o izomorfismu, lemma 2.11 a 2. větu o izomorfismu:

$$B_n \cong \frac{\phi T_n}{\phi T_{n-1}} \cong \frac{T_n}{T_{n-1} + (T_n \cap \operatorname{Ker}\phi)} \cong \frac{\dfrac{T_n}{T_{n-1}}}{\dfrac{T_{n-1} + (T_n \cap \operatorname{Ker}\phi)}{T_{n-1}}}.$$

Podle stejné úvahy $|B_n|$ dělí α_n, a tedy α_{n+1} dělí α_n. □

Pozorování 2.13. *Nerostoucí posloupnost přirozených čísel (α_n) je nutně od nějakého n_0 konstantní, označme α tuto její konstantní hodnotu. Zřejmě platí vztah $\tau_{n+1} = \alpha\tau_n$ pro $n \geq n_0$.* □

Tvrzení 2.14. *Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $H(\phi, F) = \log(\tau_{n+1}/\tau_n) = \log\alpha$. Speciálně limita v definici H existuje a na její hodnoty platí omezení $H \in \mathcal{LN} \overset{def}{=} \{\log\beta \mid \beta \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Dle pozorování 2.13 nalezneme n_0 a α. Využijeme vztahu

$$H_{n_0+k} = \log\tau_{n_0+k} = \log\tau_{n_0}\alpha^k = \log\tau_{n_0} + k\log\alpha = H_{n_0} + k\log\alpha$$

a spočteme hodnotu

$$H(\phi, F) = \lim_{k\to\infty} \frac{H_{n_0+k}(\phi, F)}{n_0+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{H_{n_0}(\phi, F) + k\log\alpha}{n_0+k} = \log\alpha. \qquad \square$$

Tvrzení 2.15. *Množina $\mathcal{LN}$ je diskrétní. Speciálně supremum v definici entropie je buď ∞, nebo se nabývá pro nějakou konečnou podgrupu a nějaký endomorfismus.*

Důkaz. Zvolíme $\beta \in \mathbb{N}$. Položíme $2\delta = \log((\beta+1)/\beta)$. Z konkávnosti logaritmu plyne, že v δ-okolí $\log\beta$ neleží žádný další prvek množiny $\mathcal{LN}$. $\square$

2.2 Základní vlastnosti entropie

Lemma 2.16. *Nechť $G \cong G'$ jsou izomorfní Abelovy grupy, $\theta\colon G \to G'$ izomorfismus, $\phi \in \operatorname{End}(G)$ a $\psi = \theta\phi\theta^{-1}$ konjugovaný endomorfismus. Pak $\operatorname{ent}(\phi) = \operatorname{ent}(\psi)$.*

Důkaz. Precizním důkazem nebudeme čtenáře zatěžovat, v intuitivní rovině je totiž lemma zřejmé. Na izomorfismus lze pohlížet jako na přejmenování prvků izomorfních grup. Přitom endomorfismus ϕ odpovídá endomorfismu ψ, neboť je to ten samý endomorfismus, který pracuje s přejmenovanými prvky. $\square$

Lemma 2.17. *$H(\phi, F) = 0$, právě když $T(\phi, F)$ je konečná.*

Důkaz. Pokud je T konečná, je limita v definici H rovna nule. Naopak pokud je $H = 0$, dle tvrzení 2.14 je $\alpha = 1$, a tedy $T = T_{n_0}$. $\square$

Lemma 2.18. *Nechť G je Abelova grupa, $\phi \in \operatorname{End}(G)$. Pak $\operatorname{ent}(\phi) = 0$, právě když $T(\phi, g)$ je konečná pro každé $g \in G$.*

Důkaz. Z definice máme, že $\operatorname{ent}(\phi) = 0$, právě když pro každou $F \in \mathcal{F}(G)$ platí $H(\phi, F) = 0$. Dle lemmatu 2.17 toto nastane, právě když pro každou $F \in \mathcal{F}(G)$ platí, že $T(\phi, F)$ je konečná. Závěr plyne z důsledku 2.4. $\square$

Příklad 2.19. Zatím jsme počítali pouze entropii endomorfismů, uveďme příklad výpočtu entropie grupy. Nechť $G = Z(p^\infty)$. Prvků pevně daného řádu je v této grupě pouze konečně mnoho, proto je $G[n]$ konečná pro každé $n \in \mathbb{N}$. Navíc je $G[n]$ invariantní na každý endomorfismus (lemma 1.12). Odtud ihned plyne, že každá konečná grupa má při libovolném endomorfismu konečnou trajektorii, tedy podle lemmatu 2.18 je $\operatorname{ent}(\phi) = 0$ pro každý $\phi \in \operatorname{End}(G)$. Dokázali jsme, že $\operatorname{ent}(G) = 0$.

Lemma 2.20. *Pokud G je p-grupa, lze entropii vyjádřit ve tvaru $k \log p$, kde $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

Důkaz. Pokud je entropie konečná, je rovna $\log \alpha = \log(\tau_{n_0+1}/\tau_{n_0})$, tedy logaritmu mohutnosti T_{n_0+1}/T_{n_0}. Dle lemmatu 1.17 jsou podgrupy a faktorgrupy p-grup opět p-grupy. Použitím lemmatu 1.16 tedy dostaneme $\alpha = p^k$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}_0$. □

Pozorování 2.21. *Nechť podgrupa $H \leq G$ je ϕ-invariantní, pak platí nerovnost* $\operatorname{ent}(\phi) \geq \operatorname{ent}(\phi\restriction_H)$. □

Lemma 2.22. $\operatorname{ent}(\phi) = \sup_{F \in \mathcal{F}(G)} \operatorname{ent}(\phi\restriction_{G_F})$. *Navíc pokud* $\operatorname{ent}(\phi) < \infty$, *jde o maximum.*

Důkaz. G_F je ϕ-invariantní dle poznámky 2.2, tedy jedna nerovnost plyne z předchozího pozorování. Navíc zřejmě platí $H(\phi, F) = H(\phi\restriction_{G_F}, F)$ pro každou $F \in \mathcal{F}(G)$. Důkaz druhé nerovnosti rozdělíme na dva případy. Pokud je $\operatorname{ent}(\phi) = \infty$, nalezneme posloupnost konečných podgrup (F_n) takových, že $H\left(\phi\restriction_{G_{F_n}}, F_n\right) = H(\phi, F_n) \geq n$ a pravá strana je rovna ∞. Pokud $\operatorname{ent}(\phi) < \infty$, využijeme tvrzení 2.15 k nalezení konečné grupy F_0 takové, že $\operatorname{ent}(\phi) = H(\phi, F_0) = H\left(\phi\restriction_{G_{F_0}}, F_0\right)$ a máme i v tomto případě opačnou nerovnost. □

Důsledek 2.23. *Nechť G je Abelova grupa, pak* $\operatorname{ent}(\phi) = \operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{t(G)}\right)$. *Speciálně* $\operatorname{ent}(\phi) = 0$ *pro G bez torze.*

Důkaz. Každá $F \leq G$ konečná je zřejmě podgrupa $t(G)$, proto i každá $T_n(\phi, F) \leq t(G)$, a tedy i $T(\phi, F) \leq t(G)$. Nyní použijeme lemma 2.22. □

Vidíme, že takto definovaná entropie má význam pouze pro torzní grupy, proto se v mnoha tvrzeních o endomorfismech omezíme pouze na tyto grupy. Neplatí však rovnost $\operatorname{ent}(G) = \operatorname{ent}(t(G))$. Existují grupy s nulovou entropií, jejichž torzní část má entropii nekonečnou. To je způsobeno tím, že žádný endomorfismus nekonečné entropie nelze rozšířit na celou grupu. Konstrukce příkladu takovéto grupy vyžaduje p-adické zúplnění a lze ji nalézt v [DGSZ, Ex. 5.5].

Lze definovat duální pojem, tzv. *hodnostní entropii*, která má význam pouze pro Abelovy grupy bez torze. Definice je uvedena v kapitole 3 této práce, podrobněji je studována v [SZ].

Tvrzení 2.24. *Mějme Abelovu grupu G a ϕ její endomorfismus. Nechť G je direktní limitou systému ϕ-invariantních podgrup $\{ G_i \mid i \in I \}$. Pak platí*

$$\operatorname{ent}(\phi) = \sup_{i \in I} \operatorname{ent}(\phi\restriction_{G_i}).$$

Pokud je $\operatorname{ent}(\phi) < \infty$, suprémum se nabývá.

Důkaz. Jedna nerovnost opět plyne z pozorování 2.21. K důkazu opačné nerovnosti využijeme lemma 2.22, stačí ukázat platnost

$$\sup_{i \in I} \operatorname{ent}(\phi\restriction_{G_i}) \geq \sup_{F \in \mathcal{F}(G)} \operatorname{ent}(\phi\restriction_{G_F}).$$

Nechť tedy máme $F \in \mathcal{F}(G)$. Stačí najít grupu $G_i \geq G_F$. Budeme postupovat indukcí dle počtu generátorů grupy F. Pokud je F nulová, stačí zvolit libovolné G_i. Pokud je F cyklická s generátorem x, musí podle bodu (i) v definici 1.2 existovat existovat G_i obsahující x. Protože G_i je ϕ-invariantní a dle poznámky 2.2 je G_F nejmenší ϕ-invariantní podgrupa obsahující x, máme $G_F \leq G_i$. V indukčním kroku uvažujeme $F = F_1 + F_2$, kde F_1 i F_2 mají menší počet generátorů než F. Z indukčního předpokladu najdeme $i, j \in I$ takové, že $F_1 \leq G_i$ a $F_2 \leq G_j$. Použijeme bod (ii) v definici 1.2 a najdeme $k \in I$, aby $G_i \leq G_k$ a $G_j \leq G_k$. Nyní dle lemmatu 2.3 máme $G_F = G_{F_1+F_2} = G_{F_1} + G_{F_2} \leq G_k$. □

Lemma 2.25. *Mějme endomorfismy $\phi_i \in \operatorname{End}(G_i)$, $i \in 1, \ldots, n$ a označme $\bigoplus_{i=1}^n \phi_i \in \operatorname{End}(\bigoplus_{i=1}^n G_i)$ jejich direktní součet, tj. endomorfismus, který prvku $(g_1, g_2, \ldots) \in \bigoplus_{i=1}^n G_i$ přiřadí prvek $(\phi_1(g_1), \phi_2(g_2), \ldots)$. Pak platí:*

(i) $\forall F_i \in \mathcal{F}(G_i), i \in \{1, \ldots, n\} : H(\bigoplus_{i=1}^n \phi_i, \bigoplus_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n H(\phi_i, F_i)$,

(ii) $\operatorname{ent}(\bigoplus_{i=1}^n \phi_i) = \sum_{i=1}^n \operatorname{ent}(\phi_i)$.

Důkaz. (ii) plyne okamžitě z (i).

(i) Stačí dokázat pro $n = 2$, zbytek plyne snadno indukcí. Z definice je vidět, že platí $(\phi_1 \oplus \phi_2)(F_1 \oplus F_2) = \phi_1 F_1 \oplus \phi_2 F_2$ a indukcí vyvodíme $(\phi_1 \oplus \phi_2)^n (F_1 \oplus F_2) = \phi_1^n F_1 \oplus \phi_2^n F_2$. Odtud pro $F_1 \oplus F_2 \in \mathcal{F}(G_1 \oplus G_2)$ dostáváme $T_n(\phi_1 \oplus \phi_2, F_1 \oplus F_2) = T_n(\phi_1, F_1) \oplus T_n(\phi_2, F_2)$, tedy

$$\begin{aligned} H_n(\phi_1 \oplus \phi_2, F_1 \oplus F_2) &= \log |T_n(\phi_1, F_1) \oplus T_n(\phi_2, F_2)| = \\ &= \log(|T_n(\phi_1, F_1)| \cdot |T_n(\phi_2, F_2)|) = \\ &= \log |T_n(\phi_1, F_1)| + \log |T_n(\phi_2, F_2)| = \\ &= H_n(\phi_1, F_1) + H_n(\phi_2, F_2). \end{aligned}$$

□

Předchozí lemma lze dále zobecnit na nekonečné součty:

Tvrzení 2.26. *Buď $\phi \in \operatorname{End}(G)$, $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ Abelova grupa taková, že každá G_i je ϕ-invariantní. Pak*

$$\operatorname{ent}(\phi) = \sum_{i\in I} \operatorname{ent}(\phi\restriction_{G_i}) = \sup_{\substack{J\subseteq I\\ |J|<\infty}} \sum_{j\in J} \operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{G_j}\right).$$

Důkaz. Stačí ukázat, že grupa G je direktní limitou ϕ-invariantních podgrup $G_J = \bigoplus_{j\in J} G_j$, kde $J \subseteq I$ je konečná. Grupy G_J jsou jistě ϕ-invariantní, neboť každá G_j je ϕ-invariantní. Dále $G = \sum_J G_J$, neboť každá grupa G_i je obsažena v G_J pro $J = \{i\}$. Zvolme nyní $J, K \subseteq I$ konečné. Pak pro $J' = J \cup K$ je $G_J + G_K \leq G_{J'}$ a J' je konečná. Z tvrzení 2.24 a lemmatu 2.25 tedy máme

$$\operatorname{ent}(\phi) = \sup_{\substack{J\subseteq I\\ |J|<\infty}} \operatorname{ent}(\phi\restriction_{G_J}) = \sup_{\substack{J\subseteq I\\ |J|<\infty}} \sum_{j\in J} \operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{G_j}\right). \qquad \square$$

Důsledek 2.27. *Mějme torzní Abelovu grupu s rozkladem na p-komponenty $G = \bigoplus_p t_p(G)$ (ten vždy existuje dle věty 1.3). Nechť $\phi \in \operatorname{End}(G)$. Pak $\operatorname{ent}(\phi) = \sum_p \operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{t_p(G)}\right)$.*

Důkaz. Plyne z předchozího a z toho, že p-komponenty jsou invariantní na každý endomorfismus (lemma 1.10). $\square$

Při zkoumání entropie endomorfismů se tedy můžeme omezit na p-grupy.

Lemma 2.28. *Nechť $\phi \in \operatorname{Aut}(G)$, pak $\operatorname{ent}(\phi) = \operatorname{ent}(\phi^{-1})$.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že platí rovnost $T_n(\phi, F) = \phi^{n-1} T_n(\phi^{-1}, F)$. Protože ϕ^{n-1} je automorfismus, máme $|T_n(\phi^{-1}, F)| = |T_n(\phi, F)|$ a výsledek je pak již zřejmý. $\square$

Lemma 2.29. *Pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\operatorname{ent}\left(\phi^k\right) = k \operatorname{ent}(\phi)$.*

Důkaz. Důkaz vychází ze vztahu, který plyne ihned z definice:

$$T_{nk}(\phi, F) = T_n\left(\phi^k, T_k(\phi, F)\right). \tag{2.1}$$

Dále platí

$$\operatorname{ent}\left(\phi^k\right) = \sup_{F\in\mathcal{F}(G)} H\left(\phi^k, F\right) = \sup_{F\in\mathcal{F}(G)} H\left(\phi^k, T_k(\phi, F)\right),$$

neboť H je neklesající v druhém argumentu. Zvolme tedy $F \in \mathcal{F}(G)$ libovolně a ukažme, že $H\left(\phi^k, T_k(\phi, F)\right) = k \cdot H(\phi, F)$. Nalezneme n_0 a α dle pozorování 2.13 taková, aby pro $n \geq n_0$ platilo $|T_{n+1}(\phi, F)| = \alpha\,|T_n(\phi, F)|$, tedy $H(\phi, F) = \log \alpha$. Pak dle (2.1) je

$$\begin{aligned}\left|T_{n+1}\left(\phi^k, T_k(\phi, F)\right)\right| &= \left|T_{(n+1)k}(\phi, F)\right| = \\ &= \alpha^k\,|T_{nk}(\phi, F)| = \alpha^k\left|T_n\left(\phi^k, T_k(\phi, F)\right)\right|\end{aligned}$$

pro $n \geq n_0$, tedy $H\left(\phi^k, T_k(\phi, F)\right) = \log \alpha^k = k \log \alpha$. □

Důsledek 2.30. *Pro* $\phi \in \operatorname{Aut}(G)$ *a* $k \in \mathbb{Z}$ *platí* $\operatorname{ent}\left(\phi^k\right) = |k| \operatorname{ent}(\phi)$.

Důkaz. Použijeme navíc lemma 2.28. □

Důsledek 2.31. (i) *Abelova grupa G kladné entropie umožňuje definovat endomorfismy libovolně velké konečné entropie, tedy speciálně platí ent* $(G) = \infty$*,*

(ii) *pro každou Abelovu grupu G platí* $\operatorname{ent}(G) \in \{0, \infty\}$. □

Vidíme, že Abelovy grupy lze rozdělit do dvou tříd podle jejich entropie.

2.3 Indukované endomorfismy

V celé této sekci budeme studovat následující situaci. Máme Abelovu grupu G s endomorfismem ϕ a podgrupou H, která je ϕ-invariantní. Ať $\pi\colon G \to G/H$ je kanonická projekce, pak zřejmě $\operatorname{Ker}\pi = H$. Nechť $\bar{\phi} \in \operatorname{End}(G/H)$ je indukovaný endomorfismus, tj. $\bar{\phi}\pi = \pi\phi$. Pro $F \in \mathcal{F}(G)$ bude jistě platit $T_n\left(\bar{\phi}, \pi F\right) = \pi T_n(\phi, F)$. Použijeme 1. větu o izomorfismu a dostaneme

$$T_n\left(\bar{\phi}, \pi F\right) = \pi T_n(\phi, F) \cong T_n(\phi, F)/(T_n(\phi, F) \cap H).$$

Zlogaritmováním a vydělením číslem n dostaneme

$$\frac{H_n\left(\bar{\phi}, \pi F\right)}{n} = \frac{H_n(\phi, F)}{n} - \frac{\log|T_n(\phi, F) \cap H|}{n}.$$

Provedeme limitní přechod a dostaneme

$$H\left(\bar{\phi}, \pi F\right) = H(\phi, F) - \lim_{n\to\infty} \frac{\log|T_n(\phi, F) \cap H|}{n}. \tag{2.2}$$

Definujme zobrazení $P\colon \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G/H)$, $F \mapsto \pi F$. Toto zobrazení je jistě dobře definované, neboť každá konečná grupa se projekcí zobrazí opět na konečnou grupu. Pokud P není surjektivní, nelze obecně nic říci o vztahu $\operatorname{ent}(\phi)$ a $\operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right)$.

Lemma 2.32. *P je surjektivní, pokud je splněna některá z těchto podmínek:*

(i) *G je torzní,*

(ii) *H je konečná.*

Důkaz. Nechť $F' \in \mathcal{F}(G/H)$, $F' = \{\, g_i + H \mid i \in I \,\}$. Položme $F = \sum \mathbb{Z}g_i$. Pak jistě $P(F) = F'$, pokud ukážeme že F je konečná. Pokud by nebyla, existovala by $\mathbb{Z}g_i$ nekonečná, tedy beztorzní. V bodě (i) tedy máme spor. V bodě (ii) stačí uvážit, že $(\mathbb{Z}g_i + H)/H \leq F'$ je konečná, H konečná, ale $\mathbb{Z}g_i + H$ nekonečná, což je spor s Lagrangeovou větou. □

Lemma 2.33. *Nechť G je torzní. Pak* $\operatorname{ent}(\phi) \geq \operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right)$.

Důkaz. Dle předchozího je P surjektivní a vše ihned plyne z (2.2). □

Příklad 2.34. Pokud G není torzní, může nastat i opačná nerovnost. Mějme grupu $G = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ a ϕ Bernoulliův posunovací endomorfismus. Protože G je bez torze, je $\operatorname{ent}(\phi) = 0$. Položme $H = \bigoplus_{\mathbb{N}} p\mathbb{Z}$, pak H je ϕ-invariantní a $G/H \cong \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$. Jak víme z příkladu 2.8, je $\operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right) = \log(p) > \operatorname{ent}(\phi) = 0$.

Tvrzení 2.35. *Nechť H je konečná, pak* $\operatorname{ent}(\phi) = \operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right)$.

Důkaz. P je surjektivní dle lemmatu 2.32. Protože H je konečná, je limita ve výrazu (2.2) nulová. □

V následujícím tvrzení buď H divizibilní část torzní grupy G. H je invariantní na každý endomorfismus podle lemmatu 1.11. V rozkladu H podle věty 1.6 budou figurovat pouze grupy $Z(p^\infty)$, neboť $\mathbb{Q}$ je beztorzní.

Tvrzení 2.36. *Nechť H značí divizibilní část torzní grupy G. Nechť každou p-komponentu H lze rozložit na konečnou direktní sumu grup $Z(p^\infty)$. Pak* $\operatorname{ent}(\phi) = \operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right)$.

Důkaz. Stačí ukázat, že limita ve výrazu (2.2) je nulová. Máme konečnou (torzní) grupu F, tedy lze nalézt $m \in \mathbb{N}$ takové, že $mF = 0$. Pak $T_n(\phi, F) \cap H = T_n(\phi, F) \cap H[m]$. Grupa $H[m]$ je konečná, neboť $Z(p^\infty)[m]$ je konečná a stačí uvažovat pouze ty p-komponenty, kde $p|m$. Proto je uvažovaná limita nulová. □

Velice důležitá vlastnost entropie je tzv. sčítací věta. Její úplný důkaz je nad rámec této práce, lze jej nalézt v článku [DGSZ]. Větu lze dokázat dvěma způsoby, jeden je čistě algebraický a poměrně zdlouhavý, druhý využívá sčítací větu pro topologickou entropii a některé částečné výsledky algebraického důkazu. My zde uvedeme pouze znění a dokážeme jeden speciální případ, který později budeme potřebovat. Poznamenejme, že hlavní aplikace sčítací věty je počítání entropie endomorfismů omezených grup.

Věta 2.37 (Sčítací věta, [DGSZ, Theor. 3.1])**.** *Nechť G je torzní Abelova grupa. Pak platí*

$$\mathrm{ent}\,(\phi) = \mathrm{ent}\,(\phi\restriction_H) + \mathrm{ent}\left(\bar{\phi}\right).$$

Lemma 2.38. *Nechť G je torzní Abelova grupa a* $\mathrm{ent}\left(\bar{\phi}\right) = 0$. *Pak* $\mathrm{ent}\,(\phi) = \mathrm{ent}\,(\phi\restriction_H)$.

Důkaz. Nerovnost $\mathrm{ent}\,(\phi) \geq \mathrm{ent}\,(\phi\restriction_H)$ platí vždy (pozorování 2.21), ukažme opačnou. Ať $F \in \mathcal{F}(G)$ libovolná, položme $F_1 = \pi F$. Užitím tvrzení 2.14 z $\mathrm{ent}\left(\bar{\phi}\right) = 0$ vyvodíme existenci $m \in \mathbb{N}$ takového, že platí $T\left(\bar{\phi}, F_1\right) = T_j\left(\bar{\phi}, F_1\right)$ pro $j \geq m$. Tvrdíme, že existuje $F_2 \leq H$ konečná, že platí $\phi^m F \leq T_m(\phi, F) + F_2$. To je zřejmé, neboť $\phi^m F$ je konečná a $\pi\phi^m F \leq T\left(\bar{\phi}, F_1\right)$. Proto $\phi T_m(\phi, F) \leq T_m(\phi, F) + F_2$ a indukcí dle $k \in \mathbb{N}$ máme $\phi^k T_m(\phi, F) \leq T_m(\phi, F) + T_k(\phi, F_2)$. Konečně položme $n = m + k$ a vyvodíme $T_n(\phi, F) \leq T_m(\phi, F) + T_k(\phi, F_2)$.

Protože logaritmus je konkávní funkce, platí $\log|A + B| \leq \log|A| + \log|B|$, a tedy $H_n(\phi, F) \leq H_m(\phi, F) + H_k(\phi, F_2)$. Nerovnost podělíme číslem n a provedeme limitní přechod $n \to \infty$. m je pevné, tedy i $k \to \infty$ a máme $H(\phi, F) \leq H(\phi, F_2) \leq \mathrm{ent}\,(\phi\restriction_H)$. Protože F bylo libovolné, odvodili jsme požadovanou nerovnost. □

2.4 Grupy nekonečné entropie

Pozorování 2.39. *Nechť $G = A \oplus B$ je Abelova grupa, $\psi \in \mathrm{End}\,(A)$. Pak ψ lze rozšířit na $\phi \in \mathrm{End}\,(G)$ tak, že platí* $\mathrm{ent}\,(\psi) = \mathrm{ent}\,(\phi)$.

Důkaz. Stačí položit $\phi\colon\ a + b \mapsto \psi(a)$ a použít lemma 2.25. □

Věta 2.40. *Nechť $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$, kde každá G_n je torzní Abelova grupa a nechť existují vnoření $\psi_n\colon\ G_n \to G_{n+1}$. Pak existuje endomorfismus ϕ grupy G nekonečné entropie.*

Důkaz. Zvolme rozklad množiny přirozených čísel $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ takový, aby každá z rozkladových tříd $I_k = \{ i_{k,1} < i_{k,2} < \dots \}$ byla nekonečná. Položme $A_k = \bigoplus_{n \in I_k} G_n$, zřejmě platí $G \cong \tilde{G} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Na každé z grup A_k jsou definována vnoření $\nu_{k,n} \colon G_{i_{k,n}} \to G_{i_{k,n+1}}$ složením odpovídajících ψ_n, tedy můžeme definovat Bernoulliův posunovací endomorfismus σ_k vzhledem k vnořením $\nu_{k,n}$ vztahem $(g_1, g_2, \dots) \in A_k \mapsto (0, \nu_{k,1}(g_1), \nu_{k,2}(g_2), \dots)$. Konečně položme $\phi \colon \tilde{G} \to \tilde{G}$, $(a_1, a_2, \dots) \mapsto (\sigma_1(a_1), \sigma_2(a_2), \dots)$.

Tvrdíme, že $\operatorname{ent}(\phi) = \infty$. V každé grupě A_k zvolíme $x_k \neq 0$, $x_k \in G_{i_{k,1}}$. Vidíme, že $H_n(\sigma_k, x_k) = \log \left| \bigoplus_{i=0}^{n-1} \sigma_k^i \mathbb{Z} x_k \right| = \log |\mathbb{Z} x_k|^n = n \log |\mathbb{Z} x_k|$, tedy $H(\sigma_k, x_k) = \log |\mathbb{Z} x_k|$. Definujeme posloupnost podgrup $F_m \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^{m} \mathbb{Z} x_k$. Dle lemmatu 2.25 platí $H(\phi, F_m) = \sum_{k=1}^{m} H(\sigma_k, x_k) \geq m \log 2$. Dostáváme $\operatorname{ent}(\phi) = \sup_{F \in \mathcal{F}(G)} H(\phi, F) \geq \sup_{m=1}^{\infty} H(\phi, F_m) = \infty$. $\square$

Důsledek 2.41. *Nechť divizibilní část p-grupy G je izomorfní nekonečnému direktnímu součtu grup $Z(p^\infty)$. Pak existuje endomorfismus G nekonečné entropie.*

Důkaz. Dle věty 1.4 existuje rozklad $G \cong D \oplus R$, kde D je divizibilní část a R redukovaná grupa. Na D lze definovat endomorfismus nekonečné entropie dle předchozího tvrzení (vnoření jsou identická) a stačí použít pozorování 2.39. $\square$

Lemma 2.42. *Nechť G je p-grupa a $\phi \in \operatorname{End}(G)$ takový, že $\operatorname{ent}(\phi) > 0$. Pak existuje omezená ϕ-invariantní podgrupa H taková, že platí $\operatorname{ent}(\phi\restriction_H) > 0$.*

Důkaz. Dle lemmat 2.18 a 2.17 existuje $x \in G$ takové, že $\operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{T(\phi,x)}\right) > 0$. G je p-grupa, proto existuje nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p^k x = 0$, proto i $p^k T(\phi, x) = 0$. Stačí položit $H = T(\phi, x)$. $\square$

Tvrzení 2.43. *Ať G je p-grupa a ϕ její endomorfismus, $\operatorname{ent}(\phi) > 0$. Pak platí $\operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{G[p]}\right) > 0$.*

Důkaz. Podle lemmatu 2.42 a pozorování 2.21 stačí tvrzení dokázat pro p^k-omezenou podgrupu $H \leq G$. Pokud $k = 1$, je $H = H[p]$ a tvrzení platí. Dále postupujeme indukcí. pH je ϕ-invariantní podgrupa H. Mohou nastat 2 případy. Pokud $\operatorname{ent}(\phi\restriction_{pH}) > 0$, použijeme indukční předpoklad na pH, neboť pH je p^{k-1}-omezená. Pak $\operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{pH[p]}\right) > 0$, proto i $\operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{H[p]}\right) > 0$.

Nechť $\operatorname{ent}(\phi\restriction_{pH}) = 0$. Definujeme homomorfismus $H \to pH$, $g \mapsto pg$, jehož jádro je $H[p]$. Proto existuje izomorfismus $\theta \colon H/H[p] \to pH$. Indukovaný endomorfismus $\bar{\phi} \in \operatorname{End}(H/H[p])$ je konjugovaný k $\phi\restriction_{pH}$, jak snadno nahlédneme z definice izomorfismu θ. Podle lemmatu 2.16 je proto $\operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right) = 0$. Nyní je čas použít lemma 2.38, odkud $0 < \operatorname{ent}(\phi) = \operatorname{ent}\left(\phi\restriction_{H[p]}\right)$. □

Lemma 2.44. *Nechť G je omezená p-grupa, ϕ její endomorfismus, $0 < \operatorname{ent}(\phi) < \infty$. Pak existuje $\psi \in \operatorname{End}(G)$ nekonečné entropie.*

Důkaz. Podle věty 1.7 lze G rozložit na direktní součet cyklických grup. Protože G je omezená, je v tomto rozkladu nekonečně grup $\mathbb{Z}_{p^m}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, označme H direktní sčítanec G složený z těchto grup. Dle věty 2.40 nalezneme $\psi \in \operatorname{End}(H)$ nekonečné entropie. ψ lze rozšířit na celou grupu dle pozorování 2.39. □

Následující věta má zajímavý důsledek. Její formální důkaz je nad rámec této práce, vyžadoval by zavedení několika dalších pojmů, konkrétně výšky prvku v grupě, volného valuovaného vektorového prostoru a Ulm-Kaplansky invariantu konečného indexu. Uvedeme neformálně pouze základní kostru důkazu bez korektního zavedení potřebných pojmů a jejich vlastností.

Věta 2.45 ([DGSZ, Theor. 1.19])**.** *Ať G je redukovaná p-grupa a ϕ její endomorfismus, $0 < \operatorname{ent}(\phi) < \infty$. Pak G má nekonečný omezený direktní sčítanec.*

Idea důkazu. Dle tvrzení 2.43 nalezneme $x \in G[p]$ s nekonečnou trajektorií a ukážeme, že tato trajektorie tvoří valuovaný vektorový prostor s valuací určenou výškou prvku. Z předpokladu $\operatorname{ent}(\phi) < \infty$ ukážeme, že tato valuace je shora omezená. Odtud vyplyne, že $T(\phi, x)$ má direktní sčítanec nekonečné dimenze. Tato dimenze je shora omezená n-tým Ulm-Kaplansky invariantem, tedy je tento invariant nekonečný. Odtud již plyne tvrzení věty. □

Důsledek 2.46. *Nechť G je Abelova grupa, $\operatorname{ent}(G) > 0$. Pak existuje endomorfismus $\phi \in \operatorname{End}(G)$ nekonečné entropie.*

Důkaz. Protože platí $\operatorname{ent}(G) > 0$, existuje endomorfismus ϕ kladné entropie. Pokud $\operatorname{ent}(\phi) = \infty$, jsme hotovi. Předpokládejme opačný případ. Pokud nějaká p-komponenta G má divizibilní část izomorfní nekonečnému direktnímu součtu grup $Z(p^\infty)$, plyne závěr z důsledku 2.41. Nechť $G \cong D \oplus R$, D divizibilní, R redukovaná. Z tvrzení 2.36 plyne, že $0 < \operatorname{ent}\left(\bar{\phi}\right) < \infty$, kde $\bar{\phi} \in \operatorname{End}(R)$ je indukovaný endomorfismus. Nutně musí existovat p-komponenta $R' = t_p(R)$, že platí $0 < \operatorname{ent}(\phi\restriction_{R'}) < \infty$. Existence požadovaného endomorfismu nyní plyne z věty 2.45, lemmatu 2.44 a pozorování 2.39. □

2.5 Endomorfismy s nulovou entropií

V této sekci se bez újmy na obecnosti omezíme na p-grupy. To nám usnadní některé úvahy a obecný případ vyplyne z důsledků 2.23 a 2.27.

Nechť tedy G je p-grupa. Označme C centrum okruhu $\mathrm{End}\,(G)$. Z věty 1.9 vidíme, že C je izomorfní buď J_p nebo $\mathbb{Z}_{p^n}$. Pro $\phi \in \mathrm{End}\,(G)$ je okruh $C[\phi]$ nejmenší podokruh $\mathrm{End}\,(G)$ obsahující C a ϕ. $C[\phi]$ je zřejmě komutativní. Na G můžeme nahlížet jako na $C[\phi]$-modul. Pro $F \in \mathcal{F}\,(G)$ je $C[\phi]$-podmodul G generovaný F totéž co $T\,(\phi, F)$.

Lemma 2.47. *Nechť ϕ je celistvý nad C. Pak* $\mathrm{ent}\,(\phi) = 0$.

Důkaz. Zvolme $g \in G$. Z definice celistvosti máme $\phi^k\,(g) + \sum_{n=0}^{k-1} f_n \phi^n\,(g) = 0$, $f_n \in C$. Odtud ihned vidíme, že $T\,(\phi, g) = T_k\,(\phi, g)$. Teď již stačí použít lemma 2.18. □

Příklad 2.48. Opačná implikace neplatí. Označme $G_n = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle b_{n,i} \rangle$, kde $\langle b_{n,i} \rangle$ jsou konečné cyklické p-grupy, $\langle b_{n,i} \rangle \cong \langle b_{n,j} \rangle$ pro všechna $i \neq j$. Definujme $\phi_n \in \mathrm{End}\,(G_n)$ hodnotami na generátorech:

$$\phi_n\,(b_{n,i}) = \begin{cases} b_{n,1} & i = n, \\ b_{n,i+1} & \text{jinak.} \end{cases}$$

G_n jsou konečné grupy, proto je $\mathrm{ent}\,(\phi_n) = 0$. Vezměme direktní součet $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n$ a jeho endomorfismus $\phi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \phi_n$. Podle tvrzení 2.26 je $\mathrm{ent}\,(\phi) = 0$. Dokážeme, že ϕ není celistvý nad C. Pro spor nechť existují $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in C$ taková, že $\phi^m + a_{m-1}\phi^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$. Pro přehlednost označme $z_i = b_{m+1,i}$, $1 \leq i \leq m+1$. Pak $\phi^i\,(z_1) = z_{i+1}$, $1 \leq i \leq m$. Množina $\{z_i\}_{i=1}^{m+1}$ je C-nezávislá, proto $\phi^m\,(z_1) + a_{m-1}\phi^{m-1}\,(z_1) + \cdots + a_0\phi^0\,(z_1) = z_{m+1} + a_{m-1}z_m + \cdots + a_0 z_1 \neq 0$. To je ale spor s předpokladem, neboť dosazení do nulového homomorfismu nemůže dávat nenulový výsledek.

Jestliže na počátku zvolíme $\langle b_{n,i} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ pro pevné k, jde o případ $C \cong Z_{p^k}$, při volbě $\langle b_{n,i} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ dostaneme $C \cong J_p$. □

Pokud oslabíme definici celistvosti, dostaneme ekvivalenci. Řekneme, že $\phi \in \mathrm{End}\,(G)$ je bodově celistvý nad C, jestliže pro každé $g \in G$ existuje monický polynom $f_g\,(x) \in C[x]$ takový, že $f_g\,(\phi)\,(g) = 0$. Vidíme, že důkaz lemmatu 2.47 projde i v případě, že předpokládáme pouze bodovou celistvost. Dříve než přikročíme k důkazu opačné implikace, zavedeme ještě jeden pojem.

Definice 2.49. Nechť G je p-grupa, $x \in G$ a nechť $C[\phi]x$ značí $C[\phi]$-modul generovaný množinou $\{x\}$. Položme

$$t_\phi(G) = \{\, x \in G \mid C[\phi]x \text{ je konečná} \,\} = \{\, x \in G \mid T(\phi, x) \text{ je konečná} \,\}.$$

Jistě jde o podgrupu, nazveme ji *ϕ-torzní podgrupa G*. V následujícím lemmatu uvidíme, že $t_\phi(G)$ je ϕ-invariantní, má proto smysl uvažovat indukovaný endomorfismus $\bar{\phi} \in \operatorname{End}(G/t_\phi(G))$, označme ještě π kanonickou projekci modulo $t_\phi(G)$.

Lemma 2.50. (i) *$x \in t_\phi(G) \iff \phi(x) \in t_\phi(G)$,*

(ii) *$t_\phi(G)$ je ϕ-invariantní,*

(iii) *$t_{\bar{\phi}}(G/t_\phi(G)) = 0$,*

(iv) *$K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\phi^n) \le t_\phi(G)$.*

Důkaz. (i) Platí $T(\phi, x) = \mathbb{Z}x + T(\phi, \phi(x))$, proto je $T(\phi, x)$ konečná, právě když je $T(\phi, \phi(x))$ konečná.

(ii) je okamžitý důsledek (i).

(iii) Zvolme $\bar{x} = x + t_\phi(G) \in t_{\bar{\phi}}(G/t_\phi(G))$ a ukážeme, že $x \in t_\phi(G)$. Jistě existují $i < j$ takové, že $\bar{\phi}^i(\bar{x}) = \bar{\phi}^j(\bar{x})$, tedy $\pi(\phi^i(x) - \phi^j(x)) = 0$. Proto existuje $y \in t_\phi(G)$ takové, že platí $\phi^j(x) = \phi^i(x) + y$. Odtud vidíme, že $T(\phi, x) \le T_j(\phi, x) + T(\phi, y)$, kde napravo je konečná grupa. Dokázali jsme $x \in t_\phi(G)$.

(iv) Vezměme $x \in K_\infty$, pak $\phi^n(x) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. To ale znamená, že $T(\phi, x)$ je konečná, proto $x \in t_\phi(G)$. $\square$

Tvrzení 2.51. *Buď G p-grupa, $\phi \in \operatorname{End}(G)$. Je ekvivalentní:*

(i) $\operatorname{ent}(\phi) = 0$,

(ii) *pro každé $g \in G$ je $T(\phi, g)$ konečná,*

(iii) *ϕ je bodově celistvý nad C,*

(iv) *$G = t_\phi(G)$,*

(v) *$\forall x \in G\ \exists m, n \in \mathbb{N}, m < n : \phi^m(x) = \phi^n(x)$.*

Důkaz. Ekvivalence (i) a (ii) je předmětem lemmatu 2.18. Ekvivalence (ii) a (iv) plyne ihned z definice. Z (iii) plyne (i) dle úvah za definicí bodové celistvosti. Zvolme $x \in G$. Pokud by $\phi^m(x) \neq \phi^n(x)$ pro každé $m < n$, byla by $T(\phi, x)$ nekonečná, proto z (ii) plyne (v). Předpokládejme (v), pak $\phi^m(x) - \phi^n(x) = 0$, tedy platí (iii). □

Definice 2.52. Nechť G je torzní Abelova grupa, $\phi \in \mathrm{End}(G)$. Řekneme, že ϕ je *silně rekurentní*, pokud pro každé $g \in G$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\phi^n(g) = g$. Pro úplnost poznamenejme, že ϕ se nazývá *rekurentní*, pokud pro každé $g \in G$ a pro každé $N \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $g - \phi^n(g) \in p^N G$.

Tvrzení 2.53. *Buď G Abelova grupa a $\phi \in \mathrm{End}(G)$ monomorfismus. Pak ϕ je silně rekurentní, právě když* $\mathrm{ent}(\phi) = 0$.

Důkaz. Nechť $\mathrm{ent}(\phi) = 0$ a zvolme $x \in G$. Pak dle tvrzení 2.51 (v) existuje $m < n \in \mathbb{N}$, že platí $\phi^n(x) = \phi^m(x)$. ϕ je prostý, proto $\phi^{n-m}(x) = x$, tedy je ϕ silně rekurentní. Naopak pro každé $g \in G$ existuje polynom $f_g(y) = y^n - y$, že platí $f_g(\phi)(g) = 0$, tedy ϕ je bodově celistvý. □

Důsledek 2.54. *Nechť G je torzní Abelova grupa,* $\mathrm{ent}(G) = 0$. *Pak každý monomorfismus $\phi \in \mathrm{End}(G)$ je již automorfismem.*

Důkaz. Vzorem $x \in G$ je $\phi^{n-1}(x)$. □

Kapitola 3

Algebraická entropie pro moduly

Definice 3.1. Nechť R je okruh a $i\colon\ \mathrm{Mod}\,(R) \to [0;\infty]$ zobrazení invariantní na izomorfismy. Řekneme, že i je *subaditivní invariant* $\mathrm{Mod}\,(R)$, pokud pro každé R-moduly A a B platí:

(i) $A \leq B \Longrightarrow i\,(B/A) \leq i\,(B)$,

(ii) $i\,(A+B) \leq i\,(A) + i\,(B)$.

Řekneme, že i je věrný, pokud $i\,(M) = 0$ pouze pro $M = 0$. *Aditivní invariant* je subaditivní invariant, pro který navíc platí $i\,(B) = i\,(A) + i\,(B/A)$, kdykoliv $A \leq B$ jsou R-moduly.

Definice 3.2. Buď i subaditivní invariant $\mathrm{Mod}\,(R)$, $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ a $\phi \in \mathrm{End}_R\,(M)$. Položme $\mathrm{Fin}^i\,(M) = \{\, N \leq M \mid i\,(N) < \infty \,\}$. Pro $F \in \mathrm{Fin}^i\,(M)$ definujme *n-tou částečnou ϕ-trajektorii F* rovností $T_n^i\,(\phi, F) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k F$ a *ϕ-trajektorii F* rovností $T^i\,(\phi, F) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k F$. Z definice subaditivního invariantu nahlédneme, že $T_n^i\,(\phi, F) \in \mathrm{Fin}^i\,(M)$, podmínka (i) totiž implikuje $\phi^k F \in \mathrm{Fin}^i\,(M)$. Dále definujme $H^i\,(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} i\,(T_n^i\,(\phi, F))\,/n$. Lze dokázat, že tato limita vždy existuje. Konečně definujme *i-entropii* ϕ resp. M vzorci

$$\begin{aligned} \mathrm{ent}^i\,(\phi) &= \sup \left\{ H^i\,(\phi, F) \mid F \in \mathrm{Fin}^i\,(M) \right\} \\ \mathrm{ent}^i\,(M) &= \sup \left\{ \mathrm{ent}^i\,(\phi) \mid \phi \in \mathrm{End}_R\,(M) \right\}. \end{aligned}$$

Pro takto obecně definovanou entropii lze dokázat analogii některých tvrzení, které platí pro grupovou entropii, například lemma 2.28. Některá tvrzení jdou však vyslovit pouze s dodatečnými předpoklady na invariant i. Tuto teorii nebudeme dále rozvíjet, omezíme se pouze na základní příklady.

Příklad 3.3. Uvažujme nejprve Abelovy grupy, tj. $R = \mathbb{Z}$. Pokud zvolíme $i(A) = \log |A|$, dostaneme entropii z kapitoly 2. i je zřejmě věrný a z Lagrangeovy věty plyne, že je aditivní.

Volba $i(A) = \mathrm{rk}(A)$ vede k *hodnostní entropii*, která je v jistém smyslu duální k log-entropii. Přitom hodnost $\mathrm{rk}(A)$ je definována jako mohutnost maximální $\mathbb{Z}$-lineárně nezávislé podmnožiny A. $\mathrm{rk}(A) = 0$ pro A torzní, proto má hodnostní entropie význam hlavně pro beztorzní grupy. Také odtud vidíme, že i není věrný.

Příklad 3.4. Pokud uvažujeme R komutativní těleso, lze za i zvolit dimenzi R-vektorového prostoru. Tento invariant je jistě věrný a aditivní.

Kapitola 4

Závěr

Na závěr si pojďme stručne shrnout obsah práce. Po úvodních definicích jsme se věnovali základním vlastnostem algebraické entropie. Za hlavní výsledek této sekce lze považovat tvrzení o omezení hodnot entropie grupy na množinu $\{ 0, \infty \}$. Zde provedený důkaz je jednodušší než důkaz v článku [DGSZ], kde jde o důsledek poměrně obtížné věty o existenci endomorfismu nekonečné entropie za předpokladu existence endomorfismu kladné entropie. Stačí přitom dokázat existenci endomorfismů libovolně velké konečné entropie.

Dále jsme studovali vztah entropie endomorfismu a entropie příslušného indukovaného endomorfismu. Tyto poznatky jsme využili při studiu grup nekonečné entropie. Uvedli jsme několik charakterizací endomorfismů nulové entropie a stručně jsme zmínili pojem rekurence.

Nezabývali jsme se otázkou, kdy je entropie grupy nulová. To je již téma celkem pokročilé, využívají se hluboké výsledky z teorie okruhů endomorfismů Abelových grup. Podstatnou roli zde hrají malé endomorfismy (ϕ je malý endomorfismus p-grupy G, pokud pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\phi\left(p^n G[p^k]\right) = 0$). Lze ukázat, že malé endomorfismy mají nulovou entropii a tvoří oboustranný ideál $\mathrm{End}\,(G)$.

Do textu se rovněž nevešel důkaz axiomatické charakterizace entropie. Ta je známá jak pro klasickou, tak pro hodnostní entropii. Uvedeme alespoň znění, podrobnosti lze nalézt v [DGSZ, Theor. 6.1]. Algebraická entropie pro (torzní) Abelovy grupy je definována jako jednoznačně určený soubor funkcí $\{\mathrm{h}_G \colon\ \mathrm{End}\,(G) \to [0; +\infty] \mid G \text{ torzní}\}$ splňující:

(i) $\forall k \in \mathbb{N} \colon\ \mathrm{h}_G\left(\phi^k\right) = k\, \mathrm{h}_G\,(\phi)$,

(ii) nechť $\theta \colon\ G \to H$ je izomorfismus, pak $\mathrm{h}_G\,(\phi) = \mathrm{h}_H\,(\theta\phi\theta^{-1})$,

(iii) nechť $H \leq G$ je ϕ-invariantní, pak $\mathrm{h}_G(\phi) = \mathrm{h}_G(\phi\restriction_H) + \mathrm{h}_{G/H}\left(\bar{\phi}\right)$,

(iv) nechť G je direktní limitou ϕ-invariantních podgrup G_i, pak $\mathrm{h}_G(\phi) = \sup \mathrm{h}_{G_i}(\phi\restriction_{G_i})$,

(v) nechť $G = \bigoplus_{\mathbb{N}} K$, K konečná, $\sigma \in \mathrm{End}(G)$ Bernoulliův posunovací endomorfismus, pak $\mathrm{ent}(\sigma) = \log|K|$.

Platnost těchto axiomů pro konstruktivní definici entropie byla předmětem lemmat 2.16 a 2.29, tvrzení 2.24, věty 2.37 a příkladu 2.8, nutno ovšem dodat, že sčítací věta nebyla v této práci dokázána.

Algebraická entropie se jeví jako mocný nástroj pro popis struktury endomorfismů, zatím je však prozkoumaná pouze pro komutativní objekty — moduly. Jedna z cest dalšího výzkumu se proto nabízí zobecnění entropie na nekomutativní struktury. Není ale předem jisté, že toto zobecnění bude mít nějaké rozumné vlastnosti.

Literatura

[AKM] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.* 114:309–319, 1965.

[DGSZ] D. Dikranjan, B. Goldsmith, L. Salce, and P. Zanardo. Algebraic entropy for abelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (7):3401–3434, 2009.

[F1] L. Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 36. Academic Press, New York, 1970.

[F2] L. Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. II.* Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II.

[P] J. Peters. Entropy on discrete abelian groups. *Adv. in Math.* 33 (1):1–13, 1979.

[S] L. Salce. *Struttura dei p-gruppi abeliani.* Pitagora Ed., Bologna, 1980.

[SZ] L. Salce and P. Zanardo. A general notion of algebraic entropy and the rank-entropy. *Forum Math.* 21 (4):579–599, 2009.

[W] M. D. Weiss. Algebraic and other entropies of group endomorphisms. *Math. Systems Theory* 8 (3):243–248, 1974/75.