

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavla Grubhofferová

### **Diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou**

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.

Studijní program: Matematika

2009

Děkuji vedoucímu této práce Doc. RNDr. Vladimíru Janovskému, DrSc., za poskytnutí literatury a testovacích dat, podporu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5.srpna 2009

Pavla Grubhofferová

# Obsah

Úvod	5
<b>1 Dynamické systémy s nespojitou pravou stranou</b>	<b>6</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	6
1.2 Po částech hladký dynamický systém . . . . .	8
1.3 Filippovovy systémy . . . . .	8
<b>2 Příklad I - impaktní oscilátor s jedním stupněm volnosti</b>	<b>10</b>
2.1 Úvod do problému . . . . .	10
2.2 Numerické výsledky . . . . .	11
<b>3 Příklad II - bilineární oscilátor</b>	<b>19</b>
3.1 Úvod do problému . . . . .	19
3.2 Numerické experimenty . . . . .	20
<b>4 Příklad III - oscilátor se suchým třením</b>	<b>25</b>
4.1 Úvod do problému . . . . .	25
4.2 Numerické experimenty . . . . .	26
<b>Literatura</b>	<b>33</b>

Název práce: Diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou

Autor: Pavla Grubhofferová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.

e-mail vedoucího: janovsky@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce studuje některé speciální případy soustav obyčejných diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou. V úvodní části jsou definovány dále používané základní pojmy. V dalších částech práce je podrobněji rozebráno několik modelů fyzikálních systémů a příslušné numerické experimenty. Pomocí dynamických simulací prostředí MATLAB je studováno chování modelu nárazu (impaktní oscilátor s jedním stupněm volnosti), modelu tuhého nárazu (bilineární oscilátor) a modelu tření (oscilátor se suchým třením) v závislosti na volbě některých parametrů. Hlavním výstupem této práce jsou programy včetně jejich zdrojového kódu.

Klíčová slova: dynamický systém s nespojitou pravou stranou, impaktní oscilátor s jedním stupněm volnosti, bilineární oscilátor, oscilátor se suchým třením.

Title: Differential equations with discontinuous right-hand side

Author: Pavla Grubhofferová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.

Supervisor's e-mail address: janovsky@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The presented work studies special cases of systems of piecewise-smooth ordinary differential equations. Basic definitions are included in an introduction. Several models of physical systems and corresponding numerical experiments are described in detail in the following parts. The behaviour of an impact model (a one-degree-of-freedom impact oscillator), the model of a rigid impact (a bilinear oscillator) and the model of a friction (a dry-friction oscillator) in dependence on choice of some arguments is studied by using dynamical simulations in MATLAB. The main results of this work are programs including their source code.

Keywords: piecewise smooth dynamical system, a-one-degree-of-freedom impact oscillator, a bilinear oscillator, a dry-friction oscillator.

# Úvod

Bakalářská práce se zabývá vybranými příklady nespojitých dynamických systémů. Modely příkladů, které zde studujeme, jsou čerpány z knihy pojednávající o nespojitých dynamických systémech [2] vydané v roce 2008. Z těchto příkladů jsem si vybrala tři konkrétní, kterými se v práci hlouběji zabývám.

Prvním příkladem je impaktní oscilátor s jedním stupněm volnosti, u kterého studujeme, jak se mění chování modelu pro různé hodnoty parametrů.

Druhým modelem, který je zde popsán, je model bilineárního oscilátoru - opět nás zajímají změny chování v závislosti na změnách parametrů a dále podoba s prvním příkladem.

Jako třetí studujeme oscilátor se suchým třením. Rovněž nás zajímá chování modelu v závislosti na hodnotách parametrů.

Hlavním přínosem práce je vytvoření softwaru pro modelování chování tří uvedených příkladů. Software je vytvořen v prostředí Matlab [3] a je testován v odstavcích Numerické výsledky. Matlab využívá knihovnu pro řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic. V konkrétních aplikacích používáme prostředku zvaného "event location". Souběžně s numerickou aproximací trajektorie se vyčísluje předem zadaný funkcionál. Výpočet se zastaví v čase, ve kterém funkcionál nabývá předepsané hodnoty. Jak aproximace trajektorie, tak výpočet funkcionálu probíhají se zadanou přesností.

# Kapitola 1

## Dynamické systémy s nespojitou pravou stranou

### 1.1 Základní pojmy

Na úvod je třeba definovat některé základní pojmy. Definice vycházejí z práce [1].

Nechť  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  je množina, kterou budeme nazývat stavový (fázový) prostor, a nechť  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Dále definujme zobrazení  $\phi : S \times T \rightarrow S$ , které představuje časový vývoj prvku  $x$  ze stavového prostoru  $S$ . Počáteční stav  $x_0 \in S$  přejde za čas  $t \in T$  do stavu  $x_t = \phi(x_0, t)$ .

**Definice 1.1** Řekneme, že dynamický systém  $\mathcal{Z} = \{S, T, \phi\}$  je definován stavovým prostorem  $S$ , množinou  $T$  a zobrazením  $\phi$ , pokud platí:

$$\phi(x, 0) = x, \forall x \in S, \quad (1.1)$$

$$\phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, t), s), \forall x \in S, t, s \in T. \quad (1.2)$$

Zobrazení  $\phi$  splňující (1.1) a (1.2) budeme nazývat fázovým tokem dynamického systému  $\mathcal{Z}$ .

Nechť máme dānu soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) prvního řādu:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

Tuto soustavu můžeme rozepsat do složek následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

kde  $S$  je oblast v  $\mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $\{S, T, \phi\}$  definuje dynamický systém  $\mathcal{Z}$ , jestliže  $T = \mathbb{R}$ ,  $\phi(x, t)$  splňuje rovnice (1.1) a (1.2) a navíc je splněna podmínka

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = F(\phi(x, t)), \forall x \in S. \quad (1.4)$$

**Definice 1.2** *Nechť  $\mathcal{Z}$  je dynamický systém, který splňuje (1.1) a (1.2). Řekneme, že  $\mathcal{Z}$  je hladký s indexem hladkosti  $r$ , jestliže prvních  $r$  parciálních derivací  $\phi$  podle  $x$  existuje a jsou spojité ve všech bodech  $x \in S$ .*

**Poznámka 1.3** *Obecným řešením soustavy (1.3) je fázový tok  $\phi$ . Jejím partikulárním řešením v čase  $t = 0$  v bodě  $x_0 \in S$  je potom funkce*

$$\phi(x_0, t) = \phi_{x_0}(t) = x(t), \quad (1.5)$$

kteřá splňuje

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), t \in \mathbb{R}, x(0) = x_0. \quad (1.6)$$

**Poznámka 1.4** *Nechť máme dynamický systém daný soustavou (1.3). Potom hladkou křivku, která je parametrizována partikulárním řešením (1.5), nazveme trajektorií partikulárního řešení (1.5) a budeme ji značit  $\gamma_{x_0}$ . Fázovým portrétem dynamického systému budeme nazývat rozklad fázového prostoru na trajektorie.*

**Definice 1.5** *Nechť  $x_0 \in S$ , kde  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Potom  $\omega$ -limitní množinou bodu  $x_0$  je množina*

$$\omega(x_0) = \{x, \exists \{t_j\}, t_j \rightarrow +\infty \text{ tak, že } \phi(x_0, t_j) \rightarrow x\}. \quad (1.7)$$

**Definice 1.6** *Mějme dynamický systém definovaný jako v (1.3). Nechť bod  $x_0 \in S$  splňuje*

$$F(x_0) = 0. \quad (1.8)$$

Pak tento bod nazýváme rovnovážným stavem soustavy (1.3). Navíc, pokud je bod  $x_0$  rovnovážným bodem soustavy (1.3), pak tato soustava má konstantní řešení s počátečním stavem  $x_0$

$$x(t) = \phi(x_0, t) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Takové řešení nazýváme řešením stacionárním.

## 1.2 Po částech hladký dynamický systém

**Definice 1.7** Po částech hladký dynamický systém (piecewise-smooth dynamical system) je dán konečnou množinou ODR

$$\dot{x} = F_i(x), \text{ pro } x \in S_i, \quad (1.10)$$

kde  $\bigcup_i S_i = S \subseteq \mathbb{R}^n$  a každá  $S_i$  má neprázdný vnitřek. Průnik  $\Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$  je buď  $\mathbb{R}^{n-1}$  dimenzionální podprostor obsažený v hranicích  $\partial S_j$  a  $\partial S_i$ , nebo prázdná množina. Každé vektorové pole  $F_i$  je spojitě v  $x$  a určuje spojitý tok  $\phi_i(x, t)$  uvnitř libovolné otevřené množiny  $U \supset S_i$ .

**Definice 1.8** Řekneme, že dynamický systém definovaný soustavou (1.10) je spojitý, jestliže

$$\lim_{u \rightarrow x} F_i(u) = \lim_{v \rightarrow x} F_j(v), \forall x \in \Sigma_{ij}, \forall i, \forall j, i \neq j, \quad (1.11)$$

kde  $F_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}^n, F_j : S_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definice 1.9** Dynamický systém s nespojitou pravou stranou je definován soustavou (1.10), jestliže

$$\exists i, \exists j, i \neq j, \exists x \in \Sigma_{ij}, \lim_{u \rightarrow x} F_i(u) \neq \lim_{v \rightarrow x} F_j(v), \quad (1.12)$$

kde  $F_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}^n, F_j : S_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## 1.3 Filippovovy systémy

Nyní uvažujme po částech hladký dynamický systém v  $\mathbb{R}^2$  a pro jednoduchost předpokládejme, že stavový prostor  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  je rozdělen pouze na dvě oblasti  $S_1$  a  $S_2$ , tedy

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{pokud } x \in S_1, \\ F_2(x), & \text{pokud } x \in S_2. \end{cases} \quad (1.13)$$



Hranice  $\Sigma_{12} = \Sigma$  je popsána vztahem

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2, H(x) = 0\}, \quad (1.14)$$

kde  $H$  je hladká skalární funkce,  $H : \Sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gradient  $H_x(x)$  je nenulový na  $\Sigma$ .

Znaménko funkce  $H$  určíme podle toho, v jaké oblasti se zrovna pohybujeme, tj.

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2, H(x) < 0\}, \quad (1.15)$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2, H(x) > 0\}. \quad (1.16)$$

Chování trajektorie na hranici  $\Sigma$  lze definovat pomocí různých metod, např. pomocí aritmetického průměru dvou vektorových polí  $F_1$  a  $F_2$  (tzv. Utkinova metoda), nebo pomocí Filippovy konvexní metody, kdy je vektorům  $F_1$  a  $F_2$  přiřazen vektor

$$F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2, \quad (1.17)$$

kde  $0 \leq \alpha \leq 1$ , přičemž

$$\alpha(x) = \frac{H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)}. \quad (1.18)$$

**Definice 1.10** *Filippovým systémem nazýváme nespojitý po částech hladký dynamický systém, pro který je definováno chování pomocí Filippovy konvexní metody (1.17) a (1.18).*

# Kapitola 2

## Příklad I - impaktní oscilátor s jedním stupněm volnosti

### 2.1 Úvod do problému

Mějme těleso na pružině. Uvažujme pohyb tohoto tělesa v jedné dimenzi, který je popsán pozicí těžiště tělesa  $u = u(t)$  a jeho rychlostí  $v(t) = \frac{du(t)}{dt}$ . Pro jednoduchost považujme těleso za jeden bod (který je umístěn v těžišti tělesa). Nyní uvažujme pružinu a tlumič, které zprostředkovávají jeho pohyb tak, že jej lze popsat touto diferenciální rovnicí:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi \frac{du}{dt} + u = w(t), \quad u > \sigma, \quad (2.1)$$

kde  $2\xi$  je koeficient viskózního tlumení a  $w(t)$  je vnější působící síla.

Předpokládejme, že stavový prostor  $u \in \mathbb{R}$  je omezen:  $u > \sigma$ , kde  $\sigma$  je konstanta. Pohyb se řídí rovnicí (2.1) až do okamžiku  $t_0 > 0$ , kdy  $u = \sigma$ , tj. těleso narazí do pevné překážky. Položme  $(u(t_0), v(t_0)) := (u_-, v_-)$ , kde

$$u^+ = u^- \text{ a } v^+ = -rv^-,$$

kde  $0 \leq r \leq 1$  je Newtonův návratový koeficient.

Pro naše potřeby si rovnici převedeme na soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t). \quad (2.3)$$

V dalším předpokládejme, že  $\sigma = 0$ . Za působící sílu v našem případě bereme periodicky působící sílu

$$w(t) = \cos(\omega t), \text{ s periodou } T = 2\pi/\omega. \quad (2.4)$$

**Poznámka 2.1** Všimněme si, že  $r^2$  měří množství kinetické energie, které je absorbováno nárazem (v procentech). V případě, kdy  $r = 1$ , dostaneme elastickou kolizi, naopak pro  $r = 0$  je kolize zcela nepružná. Navíc, experimentálně bylo zjištěno, že hodnota  $r$  nezáleží pouze na materiálu, ze kterého je těleso vyrobeno, ale i na tvaru tělesa.

## 2.2 Numerické výsledky

Nyní srovnáme pomocí dynamických simulací v prostředí Matlab, jak se oscilátor chová pro určité hodnoty  $\omega$ ,  $r$ ,  $\xi$ . Pozorujeme, jak který parametr ovlivňuje chování oscilátoru. Zajímá nás, jak se mění výchylka, případně rychlost oscilátoru.

Na obrázku (2.1) vidíme, jak vypadají oscilace v případě, že kmitání je částečně tlumené a že viskózní tlumení je nulové. Je vidět, že kmitání postupně ustává, stejně tak se rychlost kmitání postupně snižuje.

Na obrázku (2.2) si můžeme všimnout, že pokud se Newtonův návratový koeficient  $r$  svojí hodnotou blíží jedné (v našem případě nabývá hodnoty 0.95), pak se výchylka oscilátoru snižuje jen pozvolna, stejně jako jeho rychlost.

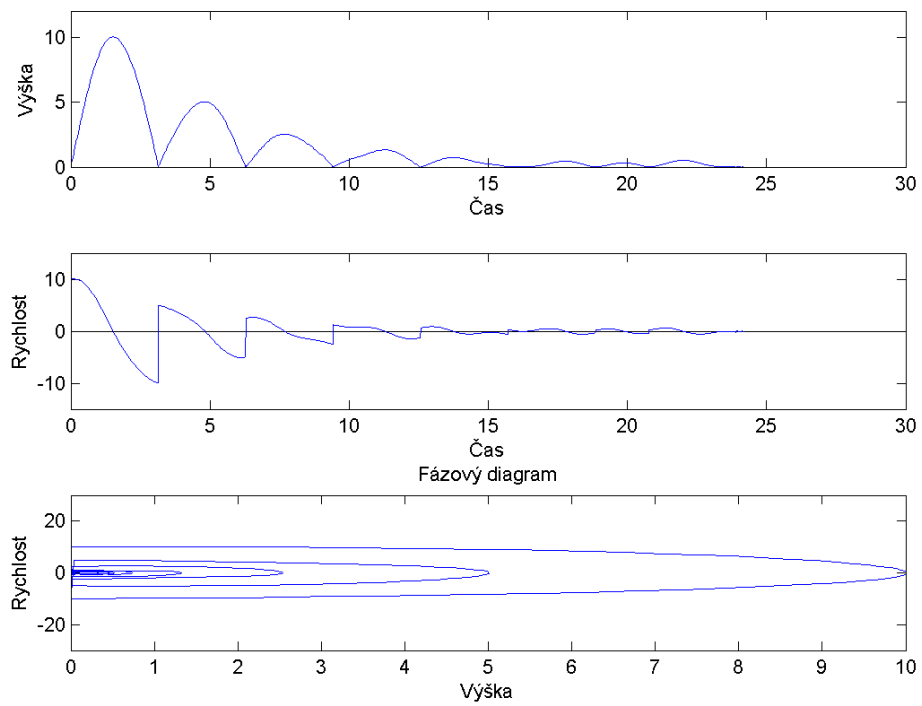
Na obrázku (2.3) můžeme pozorovat, že pokud  $r = 0$ , tak je pohyb oscilátoru skoro zcela ztlumen již po prvním kmitu.

Na obrázku (2.4) pozorujeme, že pokud  $r = 1$ , tedy pokud kolize tělesa s překážkou je zcela elastická, pak má oscilátor stále stejnou maximální výchylku stejně jako maximální rychlost, pohyb oscilátoru se periodicky opakuje.

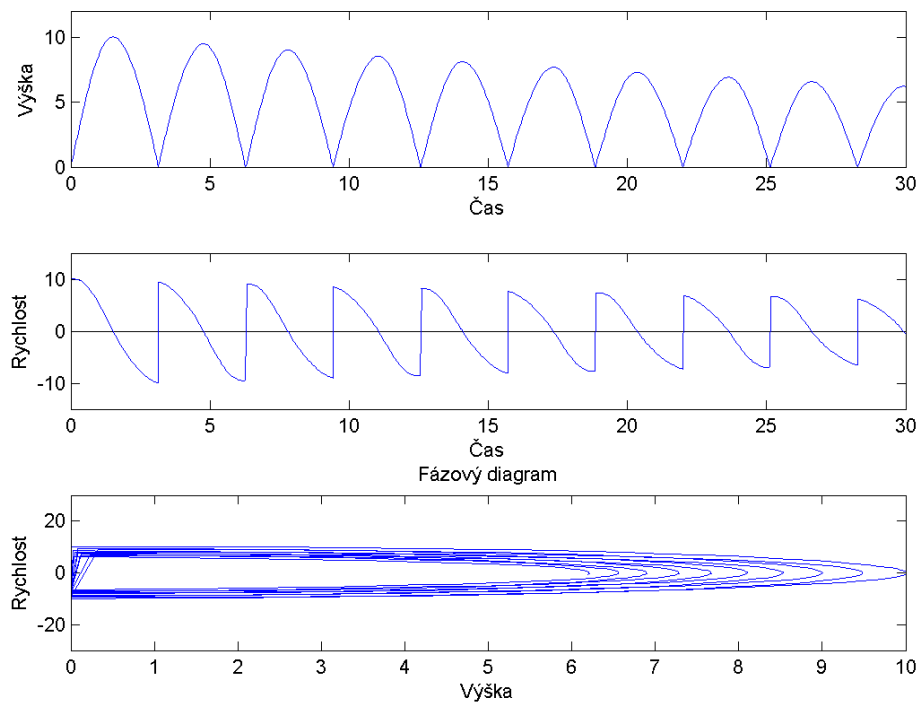
Na obrázku (2.5) lze pozorovat, že je-li  $\omega = 2.76$ , potom se změní i kmitání oscilátoru - výchylka se střídavě snižuje a zvyšuje, stejně tak i rychlost oscilátoru. Díky tomu, že  $r < 1$ , kmitání pomalu ustává.

Na obrázku (2.6) můžeme vidět, jak se oscilace změní, bude-li  $\xi \neq 0$ , tedy pokud nebudeme zanedbávat viskózní tlumení. Ačkoli hodnota  $r$  je blízká jedné, tak rychlost i výchylka oscilátoru velice rychle klesají.

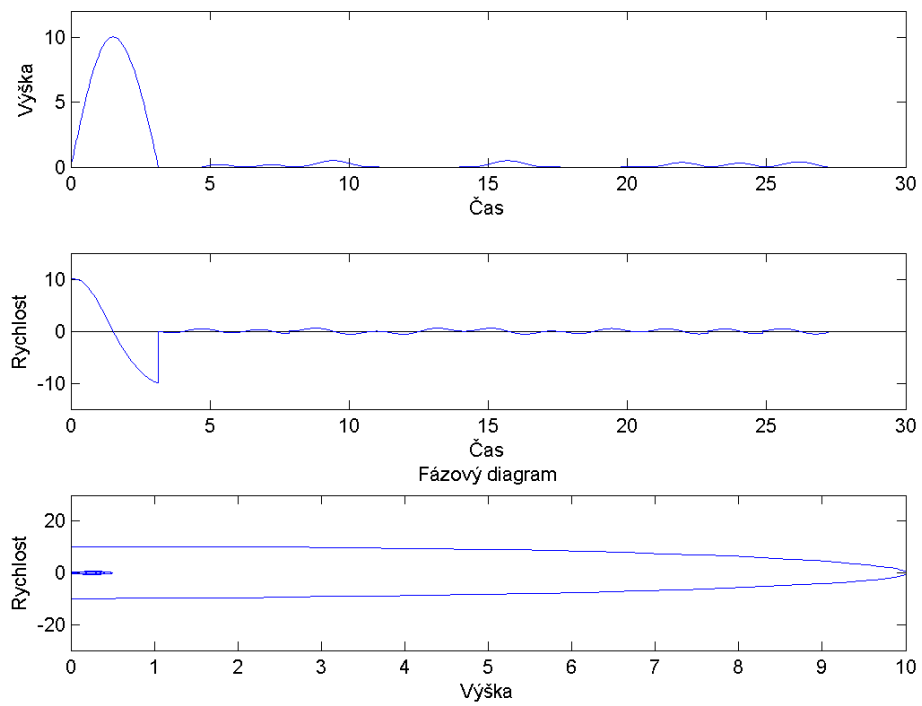
Na obrázku (2.7) pozorujeme, že již pro  $\xi = 1$  jsou kmity silně tlumené, tedy hodnota koeficientu viskózního tlumení ovlivňuje pohyb oscilátoru mnohem více než hodnota Newtonova návratového koeficientu.



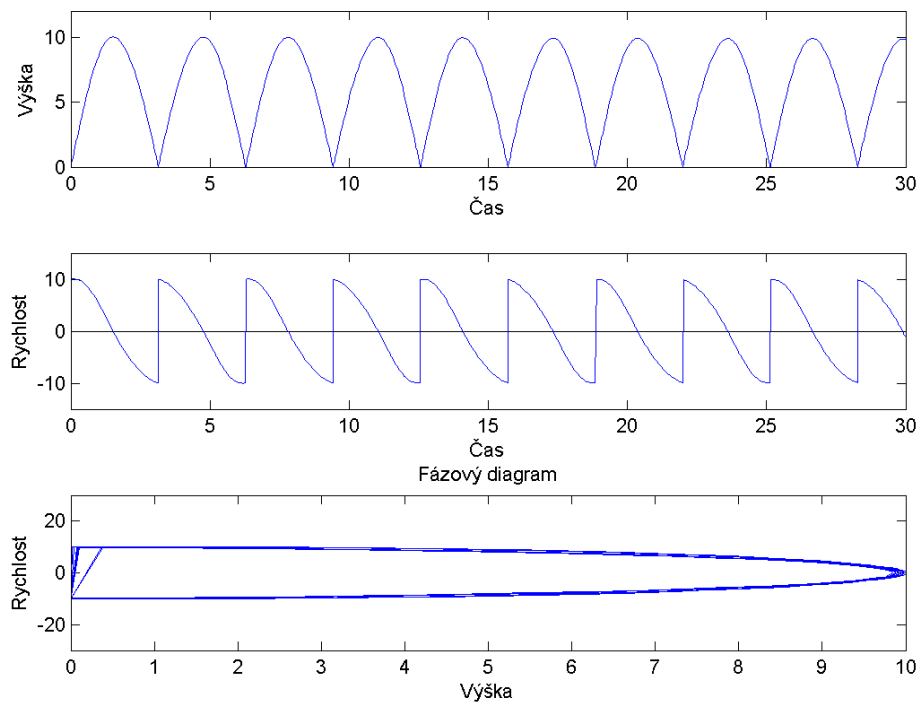
Obrázek 2.1: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 0, r = 0.5$



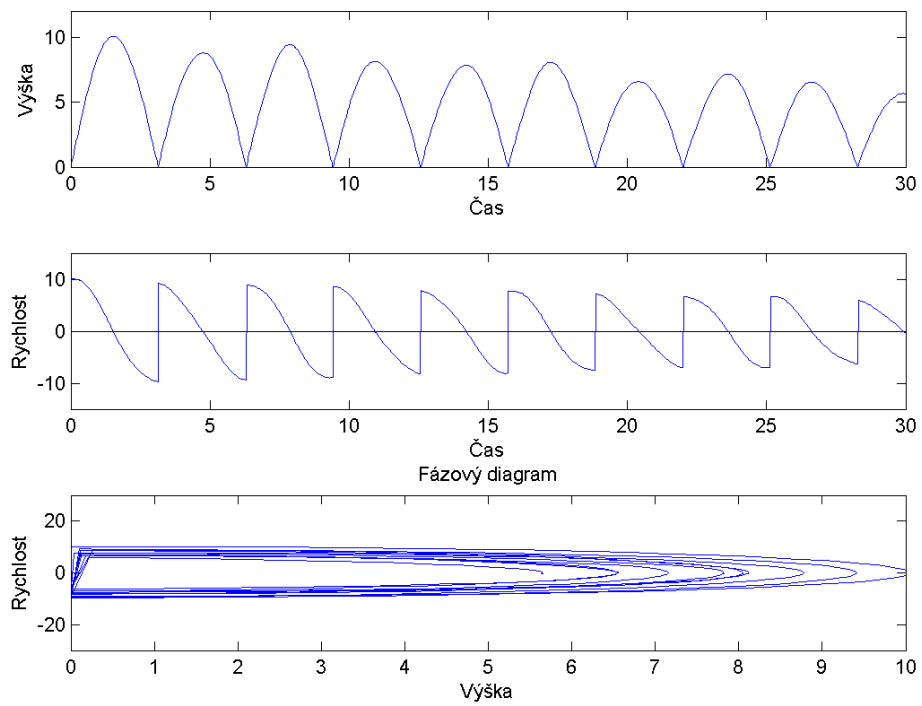
Obrázek 2.2: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 0, r = 0.95$



Obrázek 2.3: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 0, r = 0$

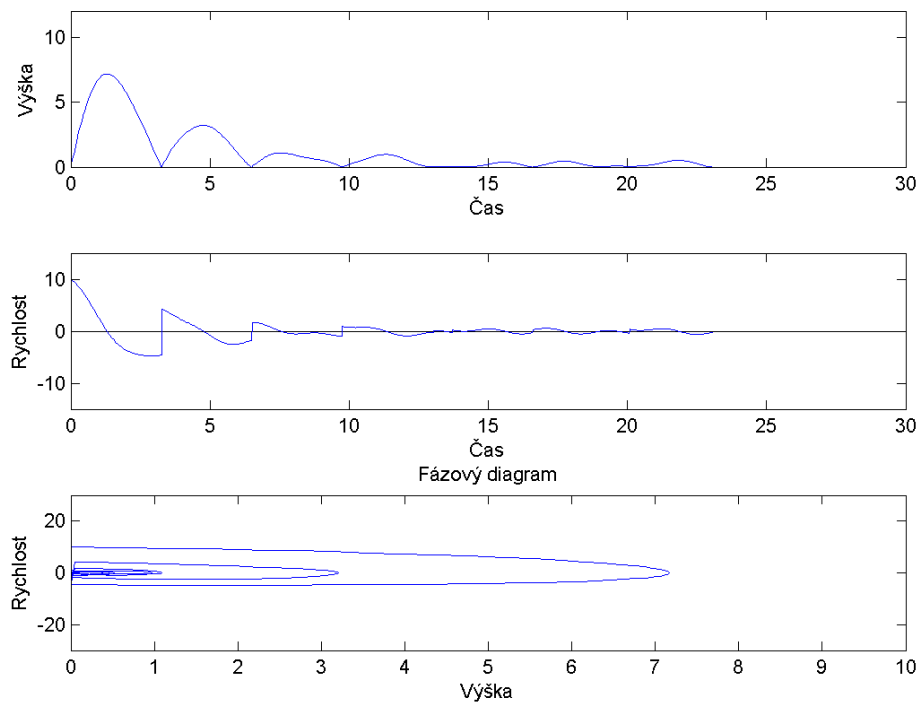


Obrázek 2.4: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 0, r = 1$

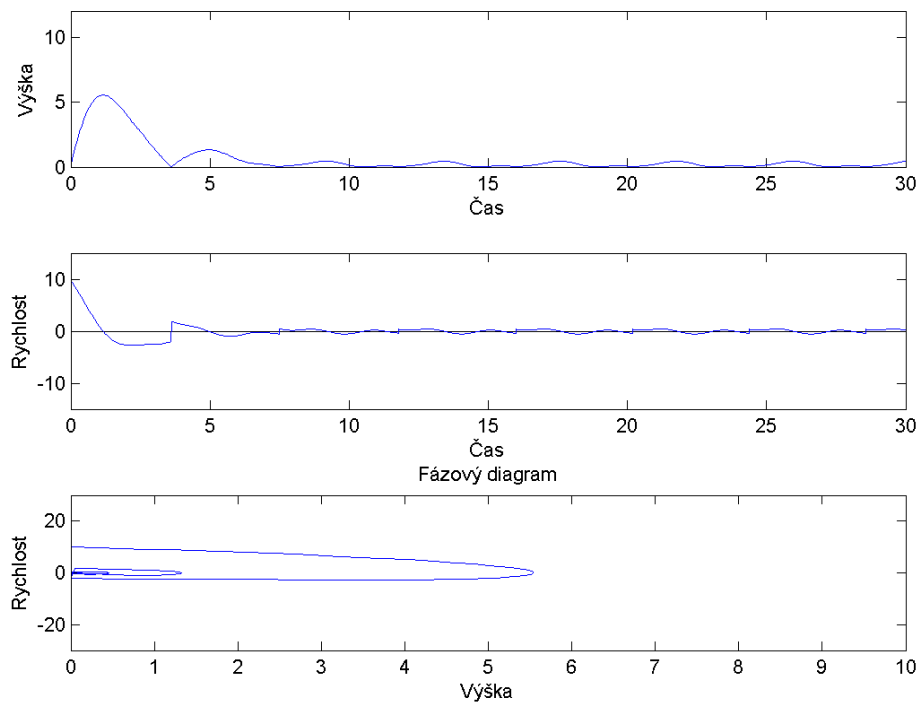


Obrázek 2.5: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 5, r = 0.95$





Obrázek 2.6: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 0.5, r = 0.95$



Obrázek 2.7: Oscilace pro  $\omega = 3, \xi = 1, r = 0.95$

# Kapitola 3

## Příklad II - bilineární oscilátor

### 3.1 Úvod do problému

Dalším příkladem, kterým se zabýváme, je model tuhého nárazu. Takovýto model nárazu, při kterém dochází k náhlému skoku v rychlosti, je nerealistický, ve skutečnosti by mohl vyžadovat nekonečnou sílu. Přirozeným zobecněním je nahradit tuhý náraz elastickou deformací, která trvá krátký, avšak konečný čas, během níž se rychlost mění spojitě o vysokou hodnotu.

Nejjednodušším případem takového tělesa je bilineární oscilátor. Pro zjednodušení považujeme těleso za jeden bod (umístěný v těžišti tělesa). Nechť je pohyb tělesa popsán pozicí těžiště tělesa  $u = u(t)$  a jeho rychlostí  $v(t) = \frac{du(t)}{dt}$ . Pohyb tělesa můžeme popsat takto:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi \frac{du}{dt} + k_1u = \cos(\omega t), \text{ pokud } u \geq 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi \frac{du}{dt} + k_2u = \cos(\omega t), \text{ pokud } u < 0. \quad (3.2)$$

Soustavu (3.1), (3.2) si můžeme přepsat pomocí soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu takto:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.3)$$

$$\dot{x}_2 = -k_1x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t), \quad (3.4)$$

pro pohyb před skokem v rychlosti a

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_2 = -k_2x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t), \quad (3.6)$$

pro pohyb nahrazený elastickou deformací.

U této soustavy předpokládáme, že

$$K = \frac{k_2}{k_1}$$

je vysoké, takže oscilátor se bude pohybovat jen krátkou dobu na intervalu, kde  $u < 0$ , než se vrátí na interval, na kterém  $u > 0$ .

Je přirozené předpokládat, že  $u$  a  $\frac{du}{dt}$  jsou spojité podél hranice  $\{u = 0\}$ , z čehož plyne, že také  $\frac{d^2u}{dt^2}$  je spojitá, avšak  $\frac{d^3u}{dt^3}$  je nespojitá. Takový oscilátor může být použit k modelování chování zakotvené lodi a jiných pobřežních struktur. Jiné mechanické oscilátory s nespojitou tuhostí modelují například valící se kamení, chůzi robotů atd.

Předpokládáme, že se částice pohybuje přes  $\{u = 0\}$  v čase  $t_0$  s rychlostí  $v_0 < 0$ , která není příliš nízká. Potom se její chování pro  $u < 0$  podobá chování nenuceného vysokofrekvenčního harmonického oscilátoru s rychle se obracející rychlostí. Pokud předpokládáme, že  $\xi$  je malé a že čas strávený v oblasti  $u < 0$  je mnohem menší než perioda působení  $\frac{2\pi}{\omega}$ , potom je částice pro  $u < 0$  dobře aproximována podle pravidla

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k_2u = g, \quad g \approx \cos(\omega t_0) < 0. \quad (3.7)$$

## 3.2 Numerické experimenty

Pomocí dynamických simulací v prostředí Matlab studujeme chování bilineárního oscilátoru v závislosti na hodnotách  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\omega$ ,  $\xi$ . Zkoumáme případnou podobu s impaktním oscilátorem s jedním stupněm volnosti.

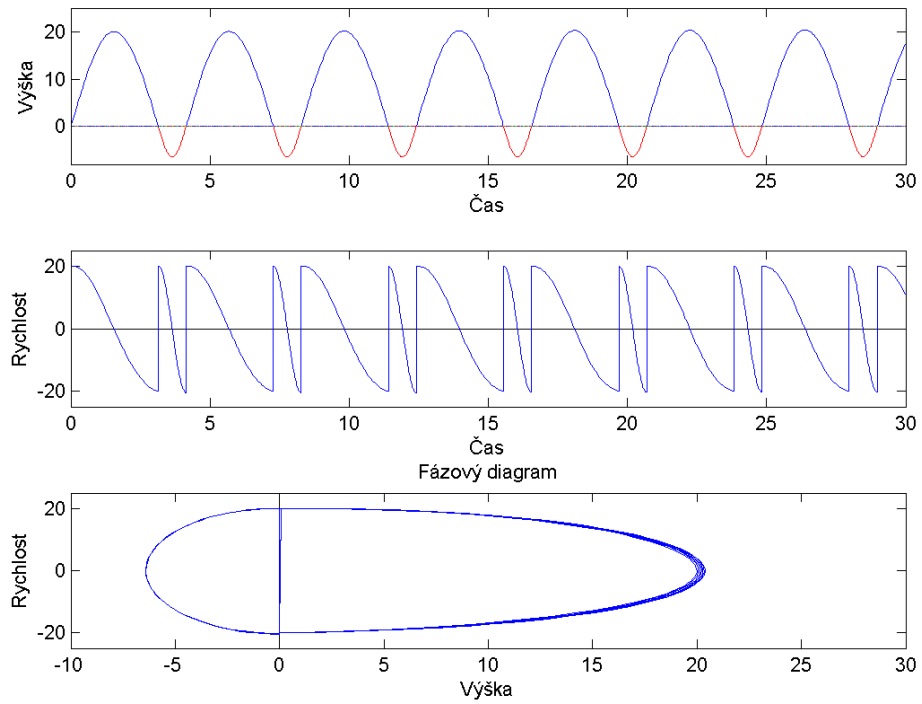
Na obrázku (3.1) vidíme, že bilineární oscilátor svým chováním připomíná impaktní oscilátor s jedním stupněm volnosti. Můžeme pozorovat, jak se mění rychlost pohybu - je-li oscilátor v oblasti  $u > 0$ , mění se rychlost podobně jako v Příkladu I, naopak, je-li oscilátor v oblasti  $u < 0$ , dosáhne maximální rychlosti v mnohem kratším čase než při pohybu v oblasti  $u > 0$ .

Na obrázku (3.2) můžeme pozorovat, že pokud je  $K$  dostatečně velké, pak je pohyb oscilátoru více podobný pohybu oscilátoru z Příkladu I.

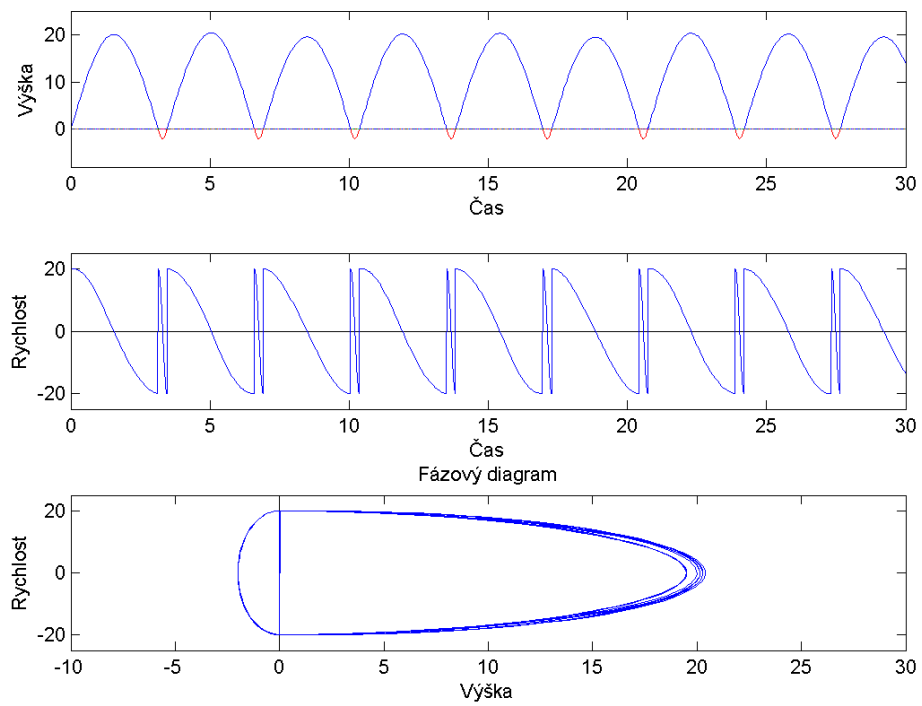
Na obrázku (3.3) lze pozorovat, že je-li  $\omega = 2.76$ , pak se pohyb oscilátoru příliš nezmění, stále zde lze pozorovat podobu s oscilátorem s jedním stupněm volnosti.

Na obrázku (3.4) pozorujeme, že pokud bude koeficient viskózního tlumení  $\xi \neq 0$ , pak se bude pohyb oscilátoru značně lišit od případu, kdy  $\xi = 0$ .

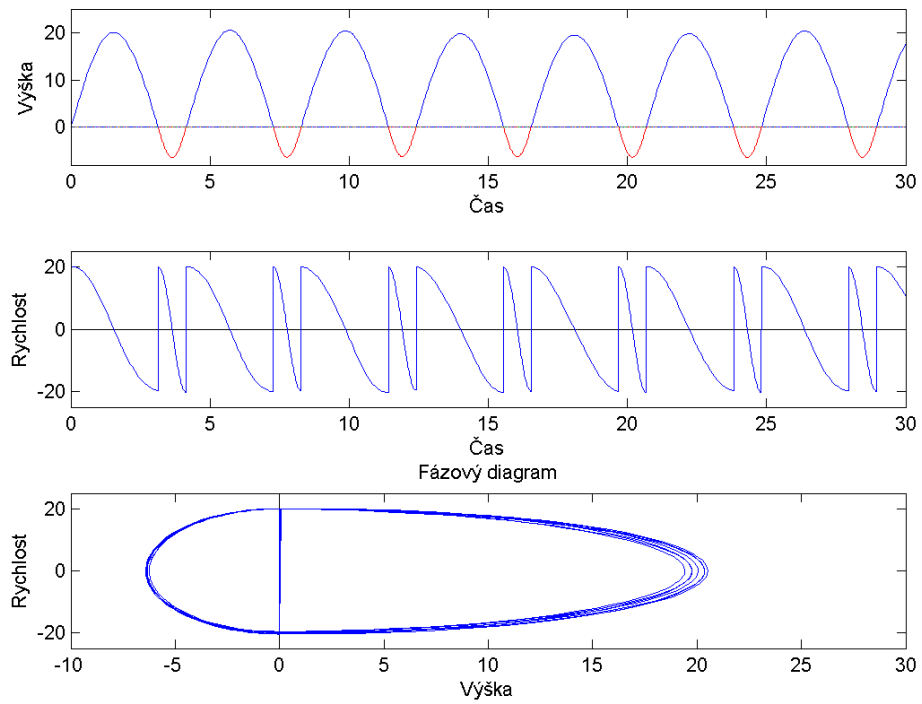
Rychlost se v oblasti, kde skok v rychlosti nahrazujeme elasticou deformací, velmi rychle mění.



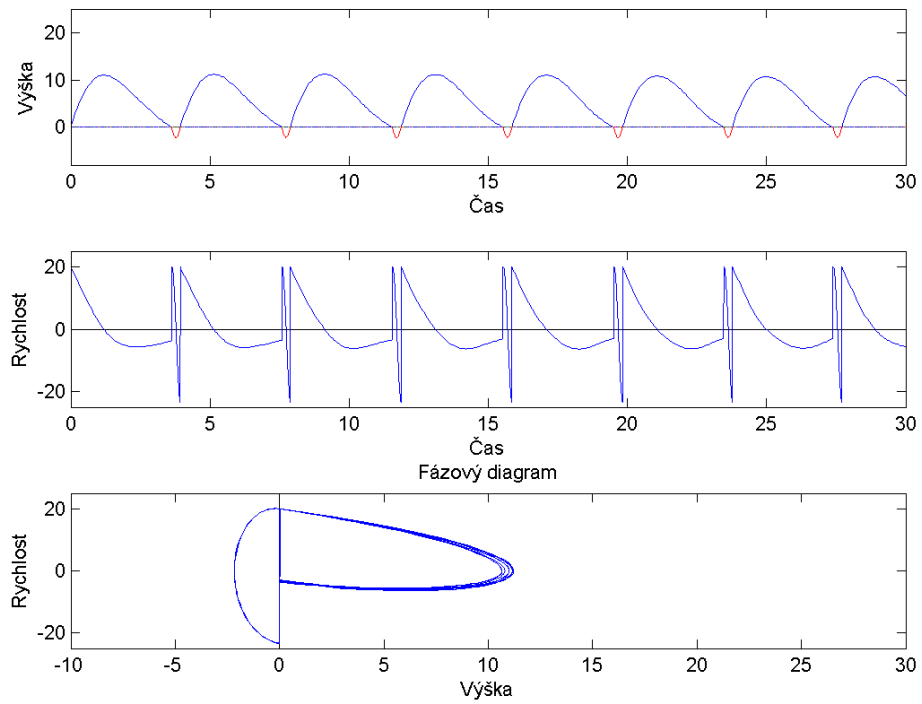
Obrázek 3.1: Řešení pro  $\omega = 3$ ,  $\xi = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 10$



Obrázek 3.2: Řešení pro  $\omega = 3, \xi = 0, k_1 = 1, k_2 = 100$



Obrázek 3.3: Řešení pro  $\omega = 2.76$ ,  $\xi = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 10$



Obrázek 3.4: Řešení pro  $\omega = 3$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 100$

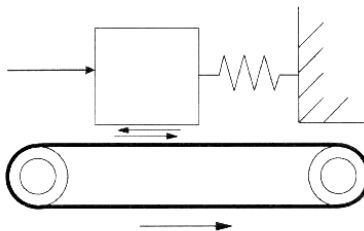


# Kapitola 4

## Příklad III - oscilátor se suchým třením

### 4.1 Úvod do problému

Dalším příkladem, který budeme studovat, je oscilátor se suchým třením. S pojmem tření se často setkáváme v inženýrství. Zde se zaměříme na systém s nuceným kmitáním se suchým třením.



Obrázek 4.1: Oscilátor se suchým třením

Uvažujme kvádr, který se může volně pohybovat ve vodorovném směru a na který je v určitém bodě připevněna pružina o tuhosti  $K$ . Nechť na tento kvádr periodicky působí jistá síla a nechť leží kvádr na hnacím řemenu, který se pohybuje konstantní rychlostí  $V$ . Předpokládejme, že je vzájemné působení kvádrů a pásu dobře aproximováno pomocí pohybového pravidla pro suché tření. Tento případ lze popsat rovnicí:

$$\ddot{u} + u = C(1 - \dot{u}) + A\cos(\nu t), \quad (4.1)$$

kde

$$C(v) = \alpha_0 \operatorname{sgn}(v) - \alpha_1 v + \alpha_2 v^3 \quad (4.2)$$

je pohybová charakteristika tření.

Zde  $v = (1 - \dot{u})$  odpovídá relativní rychlosti mezi hnacím řemenem a pohybujícím se tělesem a  $\alpha_i, i = 0, 1, 2$ , jsou kladné konstanty závislé na charakteristikách materiálů, ze kterých jsou kvádr a řemen vyrobeny. Dalšími dvěma parametry jsou amplituda  $A$  a frekvence periodicky působící síly  $\nu$ .

## 4.2 Numerické experimenty

Pomocí dynamických simulací v prostředí Matlab pozorujeme, jak se mění trajektorie pohybu oscilátoru v závislosti na parametrech. Na obrázcích  $x = \ddot{u}$ ,  $y = \dot{u}$ .

Na obrázku (4.2) vidíme, jak vypadá trajektorie oscilátoru. Pozorujeme, že těleso přechází z jednoho prostředí do druhého, pak zpět do prvního, kde jeho pohyb končí cyklem.

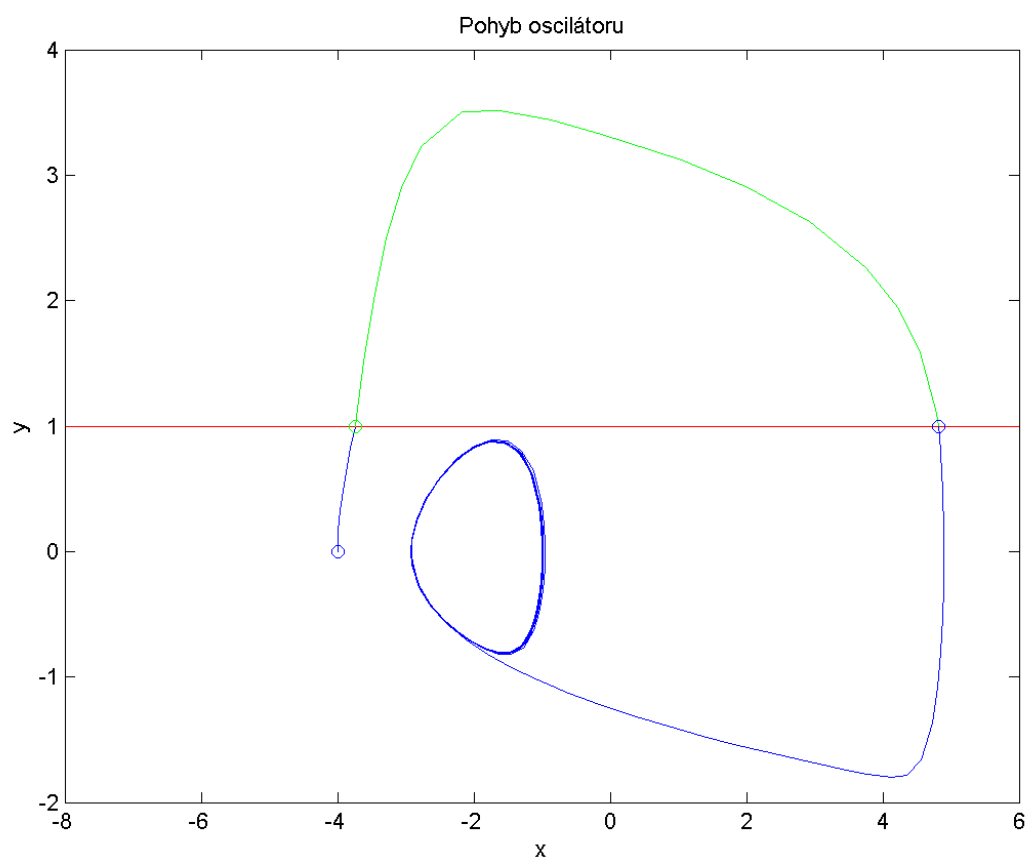
Na obrázku (4.3) můžeme pozorovat, že změnou počáteční podmínky na  $x_0 = [-1, -6]$  se pohyb tělesa příliš nezmění, oscilátor přejde z jednoho prostředí do druhého a poté zpět do prvního, kde opět jeho pohyb končí cyklem.

Na obrázku (4.4) lze pozorovat, že pokud bude za počáteční podmínku brán bod uvnitř cyklu, pak se trajektorie tělesa vůbec nedostane z prvního prostředí do druhého a bude velice rychle končit cyklem.

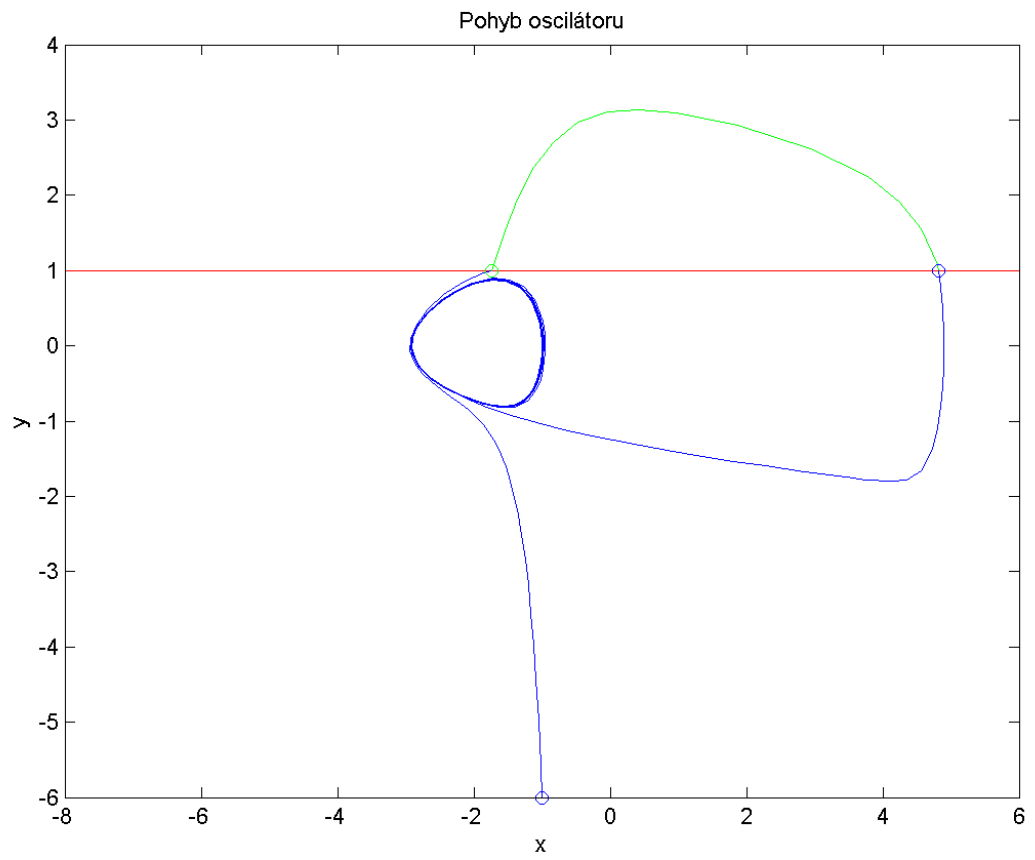
Na obrázku (4.5) můžeme pozorovat, že pokud změním koeficienty  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  na  $\alpha_0 = 0.2, \alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 0.5$ , pak bude trvat delší dobu, než se trajektorie pohybu tělesa ustálí v cyklu.

Na obrázku (4.6) pozorujeme, že pokud bude  $x_0$  přímo ležet na cyklu, kterým trajektorie končí, bude celou trajektorii tvořit právě tento cyklus.

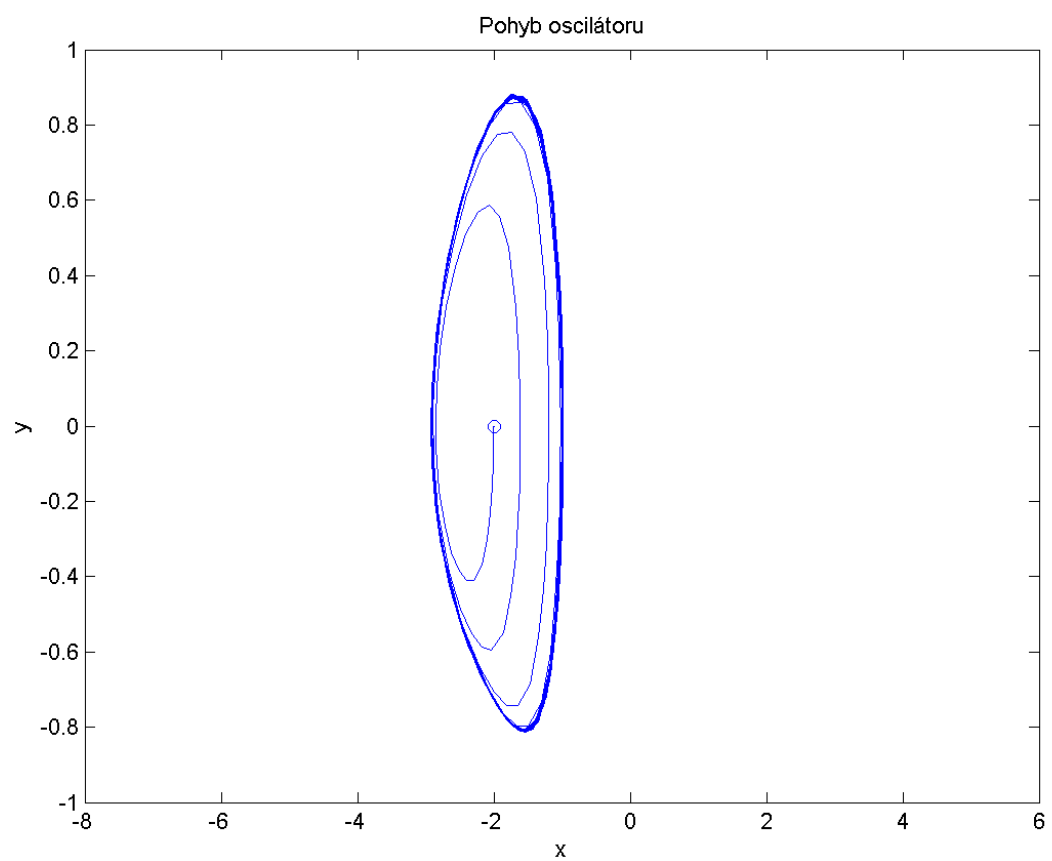
Na obrázku (4.7) vidíme, že pokud bude  $A$  nenulové a pokud začneme v bodě  $x_0 = [-4, 0]$ , tak bude cyklus, kterým trajektorie končí, procházet oběma prostředími.



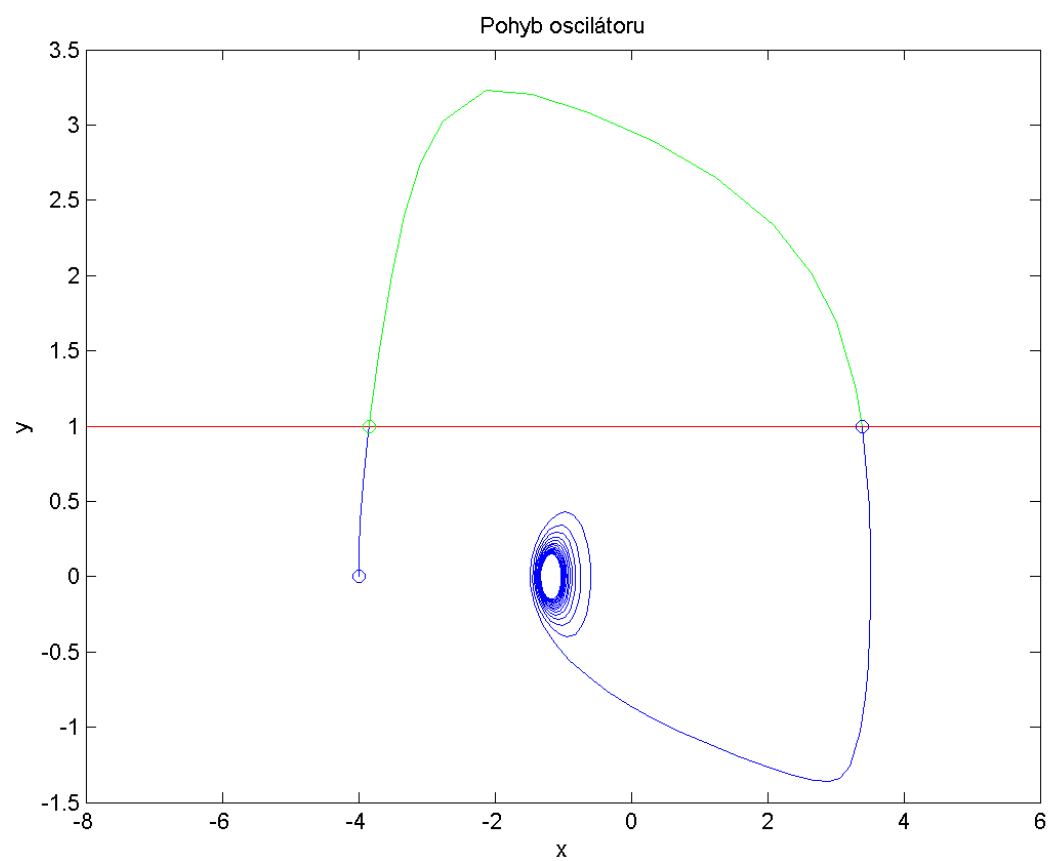
Obrázek 4.2: Řešení pro  $\alpha_0 = 1.5; \alpha_1 = 1.5; \alpha_2 = 0.45; x_0 = [-4, 0]; A = 0; \nu = 1.7$



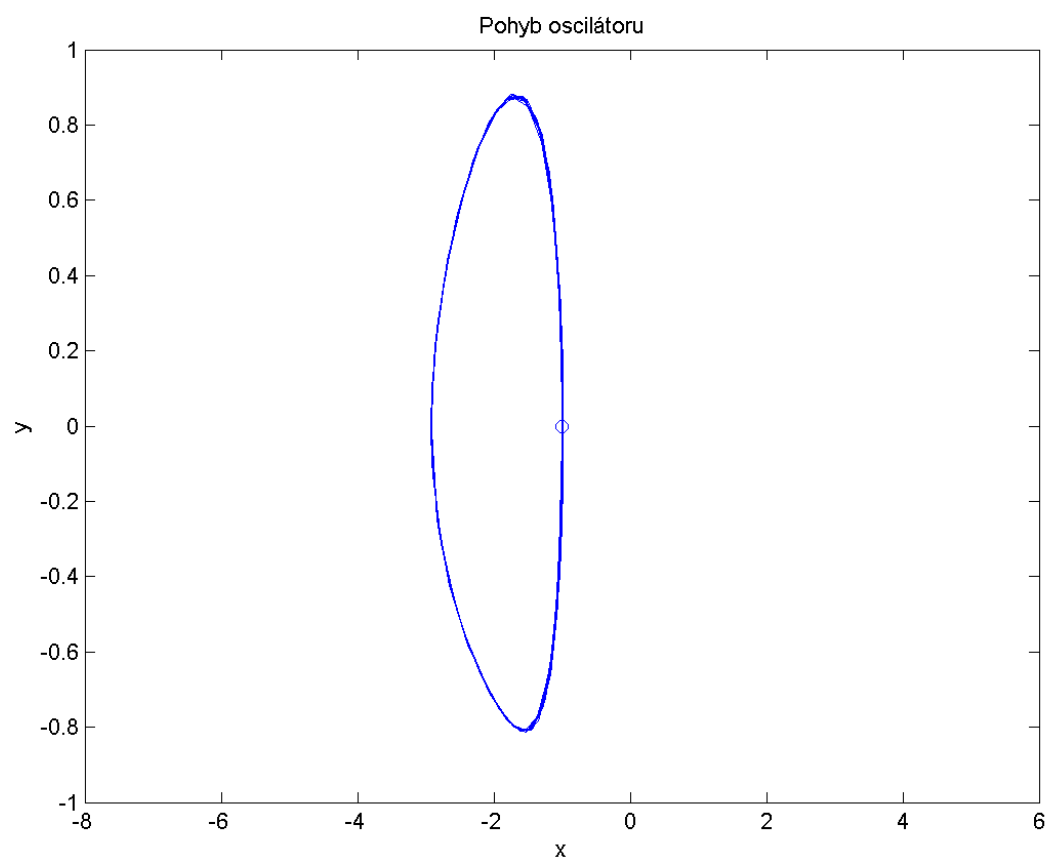
Obrázek 4.3: Řešení pro  $\alpha_0 = 1.5$ ;  $\alpha_1 = 1.5$ ;  $\alpha_2 = 0.45$ ;  $x_0 = [-1, -6]$ ;  $A = 0$ ;  $\nu = 1.7$



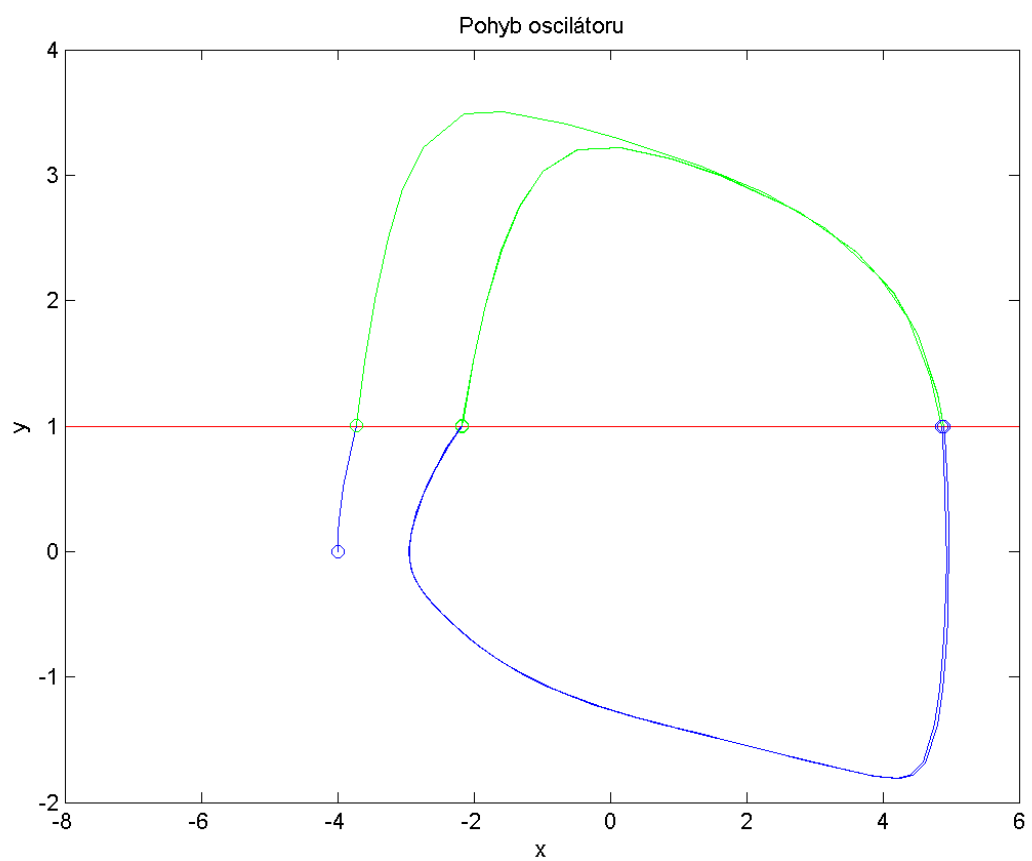
Obrázek 4.4: Řešení pro  $\alpha_0 = 1.5$ ;  $\alpha_1 = 1.5$ ;  $\alpha_2 = 0.45$ ;  $x_0 = [-2, 0]$ ;  $A = 0$ ;  $\nu = 1.7$



Obrázek 4.5: Řešení pro  $\alpha_0 = 0.2$ ;  $\alpha_1 = 1.5$ ;  $\alpha_2 = 0.5$ ;  $x_0 = [-4, 0]$ ;  $A = 0$ ;  $\nu = 1.7$



Obrázek 4.6: Řešení pro  $\alpha_0 = 1.5$ ;  $\alpha_1 = 1.5$ ;  $\alpha_2 = 0.45$ ;  $x_0 = [-1, 0]$ ;  $A = 0$ ;  $\nu = 1.7$



Obrázek 4.7: Řešení pro  $\alpha_0 = 1.5$ ;  $\alpha_1 = 1.5$ ;  $\alpha_2 = 0.45$ ;  $x_0 = [-4, 0]$ ;  $A = 0.1$ ;  $\nu = 1.7$



# Literatura

- [1] Biák M.: *Diplomová práce: Filippovovy dynamické systémy*, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Fakulta chemicko-inženýrská, Ústav matematiky, Praha, (2008) 7–16.
- [2] di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P. : *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications* , Springer, (2008) 1–83.
- [3] TheMathWorks, Inc.: *Matlab*, Version : 7.6.0.324 (R2008a), (2008).