Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Veronika Počerová

Pojištění životního důchodu s plněním v případě smrti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika, finanční matematika

2010

Poděkování:
Chtěla bych tímto poděkovat RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D., vedoucí mé bakalářské práce, za její odborné vedení a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčením práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Veronika Počerová

Obsah

Úvod **5**

Kapitola 1 Základní pojmy **6**

Kapitola 2 Přirozený hedging **11**

2.1 Diverzifikace z hlediska času 11

2.2 Diverzifikace na základě odvětví 15

Kapitola 3 Praktická část **20**

3.1 Diverzifikace z hlediska času 20

3.2 Diverzifikace na základě odvětví 27

Závěr **31**

Literatura **32**

Název práce: Pojištění životního důchodu s plněním v případě smrti

Autor: Veronika Počerová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
e-mail vedoucího: Lucie.Mazurova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Cílem práce je analyzovat riziko dlouhověkosti a možnosti jeho diverzifikace podle zvolených přístupů – z hlediska času a na základě odvětví. Práce zkoumá vliv dvou konkrétních produktů s různým plněním vzhledem k délce života – životního důchodu a životního pojištění s výplatou v případě smrti. Práce obsahuje jak teoretickou, tak praktickou část.

Klíčová slova: riziko dlouhověkosti, životní důchod, pojištění pro případ smrti, diverzifikace rizika

Title: Life annuity with a death benefit

Author: Veronika Počerová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Lucie.Mazurova@mff.cuni.cz

Abstract: The main focus of this thesis is on the hedging with longevity risk. We consider two different approaches – hedging across time and hedging across LOBs. The thesis analyses a diversification strategy combining opposite benefits with respect to the duration of life – life annuity and death benefit. Both the theoretical and also the practical parts are included.

Keywords: Natural hedging, Longevity risk, Life annuity, Death benefit

Úvod

Hlavním cílem práce *Pojištění životního důchodu s plněním v případě smrti* je analyzovat riziko dlouhověkosti a možnosti jeho omezení pomocí přirozeného hedgingu.

Teoretická část je zaměřena na diverzifikaci daného rizika pomocí strategie kombinující dva odlišné produkty s různým plněním vzhledem k délce života – životní důchod a životní pojištění s výplatou v případě smrti. Praktická část práce se věnuje aplikaci postupů na data.

Celá práce vychází převážně z publikace [1]. Stejně jako v [1] definujeme pět různých předpokladů o úmrtnosti pojištěných, které využíváme ve výpočtech. Práce vychází převážně z kapitoly 7 – *The Longevity risk: actuarial perspectives*, především potom z podkapitoly 7.3.2 – *Natural Hedging*. Na rozdíl od [1] počítáme ukazatele vypovídající o diverzifikaci rizika z hlediska času pro všech pět zvolených scénářů. V druhé části práce se zabýváme diverzifikací rizika dlouhověkosti na základě odvětví. Uvažujeme portfolio obsahující jak produkty životního důchodu, tak produkty pojištění pro případ smrti. Pomocí zvolených ukazatelů porovnáváme vliv obou typů diverzifikace na eliminaci rizika. Pro srovnání uvádíme také výsledky pro případ bez zahrnutí pojištění pro případ smrti. V závěru hodnotíme výhody a nevýhody takto definovaných modelů z hlediska pojištěného a pojišťovny.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole jsou shrnuty základní pojmy použité v pozdějším textu. Pozornost je věnována především odvození klíčových veličin a postupů nezbytných pro analýzu rizika dlouhověkosti a jeho eliminace pomocí zvolené metody.

Životní důchod

Tradiční (deterministický) model je založen na předpokladu poskytování doživotního důchodu skupině stejně starých jednotlivců. Označme S částku, která je k dispozici v daném čase $t = 0$ k vytvoření fondu doživotního důchodu jednotlivce (pojištěný) a označme b konstantní anuitu vyplácenou každoročně až do jeho smrti. Počet pojištěných v čase $t = 0$ označme l_x. Symbol l_{x+t} potom označuje počet pojištěných (z původní skupiny l_x), kteří jsou ve věku $x + t$ stále naživu.

Pokud označíme w maximální možný věk jednotlivce, potom t nabývá hodnot $t = 1, 2, \ldots, w - x$.

Nechť $V_t^{(\pi)}$ označuje velikost společného fondu v čase t a $V_t^{(1)}$ označuje velikost fondu jednotlivce. Velikost společného fondu v čase $t = 0$ je potom definována jako

$$V_0^{(\pi)} = l_x \, V_0^{(1)} = l_x \, S. \tag{1.1}$$

Při předpokladu konstantní úrokové míry i a dané posloupnosti $l_x, l_{x+1}, \ldots, l_w$ lze velikost fondu v čase $t = 0$ (současná hodnota budoucích plnění) vyjádřit vztahem

$$l_x \, S = b \sum_{t=1}^{w-x} l_{x+t} \, (1+i)^{-t}, \tag{1.2}$$

kde b je konstantní plnění vyplácené každoročně každému pojištěnci až do jeho smrti.

Z (1.2) lze potom jednoduše odvodit velikost počátečního fondu jednotlivce

$$S = b \sum_{t=1}^{w-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} (1+i)^{-t}. \tag{1.3}$$

Podíl $\frac{l_{x+t}}{l_x}$ lze interpretovat jako pravděpodobnost, že jednotlivec ve věku x bude v čase $x + t$ stále naživu. Označme tuto pravděpodobnost jako ${}_tp_x$. Pokud pracujeme s náhodnou zbývající délkou života jedince ve věku x, T_x, je ${}_hp_x$ definována jako

$$ {}_hp_x = \mathbb{P}[T_x > t] = (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \ldots (1 - q_{x+h-1}), \tag{1.4}$$

kde q_{x+h} označuje pravděpodobnost, že jedinec ve věku $x + h$ zemře během jednoho roku

$$q_{x+h} = \mathbb{P}[T_{x+h} < 1]. \tag{1.5}$$

Počáteční velikost fondu jednotlivce lze potom přepsat jako

$$S = b \sum_{t=1}^{w-x} {}_tp_x \ (1+i)^{-t}. \tag{1.6}$$

Nechť $b = 1$, potom počáteční fond jednotlivce (jednorázové netto pojistné) označíme a_x a vyjadřujeme vztahem

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x} {}_tp_x \ (1+i)^{-t}, \tag{1.7}$$

případně

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x} a_{\overline{t|}} \; {}_t p_x \; q_{x+t} \,, \tag{1.8}$$

kde

$$a_{\overline{t|}} = \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}. \tag{1.9}$$

Základem stochastického modelu je předpoklad, že současná hodnota budoucích plateb pojištěnému ve věku x je také náhodná veličina. Nechť velikost pravidelné anuity b je $b = 1$. Potom označme náhodnou současnou hodnotu takovýchto budoucích plateb Y a definujme ji

$$Y = a_{\overline{K_x|}}, \tag{1.10}$$

kde K_x označuje celou část T_x. Rozdělení K_x lze reprezentovat pomocí posloupnosti pravděpodobností ${}_{0/1}q_x$, ${}_{1/1}q_x$, . . . , ${}_{w/1}q_x$, kde ${}_{h/k}q_x$ je pravděpodobnost, že jedinec ve věku x zemře mezi lety $x + h$ a $x + h + k$.

$${}_{h/k}q_x = \mathbb{P}[h < T_x \leq h + k]. \tag{1.11}$$

Náhodná veličina Y pak může nabývat hodnot:

$$y_0 = a_{\overline{0|}} = 0$$

$$y_1 = a_{\overline{1|}} = (1+i)^{-1}$$

$$\dots = \dots$$

$$y_{w-x} = a_{\overline{w-x|}} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(w-x)}$$

Z čehož snadno dostáváme vztah

$$\mathbb{P}\left[a_{\overline{K_x|}} = y_h\right] = \mathbb{P}[K_x = h]. \tag{1.12}$$

Nechť symbol $Y_t^{(\pi)}$ označuje náhodnou současnou hodnotu budoucích plnění celé skupiny v čase t a $Y_t^{(1)}$ označuje náhodnou současnou hodnotu budoucích plnění jednotlivce. L_{x+t} je náhodná veličina reprezentující počet pojištěných z počáteční skupiny l_x, kteří jsou naživu v čase t. Náhodná současná hodnota budoucích plnění v čase $t = 0$ je potom definována jako

$$Y_0^{(\pi)} = b \sum_{t=1}^{w-x} L_{x+t} \, (1+i)^{-t}. \tag{1.13}$$

Za předpokladu stejného rozdělení dob života pro jednotlivé pojištěnce a počátečního počtu pojištěných l_x lze střední hodnotu L_{x+t} vyjádřit formulí

$$\mathbb{E}[L_{x+t}] = l_x \; {}_t p_x \; . \tag{1.14}$$

Z čehož snadno dostáváme střední hodnotu náhodné veličiny $Y_0^{(\pi)}$,

$$\mathbb{E}[Y_0^{(\pi)}] = b \sum_{t=1}^{w-x} \mathbb{E}[L_{x+t}] \, (1+i)^{-t} = b \, l_x \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x \; (1+i)^{-t} = l_x \; S. \tag{1.15}$$

Střední hodnotu v čase t můžeme vyjádřit např. pomocí (1.7) vztahem

$$\mathbb{E}[Y_t^{(\pi)}] = l_x \; a_{x+t}. \tag{1.16}$$

Stejný vztah pro jednotlivce nazýváme rezervou pojistného

$$\mathbb{E}[Y_t^{(1)}] = a_{x+t}. \tag{1.17}$$

Úmrtnostní tabulky a komutační čísla

Při výpočtech pojistného u životního pojištění využívají pojišťovny tzv. úmrtnostní tabulky, které obsahují:

- Posloupnost $l_0, l_1, \dots, l_x, \dots, l_w$, kde l_x je počet osob ve věku x, které zůstaly naživu z původního souboru l_0 současně narozených jedinců. Do hodnoty l_w se započítávají i jedinci, kteří se dožijí věku většího než w.
- Pravděpodobnost úmrtí ve věku x (q_x). Pravděpodobnost, že jedinec, který je naživu ve věku x zemře před dosažením věku $x + 1$.
- Pravděpodobnost dosažení věku $x + 1$ jedince ve věku x. ($p_x = 1 - q_x$)
- Počet zemřelých ve věku x (d_x).

Z úmrtnostních tabulek se diskontováním určují **komutační čísla**, která se používají při výpočtech životního pojištění. Mezi nejdůležitější patří:

- Diskontovaný počet jedinců dožívajících se věku x:

$$\mathcal{D}_x = l_x \, (1+i)^{-x} \tag{1.16}$$

- Diskontovaný počet zemřelých ve věku x:

$$\mathcal{C}_x = d_x \, (1+i)^{-(x+1)} \tag{1.17}$$

- Komutační čísla vyšších řádů:

$$\mathcal{N}_x = \sum_{y=x}^{w} \mathcal{D}_y \tag{1.18}$$

$$\mathcal{M}_x = \sum_{y=x}^{w} \mathcal{C}_y \tag{1.19}$$

<u>Aplikace komutačních čísel:</u>

Pomocí komutačních čísel (1.16) a (1.18) lze jednorázové netto pojistné ze vztahu (1.8) vyjádřit jako

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x} \frac{\mathcal{D}_{x+t}}{\mathcal{D}_x} = \frac{\mathcal{N}_{x+1}}{\mathcal{D}_x}. \tag{1.20}$$

Kapitola 2

Přirozený hedging

V souvislosti s životním pojištěním se přirozený hedging vztahuje k diverzifikaci rizik plynoucích z nejistého vývoje trendu úmrtnosti. Jeho cílem je tedy sestavení portfolia obsahujího produkty, které reagují protichůdně v závislosti na délce života nebo poskytování jediného produktu, ve kterém jsou oba spojeny.

Tato práce pojednává o kombinaci dvou konkrétních produktů – životního důchodu a životního pojištění s výplatou v případě smrti. Hlavní ideou je jejich opačná reakce na pokles (resp. růst) úmrtnosti (cena životního důchodu roste (resp. klesá), cena plnění v případě smrti klesá (resp. roste)).

V dalším textu se budeme zabývat dvěma případy: *diverzifikace z hlediska času, diverzifikace na základě odvětví*.

2.1 Diverzifikace z hlediska času

Diverzifikace z hlediska času označuje zahrnutí obou typů pojištění – životního důchodu a životního pojištění s výplatou v případě smrti do jediného produktu, ve kterém je tak riziko dlouhověkosti redukováno.

Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se začne vyplácet klasický doživotní důchod pojištěnému ve věku x_0 a bude se vyplácet až do jeho smrti. Na konci roku, ve kterém zemřel, bude navíc obmyšleným vyplaceno pojistné plnění pro případ smrti.

Náhodná současná hodnota budoucích plnění z důchodu a z pojištění pro případ smrti v čase $t = 0$ je vyjádřena vztahem

$$Y_0^{(1)} = b\, a_{\overline{\mathrm{K}_{x_0}}|} + (1+i)^{-(\mathrm{K}_{x_0}+1)}\, C_{\mathrm{K}_{x_0}+1}, \tag{2.1}$$

kde C_t je výše vyplaceného pojistného pro případ smrti v případě, že smrt nastane mezi časem t - 1 a t. Podle definice C_t rozlišujeme v dalším textu dva konkrétně zvolené případy:

1) Plnění pro případ smrti ve výši rezervy pojistného z pojištění důchodu

V tomto případě je C_t definováno následujícím způsobem:

$$C_t = b\, a_{x_0+t} = b \sum_{h=1}^{w-x_0-t} (1+i)^{-h}\ {}_hp_{x_0+t}. \tag{2.2}$$

Výše plnění C_t tedy odpovídá velikosti technické rezervy životního pojištění vytvořené v čase t tak, aby kryla současnou hodnotu budoucích splátek doživotního důchodu.

2) Plnění pro případ smrti ve výši jednorázového pojistného sníženého o dosud vyplacené částky

Předchozí případ je z pohledu pojištěného výhodný hlavně z důvodu relativně vysokého plnění v případě smrti. Na druhou stranu, tento způsob krytí rizika dlouhověkosti je pro pojištěného velmi nákladný, a proto jsou v praxi zvažována i jiná řešení. Velikost pojistné částky pro případ smrti může být alternativně definována např. takto

$$C_t = \max\{ S - (t-1)b, 0 \}. \tag{2.3}$$

V tomto případě je velikost pojistné částky pro případ smrti nižší a tedy i celkové pojistné nebude tak vysoké.

K modelování rizika dlouhověkosti budume přistupovat stejně jako v [1]. Označme $\Gamma(x,t)$ předpokládanou úmrtnost, kde x označuje věk dosažený jedincem v kalendářním roce t. Symbolem $\tau = t - x$ potom značíme jeho rok narození. Předpokládanou úmrtností pro nás může být např. pravděpodobnost úmrtí, q_x, pravděpodobnost přežití, ${}_tp_x$, nebo další charakteristiky. Označme $A_h(\tau)$ daný předpoklad o úmrtnostním trendu pro jedince narozeného v roce τ a $\mathcal{A}(\tau)$ soubor různých úmrtnostních předpokladů. Předpokládaná úmrtnost $\Gamma(x, \tau + x | A_h(\tau))$ je potom podmíněná zvoleným předpokladem $A_h(\tau)$. Při daném pravděpodobnostním rozdělení $\mathcal{A}(\tau)$ můžeme riziko dlouhověkosti explicitně vyjádřit pomocí zahrnutí všech úmrtnostních předpokladů a odpovídající váhové struktury (nepodmíněný případ). Tedy soubor $\mathcal{A}(\tau) = \{A_1(\tau), \ldots, A_n(\tau)\}$ vážíme vahami $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, které odpovídají pravděpodobnostnímu rozdělení $\mathcal{A}(\tau)$ při platnosti $\sum_{i=1}^{n} \varrho_i = 1$. Zahrnutím alternativních úmrtnostních scénářů, které jsou konstruované na základě různých parametrů předpokládaného modelu zkoumáme paramerické riziko. Pokud jsou alternativní scénáře dané pomocí úmrtnostních předpovědí získaných na základě různých postupů, zahrnujeme také riziko modelu. Riziko dlouhověkosti, kterým se v této práci zabýváme, je pak speciálním případem rizika nejistoty, které zahrnuje jak parametrické riziko, tak riziko modelu.

- **Podmíněný případ**

Střední hodnotu současné hodnoty budoucích plateb vyjádřenou v čase t se zahrnutím pojištění pro případ smrti (tedy velikost rezervy jednotlivce pokrývající obě složky pojištění) lze odvodit jako

$$\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} | \, A_h(\tau)\right] = b \sum_{h=1}^{w-x_0-t} {}_{h/1}q_{x_0+t} \, \left(a_{\overline{h}|} + \frac{C_{t+h+1}}{(1+i)^{(h+1)}}\right), \tag{2.4}$$

kde $A_h(\tau)$ značí zvolený předpoklad úmrtnosti.

Střední hodnotu budoucích plnění celé skupiny v čase t můžeme pak vyjádřit vztahem

$$\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} | \, A_h(\tau), n_t\right] = n_t \, \mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} | \, A_h(\tau)\right], \tag{2.5}$$

kde n_t je realizace náhodné veličiny N_t, která vyjadřuje náhodný počet pojištěných, kteří jsou v čase t stále naživu. Střední hodnotu N_t lze vyjádřit podobně jako v (1.14) formulí

$$\mathbb{E}[\, N_t \,] = n_0 \;\, {}_t p_x \,, \tag{2.6}$$

kde n_0 je počet pojištěných ve skupině v čase $t = 0$ a ${}_t p_x$ je počítáno podle daného úmrtnostního předpokladu $A_h(\tau)$.

Rozptyl současné hodnoty budoucích plnění jednotlivce lze vyjádřit jako

$$\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right] = \mathbb{E}\left[Y_t^{(1)2} \mid A_h(\tau)\right] - \left(\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right]\right)^2. \tag{2.7}$$

Za předpokladu nezávislosti délky života jednotlivých pojištěných pak můžeme vyjádřit rozptyl plnění celé skupiny vztahem

$$\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(\pi)} \mid A_h(\tau), n_t\right] = n_t \, \mathbb{V}ar\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right]. \tag{2.8}$$

Z těchto hodnot je potom možné spočítat rizikový index (variační koeficient) definovaný jako

$$\mathbb{C}V\left[Y_t^{(\pi)} \mid A_h(\tau), n_t\right] = \frac{1}{\sqrt{n_t}} \frac{\sqrt{\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right]}}{\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right]}. \tag{2.9}$$

- **Nepodmíněný případ**

V tomto případě do výpočtu zahrnujeme všechny úmrtnostní předpoklady $A_1(\tau), \ldots,$ $A_n(\tau)$, které vážíme vahami $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ tak, že $\sum_{i=1}^{n} \varrho_i = 1$.

Střední hodnotu současné hodnoty budoucích plateb vyjádřenou v čase t se zahrnutím pojištění pro případ smrti (tedy velikost rezervy jednotlivce pokrývající obě složky pojištění) lze potom vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} \mid n_t\right] &= \mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} \mid A(\tau), n_t\right]\right] = n_t \, \mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A(\tau)\right]\right] = \\ &= n_t \sum_{h=1}^{m} \mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right] \rho_h = n_t \, \mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right],\end{aligned} \tag{2.10}$$

kde $\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right] = \sum_{h=1}^{m} \mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right] \rho_h$.

Nepodmíněný rozptyl (za předpokladu nezávislosti délek života) lze potom počítat jako

$$\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(\pi)} \mid n_t\right] = \mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(\pi)} \mid A(\tau), n_t\right]\right] + \mathbb{V}ar_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} \mid A(\tau), n_t\right]\right] =$$

$$= n_t\, \mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(1)} \mid A(\tau)\right]\right] + n_t^2\, \mathbb{V}ar_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A(\tau)\right]\right] =$$

$$= n_t \sum_{h=1}^{m} \mathbb{V}ar\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right] \rho_h + n_t^2 \sum_{h=1}^{m} \left(\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A_h(\tau)\right] - \mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right]\right)^2 \rho_h\,, \tag{2.11}$$

kde první sčítanec reprezentuje odchylky kolem očekávaných hodnot a druhý zachycuje odchylku od očekávané hodnoty (tzv. systematickou odchylku, v našem případě např. riziko dlouhověkosti).

Stejně jako v podmíněném případě můžeme vyjádřit i rizikový index (variační koeficient)

$$\mathbb{C}V\left[Y_t^{(\pi)} \mid n_t\right] = \frac{\sqrt{\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(\pi)}\right]}}{\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n_t}\,\frac{\mathbb{E}_\rho\left[\mathbb{V}ar\left[Y_t^{(1)} \mid A(\tau)\right]\right]}{\mathbb{E}^2\left[Y_t^{(1)}\right]} + \frac{\mathbb{V}ar_\rho\left[\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} \mid A(\tau)\right]\right]}{\mathbb{E}^2\left[Y_t^{(1)}\right]}}, \tag{2.13}$$

kde první část výrazu pod odmocninou odpovídá náhodným fluktuacím – riziko, jehož efekt je absorbován velikostí portfolia. Druhá část výrazu reprezentuje riziko systematických odchylek, které není ovlivněno velikostí portfolia.

2.2 Diverzifikace na základě odvětví

Diverzifikace na základě odvětví označuje případ, kdy jsou kombinovány produkty reagující odlišně na změnu úmrtnostních trendů. V jednom portfoliu jsou tak zastoupeny jak produkty životního důchodu, tak pojištění pro případ smrti zahrnující různé skupiny pojištěných různého věku.

Tento způsob diverzifikace nemůže být nikdy tak účinný jako diverzifikace z hlediska času. Jeho výhodou jsou však podstatně nižší náklady, které nese pojištěný. Zejména v případě velkých pojišťoven může být i tento způsob účinným prostředkem redukce rizika dlouhověkosti.

Uvažujme, že pojišťovna poskytuje jak životní důchod, tak pojištění pro případ smrti. **Životní důchod** je poskytován skupině stejně starých jedinců ve věku x^D. Počáteční velikost skupiny označme n_0^D a roční splátku b. Maximální uvažovaný věk dožití stanovme jako w^D. Současná hodnota budoucích plnění v čase t je potom definována vztahem

$$Y_t^{D(\pi)} = b \sum_{h=1}^{w^D - x^D - t} N_{x^D+t+h} \, (1+i)^{-h}. \tag{2.14}$$

Střední hodnota N_{x^D+t} se počítá stejně jako v (1.14)

$$\mathbb{E}\left[N_{x^D+t}\right] = n_0^D \; {}_t p_{x^D}. \tag{2.15}$$

Současnou hodnotu budoucích plnění pro jednoho pojištěného vyjadřujeme vztahem

$$Y_t^{(1)} = b \, a_{\overline{K_{x^D+t}}|}. \tag{2.16}$$

Pojištění pro případ smrti je poskytováno jiné skupině stejně starých jedinců ve věku x^S. Počáteční velikost skupiny je n_0^S a pojistné plnění v případě smrti (vyplácené na konci roku úmrtí) označme C. Pojištění pro případ smrti je shora omezeno věkovým limitem w^S. Současnou hodnotu budoucích plnění v čase t potom definujeme vztahem

$$Y_t^{S(\pi)} = C \sum_{h=1}^{w^S - x^S - t} D_{x^S+t+h-1} \, (1+i)^{-h}, \tag{2.17}$$

kde $D_{x^S+t+h-1}$ je počet zemřelých ve věku mezi $x^S + t + h - 1$ a $x^S + t + h$.

Střední hodnota D_{x^S+t} se počítá jako

$$\mathbb{E}\left[D_{x^S+t}\right] = n_0^S \ {}_{t-1/1}q_{x^S}.$$

(2.18)

Současná hodnota budoucích plnění jednoho pojištěného je potom definována vztahem

$$Y_t^{S(1)} = C\,(1+i)^{-(K_{x^S+t}+1)}.$$

(2.19)

Máme tedy dvě nezávislá portfolia s počátečními rozsahy n_0^D v případě životního důchodu a n_0^S v případě pojištění pro případ smrti. Pro zkoumání vlivu rizika budoucího vývoje úmrtnosti můžeme využít např. několika různých úmrtnostních předpokladů, z nichž zvolíme jeden jako optimální (přepoklad, který podle nás nejlépe vystihuje budoucí vývoj úmrtnosti), označme ho $A_H(\tau)$, a alespoň dva takové, aby jeden předpokládal nižší úmrtnost než $A_H(\tau)$ a druhý vyšší úmrtnost než $A_H(\tau)$ v jakémkoliv čase t (alternativní úmrtnostní scénáře). Podle zvolených předpokladů spočítáme velikost fondu Z_t (pro různé úmrtnostní předpoklady a pro každý typ pojištění zvlášť), který pojišťovna drží v čase t a vyplácí z něj pojistná plnění

$$Z_t = (1+i)Z_{t-1} - B_t^{(\pi)},$$

(2.20)

kde $B_t^{(\pi)}$ je velikost vyplaceného pojistného plnění v čase t, Z_{t-1} je velikost fondu v čase t – 1 a i je předpokládaná úroková míra (Předpokládejme, že úroková míra se v čase nemění.). Střední velikost fondu potom spočítáme jako

$$\mathbb{E}[\,Z_t\,|A_h(\tau)] = (1+i)\mathbb{E}[\,Z_{t-1}|A_h(\tau)] - \mathbb{E}\left[\,B_t^{(\pi)}\middle|A_h(\tau)\right],$$

(2.21)

kde $\mathbb{E}[\,Z_0\,|A_h(\tau)] = \mathbb{E}\,[\,Y_0^{(\pi)}, A_H(\tau)\,]$ je počítané na základě vybraného úmrtnostního předpokladu $A_H(\tau)$, který považujeme za nejvhodnější pro modelování budoucí úmrtnosti a na základě kterého určíme i počáteční jednorázové netto pojistné.

Velikost $\mathbb{E}[\,B_t^{(\pi)}|A_h(\tau)]$ počítáme podle typu pojištění a pro všechny tři zvolené úmrtnostní scénáře zvlášť – v případě životního důchodu podle vztahu

$$\mathbb{E}\left[\,B_t^{D(\pi)}|A_h(\tau)\right] = b\ \mathbb{E}\left[N_{x^D+t}|\ A_h(\tau)\right] \tag{2.22}$$

a v případě pojištění pro případ smrti podle

$$\mathbb{E}\left[\,B_t^{S(\pi)}|A_h(\tau)\right] = C\ \mathbb{E}\left[D_{x^S+t}|\ A_h(\tau)\right]. \tag{2.23}$$

Střední hodnotu Z_t podmíněnou úmrtnostním scénářem $A_h(\tau)$ porovnáme v čase *t* se střední hodnotou rezervy pojistného $V_t^{(\pi)}$ pro skupinu pojištěných, která má v čase *t* velikost N_{x+t}. Střední hodnotu N_{x+t} budeme počítat pro každý ze zvolených úmrtnostních scénářů. Střední hodnotu $V_t^{(\pi)}$ tedy dostaneme jako

$$\mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)}|A_h(\tau)] = \mathbb{E}[N_{x+t}|A_h(\tau)]\ V_t^{(1)}, \tag{2.24}$$

kde výše rezervy pojistného pro jednotlivce $V_t^{(1)} = \mathbb{E}\,[Y_t^{(1)}|\ A_H(\tau)\,]$ je počítaná podle zvoleného optimálního předpokladu $A_H(\tau)$.

Rozdíl $\mathbb{E}[\,Z_t\,|A_h(\tau)]] - \mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)}|A_h(\tau)]]$ potom vyjadřuje přebytek prostředků, které má pojišťovna v čase *t* na krytí svých reálných závazků.

Rozdíl $\mathbb{E}[\,Z_t\,|A_h(\tau)]] - \mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)}|A_h(\tau)]]$ se bude pro zvolené alternativní úmrnostní scénáře a pro různý typ pojištění vyvíjet opačně. Tedy pokud použijeme alternativní úmrtnostní scénář, který předpokládá nižší úmrtnost než $A_h(\tau)$, bude rozdíl $\mathbb{E}[\,Z_t\,] - \mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)}]$ pro životní důchod záporný a pro pojištění pro případ smrti kladný. Pokud použijeme alternativní úmrtnostní předpoklad, který předpokládá vyšší úmrtnost než $A_h(\tau)$, bude rozdíl $\mathbb{E}[\,Z_t\,] - \mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)}]$ pro životní důchod kladný a pro pojištění pro případ smrti záporný. Na základě těchto hodnot optimalizujeme portfolio tak, aby součet rozdílů v časech *t*: $\mathbb{E}[\,Z_t^D\,] - \mathbb{E}\,[V_t^{D(\pi)}] + \mathbb{E}[\,Z_t^S\,] - \mathbb{E}\,[V_t^{S(\pi)}]$ byl co nejmenší pro jakékoliv *t*. Společné portfolio obsahující oba produkty – životní důchod a pojištění pro případ smrti by tak mělo být chráněné před rizikem změny očekávané střední délky života.

Kapitola 3

Praktická část

Praktická část se věnuje aplikaci postupů vyložených v Kapitole 2. Předpokládejme, že máme pět různých úmrtnostních předpokladů definovaných na základě Heligman-Pollardova zákona pomocí parametrů zaznamenaných v tabulce 3.1. Na základě těchto parametrů lze vyjádřit $q_x(\tau)$ a další charakteristiky:

$$q_x(\tau) = \frac{G(\tau)(K(\tau))^x}{1 + G(\tau)(K(\tau))^x} \tag{3.1}$$

$$_t p_x = (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \dots (1 - q_{x+t-1}) \tag{3.2}$$

$$_{t/1}q_x = {}_t p_x \; q_x(\tau) \tag{3.3}$$

Tabulka 3.1 - Parametry Helligman-Pollardova zákona

	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
$G(\tau)$	6,378E-07	0,000003803	0,000002005	0,00000106	0,000003149
$K(\tau)$	1,14992	1,12347	1,13025	1,13705	1,11962
$E[T_{65} \mid A_h(\tau)]$	20,17	20,743	21,849	22,887	24,187
$\sqrt{Var\,[T_{65} \mid A_h(\tau)]}$	7,796	8,78	8,707	8,602	9,91

3.1 Diverzifikace z hlediska času

Předpokládejme vstupní věk x_0 = 65, maximální uvažovaný věk w = 117 a úrokovu míru i = 0,03 p.a.. Výše ročního důchodu b, který je vyplácen každoročně po dobu, kterou je pojištěný naživu, je b = 1.

1) Plnění pro případ smrti ve výši rezervy pojistného z pojištění důchodu

- **Podmíněný případ**

Střední počet jedinců z počáteční skupiny, kteří jsou naživu v čase t, je počítán pro každý předpoklad $A_h(\tau)$ jako $\mathbb{E}\,[\,N_t\,] = n_0\ {}_tp_x$.

Střední hodnota budoucích plateb pro jednoho pojištěného $\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} |\, A_h(\tau)\right]$ počítaná podle (2.4) v časech 0, 5, 10, 15, 20, 25 a 30 je zachycena v tabulce 3.2. Střední hodnota pro celou skupinu $\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} |\, A_h(\tau), n_t\right]$, kde n_t uvažujeme jako $n_t = \mathbb{E}\,[\,N_t\,]$, je počítaná podle (2.5) a je zachycena v tabulce 3.3.

Tabulka 3.2 - Podmíněná střední hodnota budoucích plateb jednotlivce

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	17,58828	18,18533	18,63002	19,0234	19,864
5	15,2466	15,99882	16,46181	16,87742	17,86693
10	12,69842	13,63942	14,09623	14,51357	15,6691
15	10,04242	11,18515	11,60291	11,99206	13,31532
20	7,445437	8,756207	9,100043	9,426535	10,88843
25	5,11827	6,500752	6,745166	6,980876	8,509034
30	3,24597	4,559885	4,699751	4,83555	6,318683

Tabulka 3.3 - Podmíněná střední hodnota budoucích plateb pro celou skupinu, $n_0 = 100$

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	1758,828	1818,533	1863,002	1902,34	1986,4
5	1468,405	1526,692	1586,33	1638,958	1732,442
10	1134,285	1197,285	1268,958	1333,185	1439,294
15	771,9227	846,3978	921,904	991,6385	1112,445
20	425,0662	509,5815	575,7119	639,5376	770,8519
25	163,524	238,7288	282,5489	327,3127	451,7885
30	34,37851	75,56646	94,37762	114,8868	204,4233

Pokud bychom porovnali jednorázové netto pojistné $S = \mathbb{E}\left[Y_0^{(1)} |\, A_h(\tau)\right]$ pro případ, kdy je vyplácen pouze životní důchod a pro případ, kdy započítáme plnění v případě smrti (plnění v případě smrti podle (2.2)), zjistíme, že zahrnutí plnění v případě smrti bude stát pojištěného v průměru o 21,823% víc. Hodnoty jednorázového netto pojistného pro životní důchod se stejnými parametry jako bylo počítáno $\mathbb{E}\left[Y_0^{(1)} |\, A_h(\tau)\right]$ v tabulce 3.2 jsou zachyceny v tabulce 3.4.

Tabulka 3.4 - Jednorázové netto pojistné v případě životního důchodu bez plnění v případě smrti

	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
S	14,46208	14,65107	15,26040	15,81761	16,41263

Pokud porovnáváme rizikový index např. pro $n_0 = 100$, zjistíme, že redukce rizika je v případě zahrnutí plnění v případě smrti výrazná (stejně tak tomu je při různých volbách n_0). Rizikový index pro životní důchod se zahrnutím plnění v případě smrti, který je počítán podle (2.9), je zaznamenán v tabulce 3.5 a rizikový index pouze pro životní důchod je pro porovnání v tabulce 3.6.

Tabulka 3.5 - Rizikový index pro případ se zahrnutím plnění v případě smrti, $n_0 = 100$

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	1,125%	1,213%	1,116%	1,032%	1,043%
5	1,451%	1,532%	1,411%	1,306%	1,299%
10	1,917%	1,972%	1,817%	1,682%	1,639%
15	2,636%	2,617%	2,406%	2,225%	2,112%
20	3,893%	3,662%	3,345%	3,078%	2,811%
25	6,595%	5,625%	5,073%	4,620%	3,957%
30	14,489%	10,164%	8,994%	8,057%	6,143%

Tabulka 3.6 - Rizikový index pro případ samotného životního důchodu, $n_0 = 100$

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	3,156%	3,433%	3,197%	2,982%	3,066%
5	3,877%	4,125%	3,851%	3,604%	3,644%
10	4,848%	5,037%	4,703%	4,407%	4,374%
15	6,285%	6,337%	5,896%	5,514%	5,346%
20	8,755%	8,418%	7,763%	7,212%	6,752%
25	14,056%	12,321%	11,186%	10,256%	9,038%
30	29,487%	21,335%	18,950%	17,039%	13,396%

- **Nepodmíněný případ**

Pro výpočet v nepodmíněném případě uvažujme stejné parametry jako v případě podmíněném. Váhy $\varrho_1, \ldots, \varrho_5$ stanovme při splnění předpokladu $\sum_{i=1}^{5} \varrho_i = 1$ např. podle tabulky 3.7.

Výše plnění v případě smrti C_t, které je použité ve vzorci pro plnění v případě smrti (2.2), je počítána na základě zvoleného předpokladu $A_3(\tau)$, podle kterého bylo určeno i počáteční jednorázové netto pojistné. Scénář $A_3(\tau)$ tedy bude sloužit jako podklad prvního řádu, pojistné tak můžeme určit z tabulky 3.3.

Tabulka 3.7 - Váhy pro výpočet nepodmíněného případu

	Váha ϱ_h
$A_1(\tau)$	0,1
$A_2(\tau)$	0,1
$A_3(\tau)$	0,6
$A_4(\tau)$	0,1
$A_5(\tau)$	0,1

Střední hodnota budoucích plateb pro jednoho pojištěného $\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right]$ v časech 0, 5, 10, 15, 20, 25 a 30 a střední hodnota pro celou skupinu $\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} | \ n_t\right]$ počítaná podle (2.10) jsou zachyceny v tabulce 3.8.

Tabulka 3.8 - Nepodmíněný případ, střední hodnoty budoucích plnění skupiny a jednotlivce

t	$\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} | \ n_t\right]$	$\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right]$
0	1864,801	18,64801
5	1588,735	16,48075
10	1271,715	14,11532
15	924,4769	11,62129
20	577,5901	9,117217
25	283,965	6,761248
30	96,07828	4,715207

Pokud porovnáváme rizikový index, zjistíme, že zahrnutí plnění v případě smrti (CV počítáme podle (2.13)) snižuje riziko dlouhověkosti, které nese pojišťovna. V tabulce 3.9 jsou zachyceny hodnoty pro $n_0 = 100$.

Tabulka 3.9 - Rizikové indexy pro nepodmíněný případ, $n_0 = 100$

t	CV se zahrnutím plnění v případě smrti podle (2.2)	CV pro obyčejný životní důchod
0	3,121%	4,626%
5	4,012%	5,789%
10	5,235%	7,350%
15	6,919%	9,474%
20	9,229%	12,427%
25	12,406%	16,798%
30	17,141%	24,611%

2) Plnění pro případ smrti ve výši jednorázového pojistného sníženého o dosud vyplacené částky

- **Podmíněný případ**

Střední počet jedinců z počáteční skupiny, kteří jsou naživu v čase t, je počítán pro každý předpoklad $\mathrm{A_h}(\tau)$ jako $\mathbb{E}\left[N_t \right] = n_0 \; {}_t p_x$.

Střední hodnota budoucích plateb pro jednoho pojištěného $\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)} | \, A_h(\tau)\right]$ počítaná podle (2.4) v časech 0, 5, 10, 15, 20, 25 a 30 je zachycena v tabulce 3.10. Střední hodnota pro celou skupinu $\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} | \, A_h(\tau), n_t\right]$, kde n_t uvažujeme jako $n_t = \mathbb{E}\left[N_t \right]$, je počítaná podle (2.5) a je zachycena v tabulce 3.11.

Tabulka 3.10 - Podmíněná střední hodnota budoucích plateb jednotlivce

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	15,46639	15,8312	16,32545	16,7723	17,44484
5	12,71818	13,17544	13,71793	14,21265	15,00077
10	9,79639	10,39541	10,94142	11,44878	12,37023
15	7,102155	7,861954	8,304502	8,73816	9,770231
20	4,962091	5,8459	6,168672	6,485143	7,569845
25	3,221307	4,127476	4,336654	4,543837	5,625536
30	1,943737	2,76589	2,877664	2,988491	3,979559

Tabulka 3.11 - Podmíněná střední hodnota budoucích plateb pro celou skupinu, $n_0 = 100$

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	1546,639	1583,12	1632,545	1677,23	1744,484
5	1224,892	1257,27	1321,918	1380,183	1454,529
10	875,062	912,5216	984,959	1051,661	1136,275
15	545,9156	594,9265	659,8307	722,5697	816,2666
20	283,2899	340,2115	390,2594	439,9806	535,9112
25	102,9178	151,5744	181,6585	213,0471	298,6887
30	20,58638	45,83636	57,78755	71,00296	128,7475

Pokud bychom porovnali jednorázové netto pojistné $S = \mathbb{E}\left[Y_0^{(1)} | A_h(\tau)\right]$ pro případ, kdy je vyplácen pouze životní důchod a pro případ započítání plnění v případě smrti (plnění v případě smrti definované podle (2.3)), zjistíme, že zahrnutí plnění v případě smrti bude stát pojištěného v průměru o 6,861% víc.

Pokud porovnáváme případy, kdy je plnění v případě smrti počítáno podle (2.2) a podle (2.3), potom můžeme pozorovat výrazný rozdíl v nárůstu netto pojistného. Pro případ (2.3) je nárůst o 14,962% nižší a tedy z hlediska pojištěného je tato varianta levnější.

Pokud porovnáváme rizikový index stejně jako v předchozím případě pro $n_0 = 100$, zjistíme, že redukce rizika je i v tomto případě se zahrnutím plnění v případě smrti výrazná (stejně tak tomu je při různých volbách n_0). Rizikový index pro životní důchod se zahrnutím plnění v případě smrti, který je počítán podle (2.9), je zaznamenán v tabulce 3.12.

Tabulka 3.12 - Rizikový index pro případ se zahrnutím plnění v případě smrti, $n_0 = 100$

t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	1,881%	2,007%	1,909%	1,821%	1,863%
5	2,722%	2,889%	2,704%	2,544%	2,568%
10	4,171%	4,341%	3,998%	3,709%	3,658%
15	6,285%	6,337%	5,868%	5,442%	5,222%
20	8,755%	8,418%	7,763%	7,212%	6,752%
25	14,056%	12,321%	11,186%	10,256%	9,038%
30	29,487%	21,335%	18,950%	17,039%	13,396%

- **Nepodmíněný případ**

Pro výpočet v nepodmíněném případě uvažujme stejné parametry jako v případě podmíněném. Váhy $\varrho_1, \ldots, \varrho_5$ stanovme při splnění předpokladu $\sum_{i=1}^{5} \varrho_i = 1$ stejně jako v předchozím případě podle tabulky 3.7.

Jednorázové netto pojistné životního důchodu S bez zahrnutí pojištění pro případ smrti, které je použité ve vzorci pro plnění v případě smrti (2.3) je počítáno na základě zvoleného předpokladu $A_3(\tau)$. Střední hodnota budoucích plateb pro jednoho pojištěného $\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right]$ v časech 0, 5, 10, 15, 20, 25 a 30 a střední hodnota pro celou skupinu $\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} \mid n_t\right]$ počítaná podle (2.10) jsou potom zachyceny v tabulce 3.13.

Tabulka 3.13 - Nepodmíněný případ, střední hodnoty budoucích plnění skupiny a jednotlivce

t	$\mathbb{E}\left[Y_t^{(\pi)} \mid n_t\right]$	$\mathbb{E}\left[Y_t^{(1)}\right]$
0	1634,826	16,34826
5	1324,806	13,74288
10	988,0112	10,96637
15	662,3736	8,326476
20	391,988	6,187501
25	182,8552	4,353808
30	58,97636	2,894366

Pokud porovnáváme rizikové indexy, zjistíme, že zahrnutí plnění v případě smrti (CV počítáme podle (2.13)) snižuje riziko dlouhověkosti, které nese pojišťovna. V tomto případě si můžeme povšimnout, že od určitého času je rizikový index stejný jako rizikový index pro obyčejný životní důchod, což je dáno definicí C_t podle (2.3). Pokud porovnáváme rizikové indexy pro dva různé způsoby výpočtu plnění v případě smrti (2.2) a (2.3), potom v prvním případě je pokles rizika větší. V tabulce 3.14 jsou zachyceny hodnoty pro $n_0 = 100$.

Tabulka 3.14 - Rizikové indexy pro nepodmíněný případ, $n_0 = 100$

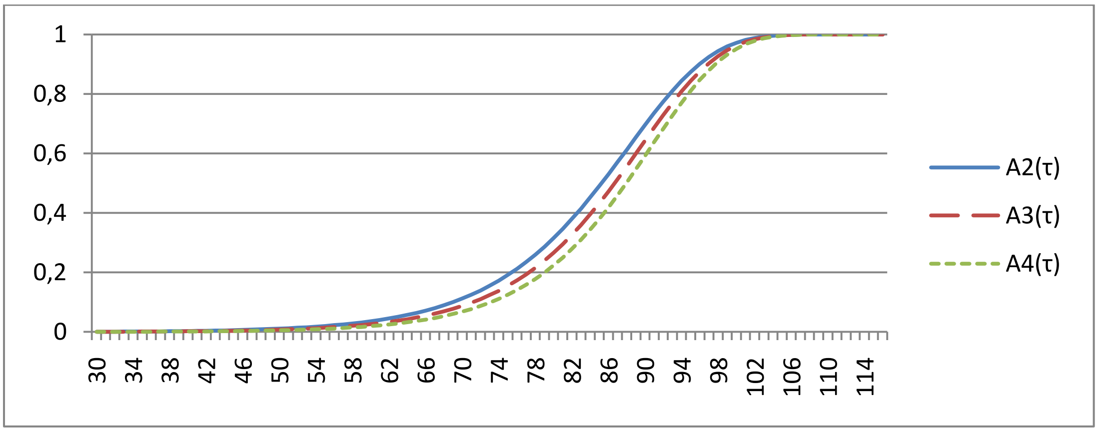
t	CV se zahrnutím plnění v případě smrti podle (2.2)	CV se zahrnutím plnění v případě smrti podle (2.3)	CV pro obyčejný životní důchod
0	3,122%	3,566%	4,626%
5	4,013%	4,907%	5,789%
10	5,237%	6,948%	7,350%
15	6,923%	9,557%	9,474%
20	9,234%	12,427%	12,427%
25	12,412%	16,798%	16,798%
30	17,138%	24,611%	24,611%

3.2 Diverzifikace na základě odvětví

Stejně jako v případě diverzifikace z hlediska času uvažujme vstupní věk pro životní důchod x^D = 65 a maximální uvažovaný věk *w* = 117. Vstupní věk pro pojištění pro případ smrti uvažujme x^S = 30 a horní hranici pro plnění w^S = 65. Úroková míra nechť je stejně jako v předchozím případě *i* = 0,03 p.a.. Výše ročního důchodu *b*, který je vyplácen každoročně po dobu, kterou je pojištěný naživu v případě životního důchodu, je *b* = 1. Velikost plnění pro případ smrti *C* stanovme na *C* = 25. Počáteční velikosti skupin pojištěnců n_0^D a n_0^S stanovíme na základě optimalizace portfolia.

Jako optimální úmrtnostní předpoklad volíme $A_3(\tau)$ a jako alternativní předpoklady uvažujeme $A_2(\tau)$ a $A_4(\tau)$.

Graf 3.1 - Porovnání úmrtnostních předpokladů na základě distribuční funkce K_x



Střední současná hodnota budoucích plnění pro jednoho pojištěného v čase *t* je v případě životního pojištění zachycena v tabulce 3.15 a v případě pojištění pro případ smrti v tabulce 3.16.

Tabulka 3.15 - Střední současná hodnota budoucích plnění jednotlivce v případě životního důchodu, b = 1

t	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	14,6511	15,2604	15,8176
5	12,3740	12,9576	13,5008
10	10,0760	10,6004	11,0975
15	7,8620	8,2957	8,7145
20	5,8459	6,1687	6,4851
25	4,1275	4,3367	4,5438
30	2,7659	2,8777	2,9885

Tabulka 3.16 - Střední současná hodnota budoucích plnění jednotlivce v případě pojištění pro případ smrti, C = 25

t	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	0,6480	0,4787	0,3545
5	0,7307	0,5417	0,4024
10	0,8105	0,6037	0,4503
15	0,8744	0,6552	0,4914
20	0,8972	0,6772	0,5115
25	0,8316	0,6332	0,4825
30	0,5887	0,4528	0,3486

Pro optimalizaci portfolia budeme potřebovat také hodnoty středního počtu zemřelých, které jsou zachyceny v tabulce 3.17. (Hodnoty n_0^D a n_0^S jsou už zpětně dosazené z optimalizace portfolia.)

Tabulka 3.17 - Střední počet zemřelých D_{t-1} v čase t - 1

	vek	D(t-1)-doz.duch.			vek	D(t-1)-smrt		
t		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
		n_0^D=100	n_0^D=100	n_0^D=100		n_0^S=750	n_0^S=750	n_0^S=750
0	65	0	0	0	30	0	0	0
5	70	1,1182	0,9017	0,7267	35	0,1493	0,0966	0,0626
10	75	1,8411	1,5537	1,3065	40	0,2668	0,1780	0,1189
15	80	2,8406	2,5294	2,2354	45	0,4762	0,3277	0,2258
20	85	3,9101	3,7148	3,4858	50	0,8485	0,6025	0,4282
25	90	4,4161	4,5368	4,5787	55	1,5062	1,1047	0,8104
30	95	3,5668	4,0116	4,4097	60	2,6565	2,0155	1,5278

A střední hodnoty počtu lidí, kteří jsou v čase *t* naživu. (Tabulka 3.18)

Tabulka 3.18 - Střední počet lidí, kteří jsou naživu v čase t

	vek	Nt-zivorni duchod			vek	Nt-smrt		
		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	65	100	100	100	30	750	750	750
5	70	95,4253	96,3643	97,1095	35	749,4005	749,6162	749,7538
10	75	87,7812	90,0211	95,3675	40	748,3288	748,9089	749,2860
15	80	75,6716	79,4546	82,6913	45	746,4147	747,6061	748,3979
20	85	58,1966	63,2647	67,8444	50	743,0017	745,2094	746,7129
25	90	36,7233	41,8891	60,1069	55	736,9342	740,8102	743,5215
30	95	16,5720	20,0814	23,7588	60	726,2051	732,7680	737,4957

Z těchto hodnot spočítáme střední hodnoty $\mathbb{E}[\,Z_t \mid A_h(\tau)]$ a $\mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)} \mid A_h(\tau)]$ a jejich rozdíl pro životní důchod i pojištění pro případ smrti. Hodnoty $\mathbb{E}[\,Z_t \mid A_h(\tau)]$ jsou zachyceny v tabulce 3.19, hodnoty $\mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)} \mid A_h(\tau)]$ v tabulce 3.20 a jejich rozdíl v tabulce 3.21.

Tabulka 3.19 - Střední hodnota Z_t

	vek	Zt-zivorni duchod			vek	Zt-smrt		
		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	65	1526,0401	1526,0401	1526,0401	30	359,0218	359,0218	359,0218
5	70	1251,4276	1248,6474	1246,4565	35	400,3992	406,0899	409,7175
10	75	966,3749	954,2554	944,5071	40	435,9169	452,1276	462,6515
15	80	689,8575	659,1331	633,8001	45	454,8809	489,8037	512,9401
20	85	450,2626	390,2595	339,3415	50	437,3452	504,6497	550,2445
25	90	279,1537	181,6585	96,3788	55	347,0220	469,0766	553,7990
30	95	193,7357	57,7876	-64,2475	60	119,3765	331,8082	483,2346

Tabulka 3.20 - Střední hodnota $V_t^{(\pi)}$, $V_t^{(1)}$počítáno na základě předpokladu $A_3(\tau)$

	vek	Vt-zivotni duchod			vek	Vt-smrt		
		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	65	1526,040	1526,040	1526,040	30	359,022	359,022	359,022
5	70	1236,480	1248,647	1258,303	35	405,973	406,090	406,165
10	75	930,512	954,255	1010,928	40	451,777	452,128	452,355
15	80	627,750	659,133	685,984	45	489,023	489,804	490,322
20	85	358,995	390,259	418,510	50	503,154	504,645	505,668
25	90	159,256	181,658	260,663	55	466,622	469,077	470,794
30	95	47,689	57,787	68,369	60	328,836	331,808	333,949

Tabulka 3.21 – Rozdíl $\mathbb{E}[\, Z_t \mid A_h(\tau)] - \mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)} \mid A_h(\tau)]$

	vek	zivotni duchod			vek	smrt		
		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$		$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	65	0	0	0	30	0	0	0
5	70	14,9474	0	-11,8471	35	-5,5739	0	3,5531
10	75	35,8631	0	-66,4215	40	-15,8605	0	10,2963
15	80	62,1072	0	-52,1837	45	-34,1422	0	22,6177
20	85	91,2669	0	-79,1683	50	-65,8095	0	44,5767
25	90	119,8976	0	-164,2839	55	-119,6003	0	83,0056
30	95	146,0471	0	-132,6174	60	-209,4599	0	149,2857

Jak je vidět z tabulky 3.22, pokud je rozdíl $\mathbb{E}[\, Z_t \mid A_h(\tau)] - \mathbb{E}\,[V_t^{(\pi)} \mid A_h(\tau)]$ pro životní důchod kladný, pro pojištění pro případ smrti je záporný. Riziko společného portfolia je tak chráněno před změnami očekávaných středních délek života. K ideálnímu omezení rizika dospějeme pomocí optimalizace portfolia, najdeme n_0^D a n_0^S tak, aby rozdíl $\mathbb{E}[\, Z_t^D \mid A_h(\tau)\,] - \mathbb{E}\,[V_t^{D(\pi)} \mid A_h(\tau)] + \mathbb{E}[\, Z_t^S \mid A_h(\tau)] - \mathbb{E}\,[V_t^{S(\pi)} \mid A_h(\tau)]$ byl co nejmenší pro každý čas *t* (uvažujeme časy 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30).

Pomocí funkce Minimize v Mathematice jsme dospěli k hodnotám $n_0^D = 100$ a $n_0^S = 750$. Tedy pro zvolené úmrtnostní předpoklady $A_2(\tau)$, $A_3(\tau)$, $A_4(\tau)$ je ideální velikost skupiny pro životní důchod 100 jedinců a pro pojištění pro případ smrti s předpokladem $C = 25$ je ideální velikost počáteční skupiny asi 750 jedinců.

Vybalancování rizika dlouhověkosti je pro tento případ zachyceno v tabulce 3.23.

Tabulka 3.22 - Vybalancování rizika ve společném portfoliu,

$$\mathbb{E}[\, Z_t^D \mid A_h(\tau)\,] - \mathbb{E}\,[V_t^{D(\pi)} \mid A_h(\tau)] + \mathbb{E}[\, Z_t^S \mid A_h(\tau)] - \mathbb{E}\,[V_t^{S(\pi)} \mid A_h(\tau)]$$

t	portfolio		
	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$
0	0	0	0
5	9,3736	0	-8,2940
10	20,0027	0	-56,1252
15	27,9650	0	-29,5660
20	25,4573	0	-34,5916
25	0,2973	0	-81,2783
30	-63,4128	0	16,6683

Závěr

V práci jsme analyzovali riziko dlouhověkosti a snažili se ho diverzifikovat na základě dvou zvolených přístupů – z hlediska času a na základě odvětví.

Diverzifikace z hlediska času, která kombinuje životní důchod a pojištění pro případ smrti v jediném produktu, se ukázala pro pojišťovnu jako více efektivní. Z pohledu pojištěného je však relativně nákladná. Zkoumali jsme dva konkrétní případy, které se lišily volbou předpisu pro plnění v případě smrti. V prvním z nich bylo plnění definováno ve výši pojistného z pojištění důchodu, v tom druhém ve výši jednorázového pojistného sníženého o dosud vyplacené částky.

V případě diverzifikace na základě odvětví jsme analyzovali portfolio obsahující jak produkty životního důchodu, tak produkty pojištění pro případ smrti. Na základě optimalizace portfolia jsme demonstrovali, že i tento způsob diverzifikace může být účinný.

Literatura

[1] E.Pitacco, M.Denuit, S.Haberman, A.Olivieri: Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business. Oxford University Press, 2009.

[2] Gerber, Hans U.: Life Insurance mathematics. Springer-Verlag, 1990.