Posudek oponenta k bakalářské práci 'Algebraická entropie' Marcela Šebka

Předložená práce je úvodem do algebraické teorie komutativních grup. Přestože se pojem entropie endomorfismu komutativní grupy objevil již v roce 1965 v práci Adlera, Konheima a M. H. McAndrewa o topologické entropii, větší rozvoj tohoto tématu nastal teprve v současnosti (viz práce Salceho, Goldsmithe, Dikranjana, Zanarda, Giordano Brunové a dalších).

Je-li G komutativní grupa, $F \subsetneq G$ konečná podgrupa a φ její endomorfismus, označíme $T_n(\varphi, F) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^i(F)$. Lze ukázat, že $H(\varphi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(|T_n(\varphi,F)|)}{n}$ vždy existuje a nabývá hodnoty z množiny $\{\log(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Entropií endomorfismu φ pak rozumíme supremum $H(\varphi, F)$ v množině $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ pro všechny možné volby konečné podgrupy F. Entropie G je pak supremem entropií všech endomorfismů grupy G.

Hlavní část práce je v kapitole 2. Sekce 2.1 obsahuje definici pojmu entropie pro komutativní grupy. V sekci 2.2 jsou dokázány základní vlastnosti entropie endomorfismu: Entropie φ je stejná jako entropie restrikce φ na torzní část grupy (což bohužel neznamená, že se lze omezit jenom na torzní grupy), chování entropie v direktní limitě a direktní sumě. Ze vztahu pro entropii mocniny endomorfismu je ukázáno, že entropie grupy musí být vždy buď' 0, nebo ∞. Sekce 2.3 zkoumá vztah entropie endomorfismu φ a endomorfismu $\overline{\varphi}$ na grupě G/H, kde $\varphi(H) \subseteq H$. Za určitých podmínek mají φ a $\overline{\varphi}$ stejnou entropii, například pokud H je konečná. Sekce 2.4 se věnuje otázce, zda komutativní grupa nekonečné entropie nutně obsahuje nějaký endomorfismus nekonečné entropie. Kompletní důkaz je předveden pro omezené p-grupy a je naznačen důkaz pro obecnou torzní grupu. Charakterizace endomorfismů s nulovou entropií pro případ p-grup je náplní sekce 2.5. Třetí kapitola pak vysvětluje zobecnění entropie endomorfismu vzhledem k tzv. subaditivnímu invariantu.

Práce je sepsána srozumitelně, důkazy jsou zpracovány detailněji než v citovaných pramenech. Našel jsem pouze několik nesrovnalostí: V důkazu Lemmatu 2.38 se vyskytuje poněkud odvážné tvrzení $\log(|A+B|) \leq \log(|A|)+\log(|B|)$ bez nějakých předpokladů na A, B. Lemma 2.29 je sformulováno pro $k \in \mathbb{N}_0$. Pokud se ale podíváme na důkaz pro $k = 0$, zjistíme, že $T_0(\phi, F)$ není v Definici 2.1 zavedeno. Nakonec formulace v Důsledku 2.46 je trochu matoucí. Jednak nejspíše chybí předpoklad, že G je torzní (hledaný endomorfismus nekonečné entropie najdeme pouze pro torzní část grupy, pak ale není jasné, zda ho můžeme rozšířit na celou grupu). Potom předpoklad $\mathrm{ent}(G) > 0$ znamená $\mathrm{ent}(G) = \infty$, jak víme z Důsledku 2.31(ii). Myslím, že by bylo lepší psát předpoklad rovnou jako $\mathrm{ent}(G) = \infty$. (Důsledek 2.46 je pravděpodobně převzat z [Corollary 1.20, DGSZ], kde je ale $\mathrm{ent}(G) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{ent}(G) = \infty$ odvozena až z tohoto tvrzení.)

K obsahu by šlo namítnout, že uvedená tvrzení i příklady jsou poměrně elementární. Jsem si ale vědom, že pokročilejší teorie nekonečných komutativních grup už je pro bakalářskou práci poměrně náročné téma.

Předloženou práci doporučuji k obhajobě, navrhuji hodnocení 'výborně'.

V Praze, 20. června 2010,

[redacted]