Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Milan Matějka

Rozšiřování lipschitzovských funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.

Studijní program: Matematika, obecná matematika

2010

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D., za seznámení s tak zajímavým tématem, které mě ihned zaujalo. Dále také za doporučení a poskytnutí vhodné literatury.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Milan Matějka

Obsah

Název práce: Rozšiřování lipschitzovských funkcí
Autor: Milan Matějka
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
e-mail vedoucího: Dalibor.Prazak@mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce má uvést čtenáře do problému z funkcionální analýzy - rozšiřování funkcí. Dobře známé jsou výsledky o rozšiřování spojitých funkcí. My se však budeme zabývat jiným druhem funkcí. K dané lipschitzovské funkci $f : M \longrightarrow Y$, kde M je podmnožina prostoru X, hledáme její rozšíření na celý prostor X. Určitě zde existuje několik možných přístupů. Zajímavá otázka vyvstává, pokud budeme chtít lipschitzovskou konstantu zachovat i po rozšíření. Tato práce pojednává zejména o rozšiřování nad Euklidovými a Hilbertovými prostory.

Klíčová slova: Lipschitzovské funkce, α - Hölderovské funkce, věta Kirszbraunova, lemma McShane - Whitney

Title: Extensions of Lipschitz mappings
Author: Milan Matějka
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Dalibor.Prazak@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis should introduce the reader into a problem from functional analysis - extensions of functions. We have well known results about the class of continuous functions. Nevertheless, we will consider different functions. We are looking for an extension of Lipschitz mapping $f : M \longrightarrow Y$, where M is a subset of some space X, to the whole space X. Definitely there exist several ways. But an interesting question arises when we are looking for extensions with the same Lipschitz constant. This thesis is mainly about extensions on Euclidean and Hilbert spaces.

Keywords: Lipschitz functions, α - Hölder functions, Kirszbraun theorem, McShane - Whitney lemma

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Rozšiřování lipschitzovských funkcí je klasický problém matematické analýzy. Tento problém lze zkoumat několika pohledy. Můžeme vyžadovat pouze existenci rozšíření, ale lze hledat například i explicitní rozšíření dané konstruktivním důkazem. Můžeme požadovat jisté podmínky na lipschitzovskou konstantu a to například její minimalizaci při rozšíření. Všechny tyto postupy mají své odůvodnění a používají se v odlišných aplikacích.

Rozšiřování těchto funkcí a jejich optimalizace se objevuje zejména v moderních aplikacích. S kombinací moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic se náš problém vyskytuje například v úpravě digitálních fotografií a zpracování obrazu [2] nebo pro počítačové mapování mozku, které se používá v medicíně [8]. V těchto aplikacích narážíme převážně na rozšiřování lipschitzovské funkce s minimalizací její konstanty.

Jak jsme se již zmínili v abstraktu práce, my se v následujících kapitolách budeme věnovat zvláště existenci rozšíření se zachováním lipschitzovské konstanty.

Jako malou ukázku si shrňme, co se dozvíme v následujících kapitolách:

1. Věta 5 (McShane - Whitney) nám ukáže, jak najít rozšíření pro lipschitzovské funkce $f : A \longrightarrow \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^n$

2. Větu 5 (McShane - Whitney) budeme zobecňovat a dokážeme velice důležitou Větu 10 (Kirszbraun), ta pracuje s obecnějšími lipschitzovskými funkcemi tvaru $f:\ A \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ A \subset \mathbb{R}^n$

3. Věta 19 nám naznačí jaké podmínky budou kladeny na daný prostor, abychom byli schopni rozšiřovat kontrakce

4. Předpoklady o prostorech budeme zeslabovat a snadno rozšíříme naše poznatky o lipschitzovských a hölderovských zobrazeních na Větu 20 pracující s Hilbertovým prostorem

5. Pomocí Věty 21 budeme schopni rozšiřovat dokonce izometrické zobrazení pro konečně dimenzionální Hilbertův prostor

6. Lemma 23 nám poté ukáže podstatnost Hilbertových prostorů pro rozšiřování

1.2 Některá označení

Abychom v tomto textu předešli zmatení nebo nedorozumění, tak zde uvedeme základní označení a pojmy, které se budou dále vyskytovat.

B^n	n - dimenzionální uzavřená koule o středu v 0
∂B^n	hranice n - dimenzionální koule B^n
$B(x,r)$	uzavřená koule o středu x a poloměru r
$V^\perp$	ortogonální doplněk podprostoru V
$\lvert x\rvert$	absolutní hodnota nebo Euklidovská norma na prostoru $\mathbb{R}^n$
$\lVert x\rVert$	norma prvku x
$\operatorname{conv} M$	konvexní obal množiny M
$\operatorname{span} M$	lineární obal množiny M
$\langle x,y\rangle$	skalární součin prvků x a y
BÚNO	zkrácení výrazu „Bez újmy na obecnosti“

Kapitola 2

Lipschitzovské funkce

2.1 Základní definice a pohled na problém

Definice 1 Nechť f je zobrazení metrického prostoru (X, d_X) do metrického prostoru (Y, d_Y). Říkáme, že funkce f je

1. ***lipschitzovská*** *s konstantou L (L - Lipschitzovská)*

$$\underset{x,y\in X}{\forall} \; d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \tag{2.1}$$

2. ***hölderovská*** *stupně* $\alpha > 0$ *(α - Hölderovská)*

$$\underset{L>0}{\exists} \; \underset{x,y\in X}{\forall} \; d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X^{\alpha}(x, y) \tag{2.2}$$

3. ***kontrakce***

$$\underset{x,y\in X}{\forall} \; d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y) \tag{2.3}$$

Poznámka 2 Upozorněme, že v bodě 2.3 u předešlé definice se nedržíme zrovna obvyklé terminologie. Nicméně nám to v dalších kapitolách místy usnadní a zpřehlední práci.

V následujícím zkoumání vlastností těchto zobrazení se omezíme jen na α - Hölderovské funkce s konstantou $0 < \alpha \leq 1$. Má to celou řadu důvodů, některé funkce totiž nelze rozumně rozšířit a nebo zajímavou vlastnost nám vypovídá také následující lemma.

Lemma 3 Mějme α - Hölderovskou funkci $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ je otevřená a souvislá, $\alpha > 1$. Potom f je konstantní.

Důkaz Zvolme $y \in A$, platí

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L \left| x - y \right|^{\alpha - 1}, \quad x \in A,\ x \neq y.$$

Limitním přechodem obdržíme

$$f'(y) = \lim_{\substack{x \to y \\ x \in A}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0.$$

Tedy pro $y \in A$ libovolné dostáváme $f'(y) = 0$ a f je konstantní.

Lemma 4 Nechť $\{f_i : i \in I\}$ je soubor L - Lipschitzovských funkcí takových, že $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Pak funkce

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf_{i \in I} f_i(x), \quad x \in A, \\ G(x) &= \sup_{i \in I} f_i(x), \quad x \in A \end{aligned}$$

jsou L - Lipschitzovské na A, pokud $F(x), G(x)$ jsou konečné alespoň v jednom bodě.

Důkaz Podívejme se na případ $F(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$, $x \in A$. Pro druhý případ můžeme postupovat zcela analogicky.

Pro každé $i \in I$ platí

$$f_i(y) \leq L \left| x - y \right| + f_i(x), \quad x, y \in A$$

a při přechodu k infimu

$$F(y) \leq L \left| x - y \right| + F(x), \quad x, y \in A.$$

Pokud $F(x) < \infty$, potom $F(y) < \infty$. Tím jsme ukázali konečnost pro každé $x, y \in A$.

Podle 2.1 chceme dokázat, že

$$\left| F(x) - F(y) \right| \leq L \left| x - y \right|, \quad x, y \in A.$$

BÚNO nechť $F(x) \geq F(y)$.

Volme $\varepsilon > 0$, z definice infima určitě existuje $i_0 \in I$, že

$$F(y) + \varepsilon > f_{i_0}(y).$$

Potom tedy platí

$$|F(x) - F(y)| = F(x) - F(y) < f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y) + \varepsilon \leq L\,|x - y| + \varepsilon.$$

Při limitním přechodu pro $\varepsilon \longrightarrow 0_+$ dosáhneme požadovaného tvrzení

$$|F(x) - F(y)| \leq L\,|x - y|\,.$$

Věta 5 (McShane - Whitney)
Nechť $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ je L - Lipschitzovská funkce. Pak existuje rozšíření na lipschitzovskou funkci $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se stejnou konstantou L takovou, že $F|_A = f$.

Důkaz Definujme si funkci následovně

$$f_a(x) = L\,|x - a| + f(a), \quad a \in A.$$

Tato funkce je zřejmě L - Lipschitzovská, použitím trojúhelníkové nerovnosti získáme

$$|f_a(x) - f_a(y)| = L\Big|\,|x - a| - |y - a|\,\Big| \leq L\,|x - y|\,.$$

Dále definujme

$$F(x) = \inf_{a \in A} f_a(x),\ \ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Kdykoliv $a' \in A$, platí

$$F(a') = \inf_{a \in A} f_a(a') = \inf_{a \in A} \{L\,|a' - a| + f(a)\} = f(a'),$$

protože

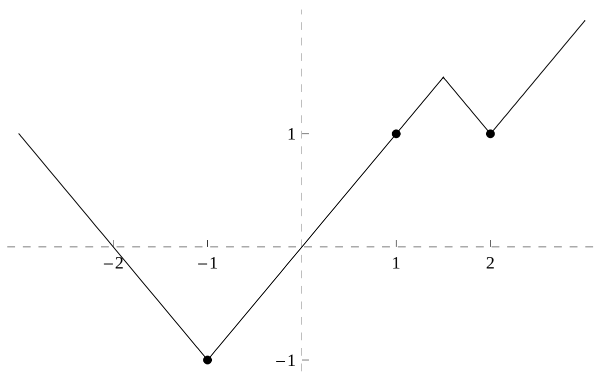
$$|f(a') - f(a)| \leq L\,|a' - a|\,,$$
$$f(a') \leq L\,|a' - a| + f(a).$$

Volbou $a := a'$ dosáhneme $F(a') = f(a')$.

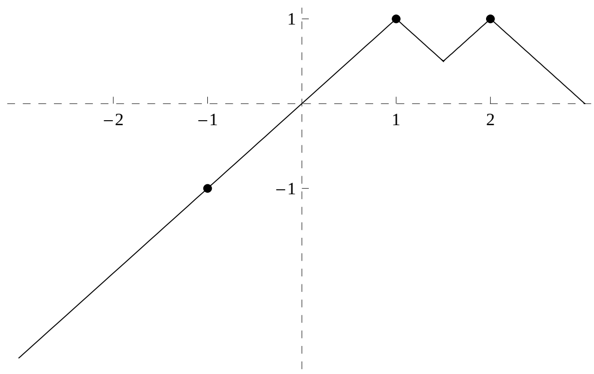
Speciálně je i funkce $F(x)$ konečná alespoň v jednom bodě. Podle Lemmatu 4 je tato funkce též lipschitzovská se stejnou konstantou. Tím jsme zkonstruovali hledanou funkci $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Poznámka 6 Po prohlédnutí důkazu se můžeme určitě ptát, zda místo naší volené funkce $F(x) = \inf\limits_{a \in A} f_a(x)$ nemůžeme také použít například $F(x) = \sup\limits_{a \in A} f_a(x)$, protože na tuto funkci lze také použít Lemma 4. Obě řešení by určitě vyhovovala. Ve skutečnosti se jedná o hledání funkce s minimální a maximální konstantou lipschitzovskosti.

Jak ilustruje jednoduchý Obrázek 1 a Obrázek 2, nemůžeme očekávat jednoznačné rozšíření. Původní funkce je zde zadána třemi vyznačenými body.



Obrázek 1: Lipschitzovké rozšíření



Obrázek 2: Další lipschitzovké rozšíření

Poznámka 7 V předchozí větě jsme se zaměřili na $A \subset \mathbb{R}^n$, ovšem nic nám nebrání uvažovat A jako podmnožinu libovolného metrického prostoru. Postup by byl naprosto stejný. Avšak držme se klasické formulace, která uvažuje prostory $\mathbb{R}^n$.

Důkaz ve Větě 5 byl až překvapivě velice krátký. Použitím právě této věty dostáváme její okamžitý důsledek a to ve znění:

Důsledek 8 Nechť $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ je L - Lipschitzovská funkce. Pak existuje rozšíření na lipschitzovskou funkci $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s konstantou $\sqrt{m}L$ takovou, že $F|_A = f$.

Důkaz Nejdříve si vytvoříme jisté označení, pro $a = (a_1, \dots a_n) \in A$ budeme obraz při f uvažovat jako

$$f(a) = f(a_1, \dots a_n) = (a'_1, \dots a'_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Zadefinujme si následující funkce $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ i = 1, \dots m$ tímto způsobem

$$f_1(a_1, \dots a_n) = (a'_1, 0 \dots 0),$$

$$f_2(a_1, \dots a_n) = (0, a'_2, 0 \dots 0),$$

$$\vdots$$

$$f_m(a_1, \dots a_n) = (0, \dots 0, a'_m).$$

Takto definované $f_i, \; i = 1, \dots m$ jsou určitě všechny L - Lipschitzovské.

Je zřejmé, že funkci f budeme rozšiřovat „po složkách“. Nyní použijeme Lemma 5 na každou funkci $f_i, \; i = 1, \dots m$, kde samozřejmě f_i uvažujeme jako zobrazení z A do $\mathbb{R}$ na příslušném i-tém místě. Obdržíme tak soubor rozšířených L - Lipschitzovských funkcí, označme je jako $F_i, \; i = 1, \dots m$. Dále si vytvořme funkci

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x).$$

Tato funkce zřejmě rozšiřuje f a navíc F je $\sqrt{m}L$ - Lipschitzovská, protože

$$|F(a) - F(b)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |a'_i - b'_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} L^2 \, |a - b|^2} = \sqrt{m}L \, |a - b| \, .$$

Poznámka 9 Ve Větě 5 jsme dostali lipschitzovskou konstantu stejnou jako u předem dané funkce. Můžeme se ptát, zda nejde tento důsledek vylepšit na stejnou konstantu. Ano, samozřejmě konstanta $\sqrt{m}$ je zcela nadbytečná a pomalu tak budeme směřovat k jejímu odstranění v následující kapitole.

2.2 Kirszbraunova věta

Věta 10 (Kirszbraun)
Nechť $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ je L - Lipschitzovská funkce. Pak existuje rozšíření funkce f na lipschitzovskou funkci $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se stejnou konstantou L takovou, že $F|_A = f$.

Poznámka 11 Důkaz předchozí věty jako první publikoval M. D. Kirszbraun již v roce 1934. Ve svém původním článku pracoval s funkcí tvaru $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Důkaz lze nalézt v [6].

Jiný a zajímavý pohled založený na geometrické představě je k dispozici v článku [11].

Budeme se zabývat o něco širší otázkou a to jest případem, kdy uvažujeme $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Veškeré důkazy Kirszbraunovy věty jsou komplikované a proto jej rozdělíme do několika tvrzení. Některá z těchto tvrzení jsou technicky náročnější a proto místy vynecháme jisté podrobnosti.

Lemma 12 Nechť $g : K \longrightarrow \partial B^m \subset \mathbb{R}^m$ je lipschitzovské zobrazení s konstantou $L < 1$, kde $K \subset \partial B^n \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Potom $g(K)$ je částí otevřené polokoule v B^m.

Důkaz Označme si konvexní obal $C := \operatorname{conv} g(K)$ v B^m. K tvrzení potřebujeme ukázat, že C neobsahuje počátek. Protože potom existuje jistá nadrovina, která odděluje 0 a C, tudíž $g(K)$ je částí otevřené polokoule v B^m.

Použijme definici konvexní množiny a pro spor předpokládejme, že

$$\lambda_1 g(v_1) + \ldots + \lambda_k g(v_k) = 0,$$

kde $v_i \in K, \lambda_i \in [0,1]$ a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Protože g je L - Lipschitzovská, kde $L < 1$, máme že

$$|g(v_i) - g(v_j)| \leq L\,|v_i - v_j| < |v_i - v_j|\,, \quad i \neq j.$$

Použijme znalosti souvislosti normy a skalárního součinu

$$\langle g(v_i) - g(v_j), g(v_i) - g(v_j)\rangle < \langle v_i - v_j, v_i - v_j\rangle\,, \quad i \neq j,$$

$$|g(v_i)|^2 + |g(v_j)|^2 - 2\,\langle g(v_i), g(v_j)\rangle < |v_i|^2 + |v_j|^2 - 2\,\langle v_i, v_j\rangle\,, \quad i \neq j.$$

Z vlastnosti funkce $g : K \longrightarrow \partial B^m$, $K \subset \partial B^n$ obdržíme

$$2 - 2\,\langle g(v_i), g(v_j)\rangle < 2 - 2\,\langle v_i, v_j\rangle\,, \quad i \neq j,$$

$$-2\,\langle g(v_i), g(v_j)\rangle < -2\,\langle v_i, v_j\rangle\,, \quad i \neq j,$$

$$\langle g(v_i), g(v_j)\rangle > \langle v_i, v_j\rangle\,, \quad i \neq j.$$

Označme si $\lambda_i v_i = b_i$ a BÚNO nechť $\lambda_i > 0$ pro $i = 1, \dots k$. Potom úpravou poslední uvedené nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda_j \langle g(v_i), g(v_j)\rangle = 0 > \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle b_i, b_j\rangle\,.$$

Uvedená nerovnost platí pro každé $j = 1, \dots k$. Tedy při sečtení obdržíme

$$\langle b_1 + \ldots + b_k, b_1 + \ldots + b_k\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \langle b_i, b_j\rangle < 0,$$

což je samozřejmě spor, protože takový skalární součin nemůže být záporný.

Lemma 13 Mějme $\{x_1, \dots x_k\}$ konečnou množinu bodů v $\mathbb{R}^n$ a konečnou množinu bodů $\{y_1, \dots y_k\}$ v $\mathbb{R}^m$ takovou, že

$$|y_i - y_j| \leq |x_i - x_j|\,, \quad i, j = 1, \dots k. \tag{2.4}$$

Pokud $r_1, \dots r_k > 0$ splňují

$$\bigcap_{i=1}^{k} B(x_i, r_i) \neq \emptyset, \tag{2.5}$$

potom

$$\bigcap_{i=1}^{k} B(y_i, r_i) \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

Důkaz Definujme si funkci

$$G(y) = \max_{i=1,\dots k} \frac{|y - y_i|}{r_i}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Podle Lemmatu 4 víme, že G lipschitzovská, speciálně je spojitá. Dále máme, že $G(y) \longrightarrow \infty$ pro $|y| \longrightarrow \infty$, $G(y)$ je nezáporná funkce. A tudíž funkce G nabývá svého minima, řekněme v bodě $w \in \mathbb{R}^m$.

K dokončení důkazu stačí ukázat, že $G(w) \leq 1$. Protože poté

$$G(w) = \max_{i=1,\dots k} \frac{|w - y_i|}{r_i} \leq 1$$

a platí

$$|w - y_i| \leq r_i, \quad i = 1, \dots k.$$

Tím je 2.6 dokázáno

$$w \in \bigcap_{i=1}^{k} B(y_i, r_i).$$

Dále pro spor předpokládejme, že $\lambda := G(w) > 1$.

Označme si J množinu indexů $j \in \{1, \dots k\}$, které splňují

$$|w - y_j| = r_j \lambda.$$

Z předpokladu 2.5 volme $x \in \bigcap_{j \in J} B(x_j, r_j)$.

Uvažujme dvě množiny bodů

$$D := \left\{ \frac{x_j - x}{|x_j - x|} : j \in J \right\} \subset \partial B^n,$$

$$D' := \left\{ \frac{y_j - w}{|y_j - w|} : j \in J \right\} \subset \partial B^m.$$

Definujme si zobrazení $\varphi : D \longrightarrow D'$ a to zcela přirozeně

$$\varphi : \frac{x_j - x}{|x_j - x|} \in D \longmapsto \frac{y_j - w}{|y_j - w|} \in D', \quad j \in J.$$

Nyní ukážeme, že zobrazení φ je L - Lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

S ohledem k tomu, že indexová množina J je konečná, řešme požadovanou nerovnost pro x_1, x_2 a y_1, y_2 Uvažujme trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou x_1, x_2, x a y_1, y_2, w. Důležité je, že úhel při bodu x je větší než úhel při bodu w. To plyne z toho, že

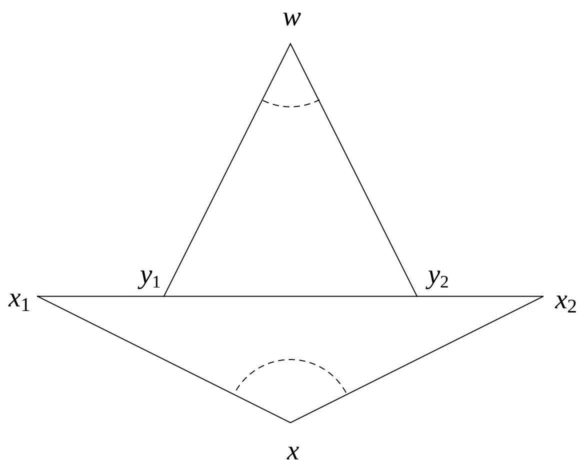
$$|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|,$$

dle předpokladu 2.4 a

$$|x_i - x| \leq r_i \leq |y_i - w|, \quad i = 1, 2,$$

z důkazu vedeného sporem.

Následující obrázek vše vysvětluje. Z geometrického hlediska je jasné, že úhel při bodu x musí být větší, protože protilehlá strana bodu x je ostře větší než protilehlá strana bodu w.



Obrázek 3: Trojúhelník x_1, x_2, x a trojúhelník y_1, y_2, w

Potom je ovšem jasné, že vzdálenost bodů

$$\frac{x_1 - x}{|x_1 - x|}, \quad \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|},$$

je ostře větší než vzdálenost bodů

$$\frac{y_1 - w}{|y_1 - w|}, \quad \frac{y_2 - w}{|y_2 - w|}.$$

Jinými slovy

$$\left|\frac{x_1 - x}{|x_1 - x|} - \frac{x_2 - x}{|x_2 - x|}\right| \leq L \left|\frac{y_1 - w}{|y_1 - w|} - \frac{y_2 - w}{|y_2 - w|}\right|, \quad L < 1.$$

Zobrazení φ je tak L - Lipschitzovské s konstantou $L < 1$.

Užitím Lemmatu 12 dostáváme, že D' je částí otevřené polokoule. Řekněme například, že $D' \subset \partial B^m \cap \{x_m > 0\}$. No ale to není možné, protože díky otevřenosti polokoule můžeme posunout bod w ve směru bázového vektoru e_m. To potom hodnotu $G(w)$ zmenší. Tím jsme ukázali spor s nabýváním minima v bodě w.

Lemma 14 Mějme $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, kde $A \subset \mathbb{R}^n$ je konečná množina, f je 1 - Lipschitzovská. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$, pak existuje rozšíření funkce f na $A \cup \{x\}$ se zachováním 1 - Lipschitzovské konstanty.

Důkaz Mějme $A = \{x_1, \dots x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ dle předpokladu.

Pro $i = 1, \dots k$ položme

$$r_i = |x - x_i|,$$
$$y_i = f(x_i).$$

Potom podmínky 2.4 a 2.5 z Lemmatu 13 jsou splněny a existuje bod $y \in \mathbb{R}$ takový, že

$$y \in \bigcap_{i=1}^{k} B(y_i, r_i),$$
$$|y - y_i| \leq r_i, \quad i = 1, \dots k,$$
$$|y - f(x_i)| \leq |x - x_i| = r_i, \quad i = 1, \dots k.$$

Položme $f(x) = y$. Tím jsme úspěšně rozšířili f i do bodu x se zachováním lipschitzovské konstanty.

Poznámka 15 Zajímavé je Lemma 13. Jedná se o lemma, které se v jisté formě objevuje snad v každém důkazu Kirszbraunovy věty. Řadu různých obměn tohoto lemmatu lze nalézt například v [1].

Nyní jsme již připraveni vrátit se k našemu hlavnímu cíli a to k důkazu Kirszbraunovy věty.

Věta 10 (Kirszbraun)
Nechť $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ je L - Lipschitzovská funkce. Pak existuje rozšíření funkce f na lipschitzovskou funkci $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se stejnou konstantou L takovou, že $F|_A = f$.

Důkaz BÚNO předpokládejme, že $L = 1$. Protože jinak místo $f(x)$ uvažujme funkci $\frac{f(x)}{L}$.

K množině A si vezměme její spočetnou hustou část, označme ji jako $\{a_1, a_2, \dots\}$. Dále k $\mathbb{R}^n \backslash A$ si vezměme též její spočetnou hustou část $\{b_1, b_2, \dots\}$.

Můžeme předpokládat, že tyto naše množiny jsou nekonečné. Pro $\mathbb{R}^n \backslash A$ konečnou je rozšíření velice snadné. Použili bychom pouze několikrát Lemma 14. V případě, že A je konečná, uvidíme, že následující argumenty se nebudou příliš lišit.

Nyní opakovaně použijme Lemma 14 postupně pro $k = 1, 2, \dots$ Obdržíme soubor 1 - Lipschitzovských funkcí tvaru

$$f_k : \{a_1, \dots a_k, b_1, \dots b_k\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

takových, že

$$f_k(a_i) = f(a_i), \quad i = 1, \dots k.$$

Kromě toho jsme ovšem získali omezenou posloupnost $(f_k(b_1)) \subset \mathbb{R}^m$. To plyne z následující úvahy

$$|f_k(b_1)| - |f_k(a_1)| \leq |f_k(b_1) - f_k(a_1)| \leq |b_1 - a_1|,$$

$$|f_k(b_1)| \leq |b_1 - a_1| + |f_k(a_1)| = |b_1 - a_1| + |f(a_1)|.$$

Z této posloupnosti tedy vyberme konvergentní podposloupnost a označme ji $(f_{k_j^1}(b_1))$.

Podobně můžeme najít konvergentní podposloupnost $(f_{k_j^2}(b_2))$. A nic nezkazíme tím, když bude již vybraná z $(f_{k_j^1})$.

Postupujme takto indukcí dále. Nakonec získáme diagonální posloupnost, označme si ji pro přehlednost (g_j), která je tvaru pro

$$C := \{a_1, a_2, \dots\} \cup \{b_1, b_2, \dots\},$$

$$g_j := f_{k_j^j},$$
$$g(c) := \lim_{j\to\infty} g_j(c) \in \mathbb{R}^m, \quad c \in C.$$

Použitím právě Lemmatu 14 jsme docílili toho, že funkce $g : C \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je 1 - Lipschitzovská. Také platí $g(a_i) = f(a_i),\ i = 1, 2 \dots$

Protože $f = g$ na $\{a_1, a_2, \dots\}$, potom i $f = g$ na $A \backslash \{a_1, a_2, \dots\}$. To plyne přímo z hustoty množiny $\{a_1, a_2, \dots\}$ v A.

Na množině $\{b_1, b_2, \dots\}$ jsme funkci g definovali jako limitu diagonální posloupnosti, tudíž je zde definována dobře pro každé $b_i,\ i = 1, 2, \dots$ Pro $b \in \mathbb{R}^n \backslash A$, najdeme posloupnost $b'_j \longrightarrow b$, kde $b'_j \in \{b_1, b_2, \dots\}$. Taková posloupnost určitě existuje z hustoty $\{b_1, b_2, \dots\}$ v $\mathbb{R}^n \backslash A$. Samozřejmě položíme

$$g(b) = \lim_{j\to\infty} g(b'_j). \tag{2.7}$$

Poté $g(b'_j)$ je cauchyovská posloupnost snadno z

$$|g(b'_m) - g(b'_n)| \leq |b'_m - b'_n|,$$

prostor $\mathbb{R}^m$ je úplný a tudíž $g(b)$ je dobře definováno.

Toto rozšíření zřejmě nezáleží na volbě posloupnosti $\left\{b'_j\right\}$ - což je opět jasné z hustoty a konstruované 1 - Lipschitzovské funkci g. Tudíž je takový postup jednoznačný.

Funkce g byla úspěšně rozšířena a obdrželi jsme tedy rozšíření funkce f a to $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Poznamenejme ještě, že tato nová funkce g je určitě 1 - Lipschitzovská, to jest

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

To je naprosto zřejmé, použijeme konstrukci v 2.7 a stejnými argumenty jako výše získáme snadno, že g je opravdu 1 - Lipschitzovská.

Kapitola 3

Rozšiřování funkcí nad obecnějšími prostory

3.1 Charakteristika rozšiřování

Definice 16 Řekneme, že dvojice prostorů (X, Y) má ***vlastnost (K)*** kdykoliv $\{B(x_i, r_i), i \in I\}$ je množina koulí v X a $\{B(y_i, r_i), i \in I\}$ je množina koulí v Y, kde I značí jistou indexovou množinu takovou, že

$$d_Y(y_i, y_j) \leq d_X(x_i, x_j), \quad i, j \in I, \tag{3.1}$$

$$\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i) \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

Pak platí

$$\bigcap_{i \in I} B(y_i, r_i) \neq \emptyset. \tag{3.3}$$

Definice 17 Řekneme, že dvojice (X, Y) má ***vlastnost rozšiřování kontrakcí (izometrií, lipschitzovských funkcí s konstantou L, hölderovských funkcí stupně*** α***)*** jestliže pro zcela libovolnou množinu $X_0 \subset X$ a pro libovolné zobrazení $f : X_0 \longrightarrow Y$, které je kontrakcí (izometrií, lipschitzovskou funkcí s konstantou L, hölderovskou funkcí stupně α) existuje zobrazení $F : X \longrightarrow Y$, které je opět kontrakcí (izometrií, lipschitzovskou funkcí s konstantou L, hölderovskou funkcí stupně α) a splňuje $F|_{X_0} = f$.

Poznámka 18 V předchozích dvou definicích jsme nijak necharakterizovali prostory X, Y. To protože budeme zkoumat různé prostory jako například metrické nebo Hilbertovy prostory. Z kontextu bude vždy jasné o jakých prostorech budeme mluvit.

Čtenář si jistě všimnul velké podobnosti Definice 16 a Lemma 13. Lemma 13 bylo formulováno pro prostor $\mathbb{R}^n$. Ovšem následující věta ukazuje, že právě *vlastnost (K)* z Definice 16 je důležitá i pro metrické prostory.

Věta 19 Dvojice metrických prostorů (X, Y) má *vlastnost rozšiřování kontrakcí* právě tehdy, když (X, Y) má *vlastnost (K)*.

Důkaz „$\Rightarrow$" Nejprve předpokládejme, že (X, Y) má *vlastnost rozšiřování kontrakcí*. Mějme dvě množiny koulí v X a Y, které z Definice 17 splňují 3.1 a 3.2. Budeme se snažit dokázat 3.3.

Zvolme $x \in \bigcap\limits_{i \in I} B(x_i, r_i)$ a definujme si zobrazení $f(x_i) = y_i$, $i \in I$. Poté f je kontrakcí z množiny $X_0 = \{x_i, i \in I\}$ do Y díky předpokladu 3.1.

Dále podle předpokladu věty, f může být rozšířeno na celý prostor X při zachování kontrakce, speciálně i na náš bod x. Tedy existuje $y \in Y$ takové, že

$$d_Y(y, y_i) \leq d_X(x, x_i) \leq r_i, \quad i \in I,$$

tudíž $y \in \bigcap\limits_{i \in I} B(y_i, r_i)$ a 3.3 je splněno.

„$\Leftarrow$" Podívejme se na druhou implikaci. Nechť $f : X_0 \longrightarrow Y$ je kontrakce, $X_0 \subset X$. Zobrazení f rozšíříme „bod po bodu".

Zvolme $x \in X \backslash X_0$ libovolně.

Uvažujme dvě různé množiny koulí

$$\{B(w, d_X(x, w)) : w \in X_0\}, \quad \{B(f(w), d_X(x, w)) : w \in X_0\}.$$

Ty odpovídají přesně předpokladu *vlastnosti (K)*, protože f je kontrakce.

Z uzavřenosti koulí dostáváme

$$x \in \{B(w, d_X(x, w)) : w \in X_0\}\,.$$

Určitě potom dle *vlastnosti (K)* existuje

$$y \in \{B(f(w), d_X(x, w)) : w \in X_0\}\,.$$

Položme $f(x) = y$, to zřejmě f rozšiřuje na $X_0 \cup \{x\}$ a stále zůstává kontrakcí.

Nyní již zbývá akorát argumentovat, proč nám stačí rozšíření „bod po bodu". V případě, že by se jednalo o separabilní prostor, tak stačí rozšířit f na hustou část množiny X. Obecně ovšem musíme využít Zornova lemmatu.

Definujme si

$$\varepsilon = \{(S, g) : X_0 \subset S \subset X, g : S \longrightarrow X \text{ je kontrakce}, g|_{X_0} = f\}\,.$$

Na této množině definujme částečné uspořádání $\prec$ následovně

$$\begin{gathered}(S_1, g_1), (S_2, g_2) \in \varepsilon,\\ (S_1, g_1) \prec (S_2, g_2) \Leftrightarrow (S_1 \subset S_2 \ \wedge\ g_2|_{S_1} = g_1).\end{gathered}$$

Pro libovolnou lineární uspořádanou množinu $\alpha \subset \varepsilon$ položme

$$\begin{gathered}S_\alpha = \bigcup \{S : (S, g) \in \alpha \text{ pro nějaké } g\},\\ g_\alpha(y) = g(y) \text{ pro } (S, g) \in \alpha, \text{ kde } y \in S.\end{gathered}$$

Je snadné ověřit, že definice je korektní a (S_α, g_α) je horní závora α v ε. Tím dostáváme, že v ε existuje maximální prvek (S_X, f_X) vzhledem k $\prec$. Tento maximální prvek rozšiřuje f na celé X. Protože kdyby tomu tak nebylo, mohli bychom f_X rozšířit o jeden další bod stejným způsobem, jakým jsme konstruovali první krok. Tak bychom ovšem došli ke sporu s maximalitou v Zornově lemmatu.

3.2 Hlubší pohled na Hilbertovy prostory

Věta 20 Jestliže H je Hilbertův prostor, pak (H, H) má *vlastnost rozšiřování kontrakcí a hölderovských funkcí pro* $0 < \alpha \leq 1$.

Důkaz Tento důkaz je v řadě knih zcela vynechán, nebo je například dokázán přímo pouze pro Hilbertův prostor ℓ^2. Důvod je jednoduchý, vlastně velice podobný důkaz jsme už jednou vedli. Uvedeme zde pouze naznačení.

Podle Věty 19 je tento problém ekvivalentní ukázat, že (X, Y) má *vlastnost (K)*. Ale místo prostoru X budeme uvažovat metrický prostor H s metrikou $\|x - y\|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ a místo Y uvažujeme obvyklou metriku indukovanou normou $\|x - y\|$.

Jak jsme se již zmínili v Poznámce 18, ukázat, že (X, Y) má *vlastnost (K)*, je velice podobné Lemmatu 13, které jsme dokázali. Kdybychom chtěli korektně ověřit tvrzení této věty, tak bychom přepracovali důkaz v Lemmatu 13. Rozdíl by byl v použití metrik $\|x - y\|$, $\|x - y\|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ a dalších pár drobností. Proto si tuto část, která by nepřinesla již nic nového, odpustíme.

Ukažme alespoň, že $\|x - y\|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ nám opravdu definuje metriku. Všechny požadované vlastnosti metriky jsou jasné až na trojúhelníkovou nerovnost.

Zřejmě platí

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq (\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq (\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha)(\max\{\|x\|, \|y\|\})^{1-\alpha}.$$

Potom

$$\|x - y\| = \|(x - z) - (y - z)\|,$$

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\leq (\|x - z\|^\alpha + \|y - z\|^\alpha)(\max\{\|x - z\|, \|y - z\|\})^{1-\alpha} \leq \\ &\leq (\|x - z\|^\alpha + \|y - z\|^\alpha)(\|x - z\|^\alpha + \|y - z\|^\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \\ &= (\|x - z\|^\alpha + \|y - z\|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

A tedy

$$\|x - y\|^\alpha \leq \|x - z\|^\alpha + \|y - z\|^\alpha.$$

Pro úplnost přeci jenom uveďme některé zdroje literatury, kde lze nalézt alespoň částečně důkaz - jedná se o knihu [12] nebo článek [3].

Věta 21 Nechť H je Hilbertův prostor. Pak dvojice (H, H) má *vlastnost izometrického rozšíření* právě tehdy, když H je konečné dimenze.

Obecněji, pokud $S \subset H$ a $T : S \longrightarrow H$ je izometrie. Potom T může být izometricky rozšířeno na $\operatorname{span} S$.

Důkaz „$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že $S \subset H$ a $T : S \longrightarrow H$ je izometrie. Pro $b \in H$ pevné označme

$$t_b(x) = x + b, \quad x \in H.$$

Zvolme $a \in S$ libovolně a položme

$$\begin{gathered} S' = S - a, \\ b = -Ta. \end{gathered}$$

Potom $T' = t_b \circ T \circ t_a$ je izometrie S' do H splňující $T'(0) = 0$.

Tedy $\|T'x\| = \|x\|$, $\langle T'x, T'y\rangle = \langle x, y\rangle$ pro $x, y \in S'$.

Označme si

$$\begin{gathered} V := \operatorname{span} S', \\ W := \operatorname{span} T'(S'). \end{gathered}$$

Definujme $\widetilde{T} : V \longrightarrow W$ předpisem

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j T' x_j,$$

kde uvažujeme $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j, x_i \in S', a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots n$.

$\widetilde{T}$ je lineární izometrický operátor. Právě z izometrie plyne, že operátor je dobře definovaný. Při stejném značení jako výše docílíme

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T' x_j \right\|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \langle T' x_j, T' x_k\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \langle x_j, x_k\rangle = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|^2.$$

A tedy

$$\left\|\widetilde{T}(x)\right\| = \|x\|\,, \quad x \in V.$$

Z tohoto důvodu je $\widetilde{T}$ lineární izometrie z V na W a $t_{-b} \circ \widetilde{T} \circ t_{-a}$ je izometrií na $\operatorname{span} S$, která rozšiřuje T.

Pokud je H konečně dimenzionální, podprostory V, W mají stejnou dimenzi. Tedy i jejich ortogonální doplňky $V^{\perp}, W^{\perp}$ mají stejnou konečnou dimenzi. Proto určitě zde existuje lineární izometrie z $V^{\perp}$ na $W^{\perp}$. To ovšem znamená, že jsme schopni najít lineární izometrii T'' z H na H, která rozšiřuje T'. Složení $t_{-b} \circ T'' \circ t_{-a}$ je hledaná izometrie rozšiřující T.

„$\Rightarrow$“ Postupujme sporem. Nechť H není konečné dimenze. Najdeme příklad, který nebudeme schopni izometricky rozšířit.

Volme ℓ^2 prostor a $S = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2 : x_1 = 0\}$. Definujme

$$T : S \longrightarrow \ell^2,$$

$$T : x \in S \longmapsto (x_2, x_3, \ldots).$$

V tomto speciálním případě T je spojitý lineární izometrický operátor, protože

$$\|Tx\| = \|(x_2, x_3, \ldots)\| \leq \|x\|\,.$$

Volbou $x := (0, 1, 0, \ldots)$, dosáhneme $\|Tx\| = 1$.

Tento lineární operátor nemůže být izometricky rozšířen na vektor $x = (1, 0, \ldots)$. Pokud by tomu tak bylo, pak existuje $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2$ tak, že $Tx = y$. Pro volbu prvku

$$x' = (0, y_1, y_2, \ldots) \in S,$$

obdržíme $Tx = y = Tx'$. Tudíž T není bijekce, protože není prosté.

Na prostoru ℓ^2 jsme našli příklad, který nelze izometricky rozšířit. Libovolný nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor H ovšem obsahuje ℓ^2 jakožto izometrický podprostor. Tím jsme ukázali potřebnou implikaci a tvrzení je dokázáno.

Poznámka 22 Postupně se nám povedlo rozšiřovat různé funkce na různých prostorech. Naposled jsme se zabývali Hilbertovými prostory. Vyvstává otázka, zda nemůžeme i tento požadavek zeslabit. Ovšem ukazuje se, že to již není možné - Hilbertovská struktura je poměrně podstatná. To nasvědčuje i následující Lemma 23. Pokud bychom přesto chtěli omezit předpoklad Hilbertova prostoru, museli bychom předpokládat několik dalších velmi omezujících požadavků.

Lemma 23 Mějme prostor $\ell_n^p, n \geq 2, p > 2$. Potom (ℓ_n^p, ℓ_n^p) nemá *vlastnost (K).*

Důkaz Uvažme body $x_1, x_2, x_3 \in \ell_n^p$ následovně

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (0, 0, \dots 0),\\
x_2 &= (0, 1, \dots 0),\\
x_3 &= (1, 0, \dots 0)
\end{aligned}
$$

a jednotlivé koule $B_i = B(x_i, 2^{\frac{1-p}{p}})$. Spočtěme si vzdálenosti

$$
\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|_p = \|x_1 - x_3\|_p &= 1,\\
\|x_1 - x_2\|_p &= 2^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Z definice normy v prostoru ℓ_n^p získáme, že

$$\bigcap_{i=1}^{3} B_i = \left\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots 0) \right\}.$$

Položme

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1,\\
y_2 &= ((1 - 2^{1-p})^{\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1-p}{p}}, 0, \dots, 0),\\
y_3 &= ((1 - 2^{1-p})^{\frac{1}{p}}, -2^{\frac{1-p}{p}}, 0, \dots, 0),
\end{aligned}
$$

$$B_i' = B(y_i, 2^{\frac{1-p}{p}}),$$

$$
\begin{aligned}
\|y_1 - y_2\|_p = \|y_1 - y_3\|_p &= 1,\\
\|y_1 - y_2\|_p &= 2^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Ale při tomto zvolení obdržíme

$$\bigcap_{i=1}^{3} B'_i = \emptyset.$$

Protože $(1-2^{1-p})^{\frac{1}{p}} > 2^{\frac{1-p}{p}}$ dostáváme

$$B'_2 \cap B'_3 = \left\{((1-2^{1-p}), 0, \dots 0)\right\} \notin B'_1,$$

$$\bigcap_{i=1}^{3} B'_i = B'_1 \cap B'_2 \cap B'_3 = \emptyset.$$

Tím jsme zjistili, že (ℓ^p_n, ℓ^p_n) nemá *vlastnost (K)*.

Kapitola 4

Závěr

4.1 Otevřené problémy

S velikou rozmanitostí všech různých prostorů a funkcí vyvstává celá řada otázek, na které jsme neodpověděli a též na které zatím neumíme odpovědět. Například jsme se nijak nezabývali prostory L^p nebo Banachovými prostory. Jedná se již o tvrzení, kde musíme předpokládat několik nepříjemných předpokladů. Pro bližší zájem doporučuji určitě velmi pěknou a přehlednou knihu [12].

Jako zajímavost zde uvádím některé otevřené problémy, většina z nich pojednává o konstantě lipschitzovskosti u rozšířených funkcí. Zpravidla nás totiž zajímá její nejmenší možná hodnota nebo její omezenost na podobných prostorech.

Mějme f lipschitzovskou funkci, $f : X \longrightarrow Z, X \subset Y$, kde X, Y, Z jsou metrické prostory. Hledáme funkci $F : Y \longrightarrow Z$, která rozšiřuje f a je také lipschitzovská.

Použijme standardní značení

$$\|f\|_{Lip} = \sup_{x \neq y} \frac{d_Z(f(x), f(y))}{d_Y(x, y)},$$

$$e(X, Y, Z) = \sup_{f : X \to Z} \inf \left\{ K; F : Y \to Z, F|_X = f, \|F\|_{Lip} \leq K \|f\|_{Lip} \right\},$$

$$e_n(X, Z) = \sup\{e(X, Y, Z) : X \text{ je } n \text{ - bodová podmnožina } Y\}.$$

Následující otázky poté jsou:

1. *Může být $e_n(L^2, L^1)$ omezená konstantou nezávislou na n?*
2. *Jaká je největší možná hodnota $e_n(X, Z)$ pro libovolný metrický prostor X a libovolný Banachův prostor Z?*
3. *Jaké je řádové srovnání $e_n(L^2, L^p)$ pro $2 < p < \infty$?*

   Doposud známé výsledky jsou pouze méně obecné:
   Pro X metrický a Z Banachův prostor je nejlepší horní odhad $O(\log n / \log\log n)$. Nejlepší spodní odhady zatím vždy narazily na $O(\sqrt{\log n})$.

4. *Je pro $1 < q < 2 < p < \infty$ $e_n(L^p, L^q)$ omezená?*

4.2 Shrnutí

Tím jsme se tedy dostali až na konec. Toto téma jistě není zcela vyčerpáno. Na několika místech jsem se snažil spíše naznačit cestu a odvolat se na doplňující literaturu. Práce, kterou jsem předložil, má uvést do této problematiky a měla by čtenáře zaujmout k tomu, aby si uvědomil, že podrobnější zkoumání by jistě mohlo zasluhovat pozornost.

Literatura

[1] Aschenbrenner M., Fischer A.: *Definable versions of theorems by Kirszbraun and Helly*, 1 - 34, 2009.

[2] Caselles V., Morel Jean-Michel, Sbert C.: *An Axiomatic Approach to Image Interpolation*, IEEE Trans. Image Process, vol. 7, no. 3, 376 - 386, 1998.

[3] Goemans M. X.: *Embeddings of Finite Metric Spaces*, 2006.

[4] Grunbaum B.: *A generalization of theorems of Kirszbraun and Minty*, Proc. Amer. Math. Soc. 13/5, 812-814, 1962.

[5] Heinonen J.: *Lectures on Lipschitz analysis*, 1 - 9, 2004.

[6] Kirszbraun M. D.: *Über die zusammenziehende und Lischitzsche transformationen*, Fund. Math. 22, 77 - 108, 1934.

[7] Matoušek J.: *Open problems on embeddings of finite metric spaces*, 13 - 14, 2007.

[8] Mémoli F., Sapiro G., Thompson P.: *Brain and surface warping via minizing Lipschitz extensions*, IMA Preprint Series 2092, 2006.

[9] Oberman Adam M.: *An explicit solution of the Lipschitz extension problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 4329-4338.

[10] Randrianantoanina B.: *Extensions of Lipschitz maps*, International Conference on Banach Spaces and Operator Spaces, Tianjin 2007.

[11] Valentine F. A.: *On the extension of a vector function so as to preserve a Lischitz condition*, Bull. Amer. Math. Soc. 49, 100 - 108, 1943.

[12] Wells J. H., Williams L. R.: *Embeddings and Extensions in Analysis*, 1975.