

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ružena Nistorová

Řízení finančních rizik

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Finanční matematika

2010

Moja vďaka patrí Doc. RNDr. Janovi Hurtovi CSc. za odborné vedenie, cenné rady a podnety v priebehu písania tejto práce.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 26.5.2010

Ružena Nistorová

Obsah

1	Typy rizika vo finančníctve	5
2	Miery rizika	6
2.1	Smerodajná odchýlka	6
2.2	Hodnota v riziku	6
2.3	Podmienená hodnota v riziku	8
2.4	Parametrické metódy	9
2.5	Neparametrické metódy	18
2.6	Príklad	21
3	Riziko portfólia	25
3.1	Príklad	27
4	Rozhodovanie za neistoty	29
4.1	Optimistický prístup - princíp maximaxu	30
4.2	Pesimistický prístup - Waldov princíp maximinu	30
4.3	Hurwiczovo pravidlo	30
4.4	Laplaceovo pravidlo	31
4.5	Savageovo pravidlo	31
	Literatúra	32

Názov práce: Řízení finančních rizik

Autor: Ružena Nistorová

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

e-mail vedúceho: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme finančné riziká. Klasifikujeme riziká podľa zdroja neistoty na kreditné, tržné a riziko likvidity. Pomocou hodnoty v riziku a podmienenej hodnoty v riziku určujeme mieru rizika pre rôzne rozdelenia strát. Porovnáваме výsledky získané parametrickou a neparametrickou metódou. Skúmané postupy aplikujeme na reálnych dátach spoločnosti IBM. Pojednávame o probléme riadenia portfólia. Pomocou údajov z Newyorskej burzy sme zostavili optimálne portfólio tvorené akciami piatich spoločností. Riziko a výnos takto vytvoreného portfólia porovnáваме s rizikom a výnosom jednej spoločnosti. V poslednej časti sa zaoberáme pravidlami rozhodovania za neistoty.

Kľúčové slová: hodnota v riziku, podmienená hodnota v riziku, rozdelenie strát, portfólio

Title: Financial Risks Control

Author: Ružena Nistorová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study financial risks. We classify risks as per sources of the underlying uncertainty on credit, market, and liquidity risk. By Value at Risk and Conditional Value at Risk we assign the measure of risk for different loss distribution. We compare results of parametric and nonparametric methods. We apply these methods to real data of IBM Company. We discuss the control of portfolio. By help the New York stock date exchange we try to construct on optimal portfolio created by stocks of five companies. We compare risk and yield of all portfolios with risk and yield of one company. In the last part we study decision making under uncertainty.

Keywords: Value at Risk, Conditional Value at Risk, loss distribution, portfolio

Kapitola 1

Typy rizika vo finančníctve

Každé riziko je v skutočnosti pravdepodobnosť, že nastanú nepriaznivé podmienky, alebo dôjde k neželanej udalosti. Riziká spojené s finančnými aktivitami nazývame finančné riziká. Pod týmto pojmom sa rozumie pravdepodobnosť, že skutočný výnos bude menší než ten predpovedaný. Znalosť veľkosti finančného rizika je pre každého investora veľmi dôležitá, hlavne pri zvažovaní budúcich rozhodnutí. V závislosti na výške rizika sa investori rozhodujú, aké množstvo svojich voľných finančných prostriedkov investujú do danej komodity. Pri rozhodovaní to však nie je len riziko, ktoré ovplyvňuje, kedy a kam vložíme naše peniaze, veľkú úlohu zohráva aj možný zisk a samotná povaha investora. Rizikovo averzní investori preferujú čo najnižšie riziko, aj za cenu nižšieho zisku, zatiaľ čo tí odvážnejší sú pri vidine vyššieho zisku ochotní podstúpiť riziko, že stratia časť investovaných finančných prostriedkov.

Podľa toho, čo stojí za poklesom výnosu, rozdeľujeme finančné rizika na riziko kreditné, tržné a riziko likvidity.

Kreditné riziko, nazývané tiež aj úverovým rizikom, je riziko straty spôsobenej z neschopnosti, alebo neochoty zmluvnej strany splácať svoje záväzky. Môžeme povedať, že je to potencionálna strata zo zlyhania, preto sa v anglickej literatúre často označuje termínom "default risk". O tomto druhu rizika podrobne pojednáva [1].

Tržné riziko je riziko straty, ktorú zapríčini zmeny cien, kurzov a sadzieb na finančných trhoch a ich dopadu na zisk. Jedná sa o súhrnný pojem pre akciové, menové, úrokové, komoditné riziko a iné riziká spojené s pohybom tržných cien.

Riziko likvidity znázorňuje pravdepodobnosť situácie, v ktorej dlžník stratí schopnosť v dobe splatnosti splácať svoje záväzky. Toto riziko sa dá ovplyvniť rôznymi načasovaniami peňažných tokov.

Kapitola 2

Miery rizika

2.1 Smerodajná odchýlka

Smerodajná odchýlka je miera, akou je skupina dát rozptýlená od svojej strednej hodnoty a určí sa ako druhá odmocnina z rozptylu.

V oblasti financií sa smerodajná odchýlka aplikuje na jednoročnú úrokovú mieru z investície a meria jej volatilitu. Často je známa aj ako historická volatilita a používajú ju investori k určeniu miery očakávanej volatility. Pomocou smerodajnej odchýlky môžeme jednoducho zmerať finančné riziká pri danom rozdelení strát L

$$\sigma = \sqrt{\text{var}L}. \quad (2.1)$$

Jednou z nevýhod smerodajnej odchýlky je, že meria globálnu volatilitu ako výnosu, tak aj straty. Pre investorov je najpríjemnejšie, ak sa ich maximálna možná strata pohybuje v ľavom chvoste celkového rozdelenia strát, obr. 2.1, zatiaľ čo ten pravý je pre nich viac než nežiadúci. Tieto pozorovania viedli k zavedeniu nového spôsobu merania rizika, ktorý poznáme zo štatistiky pod pojmom kvantil a v finančnej literatúre je označovaný ako hodnota v riziku, viz napr. [3].

2.2 Hodnota v riziku

Hodnota v riziku (VaR) sa často používa na odhadovanie strát. Táto metóda je založená na štatistickej analýze, historických cenových trendoch a volatilitate. VaR slúži k meraniu rizika a zohráva veľkú úlohu v obchodovaní na burze. Tento ukazovateľ zahrnuje všetky druhy tržných rizík a odhaduje maximálnu stratu spôsobenú nepriaznivými zmenami tržných sadzieb.

Nech F je distribučná funkcia a f hustota náhodnej veličiny L znázorňujúcej stratu, potom definujeme kvantilovú funkciu nasledovne:

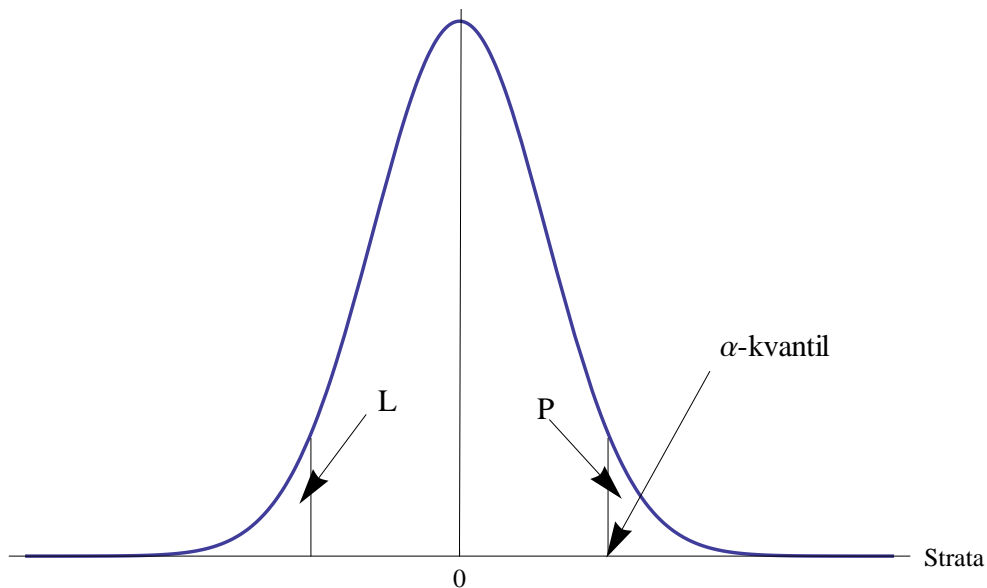
$$F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) \geq y\}, \quad 0 < y < 1. \quad (2.2)$$

Ak je distribučná funkcia na nosiči daného rozdelenia rastúca, kvantilovú funkciu $F^{-1}(y)$ pre $0 < y < 1$ určíme jednoducho ako funkciu inverznú k distribučnej funkcii F .

Zavedieme si veličinu $\text{VaR}_\alpha(L)$ (Hodnota v riziku na hladine spoľahlivosti α)

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \text{VaR}_\alpha = F^{-1}(\alpha). \quad (2.3)$$

Je to vlastne α -kvantil náhodnej veličiny L , znázornený na obrázku 2.1. Táto hodnota udáva, aká je maximálna možná strata pri danej hladine spoľahlivosti. Pravdepodobnosť, že skutočná strata bude vyššia než VaR_α je $1 - \alpha$. V praxi sa najčastejšie za α dosadzuje 0.99, 0.95, alebo 0.9. Táto metóda je dnes najpoužívanejším spôsobom určenia miery tržného rizika.



Obr. 2.1: Rozdelenie strát: L - ľavý chvost, P - pravý chvost

Koherentná miera rizika je reálna funkcia r na priestore náhodných veličín P . Pre $X, Y \in P$ a $a \in \mathbb{R}$ platí:

1. $X \leq Y$ skoro iste $r(X) \leq r(Y)$ (monotónnosť)
2. $r(X + Y) \leq r(X) + r(Y)$ (subaditivita)
3. $r(aX) = ar(X)$ (pozitívna homogenita)
4. $r(a + X) = a + r(X)$ (equivariancia)

VaR_α všeobecne nespĺňa 2. podmienku a dokonca nehovorí ani o tom, aké veľké straty môže táto hodnota nadobúdať.

2.3 Podmienená hodnota v riziku

Lepšia miera rizika, ktorá je i koherentnou mierou je podmienená hodnota v riziku, nazývaná aj očakávaná extrémna strata, alebo CVaR_α . Tá slúži ako rozšírenie hodnoty v riziku. VaR_α umožňuje obmedziť pravdepodobnosť straty spôsobenej nejakým rizikom, no nezahrňuje všetky riziká. Podmienená hodnota v riziku na hladine α je definovaná ako

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \text{CVaR}_\alpha = \text{E}\{L|L \geq \text{VaR}_\alpha(L)\}. \quad (2.4)$$

Výhodou CVaR_α je, že určuje priemernú stratu, ktorá môže nastať po prekročení hodnoty VaR_α .

Predpokladajme, že náhodná veličina X má distribučnú funkciu G a hustotu g . V teórii istoty a životného poistenia sa často využíva funkcia nazývaná stredná zvyšková doba životnosti, viz napr. [3]:

$$m(x) = \text{E}(X - x|X \geq x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Ak X nadobúda len kladné hodnoty spočítame ju ako

$$m(x) = \frac{1}{1 - G(x)} \int_x^\infty [1 - G(y)] dy. \quad (2.6)$$

Pre ľubovoľné X máme

$$m(x) = \frac{1}{1 - G(x)} \int_x^\infty yg(y)dy - x. \quad (2.7)$$

Stredná zvyšková doba životnosti charakterizuje rozdelenie náhodnej veličiny X (tzv. intenzita porúch)

$$h(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)}. \quad (2.8)$$

Zo vzťahu 2.7 môžeme vyjadriť $h(x)$ pomocou strednej zvyškovej doby životnosti $m(x)$

$$h(x) = \frac{\frac{dm(x)}{dx} + 1}{m(x)}. \quad (2.9)$$

Člen $1 - G(x)$ môžeme vyjadriť ako

$$1 - G(x) = \exp\left\{-\int_0^x h(y)dy\right\}. \quad (2.10)$$

Očakávaná stredná hodnota je niekedy definovaná ako

$$ES_\alpha(L) = E(L - \text{VaR}_\alpha | L \geq \text{VaR}_\alpha) = m(\text{VaR}_\alpha). \quad (2.11)$$

Podmienenú strednú hodnotu určíme vzťahom

$$E(L | L \geq z) = \frac{1}{1 - F(z)} \int_z^\infty yf(y)dy. \quad (2.12)$$

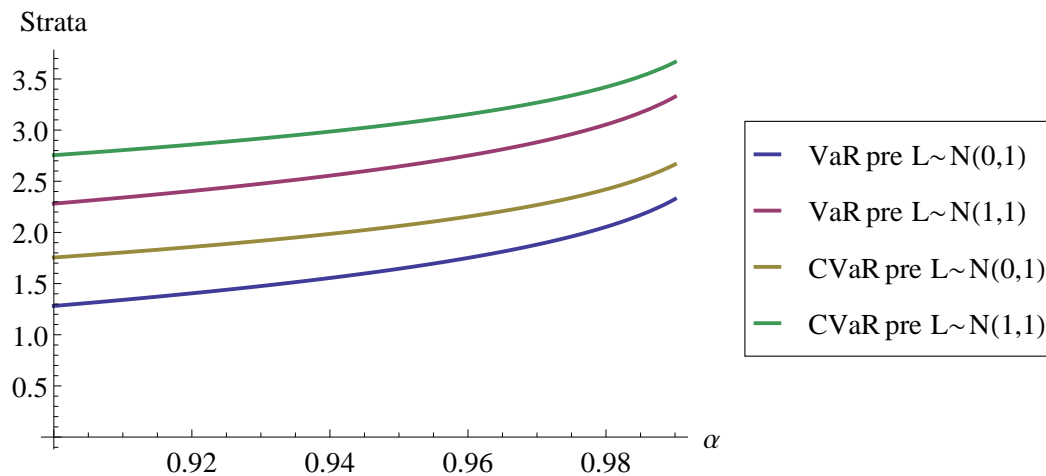
2.4 Parametrické metódy

Veľkosť rizika závisí na náhodnej veličine L , ktorá znázorňuje veľkosť straty. Preto nie je prekvapivé, že rozdelenie strát L zohráva dôležitú rolu v riadení rizika. Princíp parametrických metód spočíva v znalosti rozdelenia náhodnej veličiny L i jeho parametrov. Vytvoríme grafy strát VaR_α a CVaR_α v závislosti na hladine α pre rôzne rozdelenia strát a porovnáme ich. Straty VaR_α a CVaR_α počítame pomocou vzorcov 2.3 a 2.4.

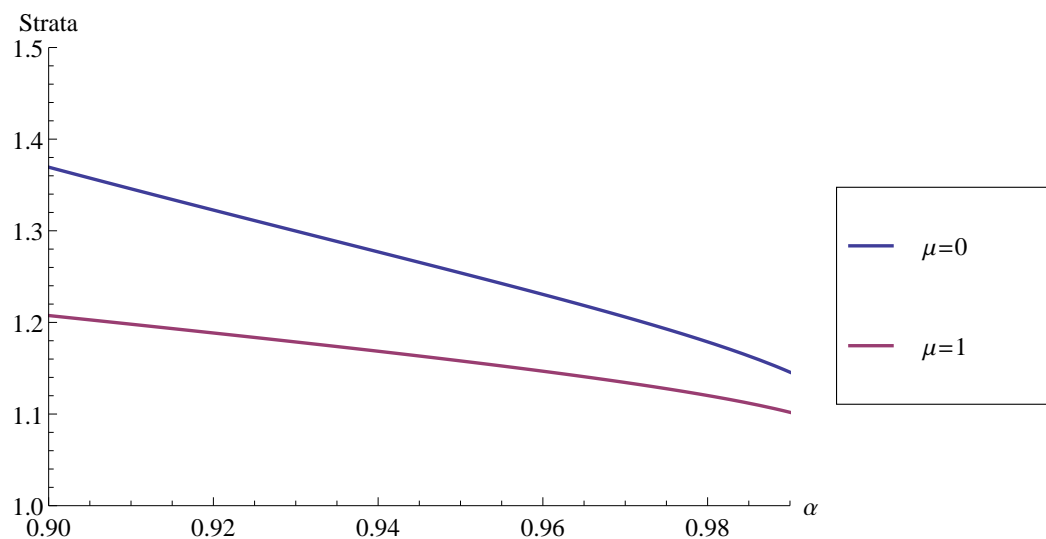
Normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$ je definované hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.13)$$

ktorá má dva parametre: stredná hodnota μ a rozptyl σ^2 , pričom $\sigma^2 > 0$.



Obr. 2.2: VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre normálne rozdelenie strát



Obr. 2.3: $CVaR_\alpha/VaR_\alpha$ pre normálne rozdelenie strát

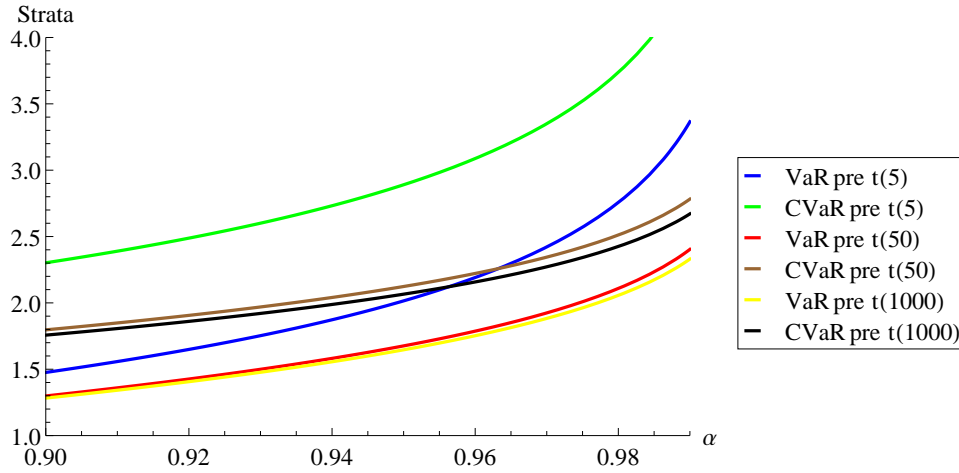
Na obrázku 2.2 porovnávame dva prípady, v ktorých má strata L normálne rozdelenie. V prvom uvažujeme $L \sim N(0, 1)$ a v druhom $L \sim N(1, 1)$. Pre rozdelenie strát L so strednou hodnotou $\mu = 0$ je hodnota v riziku a podmienená hodnota v riziku menšia, než v druhom prípade so strednou hodnotou $\mu = 1$. To sa dalo očakávať, pretože ak je stredná hodnota straty vyššia, bude vyššia aj

predpovedaná strata.

Ak v oboch skúmaných prípadoch urobíme podiel $\text{CVaR}_\alpha/\text{VaR}_\alpha$ (obrázok 2.3), zistíme, že hodnoty CVaR_α a VaR_α sa od seba menej líšia pri vyššej strednej hodnote μ .

Uvažujme dve nezávislé náhodné veličiny $U \sim N(0, 1)$ a Z s rozdelením χ^2 s n stupňami voľnosti ($\chi^2(n)$ vznikne ako súčet druhých mocnín n nezávislých náhodných veličín s normovaným normálnym rozdelením). Potom definujeme veličinu $t = \frac{U}{\sqrt{Z/n}}$, ktorá má Studentovo rozdelenie $t(n)$ s n stupňami voľnosti. Studentovo rozdelenie $t(n)$ je pre $x \in \mathbb{R}$ charakterizované hustotou

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (2.14)$$

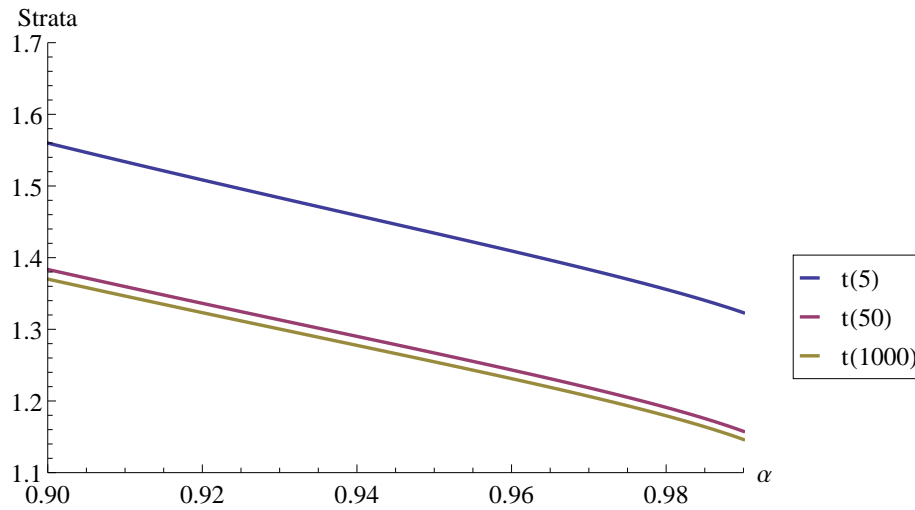


Obr. 2.4: CVaR_α a VaR_α pre straty rozdelené podľa Studentovho rozdelenia

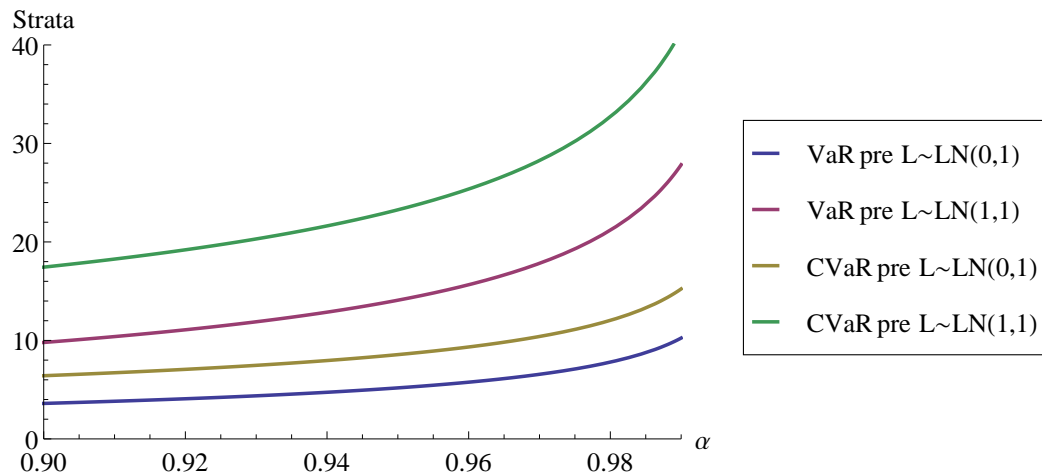
Na obrázku 2.4 si môžeme všimnúť, že pre Studentovo rozdelenie strát s piatimi stupňami voľnosti, sú hodnoty VaR_α a CVaR_α pomerne vysoké. No pri zvýšení stupňov voľnosti z 50 na 1000 sa predpovedané straty znížili len o malú, na grafe takmer nepozorovateľnú hodnotu. Podobne podiel $\text{CVaR}_\alpha/\text{VaR}_\alpha$ pre vysoké n nezávisí na počte stupňov voľnosti (obr. 2.5).

Hustota logaritmickeo-normálneho rozdelenia $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ je daná vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} & \text{pre } x \geq 0 \\ 0 & \text{pre } x < 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

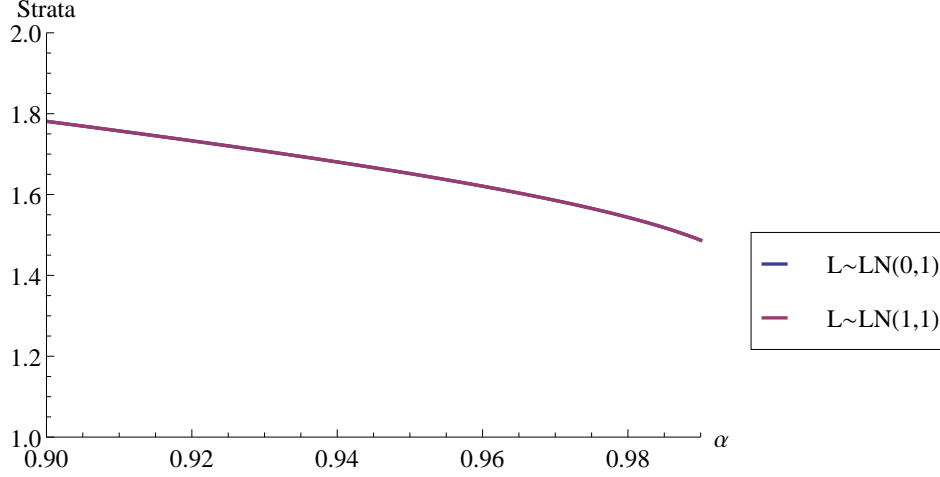


Obr. 2.5: $CVaR_\alpha/VaR_\alpha$ pre Studentovo rozdelenie strát



Obr. 2.6: VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre logaritmicko-normálne rozdelenie strát

Pre veličinu $L \sim LN(\mu, \sigma^2)$ platí, že ak $X = \ln L$, tak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. To vysvetľuje, prečo sú hodnoty VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre logaritmicko-normálne rozdelenie strát väčšie, ako pre normálne rozdelenie celkovej straty. Rovnako ako u normálneho rozdelenia sú na obrázku 2.6 s väčšou očakávanou stratou μ vyššie hodnoty v riziku.



Obr. 2.7: $CVaR_\alpha/VaR_\alpha$ pre logaritmicke-normálne rozdelenie strát

Zaujímavé je, že grafy podielov $CVaR_\alpha/VaR_\alpha$ na obrázku 2.7 sa pri rôznych hodnotách parametru μ od seba vôbec nelíšia.

Hustota Cauchyho rozdelenia je daná vzťahom

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2} \right]. \quad (2.16)$$

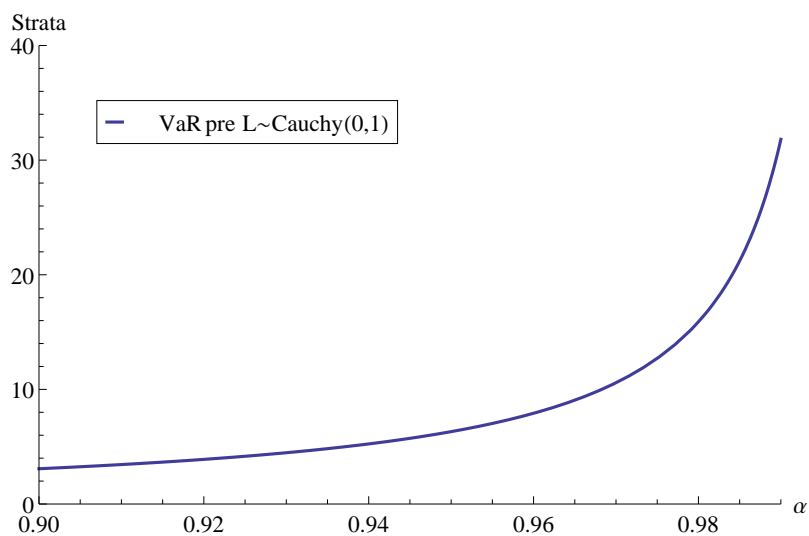
Prvý parameter x_0 určuje umiestnenie maxima a druhý γ šírku rozdelenia.

Dosadením hustoty 2.16 do vzťahu 2.12 zistíme, že nemôžeme spočítať podmienenú strednú hodnotu. Dôvodom je pomalé klesanie hustoty 2.16 pre $x \rightarrow \infty$ ($\sim 1/x^2$). Preto nevieme určiť $CVaR_\alpha$ danú rovnicou 2.4 a musíme sa obmedziť na odhad strát pomocou VaR_α , ako na obrázku 2.8.

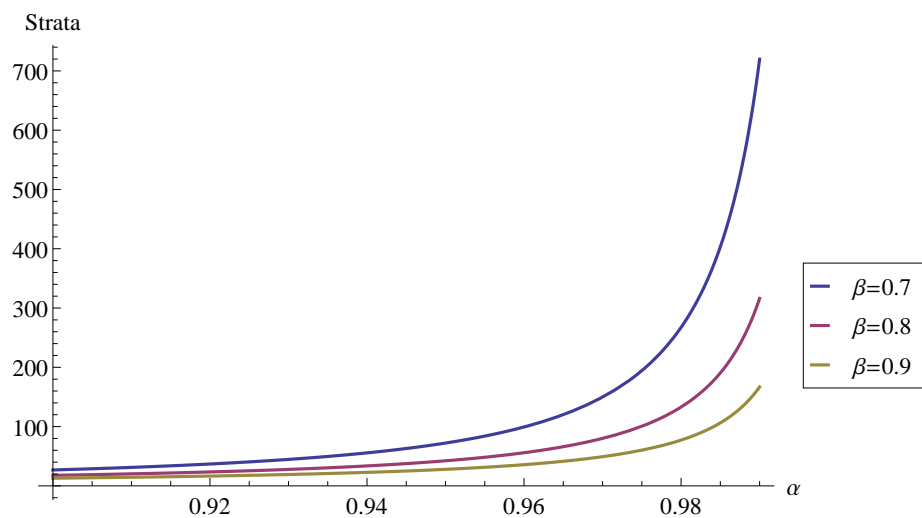
Paretovo rozdelenie charakterizuje hustota

$$f(x) = \begin{cases} \beta \frac{x_m^\beta}{x^{\beta+1}} & \text{pre } x \geq x_m, \\ 0 & \text{pre } x < x_m. \end{cases} \quad (2.17)$$

Parameter x_m je najmenšia možná nenulová hodnota veličiny X a od druhého parametru β sa odvíja rýchlosť konverencie hustoty v nekonečne. Čím väčšia β , tým je graf hustoty pre veľké x bližšie k x -ovej osi. Pre $\beta \leq 1$ podobne ako pri Cauchyovom rozdelení neexistuje stredná hodnota 2.12, pretože integrál nekonverguje. Takže pri odhadovaní strát sa znovu budeme musieť uspokojiť s predpoveďou pomocou VaR_α . Pričom, čím je β bližšie k jedničke, tým je Hodnota v riziku menšia (obr. 2.9).

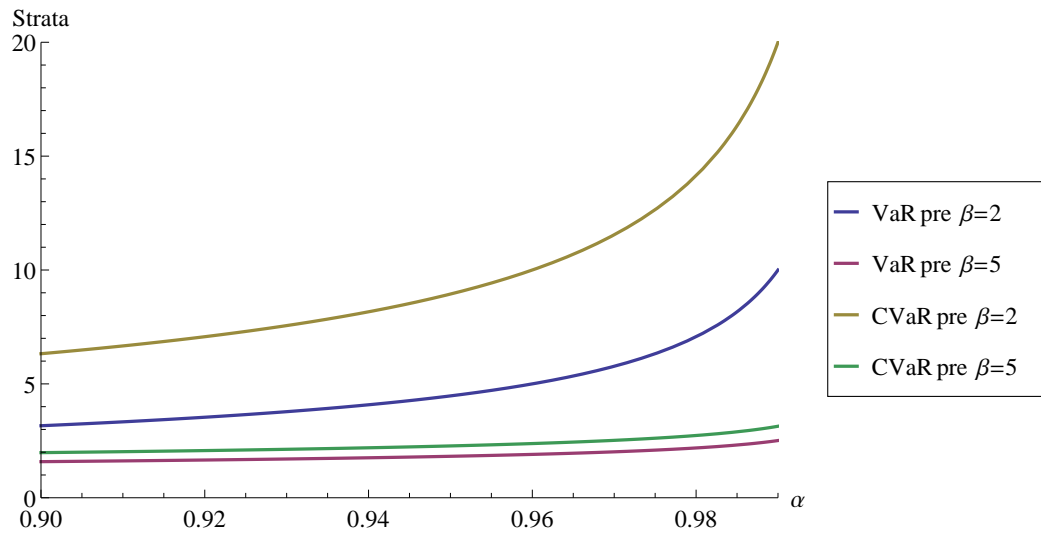


Obr. 2.8: VaR_α pre Cauchyovo rozdelenie strát

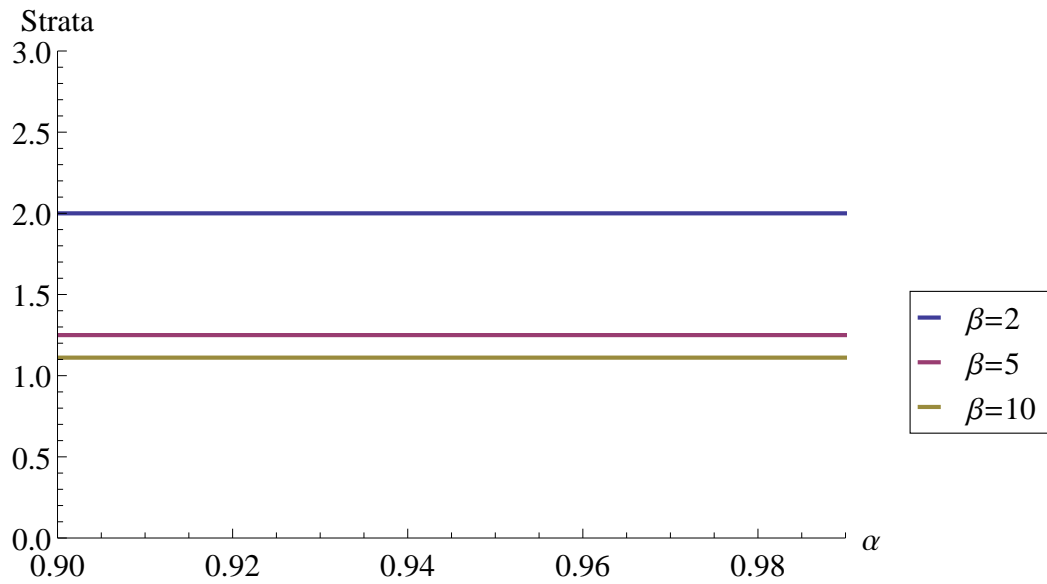


Obr. 2.9: VaR_α pre Pareto rozdelenie strát s $\beta < 1$

Pre $\beta > 1$ dostávame závislosti VaR_α a CVaR_α znázornené na obrázku 2.10. Všimnime si, že so zvyšujúcou sa hodnotou parametru β sú závislosti VaR_α a CVaR_α bližšie k sebe. Z grafu na obrázku 2.11 je vidieť, že CVaR_α je vždy n -násobkom VaR_α a tento násobok klesá s rastúcim β .



Obr. 2.10: VaR_α a CVaR_α pre Paretovo rozdelenie strát s $\beta > 1$

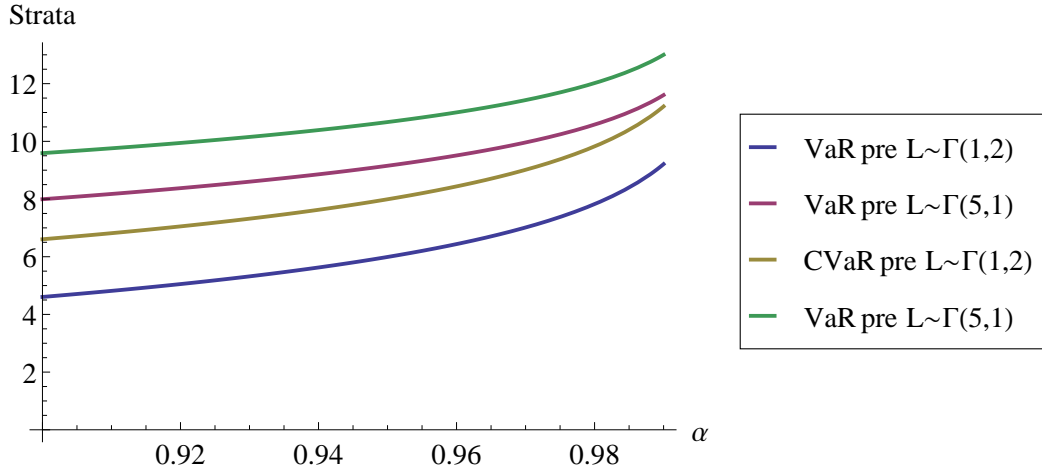


Obr. 2.11: $\text{CVaR}_\alpha / \text{VaR}_\alpha$ pre Paretovo rozdelenie strát s $\beta > 1$

Gamma rozdelenie patrí medzi rozdelenia s dvoma parametrami. Prvým parametrom je parameter $\Theta > 0$ a druhým $k > 0$, ktorý určuje tvar hustoty. Ak je k celé číslo gamma rozdelenie reprezentuje súčet k nezávislých exponenciálnych rozdelení, z ktorých každé má strednú hodnotu rovnú Θ . Gamma rozdelenie je dané hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\Theta}}}{\Theta^k \Gamma(k)} & \text{pre } x > 0 \\ 0 & \text{pre } x \leq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Hodnoty VaR_α a CVaR_α v prípade $L \sim \Gamma(\Theta, k)$ sú znázornené na obrázku 2.12. Podiel $\text{CVaR}_\alpha/\text{VaR}_\alpha$ môžeme vidieť na grafe 2.13.

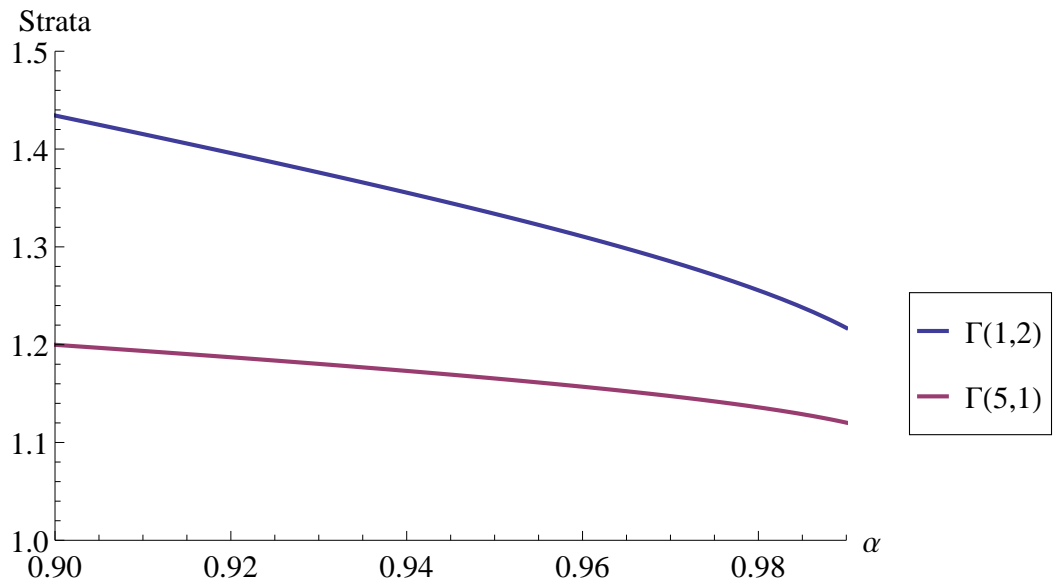


Obr. 2.12: VaR_α a CVaR_α pre gamma rozdelenie strát

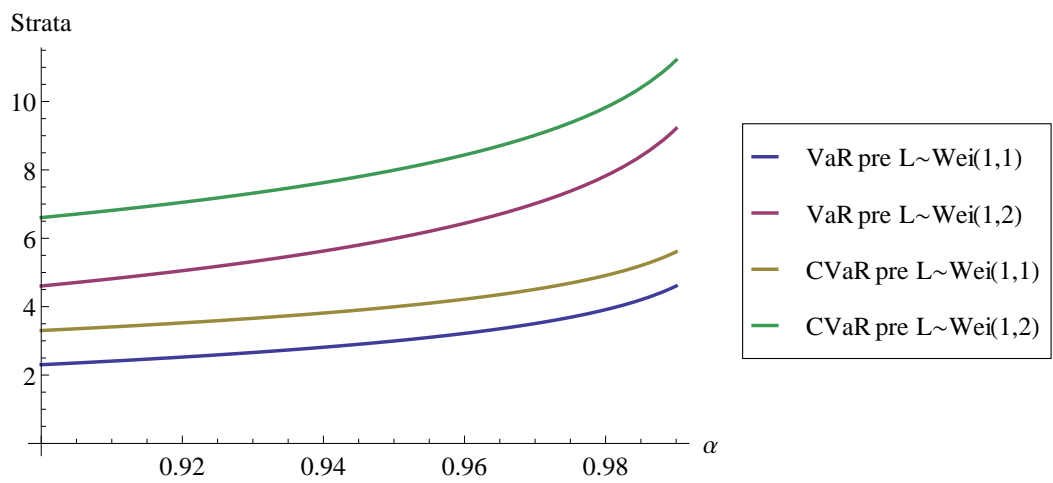
Weibullovo rozdelenie je definované funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}} e^{-(x/\lambda)^k} & \text{pre } x \geq 0 \\ 0 & \text{pre } x < 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

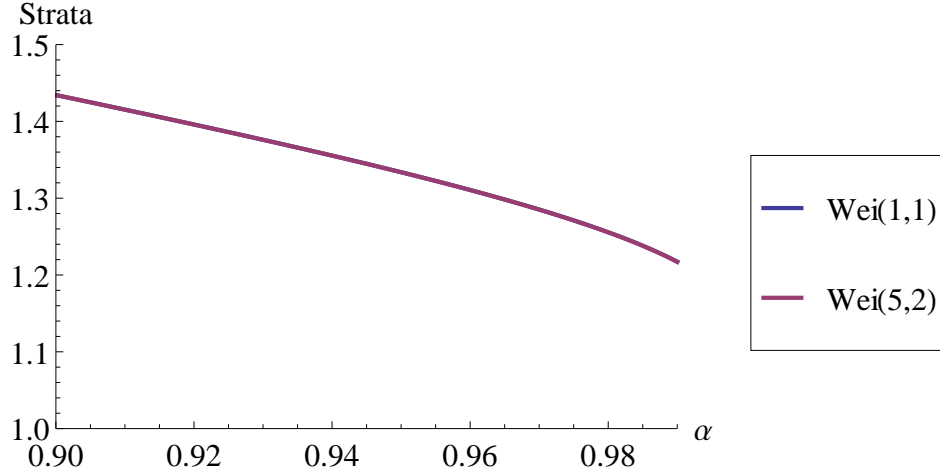
kde $k > 0$ udáva tvar hustoty a $\lambda > 0$ jej šírku. Obrázok 2.14 nám znázorňuje, ako sa s pribúdajúcou hladinou α menia hodnoty v riziku. Na grafe zobrazenom na obrázku 2.15 vidíme, že podiel $\text{CVaR}_\alpha/\text{VaR}_\alpha$ nezávisí na voľbe parametrov. S rovnakou situáciou sme sa stretli aj u logaritnicko-normálneho rozdelenia.



Obr. 2.13: CVaR_α/VaR_α pre gamma rozdelenie strát



Obr. 2.14: VaR_α a CVaR_α pre Weibullovo rozdelenie strát



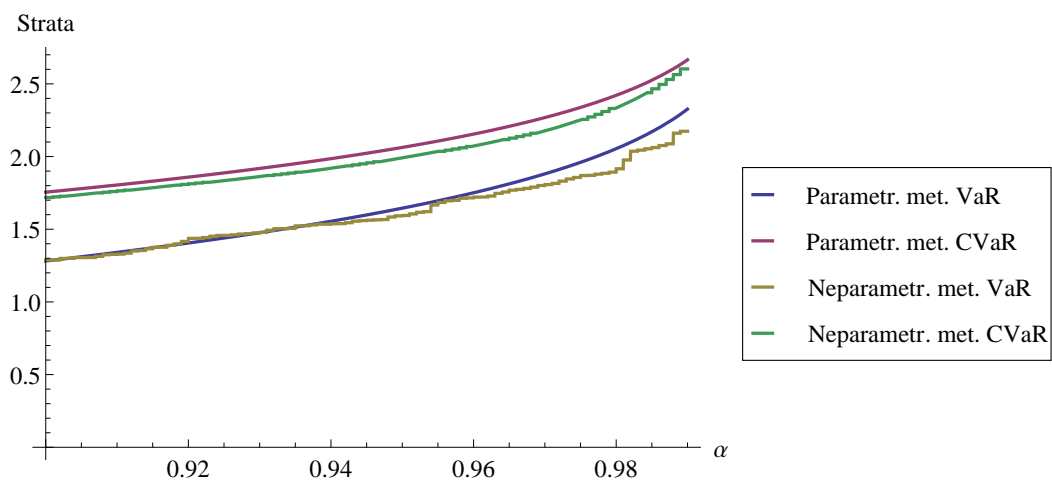
Obr. 2.15: $\text{CVaR}_\alpha/\text{VaR}_\alpha$ pre Weibullovo rozdelenie strát

Na všetkých obrázkoch môžeme vidieť, že CVaR_α nadobúda vždy vyššie hodnoty ako VaR_α . Táto vlastnosť plynie z rovnice (2.4). Tam sme CVaR_α definovali ako strednú hodnotu straty, ktorá nastane, ak strata prevýši hodnotu určenú pomocou VaR_α na vopred zvolenej hladine α . Ďalej vidíme, že so vzrastajúcou hladinou α rastie hodnota VaR_α aj CVaR_α . Hladinu α volíme v závislosti na tom, ako istý si chceme byť, že skutočná strata neprekročí nami predpovedanú hodnotu. Čím vyššie α , tým väčšia istota. Preto s rastúcim α rastú aj hodnoty v riziku.

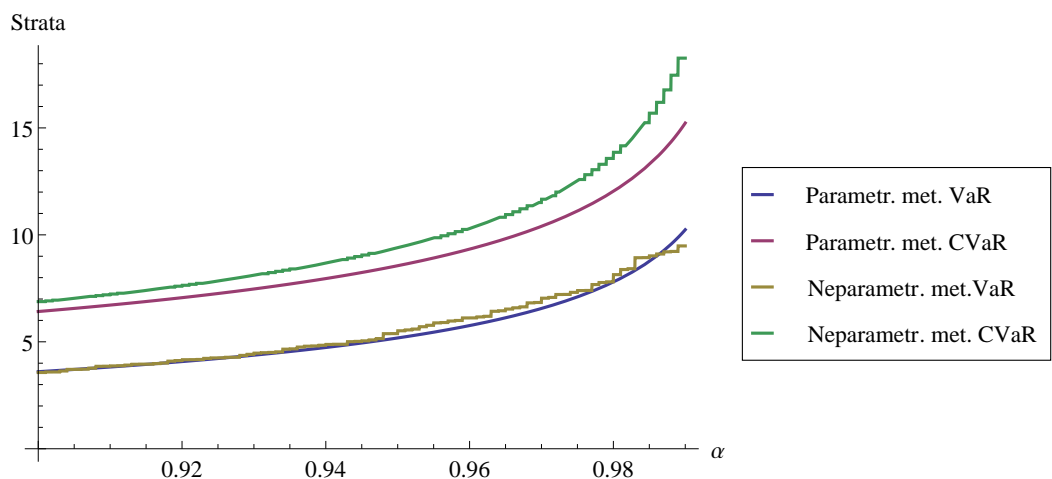
2.5 Neparаметrické metódy

Aj keby sme zozbierali veľké množstvo pozorovaní, rozdelenie reálnych dát nikdy nebude spojité. Takúto situáciu skúsime simulovať tak, že vygenerujeme tisíc náhodných čísel z konkrétneho rozdelenia a z nich určíme podmienenú a nepodmienenú hodnotu v riziku. Vygenerovaná skupina dát bude mať zase konkrétne rozdelenie, ale z nich vytvorená empirická hustota už nebude spojitá. Dá sa očakávať že hodnoty VaR_α a CVaR_α spočítané z takýchto dát pomocou vzorcov 2.3 a 2.4 by mali byť podobné hodnotám spočítaným pomocou parametrickými odhadmi.

Ako vidíme na obrázkoch 2.16 a 2.17 hodnoty VaR_α sú pri parametrickom i neparаметrickom odhade takmer totožné pre normálne aj logaritmicke-normálne rozdelenie. Neparаметrický odhad sa od parametrického vzdaluje až

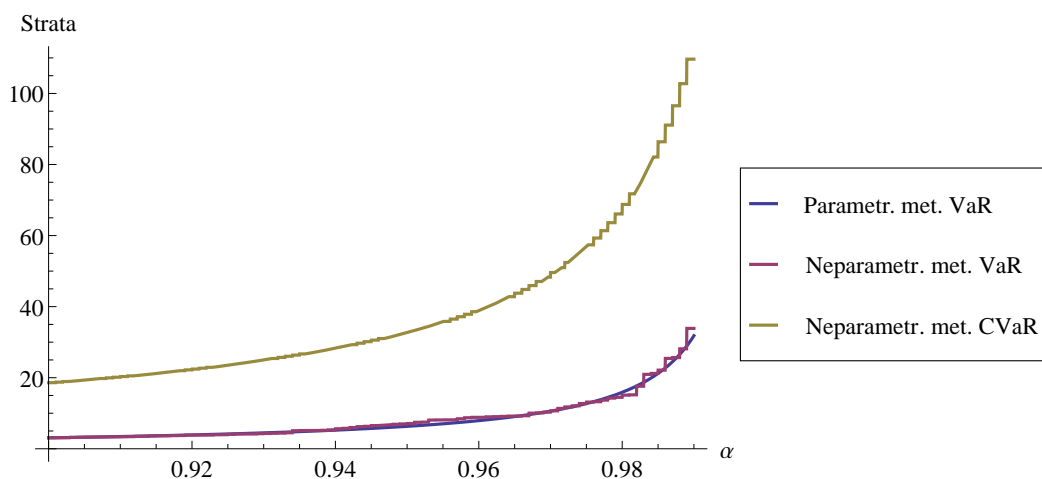


Obr. 2.16: Parametrický a neparametrický odhad VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre dáta z rozdelenia $N(0,1)$

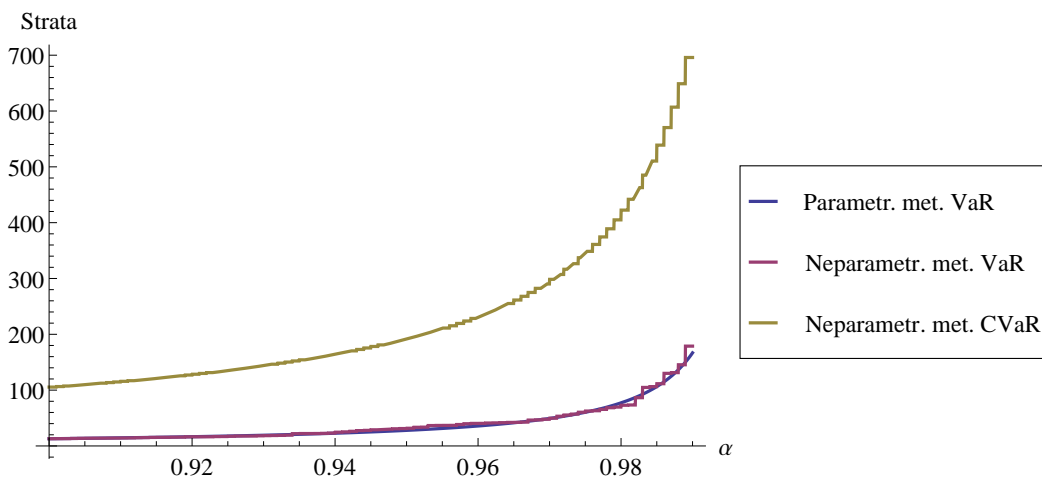


Obr. 2.17: Parametrický a neparametrický odhad VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre dáta z rozdelenia $LN(0,1)$

pri vysokej hladine α . Pre väčšiu zhodu by sme museli vygenerovať viac čísel, aby sme pokryli aj menej pravdepodobné hodnoty. Neparametrický odhad $CVaR_\alpha$ je pre všetky hladiny α nižší, než teoretická hodnota $CVaR_\alpha$ a so zvyšujúcou sa hladinou sa stále viac vzdáľuje.



Obr. 2.18: Parametrický a neparametrický odhad VaR_α a CVaR_α pre dáta z rozdelenia Cauchy(0,1)



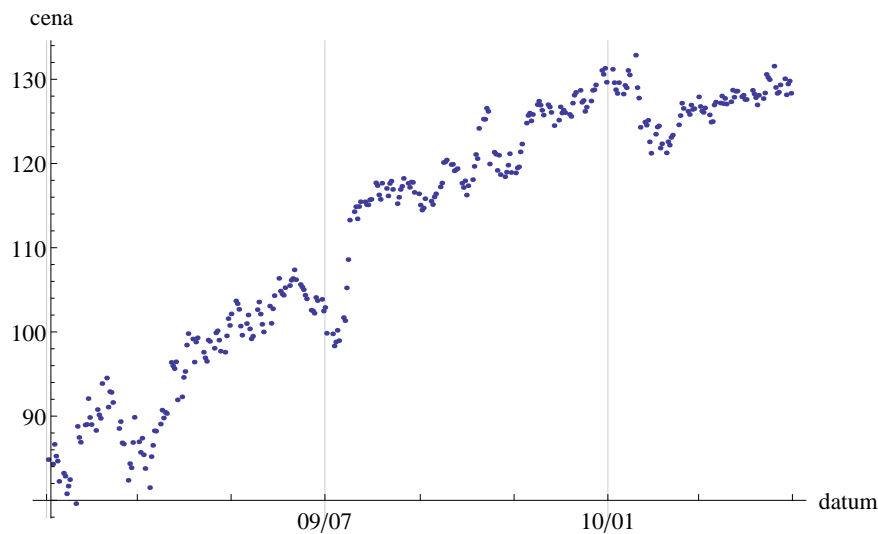
Obr. 2.19: Parametrický a neparametrický odhad VaR_α a CVaR_α pre dáta z rozdelenia Pareto(1,0.9)

Paretovo rozdelenie s $\beta < 1$ (obr. 2.19) rovnako ako Cauchyho rozdelenie (obr. 2.18) má pravý chvost, ktorý pre $x \rightarrow \infty$ pomaly konverguje k nule, preto majú aj vyššie straty dostatočnú pravdepodobnosť na to, aby sa dostali do nášho výberu. To spôsobilo, že odhadovaná strata je vyššia ako v predchádzajúcom

případe a pri vysokej hladine je teoretická hodnota VaR_α mierne pod jej neparametrickým odhadom. Vďaka tomu, že máme konečný počet reálnych hodnôt, sme dostali konečnú podmienenú strednú hodnotu. Neparametrická metóda nám umožnila spočítať podmienenú hodnotu v riziku aj u rozdelení, pri ktorých to parametrickou metódou nejde.

2.6 Príklad

Teraz skúsime obe metódy použiť na skutočné dáta. Zvolíme napríklad hodnoty akcií spoločnosti IBM, viz [4]. Na obrázku 2.20 môžeme vidieť, ako sa cena akcií IBM odvíjala od 1. 1. 2009 do 30. 4. 2010.



Obr. 2.20: Ceny akcií spoločnosti IBM v období od 1. 1. 2009 do 30. 4. 2010

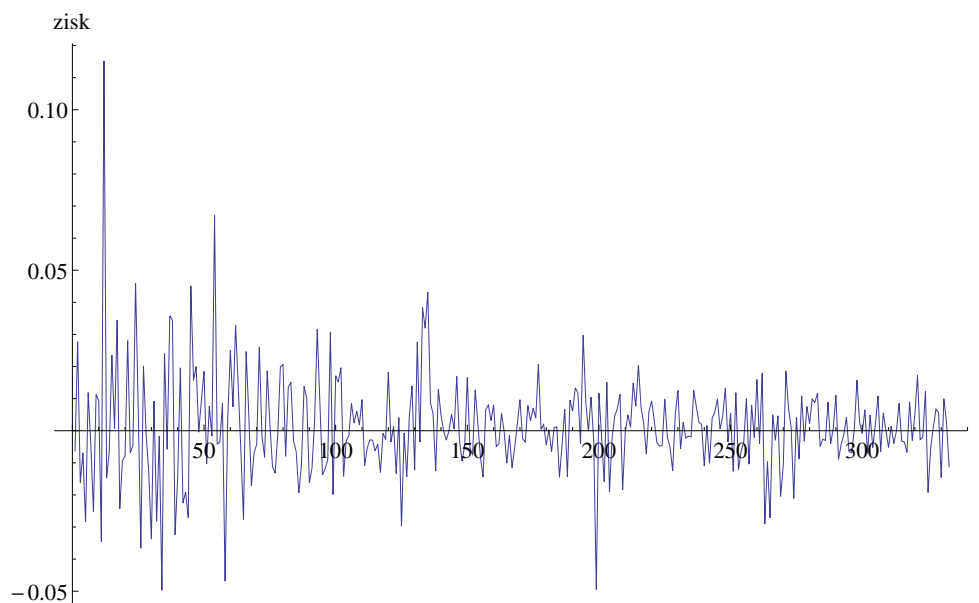
Nech S_0, S_1, \dots, S_T je cena akcií v čase $t = 0, 1, \dots, T$, potom

$$R_t = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \quad (2.20)$$

vyjadruje mieru návratnosti a

$$L_t = -R_t \quad (2.21)$$

stratu, pričom R je náhodná veličina návratnosti a $L = -R$ je náhodná veličina straty, viz napr. [3].



Obr. 2.21: Priebek miery návratnosti R_t z akcií spoločnosti IBM v závislosti na čase t vyjadrený v dňoch

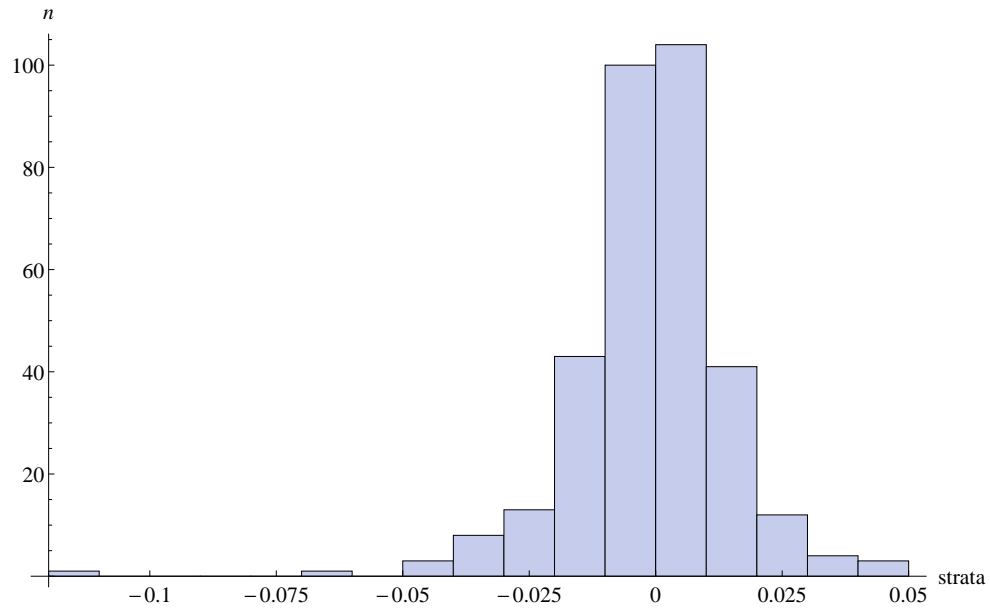
Pomocou vzorcov 2.20 a 2.21 určíme priebek miery návratnosti (obr. 2.21) a straty. Aby sme mohli aspoň približne určiť rozdelenie z napočítaných strát, vytvoríme histogram (obr. 2.22). Strednú hodnotu nášho výberu spočítame pomocou vzorca

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T X_t. \quad (2.22)$$

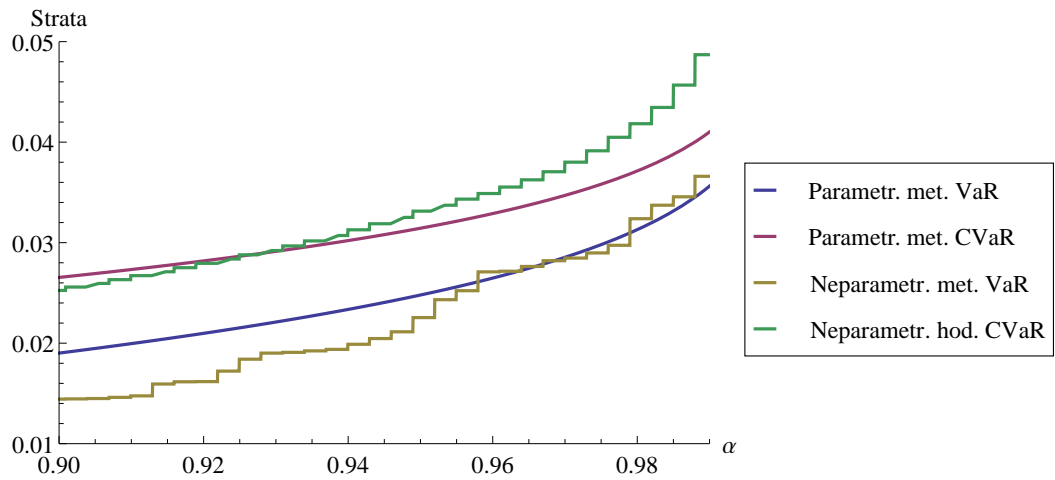
Výberový rozptyl určíme pomocou vzťahu

$$s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2. \quad (2.23)$$

Dostali sme jednovrcholový histogram (obr. 2.22), čo svedčí o tom, že naše dáta majú približne normálne rozdelenie a vďaka vzťahom 2.22 a 2.23 vieme určiť jeho parametre. Dostávame $EX = -1.48 \cdot 10^{-3}$ a $\text{var}X = 2.57 \cdot 10^{-4}$. Tieto údaje využijeme pri počítaní strát pomocou parametrického modelu. Uvažujeme, že strata $L \sim N(-1.48 \cdot 10^{-3}, 2.57 \cdot 10^{-4})$. Na obrázku 2.23 a v tabuľke 2.1 výsledok porovnáme s hodnotami, ktoré dostaneme pomocou neparametrickej metódy.



Obr. 2.22: Histogram priebehu strát, n označuje četnosti



Obr. 2.23: Porovnanie parametrickej a neparametrickej metódy na reálnych dátach

α	VaR_α		CVaR_α	
	par. met.	nepar. met.	par. met.	nepar. met.
0.90	0.0191	0.0143	0.0266	0.0254
0.95	0.0249	0.0224	0.0316	0.0332
0.99	0.0358	0.0367	0.0412	0.0487

Tabuľka 2.1: Porovnanie parametrickej a neparametrickej metódy pre vybrané α

Môžeme si všimnúť, že závislosti získané rôznymi metódami sa od seba značne líšia. Je to spôsobené tým, že pri parametrickej metóde sme iba odhadli rozdelenie strát. V kapitole 2.5 sme generovali náhodné čísla z daného rozdelenia a hodnoty VaR_α a CVaR_α následne porovnávali s hodnotami získanými pomocou parametrickej metódy pri danom rozdelení strát, preto bol rozdiel medzi oboma metódami malý. Za správnu závislosť považujeme závislosť získanú neparametrickou metódou, pretože berie v úvahu všetky hodnoty skutočného rozdelenia strát.

Kapitola 3

Riziko portfólia

Investori na finančných trhoch neinvestujú všetky svoje voľné finančné prostriedky len do jedného investičného inštrumentu, ale vytvárajú z dostupných investíc (aktív) určité súbory. Každý takýto súbor sa nazýva portfólio. Problém investovania prostredníctvom nákupu cenných papierov je klasickou témou matematickej ekonómie. Celkový výnos z portfólia je v dobe rozhodovania o investíciách náhodná veličina a jej pravdepodobnosť vieme ovplyvniť skladbou portfólia. Riziko portfólia je riziko spojené s investovaním do finančného, hmotného či nehmotného investičného majetku.

Predstavme si, že máme N aktív $1, \dots, N$, ktoré sú charakterizované náhodnými veličinami návratnosti R_1, \dots, R_N s vektorom očakávaných výnosov $E\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ a kovariančnou maticou \mathbf{V} , kde

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \text{var}[X_1] & \dots & \text{cov}[X_1, X_N] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[X_N, X_1] & \dots & \text{var}[X_N] \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Portfólio je vektor váh $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$, ktoré reprezentujú investovaný kapitál do týchto aktív. Pre jeho zložky platí

$$\sum_{n=1}^N x_n = 1. \quad (3.2)$$

Očakávaná miera návratnosti portfólia r_p s rizikom výnosu σ_p je

$$r_p = \sum_{n=1}^N x_n r_n, \quad (3.3)$$

pričom σ_p je smerodajná odchýlka

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}. \quad (3.4)$$

Ak by sme chceli maximalizovať výnos bez ohľadu na riziko, rozdelíme investovaný kapitál tak, že vyriešime maximalizačnú úlohu lineárneho programovania s účelovou funkciou 3.3 a obmedzujúcimi podmienkami. V prípade, že našim jediným obmedzením sú bilančná rovnica 3.2 a podmienka nezápornosti koeficientov x_1, \dots, x_N , je riešenie nakúpiť za celú čiastku akcie s najväčším stredným výnosom na investovanú jednotku. V opačnom prípade, keď chceme znížiť riziko bez ohľadu na výnos, určíme prerozdelenie celkového kapitálu tak, že minimalizujeme rovnicu 3.4. Obmedzujúce podmienky sú opäť bilančná rovnica 3.2 a podmienka nezápornosti zložiek vektoru \mathbf{x} .

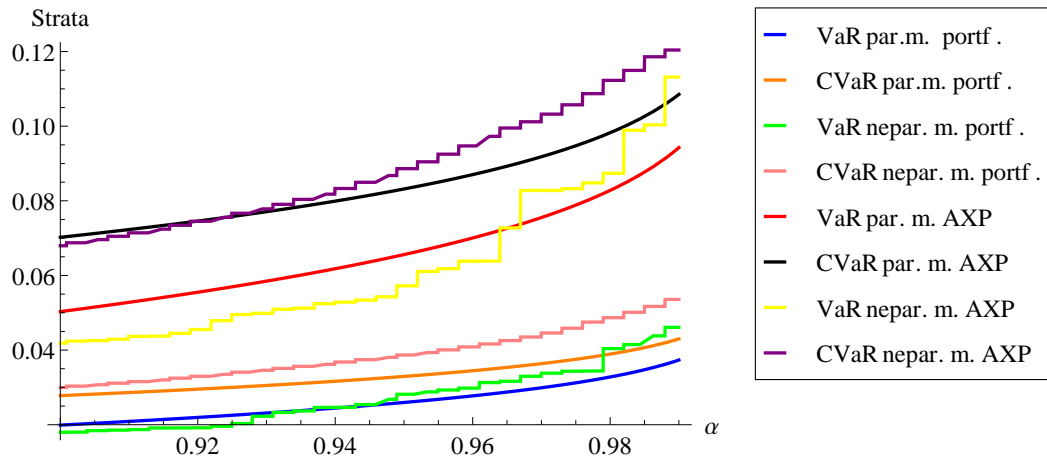
Problémy v teórii portfólia spočívajú najčastejšie v optimálnom portfóliu. Cieľom optimalizácie je nájsť vhodný kompromis medzi očakávaným výnosom a rizikom. Preto budeme hľadať portfólio s dopredu stanovenou mierou výnosnosti μ a čo najmenším rizikom. Inak povedané, pokúsime sa nájsť x tak, aby σ_p bola minimálna a $r_p = \mu$. Výpočet, ktorý vedie k nájdeniu už spomínaného optimálneho riešenia môžeme založiť na predpoklade, že so zvyšujúcou sa neistotou sa zvyšuje aj očakávaný výnos. Ak môžu byť komponenty \mathbf{x} aj záporné, hovoríme, že je povolený nekrytý predaj. Ak však musia byť všetky komponenty \mathbf{x} kladné, nekrytý predaj nepovolíme. V prvom prípade vyriešime problém štandardnou metódou, spočítaním Lagrangeových multiplikátorov, zatiaľ čo druhý prípad je problémom kvadratického programovania, viz napr. [3].

3.1 Príklad

Pokúsime sa zostaviť optimálne portfólio z akcií piatich spoločností Walt Disney, American Express Company, 3M Company, Procter & Gamble Company a McDonald's Corporation. V tomto poradí ich označíme číslami 1 až 5. Pri výpočtoch budeme vychádzať z historických cien akcií týchto spoločností na Newyorskej burze nameraných od 1. januára 2009 do 30. apríla 2010 (používame údaje z [4]). Pre každú spoločnosť má toto meranie 334 pozorovaní.

Podľa vzorca 2.20 určíme miery výnosnosti $R_{s,t}$ ($s = 1, \dots, 5$ a $t = 1, \dots, 333$) pre jednotlivé spoločnosti a z nich spočítame pomocou 2.22 očakávaný výnos $\mathbf{Er} = (0.00158, 0.00361, 0.0014, 0.0002, 0.00052)$. Vidíme, že všetky očakávané výnosy sú kladné a najvyšší očakávaný výnos má American Express Company 0.00361. Aj v prípade, že by boli niektoré, alebo dokonca všetky očakávané výnosy záporné, sa snažíme nájsť optimálne portfólio, aby vplyvom inflácie naše peniaze nestrácali kúpnu silu a snažíme sa minimalizovať stratu. Prihliadajúc k očakávaným výnosom si stanovíme požadovanú mieru výnosnosti z celého portfólia napr. $\mu = 0.0015$ a spočítame kovariančnú maticu \mathbf{V} pomocou 3.1. Následne hľadáme minimálny súčin $\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$ vzhľadom k \mathbf{x} tak, aby bola splnená bilančná rovnica 3.2, $\mathbf{x}^T \mathbf{Er} \geq \mu$ a súčasne všetky zložky vektoru \mathbf{x} boli nezáporné. Dostávame váhy $\mathbf{x} = (0.06, 0.13, 0.54, 0, 0.27)$. Pomocou vzorca 3.4 spočítame riziko $\sigma = 0.0167$ a očakávaný výnos z takto vytvoreného portfólia je rovný predom stanovenej hodnote $\mu = 0.0015$.

Ešte sa pozrieme na hodnotu v riziku a očakávanú extrémnu stratu. V prvom kroku pomocou vzorca 2.21 prevedieme výnosy na straty a vektor očakávaných ziskov \mathbf{er} na vektor očakávaných strát $\mathbf{El} = -\mathbf{Er}$. Aby sme mohli určiť VaR_α a CVaR_α pomocou parametrického modelu potrebujeme vedieť, aké rozdelenie majú straty. Predpokladajme, že straty majú päťrozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{El}^T \mathbf{x}$ a rozptylovou maticou $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$, $\mathbf{El} \sim N_5[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}]$. K neparametrickej metóde potrebujeme napočítať denné hodnoty ako súčin matice strát $L_{s,t}$ a vektoru váh \mathbf{x} . Teraz pomocou vzorcov 2.3 a 2.4 spočítame podmienenú i nepodmienenú hodnotu v riziku. Vyberieme firmu s najvyšším očakávaným ziskom a jej parametrické a neparametrické hodnoty VaR_α a CVaR_α porovnáme na grafe 3.1 s hodnotou pre celé portfólio.



Obr. 3.1: Porovnanie VaR_α a $CVaR_\alpha$ pre spoločnosť American Express s hodnotami pre optimalizované portfólio

Podmienené a nepodmienené hodnoty v riziku spočítané pomocou parametrickej a neparametrickej metódy sa podobne ako v kapitole 2.5 od seba znovu líšia. Dôvodom je opäť nepresný odhad rozdelenia strát.

Môžeme si všimnúť, že investícia čisto do akcií American Express so sebou obnáša omnoho vyššie riziko než do diverzifikovaného portfólia. Aj v tomto prípade sa potvrdilo, že so zvyšujúcim sa výnosom rastie aj riziko straty.

Kapitola 4

Rozhodovanie za neistoty

Rozhodovanie je proces, pri ktorom jedinec vyberá zo všetkých možností variantu, ktorá najlepšie splňuje jeho preferencie. Vieme, že miera rizika zohráva veľkú úlohu pri rozhodovaní. V predošlých kapitolách sme si ukázali spôsoby kvantifikovania rizika. Už síce vieme, aké riziko nám hrozí, ale stále nevieme, či pri tomto riziku investíciu vykonať, alebo nie.

Rozhodovanie z hľadiska informovanosti môžeme rozdeliť na rozhodovanie za istoty, rizika a neistoty. Rozhodovanie za istoty nastáva v prípade, že máme k dispozícii všetky informácie a vieme s istotou, ktorá situácia nastane a aké sú jej dôsledky. Rozhodovaniu za rizika čelíme v prípade, ak poznáme situácie, ktoré môžu nastať, vieme odhadnúť pravdepodobnosť, s akou nastanú, no nevieme ich dôsledky. Ak poznáme možné situácie a ich následky, no nevieme, aká je pravdepodobnosť, že niektorá z týchto situácií nastane, hovoríme o rozhodovaní za neistoty. Jedným z najpoužívanejších nástrojov pri rozhodovaní za neistoty je rozhodovacia matica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & \cdots & d_{n,m} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Riadky tejto matice sa vzťahujú k variantám V_1, \dots, V_n , stĺpce k situáciám S_1, \dots, S_m a prvky $d_{i,j}$ predstavujú dôsledok výberu varianty V_i pri situácií S_j .

Pri výbere najlepšej možnej varianty sa dá riadiť viacerými pravidlami, ktoré môžu dávať rôzne výsledky. Pri všetkých nasledujúcich pravidlách budeme predpokladať, že sa rozhodujeme podľa maximalizačného kritéria, viz napr. [2].

4.1 Optimistický prístup - princíp maximaxu

Táto varianta je založená na predpoklade, že rozhodovateľ je optimista. Očakáva, že pre každú variantu, ktorú si vyberie, vždy nastane najvýnosnejšia situácia. Preto si vyberie variantu s najvyšším ziskom, teda vyhľadá najväčšie číslo $\max_i \max_j d_{i,j}$ z celej matice M . Ak by našim cieľom bola minimalizácia, vybrali by sme najmenší prvok z každého riadku a z nich zas ten najmenší $\min_i \min_j d_{i,j}$ a zvolili variantu, ktorá v riadku rozhodovacej matice obsahuje tento najmenší prvok.

4.2 Pesimistický prístup - Waldov princíp maximinu

Rozhodovateľ je pesimista a očakáva najhorší možný výsledok. Preto vyberie z rozhodovacej matice v každom riadku najmenšie číslo a z týchto čísel následne to najväčšie, čiže $\max_i \min_j d_{i,j}$. Pri minimalizačnom kritériu by sa v každom riadku vybral maximálny prvok a z nich zas minimálny.

4.3 Hurwiczovo pravidlo

Pri tomto spôsobe rozhodovanie nemusí byť ani úplný optimista, ani pesimista. Na vyjadrenie jeho postoja zavedieme index optimizmu $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Pre $\alpha = 1$ je výsledok tohto pravidla zhodný s optimistickým prístupom a pre $\alpha = 0$ ho môžeme stotožniť s pesimistickým prístupom. Index optimizmu oslabuje extrémne postoje rozhodovateľa. V tejto variante vyberáme z každého riadku najvyšší prvok a ten pre násobíme α a najmenší prvok, ktorý vynásobíme $(1 - \alpha)$. Tieto dva súčiny sa následne sčítajú a vyhráva varianta s najväčším súčtom

$$\alpha \max_j d_{i,j} + (1 - \alpha) \min_j d_{i,j}. \quad (4.2)$$

V prípade, že hľadáme minimum, pre násobujeme indexom α najmenší prvok v každom riadku a číslom $(1 - \alpha)$ najväčší prvok. Vyberáme variantu s najmenšou hodnotou súčtu týchto členov.

Hurwiczovo pravidlo má však dva veľké nedostatky. Prvým je, že prihliada len na najvyššiu a najnižšiu hodnotu každej varianty. Takýmto spôsobom sú rovnako ohodnotené varianty s rovnakým maximom a minimom i keď hodnoty ostatných situácií môžu byť veľmi odlišné. Ďalším zásadným problémom je určenie indexu optimality.

4.4 Laplaceovo pravidlo

Toto pravidlo sa označuje aj ako princíp rovnakej vierohodnosti, lebo sa v ňom predpokladá, že všetky situácie môžu nastať s rovnakou pravdepodobnosťou. Teda ak máme m situácií, pre každé $j = 1, \dots, m$ platí, $P(S_j) = 1/m$. Podľa Laplaceovho pravidla vyberáme tú variantu, pre ktorú nadobúda maximum tento výraz

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d_{i,j}. \quad (4.3)$$

V prípade minimalizačného predpokladu vyberáme variantu s čo najmenšou strednou hodnotou 4.3.

4.5 Savageovo pravidlo

Savageovo pravidlo je v skutočnosti aplikácia Waldovho princípu na maticu strát \mathbf{R} . Jej prvky $r_{i,j}$ získame, keď pre každú situáciu odčítame od najlepšej varianty všetky ostatné

$$r_{i,j} = \max_k d_{k,j} - d_{i,j}. \quad (4.4)$$

Inak povedané, v každom stĺpci rozhodovacej matice nájdeme najväčší prvok, a potom od neho odčítavame všetky prvky stĺpca.

Použitie ktoréhokoľvek z týchto princíпов zaručuje len to, že si nezvolíme úplne najhoršiu variantu.

Literatúra

- [1] Bluhm, C. et al: *Credit Risk Modeling*. Chapman & Hall/CRC. Boca Raton 2003.
- [2] Friebelová, J.: *Jednokriteriální rozhodování za rizika a nejistoty*. http://www2.zf.jcu.cz/~jfrieb/prednasky_komplet/skriptaRM_jednokriterialni.pdf.
- [3] Hurt, J.: *Risk measures in finance*. In: 2008 International Mathematica User Conference. <http://library.wolfram.com/infocenter/Conferences/7230/>. Champaign (IL) 2008.
- [4] Wolfram, S.: *The Mathematica Book. 5th edition*. Wolfram Media Champaign (IL) 2003.