Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

MODELY ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O POHYBU

Models of motion word problems solution

Ondřej Havel

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.**

Specializace v pedagogice

matematika – tělesná výchova a sport

se zaměřením na vzdělávání

2009

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškerou použitou literaturu uvádím v přiloženém seznamu literatury.

V Praze, dne 28. 06. 2009

podpis

Děkuji doc. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. za její laskavou odporu, cenné rady a připomínky a její svatou trpělivost.

V této práci jsou zpracovány různé typy slovních úloh o pohybu, které se nejčastěji vyskytují ve školní matematice. Dal jsem si za úkol ukázat a podrobně rozebrat základní modely řešení těchto typů úloh. V postupech řešení hledám konstrukce, které jsou všem typům slovních úloh o pohybu společné. Na základě získaných poznatků je v práci sestaven postup řešení, který je u většiny typů úloh stejný.

Práce je psaná tak, aby mohla posloužit i jako učebnice pro výuku slovních úloh o pohybu; proto jsou všechna řešení rozepsána krok po kroku a je zde zařazena i kapitola „Na co je dobré dát si pozor při řešení slovních úloh o pohybu“.

This Bachelor Thesis deals with different types of motion math word problems which occur most frequently in school mathematics. My aim was to illustrate and analyse basic models of solving these types of math problems. In the process of solving this Bachelor Thesis finds certain structure that is common for all kinds of motion word problems. On the basis of gained finding there is compiled an universal solving process that is the same for most of the word problems.

The Thesis is written simultaneously as a textbook for solving motion math word problems. Therefore all solutions are described step by step and the chapter called „What is good to beware of solving motion math word problems“ is included in this Thesis as well.

Obsah

Úvod

Vyučování matematice klade velký důraz na důkladné a logické osvojení si učiva žáky a na jeho uvědomělé využívání při řešení situací z reálného života. Ve výuce matematiky jsou tyto reálné situace modelovány především slovními úlohami, s jejichž řešením se žáci setkávají od 1. ročníku základní školy.

Postup při řešení slovních úloh se člení na tři základní fáze:
matematizace slovní úlohy
řešení matematické úlohy
konfrontace výsledku matematické úlohy se zadáním slovní úlohy.
[2; s.4]

Každá z těchto tří fází je pro každého řešitele (alespoň ze začátku) obtížná; další problémy se objevují, když se fáze spojují dohromady.

Když jsem řekl jedné známé, že budu psát o slovních úlohách o pohybu, reagovala stylem: „No tak to bych teda nemohla, ty jsem prostě nikdy pořádně nepochopila. A nejhorší bylo, když jeli proti sobě a každej vyjel jindy. To byl pro mě konec." A na očích jí bylo vidět, že je na sebe hrdá, jak vysokou znalost slovních úloh o pohybu předvedla. Musím přiznat, že na mě udělala dojem, neboť většina reakcí byla ve smyslu: „ Jo, jasně, to znám, vlak jede z bodu A do bodu B. Jakou barvu očí má průvodčí?"

Znám jen málo těch, kteří měli slovní úlohy rádi, zato znám mnoho lidí, kteří (místo toho, aby si na slovních úlohách cvičili logické uvažování a využívali je při řešení situací z reálného života) se slovním úlohám uzavřeli, a kteří z nich mají dodnes přímo fobii. Jak se k slovním úlohám, a speciálně k slovním úlohám o pohybu, lidé většinou staví, myslím skvěle ilustruje vtip:

Učitel: „Z bodu A do bodu B vyrazí v čase t cyklista rychlostí σ. Ve 12:30 za ním z Přerova vyjede rychlostí ω parní válec. Protože je sychravo, musí cyklista často sesedat z kola a jeho rychlost se pak 2x sníží.

Kolik je mi let?“

Po chvilce mlčení se přeci jenom nad hlavami dětí objeví jedna nejistá ručička.

„Ano Martine?!?“

„Čtyřicet dva?“

„No, ano. Jaks na to přišel?“

„Víte, bráchovi je jednadvacet a táta o něm říká, že je to poloviční blázen.“

„V učebnicích matematiky se setkáváme se slovními úlohami, k jejichž řešení stačí pouze jedna operace – **jednoduché slovní úlohy,** a se slovními úlohami, k jejichž řešení je třeba více než jedné početní operace – **složené slovní úlohy.** V jednoduchých slovních úlohách jsou zpravidla zadány dva údaje, z nichž získáme třetí údaj vedoucí k odpovědi na danou otázku. Řešení složené slovní úlohy provádíme tak, že postupně vytváříme a postupně řešíme dílčí jednoduché úlohy, z nichž každá vede jen k jedné početní operaci.“ [2; s.4]

Tato práce si klade za cíl poodhalit taje slovních úloh o pohybu a nalézt nějakou strukturu postupu řešení, která je všem (úlohám o pohybu) společná, (pokud taková struktura existuje).

1. Co je to slovní úloha

Tato otázka je například velmi podrobně zpracována v knize J. Novotné.

„V (Helus a kol., 1979, str. 220) je uvedeno toto obecné vymezení učební úlohy: Učební úloha je každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle, je zaměřena na všechny tři aspekty učení – obsahový (představující specifický odraz společensko historické zkušenosti), operační (tvořený učebními, poznávacími a jinými činnostmi a operacemi žáka) a motivační (tvořený především zájmy, sklony, potřebami apod. žáka).

Pojem úloha (anglicky problem) používá také Polya: Podle dnes již klasické práce (Polya, 1966, str. 117) řešit úlohu znamená hledat vědomě nějaký vhodný postup, abychom obdrželi jasně koncipovaný cíl, který však nemusí být dosažitelný okamžitě.

Ve (Vyšín, 1972, str. 11) je uvedeno toto vymezení úlohy: Je dána množina M matematických objektů a je dána výroková forma f o jedné nebo více proměnných. Úkolem je nalézt a udat (způsobem zatím blíže neurčeným) obor pravdivosti P formy f v množině M, tj. množinu všech objektů z M, pro něž dává f pravdivý výrok. Vyšín rozlišuje určovací, důkazové a existenční úlohy, za nejúplnější typ považuje úlohy určovací a ty stručně nazývá matematickými úlohami. Ukazuje, že důkazové a existenční úlohy jsou speciálním případem úloh určovacích.“ [8; kapitola 1.1 Pojem slovní úlohy]

I ona však nakonec konstatuje, že najít v literatuře věnované slovním úlohám přesnou a vyčerpávající odpověď na otázku Co je slovní úloha? se nepodaří. „V (Odvárko, 1995) je uvedeno toto vymezení: Slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších mimomatematických oblastí. V (Kuřina, 1989, str. 61), je slovní úloha charakterizována jako úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“ [8; kapitola 1.1 Pojem slovní úlohy]

V [2; s.4] jsou slovní úlohy definované jako takové úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací. Pomocí vhodných úvah zjišťujeme, jaké početní operace je třeba provést se zadanými údaji, abychom mohli odpovědět na otázku slovní úlohy. Principem řešení těchto úloh je vytvoření matematického modelu konkrétní situace vyjádřené textem úlohy. Přechod od reálné situace k příslušnému matematickému modelu se nazývá matematizace reálné situace. Tím rozumíme vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem v matematickém jazyce.

2. Slovní úlohy o pohybu

Co je to slovní úloha o pohybu?

V této práci považujeme za slovní úlohu o pohybu takovou slovní úlohu, při jejímž řešení použijeme vzorec pro výpočet rychlosti v = s/t (v některé jeho formě).

V dalších kapitolách bude podrobněji probráno:

Jak slovní úlohu (případně úlohy) o pohybu řešit?
Jaké matematické úkony vlastně děláme při řešení slovních úloh o pohybu?
Co je všem úlohám o pohybu společné?
Na co je dobré dát si pozor při řešení slovních úloh o pohyb?

Poznámka: Úlohy použité v této práci, i převážná část úloh řešených ve školní výuce je idealizovaná, neboť je při řešení zanedbán fakt, že objekty (auto,vlak, loď, atd.) se nepohybují konstantní rychlostí ihned, ale musí na ni nejprve zrychlit z výchozí pozice. A stejně tak objekt ihned nezabrzdí, ale postupně zpomalí až do klidové polohy.

2.1. Typy slovních úloh o pohybu.

Z hlediska zadaných situací a částečně také z hlediska způsobu řešení rozlišuje Trávníček [12] slovní úlohy o pohybu na jedenáct typů:

1. Jednoduché úlohy na vztah mezi drahou, rychlostí a časem
2. Pohyb týmž směrem po uzavřené dráze
3. Pohyb protisměrný po uzavřené dráze
4. Pohyb po okruhu
5. Opakované návraty
6. Kombinace různých rychlostí pohybu
7. Pohyby v pohybujícím se prostředí
8. Doprava v konstantních intervalech
9. Pohyby po dvou různých drahách
10. Jízda ve vlaku
11. Jiné

V dalších kapitolách se budeme věnovat každému typu slovních úloh o pohybu zvlášť. Ke každému typu napíšeme stručnou charakteristiku, ukázkovou úlohu a základní strategie řešení.

2.1.1. Jednoduché úlohy na vztah mezi drahou, rychlostí a časem

„V tomto typu úloh jsou dány dvě ze tří hodnot s, v, t a je třeba dopočítat zbývající. Obměny této úlohy spočívají pouze v tom, které veličiny jsou zadány, případně v převodu jednotek (pokud nejsou veličiny zadány v odpovídajících si jednotkách).“ [11; s.35]

Ukázková úloha:

Za kolik minut dojede vlak pražského metra ze stanice Dejvická do stanice Skalka (10 km), je-li průměrná cestovní rychlost vlaku 30 km/h?[1]

Řešení:

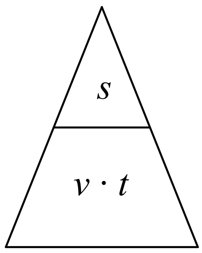
1) pomocí vzorce

Použijeme vzorec pro výpočet rychlosti (jako závislosti dráhy na čase) známý z fyziky: $v = s/t$

v = 30 [km/h]

s = 10 [km]

$t = s/v$



$v = s/t$

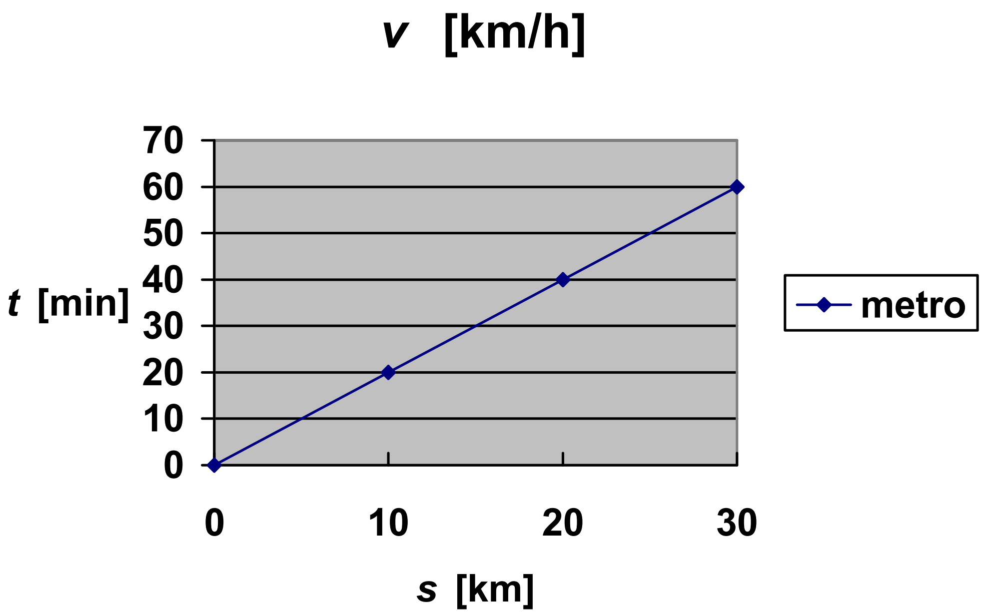
$s = v{\cdot}t$

$t = s/v$

t = 10/30 [h] = 1/3 [h] = 20 [min]

[1] Pokud není uvedeno jinak, vymyslel jsem úlohy sám.

2) grafické



Použijeme-li znalostí z fyziky a nakreslíme graf pro rychlost *v*, tak, při vhodně zvoleném měřítku, můžeme všechny údaje rovnou odečíst přímo z grafu.

3) úvahou

Např.:

Když za hodinu ujede vlak 30 kilometrů, ujede 1 kilometr za 2 minuty. Takže 10 kilometrů ujede za 20 minut.

Odpověď :

Vlak metra dojede ze stanice Dejvická do stanice Skalka za 20 minut.

2.1.2. Pohyb týmž směrem po uzavřené dráze

„Tento typ úlohy patří ve školní výuce k jednomu ze dvou nejtypičtějších. Jedná se o následující model: Z místa A vyjede první objekt rychlostí v^1, poté co urazí vzdálenost s^1 (nebo po čase t^0) za ním vyrazí druhý objekt rychlostí v^2, která je vždy vyšší než v^1.

Princip řešení je v tom, že v okamžiku setkání jsou oba objekty stejně vzdálené od místa A, tudíž se jejich dráhy rovnají. To je také zpravidla základní informace pro sestavení rovnic (rovnice).“ [11; s.35]

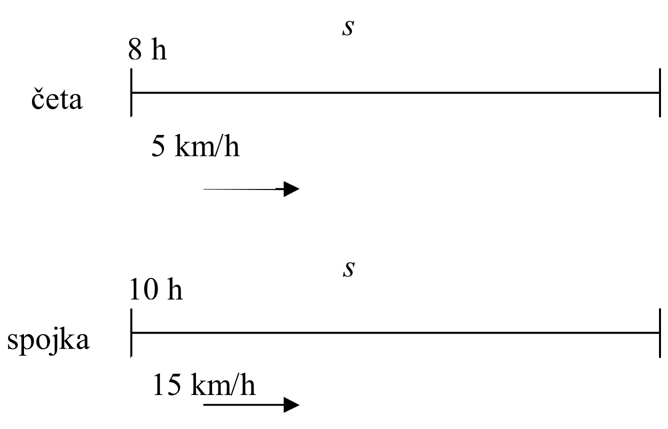
Ukázková úloha:

V 6 hodin ráno odpochodovala z kasáren četa vojáků rychlostí 5 km/h. V 8 hodin za ní vyrazila spojka rychlostí 15 km/h. V kolik hodin a jak daleko od kasáren dostihne spojka četu? [3; s.91]

Řešení:

1) ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)

	v[km/h]	s [km]	t[h]
Četa	5	s^1	t^1
Spojka	15	s^2	t^2



$t^2 = t^1 - 2$

$s = v \cdot t$

$$s^2 = s^1$$

$$15 \cdot (t^1 - 2) = 5 \cdot t^1$$

$$15 \cdot t^1 - 30 = 5 \cdot t^1 \qquad / -(5 \cdot t^1)$$

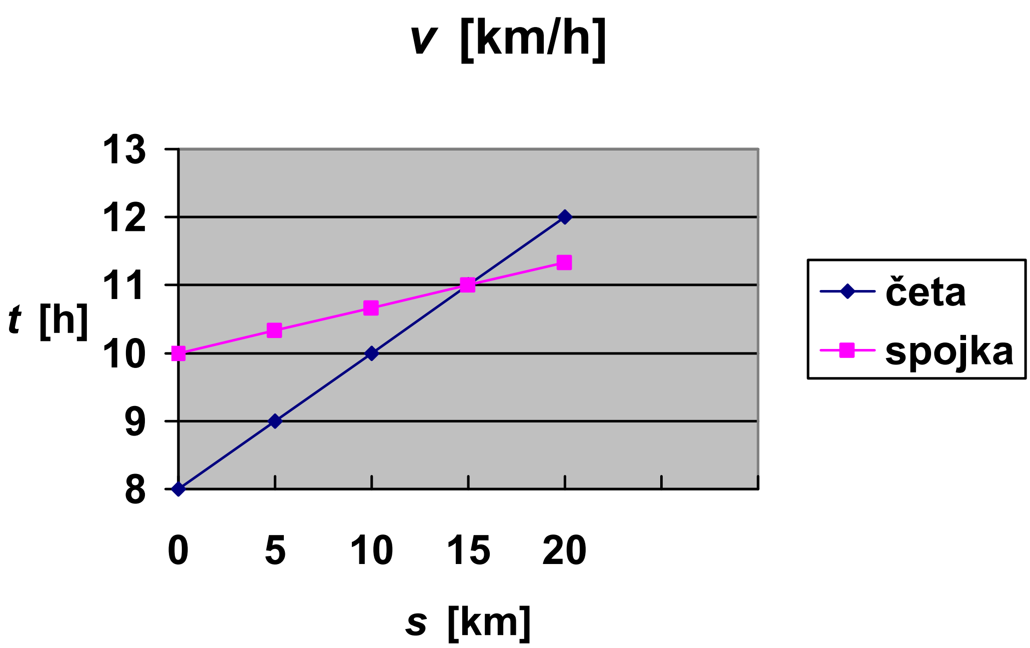
$$10 \cdot t^1 = 30 \qquad / : 10$$

$$t^1 = 3 \text{ [h]}$$

$s = 5 \cdot 3 = 15$ [km] s^1

$8 + 3 = 11$ [h]

2) grafické



I kdybychom nezvolili vhodně jednotky, nebo graf jen načrtli, vždy můžeme alespoň z jeho os odečíst rovnice pro dráhu a čas $t^2 = t^1 - 2$; $s^1 = s^2$.

3) úvahou

Např.: Když vyrazí spojka na cestu, četa už má za sebou 2 hodiny chůze, to jest 10 km cesty. Spojka vyrazí v 10 hodin. Když by jela 1 hodinu, ujede 15 km a četa ujde dalších 5 km (10+5=15).

Odpověď :

Spojka dostihne četu v 11 hodin, a to 15 kilometrů od kasáren.

„Stejným způsobem je sestaven i druhý základní typ úlohy; náskok je ovšem vyjádřen v kilometrech.

Úloh tohoto typu je nepřeberné množství, dají se mnoha způsoby komplikovat, můžeme měnit podmínky a okolnosti úlohy. Změny podmínek lze realizovat v různých oblastech. Může se jednat o nejrůznější obměny ve způsobu zadání téhož, například různé vyjádření náskoku." [11; s.35]

2.1.3. Pohyb protisměrný po uzavřené dráze

„Tento typ je druhým nejčastěji se vyskytujícím ve školním vyučování, jedná se o klasické modelové příklady, zadávané na následujícím principu: Vzdálenost dvou míst A a B je s. Z A do B se začne v určitém okamžiku pohybovat určitý objekt rychlostí v_1. Z B do A se ve stejný okamžik (nebo později – to už se jedná o variaci) začne pohybovat jiný objekt rychlostí v_2. Otázka zní, kdy a kde se setkají.

Základním principem řešení tohoto typu úloh o pohybu zpravidla bývá, že $s_1 + s_2 = s$ a $t_2 = t_1$ (pokud není úloha zkomplikována různou dobou startu objektů). Podobně jako u předchozího typu (a pochopitelně u všech ostatních) lze tento typ mnoha způsoby zkomplikovat (měnit vstupní podmínky).“ [11; s.36]

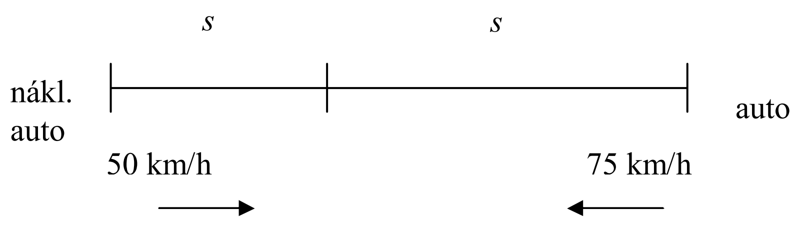
Ukázková úloha:

Ze dvou míst vzdálených od sebe 375 km vyjedou současně proti sobě dvě auta. Z místa A jede nákladní auto rychlostí 50 km/h, z místa B jede auto rychlostí 75 km/h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od místa A se setkají? [15]

Řešení:

1) ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)

	v[km/h]	s [km]	t[h]
nákl. Auto	50	s_1	t_1
Auto	75	s_2	t_2



s = 375 km

$s^2 = s - s^1 = 375 - s^1$

$t = s/v$

$$t^2 = t^1$$

$$s^2/75 = s^1/50$$

$$(375-s^1)\ /75 = s^1/50 \qquad / \cdot 150$$

$$2\cdot(375-s^1) = 3\cdot s^1$$

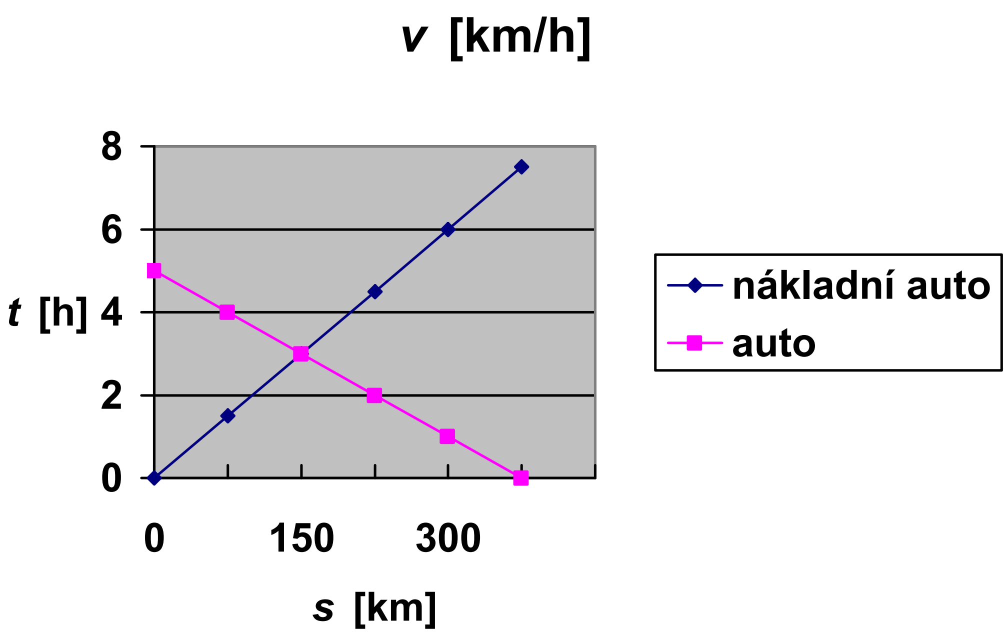
$$750 - (2\cdot s^1) = 3\cdot s^1 \qquad /-(3\cdot s^2)\ -750$$

$$-5\cdot s^1 = -750 \qquad / \cdot(-5)$$

$$s^1 = 150\ [\mathrm{km}]$$

$t = 150/50 = 3\ [\mathrm{h}]$

2) grafické

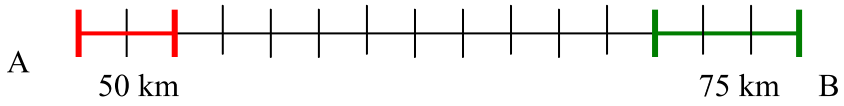


I kdybychom nezvolili vhodně jednotky, nebo graf jen načrtli, vždy můžeme alespoň z jeho os odečíst rovnice pro dráhu a čas $t^2 = t^1$; $s^2 = s - s^1$

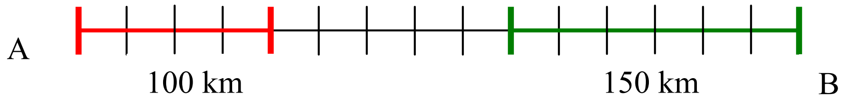
3) grafické (lineární)

Vzdálenost míst A a B je 375 kilometrů.

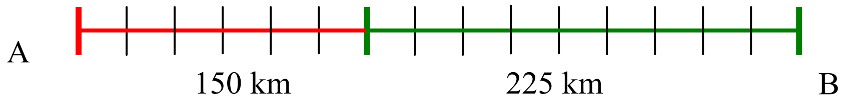
Za hodinu ujede nákladní auto 50 km a osobní auto 75 km, situace potom vypadá takto:



Za další hodinu ujede nákladní auto dalších 50 km a osobní auto dalších 75 km, situace potom vypadá takto:



A za další hodinu se setkají.



Tento způsob řešení je u lidí velmi oblíbený, lze ale použít jen v případě, že je úloha „pěkně“ zadána (například vyjde-li výsledek v celých hodinách, případně půlhodinách).

4) úvahou

Např.:Obě auta dohromady ujedou za hodinu (50+75=125) 125 km. Celková dráha je 375 km.

$$375/125 = 3$$

$$3 \cdot 50 = 150 \text{ [km]}$$

Odpověď :

Auta se setkají za tři hodiny ve vzdálenosti 150 km od bodu A.

Zastavme se ještě u jednotlivých způsobů řešení. Při pozorném prostudování ikonografického řešení je zřejmé, že obrázkem i tabulkou jsou vyjádřeny ty samé informace, jinak řečeno, v tabulce jsou přehledně zapsány informace, které se dají vyčíst z obrázku. Jak obrázek, tak tabulka usnadňují vhled do úlohy, takže je dobré obojí použít, i když to není pro řešení úlohy bezpodmínečně nutné.

Grafické řešení je sice elegantní, ale velmi náročné na porozumění úloze a používání grafů, navíc je třeba vhodně zvolit jednotky na osách, což vyžaduje předem odhadnout výsledek. Pro jednodušší úlohy je toto řešení pravděpodobně zbytečně pracné a pro obtížné úlohy zase moc složité. Vrátíme se zpátky k řešení ikonografickému. Velmi často splete řešitele fakt, že se snaží při kreslení obrázku zaznamenat informace o dvou proměnných (dráha a čas) na jednu osu. A v tuto chvíli se jeví jako šikovné použít místo obrázku (jak jej tradičně užíváme) graf, kde je každá z veličin vynesena na vlastní ose.

Řešení úvahou je pro jednoduché slovní úlohy pravděpodobně nejrychlejší, ovšem pro složitější úlohy už je velmi náročné na logické uvažování, představivost i paměť řešitele.

Z výše uvedených důvodů se budeme dále zabývat hlavně řešením ikonografickým, neboť je to jediné z řešení u kterého není třeba využívat zvláštního nadání (práce s grafy, představivost, paměť, atd.)

2.1.4. Pohyb po okruhu

„Tyto úlohy jsou v mnohém podobné dvěma předchozím typům úloh. Po okruhu (z téhož místa) vyjedou dva objekty buď v tomtéž, nebo v opačném směru. Jsou zadány jejich rychlosti a má se zjistit, jak často se objekty potkávají; nebo je naopak zadáno, jak často se objekty potkávají, a mají se zjistit jejich rychlosti.“ [11; s.37]

Ukázková úloha a):

Na kruhové dráze vyjedou z téhož místa dva cyklisté v témž směru. První objede dráhu za 1 minutu 52 sekund druhý za 2 minuty 24 sekund. Po jaké době se dohoní? [13; s.453]

Princip řešení této úlohy je podobný jako řešení úlohy o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze. Vycházíme z toho, že se dráhy obou objektů při prvním setkání liší o jedno kolo.

Řešení:

1) ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)

Nejdříve si musíme uvědomit, že úloha je zadaná v nestandardních jednotkách a že jeden cyklista ujede o kolo víc než druhý. Potom už se úloha nápadně podobá úloze na pohyb týmž směrem po uzavřené dráze.

	v[kolo/s]	s[kolo]	t[s]
1.cyklista	1/112	s^2+1	t
2.cyklista	1/144	s^2	t

$s^1 = s^2+1$; $t = s/v$; $t^2 = t^1$

$s^2/(1/144) = (s^2+1)/(1/122)$

$144\,s^2 = 112(s^2+1)$

$144\,s^2 = 112\,s^2+112 \qquad /-112\,s^2$

$32 \cdot s^2 = 112 \qquad / : 32$

$s^2 = 3{,}5$ [kola]

$t = 144 \cdot 3{,}5 = 504$ [s] = 8 [min] a 24 [s]

2) úvahou

Např.:

Úvahou dojdeme opět ke stejné rovnici. To, že se mají dohonit, znamená, že rychlejší cyklista objede dráhu (s^2+1) krát (s^2 nemusí být celé číslo). To znamená:

$s^2/(1/144) = (s^2+1)/(1/122)$

$144\ s^2 = 112(s^2+1)$

$144\ s^2 = 112\ s^2+112 \qquad /-112\ s^2$

$32 \cdot s^2 = 112 \qquad / : 32$

$s^2 = 3{,}5$ [kola]

$t = 144 \cdot 3{,}5 = 504$ [s] = 8 [min] a 24 [s]

Odpověď :

Cyklisté se opět dohoní po 8 minutách a 24 sekundách

Ukázková úloha b):

Dva cyklisté, Rostislav a Alexandr, trénují na oválu. Vyrazili ve stejný moment ze stejného místa. Rosťa je rychlejší než Saša, a tak vždy přesně po 7 kolech Sašu předjede. Za jak dlouho ujede Rosťa jedno kolo, víme-li, že Sašovi trvá 164 sekund?

$s_1 = s_2 - 1$

	v[kolo/s]	s[kolo]	t[s]
Saša	1/164	6	t_1
Rosťa	v_2	7	t_2

$t = s/v$; $t_2 = t_1$

$$t_2 = t_1$$

$$7 / v_2 = 6/ (1/164) / \cdot(1/7)$$

$$1/v_2 = (6\cdot164)/7 \;/ \cdot v_2 \cdot (7/(6\cdot164))$$

$$v_2 = 1/132 \text{ [kolo/s]}$$

Odpověď:

Rosťa zajede jedno kolo za 132 sekund.

2.1.5. Opakované návraty

Z určitého místa vyjede současně několik objektů, které se opakovaně vracejí s různými periodami. Otázka zní, kdy budou opět všechny zpět na původním místě a kolikrát se přitom každý z nich vrátil.

Ukázková úloha:

Kruhovou dráhu stadionu objede cyklista za 8 minut, druhý za 10 minut, třetí za 12 minut. Vyjedou-li současně od startu a jedou-li stále stejně rychle, přibližně po téže kružnici, za kolik minut projedou zase zároveň startem a po kolikáté se při tom každý z nich vrátil? [13; s.453]

Toto je typická úloha na hledání nejmenšího společného násobku.

$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$10 = 2 \cdot 5$
$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$n(8, 10, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120$

Odpověď :

Cyklisté se na startu sejdou po 120 minutách, první ujede 15 kol, druhý 12 kol a třetí ujede kol 10.

Úloha na opakované návraty není z hlediska řešení úlohou o pohybu, spíš ji lze považovat za úloho na výpočet nejmenšího společného násobku, která je zadaná jako slovní úloha se sportovní tématikou.

2.1.6. Kombinace různých rychlostí pohybu

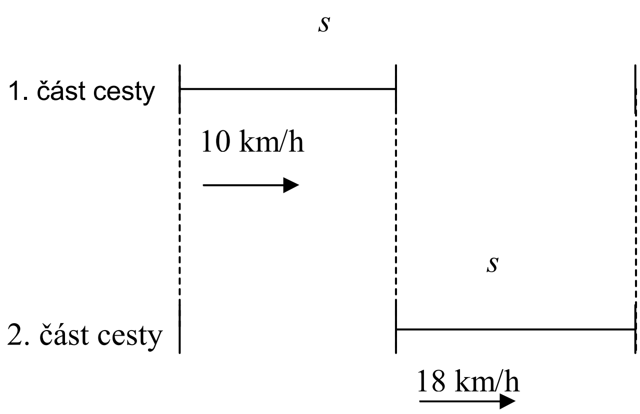
„U tohoto typu úloh najdeme několik forem zadání. Může se jednat o jeden objekt, který se na své cestě pohybuje v prvním úseku rychlostí v_1 a ve druhém úseku rychlostí v_2. Je dána délka některého úseku dráhy (nebo celá dráha) a celkový čas (nebo dílčí čas). A mají se dopočítat zbývající údaje." [11; s.37]

Ukázková úloha:

Cyklista jel z osady do města. První polovinu cesty, vedoucí převážně do kopce, jel rychlostí 10 km/h, druhou polovinu cesty, která převážně klesala, jel rychlostí 18 km/h. Celá cesta mu trvala 56 minut. Určete vzdálenost osady od města. [1; s.107]

ikonografické řešení (obrázek, tabulka, výpočet):

	v[km/h]	*s* [km]	*t*[h]
1. část cesty	10	s_1	t_1
2. část cesty	15	s_2	t_2



$s = 2 \cdot s_1$; $s_1 = s_2$

$t = 56$ [min] $= 56/60$ [h] $= 14/15$ [h]

$t = t_1 + t_2$

$t = s/v$

$$t = t^1 + t^2$$

$$14/15 = s^1/10 + s^1/18 \qquad / \cdot 90$$
$$6 \cdot 14 = 9 \cdot s^1 + 5 \cdot s^1$$
$$14 \cdot s^1 = 14 \cdot 6 \qquad / : 14$$
$$s^1 = 6$$

$$s = 2 \cdot s^1 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ [km]}$$

Odpověď :

Vzdálenost osady od města je 12 km.

„Druhou možností zadání je, že se určitý objekt pohybuje určitou rychlostí a pak se jinou rychlostí vrací zpět. Jsou dány rychlosti a celkový čas.

Třetí forma zadání je podobná první – objekt jede v různých úsecích své cesty různými rychlostmi a máme určit jeho průměrnou rychlost.“ [11; s.38]

2.1.7. Pohyby v pohybujícím se prostředí

„Zpravidla jsou aktéry těchto úloh plavci či lodě plující proti proudu a po proudu nebo objekty létající po větru a proti větru (ptáci, letadla...). Objekt se pohybuje proti proudu rychlostí v_1 a pak hned po proudu rychlostí v_2. Kromě toho je potřeba zohlednit rychlost proudu.“ [11; s.35]

Ukázková úloha:

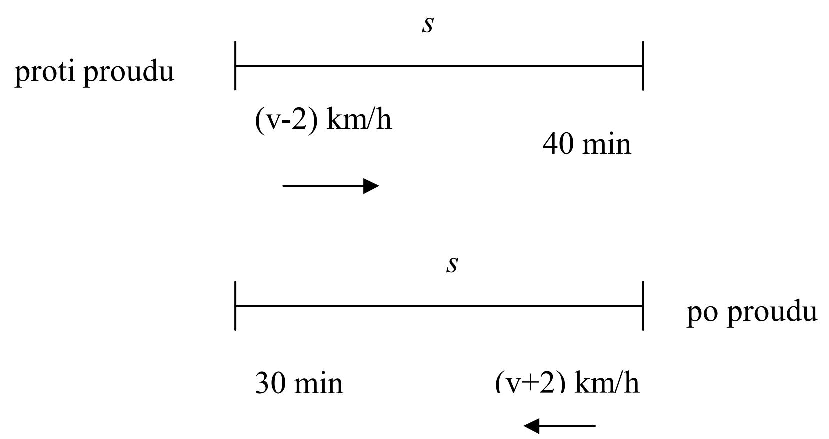
Parník ujede vzdálenost mezi dvěma přístavy proti proudu řeky za 40 minut a zpáteční cestu po proudu vykoná za 30 minut. Určete rychlost parníku v klidné vodě, je-li rychlost proudu řeky 2 km/h. [1; s.108]

Řešení:

ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)

40 [min] = 2/3 [h]   30 [min] = 1/2 [h]

	v[km/h]	*s* [km]	*t*[h]
proti proudu	v-2	*s*	2/3
po proudu	v+2	*s*	1/2



$s=v\cdot t$; $s_1=s_2$

$$\begin{aligned} (v-2)\cdot 40 &= (v+2)\cdot 30 \\ 40\cdot v-80 &= 30\cdot v+60 && /-30\cdot v+80 \\ 10\cdot v &= 140 && /\cdot(1/10) \\ v &= 14\ [\mathrm{km/h}] \end{aligned}$$

Odpověď :

Parník by jel v klidné vodě rychlostí 14 km/h.

U tohoto typu úloh je třeba využít zkušeností z fyziky, případně logického úsudku, neboť rychlost není zadaná přímo, ale v závislosti na pohybu okolního prostředí. Řešíme vlastně dvě „jednoduché úlohy o pohybu“ ($s_1=v_1 \cdot t_1$ a $s_2=v_2 \cdot t_2$), ovšem nemáme ze zadání dostatek informací k tomu, abychom je vyřešili samostatně. Je třeba využít dalších vztahů mezi jednotlivými veličinami (např. $s_1=s_2$; $v_1=v_2-4$). Potom už dostatek informací k sestavení a vyřešení rovnice máme. Případně ještě dopočítáme zbývající veličiny a úloha je vyřešena.

2.1.8. Doprava v konstantních intervalech

„Na trati délky s jezdí dopravní prostředky rychlostí v_1 každých x minut. Po této trati se pohybuje objekt rychlostí v_2 a) stejným směrem, b) opačným směrem. Jak často se potkává s dopravními prostředky (s kolika se cestou setká).“ [11; s.38]

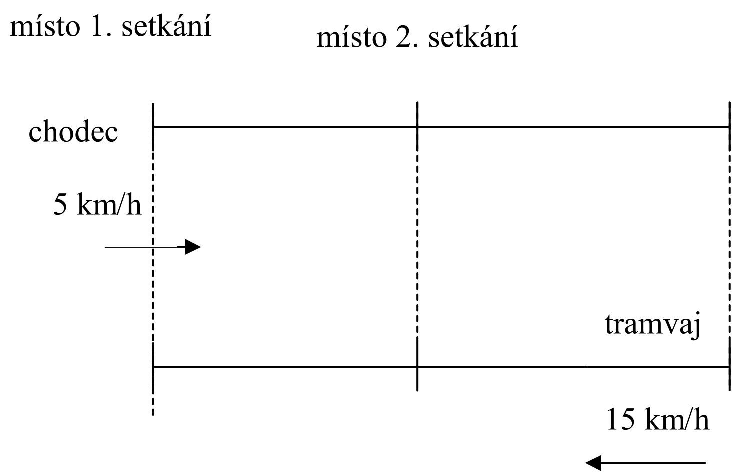
Ukázková úloha:

Chodec kráčí rychlostí 5 km/h podél trati elektrické dráhy. Jestliže v určitém okamžiku potkal vůz elektrické dráhy, po kolika minutách potká druhý, jestliže vozy jezdí v intervalech 5 minut a rychlostí 15 km/h? Jestliže v určitém okamžiku jej předjede jeden vůz, po kolika minutách jej předjede druhý? [13; s.457]

Řešení:

ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)

Chodec jde proti směru jízdy tramvaje



Tramvaj jezdí v pětiminutových intervalech a má rychlost 15 km/h. Z tohoto údaje můžeme spočítat $s = 15\cdot(1/12) = 5/4$ [km].
Dostaneme úlohu na protisměrný pohyb po uzavřené dráze.

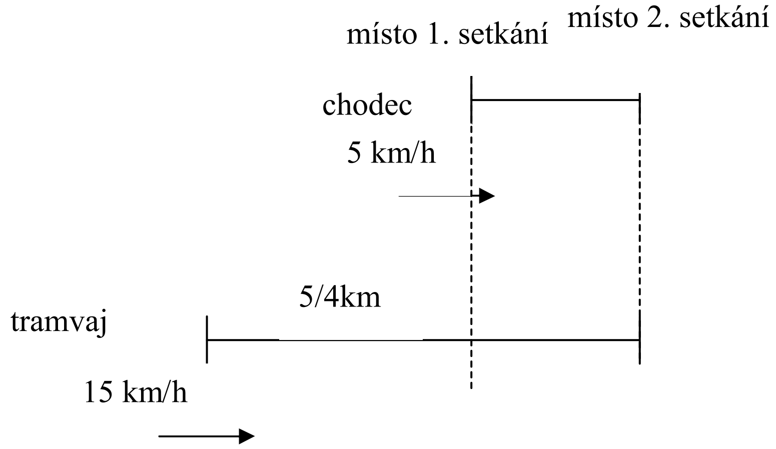
	v[km/h]	s[km]	t[h]
Chodec	5	s_1	t
Tramvaj	15	(5/4)- s_1	t

t = 3 [min] a 45 [s]

Odpověď :

Chodec potká další vůz za 3 minuty a 45 sekund.

Když jede tramvaj stejným směrem, jako jde chodec,



umíme už sestavit například rovnici pro dráhu *s*:

$5 \cdot t = 15 \cdot t - (5/4)$

$t = 1/8$ [h] = 7 [min] a 30 [s]

Odpověď :

Chodec potká další vůz za 7 minut a 30 sekund.

V těchto typech úloh není problém v tom, že bychom uplatňovaly nějaké nové znalosti, jen je těžké zorientovat se v zadání a použít těch prostředků, které již člověk zná.

2.1.9. Pohyby po dvou různých drahách

„Objekty se pohybují po dvou různých drahách, které se křižují. Z místa ve vzdálenosti s^{1} před křižovatkou se dává do pohybu 1. objekt směrem ke křižovatce, po uplynutí doby t^{0} se na druhé dráze z místa ve vzdálenosti s^{2} před křižovatkou dává do pohybu 2. objekt směrem ke křižovatce, jejich rychlosti jsou v^{1} a v^{2}. Kdy budou tyto objekty v dané vzdálenosti s, nebo kdy se tyto objekty setkají?“ [11; s.38]

Ukázková úloha:

Dva cestující vyšli současně z téhož místa. Jeden směrem na východ, druhý směrem na sever. První ušel denně o 8 km více než druhý. Po 5 dnech chůze byli od sebe vzdáleni 200 km. Kolik ušel každý z nich denně, jestliže předpokládáme, že délka cesty, kterou ušli za den, se u žádného nezměnila? [13; s.458]

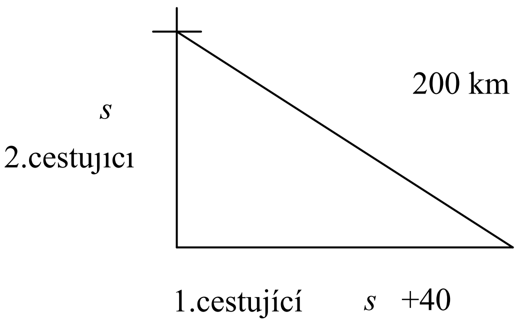
Řešení:

ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)

$5 \cdot 8 = 40$

$s^{1} = s^{2} + 40$

	v[km/h]	s[km]	t[h]
1. cestující	$v^{2} + 8$	s^{1}	t
2. cestující	v^{2}	s^{2}	t



V tomto případě můžeme využít fakt, že pokud má trojúhelník strany v poměru 3:4:5, je pravoúhlý. Pak můžeme rovnou bez počítání říci, že $s_2 = 120$ [km].

120/5 = 24 [km]
160/5 = 32 [km]

Odpověď :

První cestující ušel denně 32 km a druhý cestující ušel denně 24 km.

Standardně se tato úloha řešila pomocí Pythagorovy věty, která vede na kvadratickou rovnici.

Na začátku jsme definovali slovní úlohu o pohybu jako slovní úlohu, ve které použijeme vzorec pro výpočet rychlosti $v=s/t$ (případně nějakou jeho obměnu). Takže předchozí úloha vlastně ani úlohou o pohybu není. Je to jen docela zajímavě zadaná úloha na aplikaci Pythagorovy věty. Ovšem úlohu o pohybu z této úlohy uděláme, pokud k zadání přidáme například ještě otázku: „Jakou šli rychlostí, víme-li, že strávili chůzí každý den osm hodin?“

O každém z obou cestujících víme, jak dlouho šel a jakou ušlel vzdálenost. Jedná se tedy o dvě „jednoduché úlohy o pohybu“ ($v_1=s_1/t_1$ a $v_2= s_2/t_2$), které dokážeme vyřešit samostatně.

2.1.10. Jízda ve vlaku

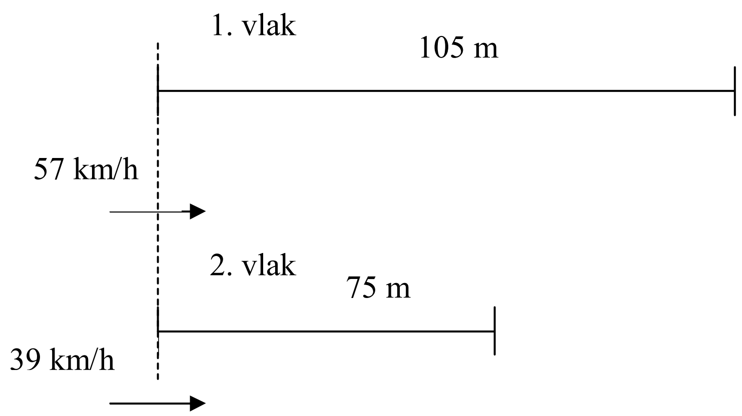
Jedná se o úlohy, ve kterých se musí kromě klasických veličin počítat ještě s délkou vlaku. Důležité je umět převádět mezi jednotkami (z [m] na [km] a z [km/h] na [m/s]).

Ukázková úloha:

Po dvou rovnoběžných kolejích jedou týmž směrem dva vlaky, rychlík 105 metrů dlouhý rychlostí 57 km/h a osobní vlak 75 m dlouhý rychlostí 39 km/h. Jak dlouho trvá, než každý vlak mine pozorovatele sedícího ve druhém vlaku? [13; s.458]

Řešení:

ikonografické (obrázek, tabulka, výpočet)



Úloha není ani tak náročná na výpočet, jako na pochopení zadání.

Dělí se na dvě „podúlohy“. A to na úlohu, kdy bude pozorovatel sedět někde v prvním vlaku, a na úlohu, kdy bude pozorovatel sedět někde ve vlaku druhém.

Rychlost bude vždy stejná:

$v = |v_1 - v_2| = |57 - 39| = 18$ [km/h]

Dráhy se liší podle délky druhého vlaku.

Vznikne jednoduchá úloha na vztah mezi drahou, rychlostí a časem.

1. pozorovatel sedí v prvním vlaku

s=75 [m] = 0,075 [km]
$t=s/v$

t =0,075/18=75/1800=1/240 [h] = 15 [s]

Odpověď :
Druhý vlak mine pozorovatele sedícího v prvním vlaku za 15 sekund.

2. pozorovatel sedí ve druhém vlaku

s=105 [m] = 0,105 [km]
$t=s/v$

t =0,105/18=105/1800=7/1200 [h] = 21 [s]

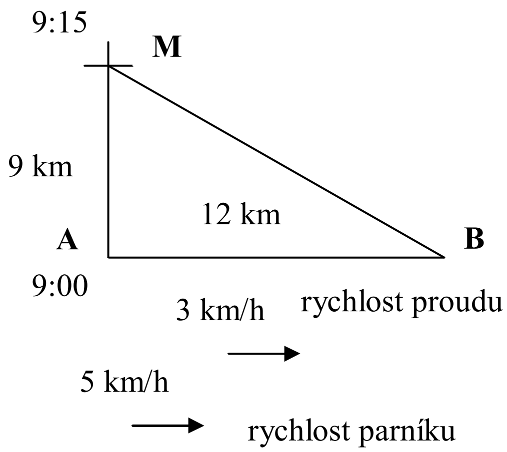
Odpověď :
Prvý vlak mine pozorovatele sedícího ve druhém vlaku za 21 sekund.

2.1.11. Jiné

Do této kategorie patří úlohy, které nelze zařadit do žádného z předchozích typů, úlohy, které jsou něčím zvláštní, nebo úlohy různým způsobem kombinované, které vyžadují řešení problémů několika typů.

Ukázková úloha:

V 9 hodin vypluje z místa A do místa B výletní parník se skupinou 40 anglosaských seniorů. Místo B je od místa A vzdáleno 12 kilometrů po proudu a řeka v tomto úseku teče zcela rovně s rychlostí proudu 3 km/h. O 15 minut později vyrazí na kole z města M, které je od řeky vzdušnou čarou vzdáleno 9 kilometrů, pojišťovací agent, který se chce ke skupině připojit. Jakou průměrnou rychlostí musí jet, aby dorazil do místa B stejně se seniory, víme-li, že z města M do místa B vede silnice přímo a motor parníku je nastaven na rychlost 5 km/h?



Rychlost cestujících je ve skutečnosti:

$v = 3+5 = 8$ [km/h]

Pro výpočet rychlosti agenta (cyklisty), je třeba znát vzdálenost z M do B, tu lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$a^2 + b^2 = c^2$

$9^2 + 12^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$

	v[km/h]	*s*[km]	*T*[h]
cestující	8	12	t^1
pojišťovák	v^2	15	t^2

$t^2 = t^1 - 1/4$

$15/v^2 = 12/8 - 1/4 \qquad /\cdot\ 8\cdot v^2$

$8\cdot 15 = 12\cdot v^2 - 2\cdot v^2$

$8\cdot 15 = 10\cdot v^2 \qquad /:\ 10$

$v^2 = 12\ [km/h]$

Odpověď :

Aby se pojišťovací agent setkal se skupinou seniorů v místě B, musí jet rychlostí 12 km/h.

2.2. Jaké matematické úkony vlastně děláme při řešení slovních úloh o pohybu?

„Úkony, které provádíme při řešení slovních úloh o pohybu jsou přehledně sestaveny v sledující tabulce:“

	Vztah mezi časy	Vztah mezi drahami	Vztah mezi rychlostmi	Užití vzorce na vztah mezi s,t,v	Sestavení a řešení rovnice
Jednoduché úlohy na vztah mezi s,v,t				$t=s/v$	
Pohyb týmž směrem po uzavřené dráze	$t^2=t^1-\mathrm{k}$	$s^1=s^2$		$s=v\cdot t$	$v^2\cdot(t^1-\mathrm{k})=v^1\cdot t^1$
Pohyb protisměrný po uzavřené dráze	$t^2 = t^1$	$s^2=s-s^1$		$t=s/v$	$s^2/v^2=s^1/v^1$
Pohyb po okruhu	$t^2 = t^1$	$s^1=s^2+1$		$t=s/v$	$s^2/v^2=(s^2+1)/v^1$
Opakované návraty					
Kombinace různých rychlostí pohybu	$t=t^1+t^2$	$s^1=s^2$		$t=s/t$	$t=s^1/v^1+s^1/v^2$
Pohyby v pohybujícím se prostředí		$s^1=s^2$	$v^1=v-\mathrm{k}$; $v^2=v+\mathrm{k}$	$s=v\cdot t$	$v^1\cdot t^1 = v^2\cdot t^2$
Doprava v konstantních intervalech	$t^2 = t^1$	$s^2=s-s^1$		$(s=v\cdot t)$ $t=s/v$	$s^2/v^2 = s^1/v^1$
Pohyby po dvou různých drahách		$s^1=s^2+\mathrm{k}$			
Jízda ve vlaku			$v=\lvert v^1-v^2\rvert$	$t=s/v$	

k...........konstanta

Po pozorném prostudování tabulky lze snadno nahlédnout, že slovní úlohy o pohybu jsou vždy koncipovány tak, aby vedly buď na jednoduchou slovní úlohu o pohybu, nebo k sestavení rovnice na základě informací v zadání úlohy a jejímu řešení.

Velmi často se při sestavení a řešení rovnice úlohy dělí na dva základní typy.

a) jsou si rovny dráhy ($s^1=s^2$),
   potom jsou časy ve vzájemném vztahu tak, aby se dal jeden vyjádřit pomocí druhého (například $t^2 = t^1-k$, kde k je nějaký časový údaj) a vzorec pro vztah mezi s, t, v použijeme ve tvaru $s=v\cdot t$

   Rovnice pak bude vypadat takto: $s^1 = s^2$
   Po dosazení za s: $v^1\cdot t^1 = v^2\cdot t^2$
   A po dosazení za t^2: $v^1\cdot t^1 = v^2\cdot(t^1-k)$

b) jsou si rovny časy ($t^1=t^2$),
   potom jsou dráhy ve vzájemném vztahu tak, aby se dala jedna vyjádřit pomocí druhé (například $s^1=s-s^2$, kde s je celková vzdálenost) a vzorec pro vztah mezi s, t, v použijeme ve tvaru $t=s/v$

   Rovnice pak bude vypadat takto: $t^1 = t^2$
   Po dosazení za t: $s^1/v^1 = s^2/v^2$
   A po dosazení za s^1: $(s-s^2)/v^1 = s^2/v^2$

2.3. Co je všem úlohám o pohybu společné?

Pokud budeme brát za slovní úlohu o pohybu takovou slovní úlohu, ve které je použit vzorec pro vztah mezi drahou, rychlostí a časem (ať už ve tvaru $s=v\cdot t$ nebo $v=s/t$ či $t=s/v$) potom můžeme s jistotou tvrdit, že v každém typu slovní úlohy o pohybu je integrovaná jednoduchá úloha na vztah mezi drahou, rychlostí a časem. A často hned několikrát.

Velmi často vedou slovní úlohy o pohybu na úlohy typu „pohyb týmž směrem po uzavřené dráze" a „pohyb protisměrný po uzavřené dráze". To znamená, že úloha se dělí na „dvě větve" (jednoduché úlohy na vztah mezi drahou, rychlostí a časem) a zároveň se „vrství" na tři vrstvy:

vrstvu časovou (vztah mezi časy)

vrstvu „geometrickou" (vztah mezi drahami)

a samotné použití vzorce

Použijeme zde tedy k výpočtu tří vzorců:

např. $s^1 = s\text{-}s^2$; $t = s/v$; $t^2 = t^1$

(Proto třeba úloha na pohyb po dvou různých drahách, ač vypadala jako úloha o pohybu, byla vlastně jen zajímavě zadanou úlohou geometrickou – neboť využívala jen geometrické „vrstvy" slovní úlohy o pohybu. A proto se změnila na úlohu o pohybu jen pouhým přidáním jedné otázky – neboť tak jsme zapojili do výpočtu další vrstvy.)

Navíc ani rychlost nemusí být zadána přímo (např. typy úloh na pohyby v pohybujícím se prostředí a jízda ve vlaku), v tom případě přibude ještě jedna vrstva, a to vrstva rychlostní (vztahy mezi rychlostmi dvou objektů nebo objektu a prostředí v němž se objekt pohybuje).

např. $v = v^1\text{-}v^2$

To stále není všechno; každá veličina, ať už dráha, rychlost nebo čas, se dá vyjádřit pomocí zbývajících dvou. Potom je třeba tuto veličinu dopočítat pomocí jednoduché úlohy na vztah mezi drahou, rychlostí a časem a pak teprve počítat podle nám již známého modelu.

V zadání se také mohou vyskytovat různé jednotky, ať už fyzikální, například:
1 [h]; 1 [s]; 1 [min];
1 [km];1 [m]; 1 [cm];
1 [km/h]; 1 [m/s],

nebo i nestandardní, například:
1 [den]; 1 [okruh].

Mezi nimi je třeba umět převádět a je třeba k nim umět nalézt odpovídající jednotky ostatních veličin.

2.4. Na co je dobré dát si pozor při řešení slovních úloh o pohybu

I. Někdy lze úlohu včasným zamyšlením znatelně zjednodušit:

Vraťme se teď na chvíli k úloze 3.1.4 Pohyb po okruhu. Při řešení jsme postupovali tak, že jsme dosazením do rovnice $t^1=t^2$ došli k hodnotě s^2 (viz. str.18 a 19) a za pomoci vzorce $t=s/v$ jsme dospěli k výsledku.

Když se nad zadáním řádně zamyslíme, dojdeme k poznání, že úlohu je možno řešit jednodušeji (lépe řečeno přímočařeji), a to tak, že dosadíme do rovnice $s^1 = s^2+1$.

Řešení pak bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} s^1 &= s^2+1 \\ v^1\cdot t &= v^2\cdot t+1 \\ (1/112)\cdot t &= (1/144)\cdot t+1 \quad /\cdot(144\cdot 112) \\ 144\cdot t &= 112\cdot t+(144\cdot 112) \quad /-(112\cdot t) \\ 32\cdot t &= (144\cdot 112) \qquad /\cdot(1/32) \\ t &= (144\cdot 112)/32 \\ t &= 504\ [s] = 8\ [min]\ a\ 24\ [s] \end{aligned}$$

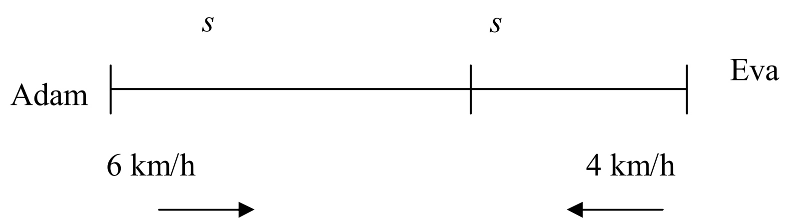
(V tomto případě není možná zjednodušení výpočtu zcela patrné. Proto pro ilustraci vyřešíme úlohu s podobným problémem.)

Ukázková úloha:

Cesta od Adama k Evě je dlouhá 5 kilometrů. Adam si s Evou dojednal schůzku a vyrazil za ní rychlostí 6 km/h. Eva v témž okamžiku vyšla Adamovi naproti rychlostí 4 km/h. Za jak dlouho se setkají? [9; s.29]

1) ikonografické „klasické“ řešení

	v[km/h]	s [km]	t[h]
Adam	6	s^1	t^1
Eva	4	s^2	t^2



$s = 5$ km

$s^1 = s - s^2 = 5 - s^2$

$t = s/v$

$$
\begin{aligned}
t^2 &= t^1 \\
s^2/4 &= s^1/6 \\
s^2/4 &= (5-s^2)/6 && / \cdot 12 \\
3\cdot s^2 &= 2\cdot(5-s^2) \\
3\cdot s^2 &= 10 - (2\cdot s^2) && / +(2\cdot s^2) \\
5\cdot s^2 &= 10 && / \cdot(1/5) \\
s^2 &= 2 \text{ [km]}
\end{aligned}
$$

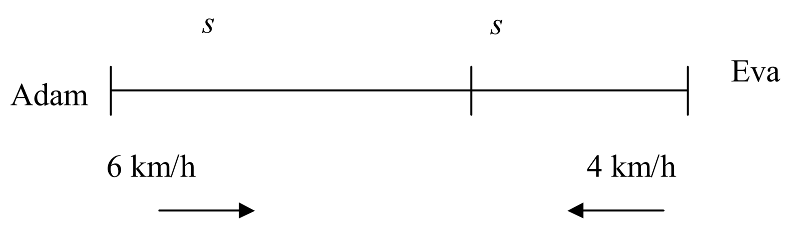
$t = 2/4 = 1/2$ [h] = 30 [min]

Odpověď :

Adam s Evou se setkají za 30 minut.

2) ikonografické řešení po použití jednoduché úvahy

	v[km/h]	s [km]	t[h]
Adam	6	s^1	t^1
Eva	4	s^2	t^2



$s = 5$ km

$t^2 = t^1 = t$

$s = v \cdot t$

$$\begin{aligned} s^1 &= s - s^2 & \\ 6 \cdot t &= 5 - 4 \cdot t & / + (4 \cdot t) \\ 10 \cdot t &= 5 & / \cdot (1/10) \\ t &= 1/2 \text{ [h]} & \end{aligned}$$

Odpověď :

Adam s Evou se setkají za 30 minut.

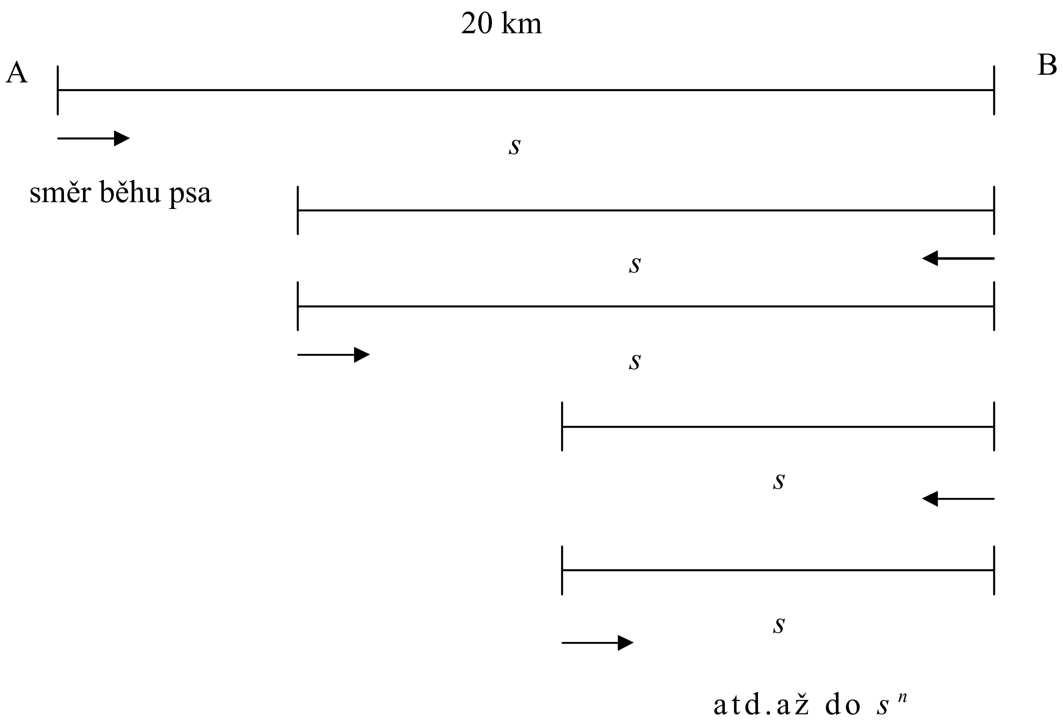
II. Někdy se bez včasné úvahy výsledku dobrat nelze:

Ukázková úloha:

Z bodu A směrem k bodu B (domů), vyjde muž se psem na 20 km dlouhou cestu rychlostí 4 km za hodinu. Společně s ním vyběhne pes a běží až k domovu. Tam se otočí a běží zpět naproti pánovi, který za tu dobu popošel o kus dále. U pána se opět otočí a běží k domovu a zpět a tak pořád dokola. Pes běhá rychlostí 30 km za hodinu. Kolik kilometrů naběhá pes? [14]

Nabízí se řešit úlohu tak, jak je naznačeno na následujícím obrázku, rozdělit si dráhu, kterou pes uběhne, na n částí a ty potom všechny sečíst:

$s = s^1 + s^2 + ... + s^n$



Ovšem takto se k výsledku dojít nedá. Je třeba si uvědomit, že dokud muž nedojde domů, bude pes běhat rychlostí 30 km/h. jedná se tedy o jednoduchou úlohu, kde je čas zadán pomocí další jednoduché úlohy.

Řešení:

Muž jde 20 km dlouhou cestu rychlostí 4 km za hodinu.

$$t = s/v = 20/4 = 5 \ [\mathrm{h}]$$

Pes celou dobu běhá rychlostí 30 km/h.

$$s = v \cdot t = 30 \cdot 5 = 150 \ [\mathrm{km}]$$

Odpověď:

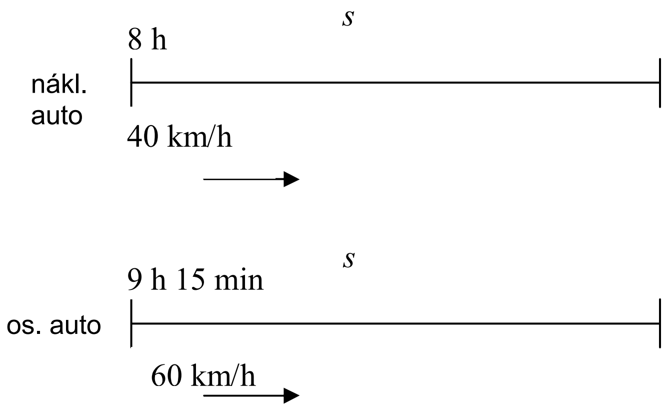
Pes naběhá 150 km.

III. Úloha lze ztížit, pokud ji zadáme tak, aby neměla řešení:

Ukázková úloha:

V 8 hodin vyjel z Klatov do karlovarského podniku M nákladní automobil průměrnou rychlostí 40 km/h. V 9 hodin 15 minut vyjel za ním po stejné trase osobní automobil průměrnou rychlostí 60 km/h. Vzdálenost Klatovy – karlovarský podnik M je 125 km. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od podniku M dožene osobní automobil nákladní? [15]

	v[km/h]	s [km]	t[h]
nákl. auto	40	s^1	t^1
os. auto	60	s^2	t^2



$t^2 = t^1 - 5/4$

$s = v \cdot t$

$$s^2 = s^1$$

$$60 \cdot (t^1 - 5/4) = 40 \cdot t^1$$

$$60 \cdot t^1 - 75 = 40 \cdot t^1 \qquad / -(40 \cdot t^1) + 75$$

$$20 \cdot t^1 = 75 \qquad / : 10$$

$$t^1 = 15/4 \text{ [h]} = 3 \text{ [h] } 45 \text{ [min]}$$

$s = 40 \cdot 15/4 = 150$ [km]

$8 + 15/4 = 47/4$ [h] $= 11$ [h] 45 [min]

Může se zdát, že odpověď zní :

Osobní auto dostihne nákladní auto v 11 hodin 45 minut a to 150 kilometrů od Klatov.

Ze zadání ale víme, že podnik M je od Klatov vzdálen jen 125 kilometrů.

Správná odpověď tedy zní :

Osobní auto nákladní auto nedožene, už bude dávno vyložené.

IV. Občas se slovní úloha „tváří" jako úloha o pohybu, a přitom úlohou o pohybu není:

Ukázková úloha:

Z Bratislavy vyjede vlak do Prahy. Z prahy vyjede vlak do Bratislavy o hodinu později. Oba vlaky jedou stejnou rychlostí. Který vlak bude blíže k Bratislavě v okamžiku setkání? [4; s.17]

Nikde nejsou zadané žádné údaje o rychlostech, drahách, ani časech.

Odpověď:

Samozřejmě, že od Bratislavy budou oba vlaky v okamžiku setkání naprosto stejně vzdáleny. [4; s.22]

Závěr

Odpověď na otázku „Jak slovní úlohu (případně úlohy) o pohybu řešit?“ je zpracována v kapitole 2.1.3 jsou tam vypsány některé klady a zápory základních způsobů řešení slovních úloh o pohybu.

Na otázku „Jaké matematické úkony vlastně děláme při řešení slovních úloh o pohybu?“ je odpovězeno v kapitole 2.2 a otázku „Co je všem úlohám o pohybu společné?“ řeší kapitola 2.3.

Z tabulky, která je v kapitole 2.2 je patrné, že postupy řešení všech úloh o pohybu jsou si nápadně podobné, ovšem nalézt pro ně jeden univerzální postup se mi nepodařilo. Dále v kapitole 2.2 jsou naznačeny dva základní typy řešení, jimiž řešit většinu úloh lze.

Otázkou „Na co je dobré dát si pozor při řešení slovních úloh o pohybu?“ se zabývám v kapitole 2.4.

Práce může být použita jako učebnice slovních úloh o pohybu, nebo jako základ pro podobnou práci o úlohách na rovnoměrně zrychlený pohyb.

Seznam literatury

[1] BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha : Prometheus, 1998. 258 s. ISBN 80-7196-104-3.

[2] BLAŽKOVÁ, Růžena, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, VAŇUROVÁ, Milena. *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Brno : Masarykova univerzita. Pedagogická fakulta, 2002. 84 s. ISBN 80-210-3022-4.

[3] CZUTEK, Pavel, et al. *Slovní úlohy řešené rovnicemi*. Praha : Sdružení podnikatelů HAV, 2001. 153 s. ISBN 80-903625-0-8 .

[4] Galér, F.: *Logické hádanky,hlavolamy a paradoxy.* IRIS, Bratislava 1997.

[5] KORYTA, Dušan, SIVOŠOVÁ, Alica. *Slovní úlohy*. Vít Janota; Antonín Šplíchal. Havlíčkův Brod : Fragment, 2004. 77 s. ISBN 80-7200-904-4.

[6] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 248 s. ISBN 80-04-23753-3.

[7] MIKUŠOVÁ , Mária . *Testy z matematiky '99*. Podivín : Didaktis, 1998. 112 s. ISBN 80-902440-4-1.

[8] NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000. 126 s. ISBN 80-7290-011-0.

[9] ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl*. Praha : Prometheus, 2008. 72 s. ISBN 973-80-7196-372-1.

[10] ROSECKÁ, Zdena. *Rovnice, slovní úlohy : pracovní sešit k učebnici Algebra 8* . Brno : Nová škola, 1999. 48 s. ISBN 80-85607-96-4.

[11] SCHÖFFELOVÁ, Miroslava. *Porozumění slovním úlohám o pohybu*. [s.l.], 2008. 116 s. Vedoucí diplomové práce PhDr. Miroslav Rendl CSc.

[12] ŠVRČEK, Jaroslav, ZABÁLEK, Pavel. *Sbírka netradičních matematických úloh*. Praha: PROMETHEUS, spol. s r.o. , 2007. 186 s. ISBN 80-7196-341-0.

[13] TRÁVNÍČEK, Stanislav. *Slovní úlohy o pohybu.* Praha : Prométheus, 2004/2005. 449 s. ISSN 1210-1761.

[14] *Www.noza.cz* [online]. 2008 [cit. 2009-05-21]. Dostupný z WWW: <http://www.noza.cz/index.php?text=41-slovni-ulohy-pro-deti-zakladnich-skol>.

[15] *Www.zskuncova.org* [online]. 2007 [cit. 2009-05-20]. Dostupný z WWW:

<http://www.zskuncova.org/texty/prijimaci/priklady/ulohyopohybu.pdf>.