Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Kratochvíl

Möbiovy transformace ve více dimenzích

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

2010

Na tomto místě bych chtěl poděkovat RNDr. Romanu Lávičkovi, Ph.D., za vedení práce a poučné konzultace.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne Petr Kratochvíl

Obsah

Název práce: Möbiovy transformace ve více dimenzích
Autor: Petr Kratochvíl
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
e-mail vedoucího: Roman.Lavicka@mff.cuni.cz
Abstrakt: V této práci se zabýváme popisem Möbiových transformací vícerozměrného euklidovského prostoru. Möbiovy transformace definujeme jako zobrazení vzniklá konečným skládáním sférických inverzí a souměrností podle nadrovin. Příklady Möbiových transformací jsou všechna shodná a podobná zobrazení; speciálně získáme popis rotací euklidovského prostoru. Při popisu využíváme matice Cliffordových čísel. Cliffordova čísla v práci zavádíme, včetně souvisejících pojmů konjugace Cliffordových čísel a Cliffordovy grupy. Möbiovy transformace ve dvou dimenzích se standardně popisují pomocí matic komplexních čísel. Tomuto speciálnímu případu se v práci věnujeme zvlášť, protože je užitečný pro pochopení vícerozměrných analogií. Na závěr ukážeme některé zajímavé příklady Möbiových transformací.
Klíčová slova: Möbiovy transformace, Cliffordova algebra, geometrie

Title: Möbius transformations in several dimensions
Author: Petr Kratochvíl
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Roman.Lavicka@mff.cuni.cz
Abstract: In this work we study how to describe Möbius transformations of multidimensional Euclidean space. We define Möbius transformations as mappings composed of a finite number of compositions of spherical inversions and hyperplane symmetries. Examples of Möbius transformations are all isometries and similarities; in particular, we get a description of rotations of Euclidean space. For this description, we use matrices of Clifford numbers. Clifford numbers are defined in this work, including related notions of conjugation of Clifford numbers and Clifford group. Möbius transformations in two dimensions are usually described using matrices of complex numbers. We study this case separately, because it is useful for understanding multidimensional analogies. At the end we show some interesting examples of Möbius transformations.
Keywords: Möbius transformations, Clifford algebra, geometry

Označení

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}$	Množina přirozených, reálných, kladných reálných a komplexních čísel
$\mathbb{R}^n$	n-rozměrný euklidovský prostor
$\{e_i;\ i = 1, \ldots, n\}$	Báze euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euklidovský skalární součin na $\mathbb{R}^n$
$\lVert \cdot \rVert$	Euklidovská norma na $\mathbb{R}^n$
$\widehat{\mathbb{C}}$	Rozšířená komplexní rovina (Riemannova sféra); viz 1.2.2
$\widehat{\mathbb{R}}^n$	Rozšířený n-rozměrný euklidovský prostor; viz 2.1.4
$\mathcal{I}_S$	Sférická inverze podle sféry S nebo souměrnost podle nadroviny S; viz oddíl 2.2
ϖ	Stereografická projekce; viz 2.1.1
$\mathcal{C}_n$	Cliffordova algebra dimenze 2^n; viz oddíl 3.1
$\{e_I;\ I \subset \{1, \ldots, n\}\}$	Báze Cliffordovy algebry $\mathcal{C}_n$
$a', a^*, \overline{a}$	Konjugace Cliffordova čísla a; viz 3.2.1
$\lvert a \rvert$	Absolutní hodnota Cliffordova čísla a; viz 3.2.6
Γ_n	Cliffordova grupa příslušná k $\mathcal{C}_n$; viz 3.2.10
$\mathrm{GL}(\Gamma_n)$	Viz definici 4.1.3
O_n	Množina ortogonálních matic řádu n
SO_n	Množina speciálních ortogonálních matic řádu n
Mg	Přímá Möbiova transformace s maticí koeficientů g
Ng	Nepřímá Möbiova transformace s maticí koeficientů g
$\Delta(g)$	Pseudodeterminant matice g; viz 4.1.2

Úvod

Cílem této bakalářské práce je podrobně vysvětlit, jak se dají Möbiovy transformace ve vícerozměrných euklidovských prostorech popsat pomocí matic typu 2×2, jejichž složky jsou Cliffordova čísla. Jak zmiňuje L. V. Ahlfors v článku [1], tento popis pochází od K. T. Vahlena z roku 1901. Navíc vzorce pro Möbiovy transformace jsou zcela analogické těm, které známe v dvojrozměrném případě.

Möbiovy transformace v komplexním oboru $\mathbb{C}$ jsou funkce tvaru

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{nebo} \quad N(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ jsou pevné koeficienty, splňující podmínku $ad - bc \neq 0$. Pokud identifikujeme množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ s rovinou $\mathbb{R}^2$, můžeme na tyto funkce pohlížet jako na geometrické transformace roviny. Tyto transformace mají velice zajímavé geometrické vlastnosti. K těm překvapivějším patří například to, že jsou to právě zobrazení vzniklá složením konečného počtu osových souměrností a kruhových inverzí.

Tuto charakterizaci Möbiových transformací lze vzít za definici Möbiových transformací ve vícerozměrném euklidovském prostoru. Ovšem je zapotřebí použít vícerozměrné obdoby příslušných zobrazení – souměrnost podle nadroviny a sférickou inverzi. V článku [1] dává L. V. Ahlfors návod, jak využít Cliffordových čísel a získat algebraický popis vícerozměrných Möbiových transformací, velice podobný popisu pomocí komplexních čísel.

V kapitole 1 nejprve stručně zavedeme dvojrozměrné Möbiovy transformace a ukážeme jejich základní vlastnosti. Znalost dvojrozměrného případu, ze kterého při zobecňování vycházíme, pomáhá představit si vícerozměrné analogie.

V kapitole 2 se budeme věnovat souměrnosti podle nadroviny a sférické inverzi, základním stavebním kamenům vícerozměrných Möbiových transformací. Zavedeme rozšířený euklidovský prostor podobným způsobem, jako se v komplexní analýze zavádí rozšířená komplexní rovina. Díky tomuto rozšíření budou Möbiovy transformace dobře definované na celém prostoru. V průběhu zobecňování budeme poukazovat na analogie s dvojrozměrným případem.

Kapitola 3 je algebraická. Zavedeme zde Cliffordova čísla, jejich násobení a některé další související pojmy. Cliffordovými čísly se podrobně zabývají například publikace [7] a [2]. Dokážeme několik pomocných tvrzení o Cliffordových číslech, která nám umožní popsat základní geometrické transformace rozšířeného vícerozměrného euklidovského prostoru algebraicky.

V kapitole 4 provedeme, podle Ahlforsova článku [1], popis Möbiových transformací ve více dimenzích pomocí Cliffordových čísel. Využijeme přitom předem připravených geometrických tvrzení o Möbiových transformacích a algebraických tvrzení o Cliffordových číslech.

1. Möbiovy transformace ve dvou dimenzích

V této kapitole nejprve připomeneme popis Möbiových transformací komplexní roviny pomocí matic komplexních čísel. Následně odvodíme základní poznatky o těchto zobrazeních, zejména jejich geometrickou charakterizaci. Ukážeme totiž, že Möbiovy transformace jsou právě ta zobrazení, která vzniknou složením konečného počtu kruhových inverzí a osových souměrností. Dále stručně připomeneme pojem Riemannovy sféry a příslušným způsobem Möbiovy transformace rozšíříme.

Získání určité představy o Möbiových transformacích v dvojrozměrném případě je užitečné při jejich zobecňování do více dimenzí.

1.1 Transformace komplexní roviny

Zkoumejme funkce $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, které jsou tvaru

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad z \in \mathbb{C},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ jsou pevně dané koeficienty splňující podmínku $ad - bc \neq 0$. Pokud totiž $ad-bc = 0$, je zobrazení M konstantní, nebo není dobře definované, jak vysvětlíme později. Speciálně tedy platí, že koeficienty c a d nejsou oba nulové. Máme tedy zobrazení M definované na celé množině $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, pokud $c \neq 0$, a na celém $\mathbb{C}$, pokud $c = 0$.

Komplexní čísla reprezentují body v rovině – dvourozměrném euklidovském prostoru. Na komplexní funkce se můžeme dívat jako na transformace roviny. Bude nás zajímat, jaké mají tyto transformace vlastnosti, a jak vypadají geometricky.

Podívejme se na několik příkladů.

$M(z) = z + b$ je posunutí o vektor b

$M(z) = az,\ a \in \mathbb{R}$ je stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem a

$M(z) = az,\ a = e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}$ je rotace okolo počátku o úhel φ

Snadno bychom našli takovéto vyjádření dokonce pro každou stejnolehlost a rotaci. Dalším důležitým příkladem je transformace $M(z) = 1/z$. Pro její popis budeme potřebovat pojem kruhové inverze:

1.1.1 Definice: *Mějme kružnici K o středu s a poloměru r ($s \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$). Kruhová inverze podle kružnice K je zobrazení $\mathcal{I}_K : \mathbb{C} \setminus \{s\} \to \mathbb{C} \setminus \{s\}$, které bodu $z \neq s$ přiřadí bod $\mathcal{I}_K(z)$ ležící na polopřímce sz, pro jehož vzdálenost od středu s platí vztah $|\mathcal{I}_K(z) - s||z - s| = r^2$.*

Kruhová inverze vzájemně vyměňuje vnějšek kruhu a vnitřek kruhu bez středu; příslušnou kružnici zachovává.

Jak vypadá kruhová inverze algebraicky? Podívejme se například na inverzi podle jednotkové kružnice se středem v počátku. Bod $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se zobrazí na $r(z)z$, přičemž $r(z) \in \mathbb{R}^+$ a $1 = |r(z)z||z| = r(z)|z|^2$. Odtud můžeme vyjádřit $r(z) = 1/|z|^2$ a tedy

$r(z)z = z/|z|^2 = 1/\overline{z}$ (neboť $|z|^2 = z\overline{z}$). Abychom získali transformaci $M(z) = 1/z$, musíme tedy tuto kruhovou inverzi ještě složit se zobrazením $z \to \overline{z}$ (ze vzorce je vidět, že nezáleží na pořadí), což je osová souměrnost podle reálné osy.

Spoustu zajímavých podrobností o kruhové inverzi lze najít v knize [6], kap. 3; například to, že kruhová inverze zobrazuje kružnice a přímky na kružnice nebo přímky. Speciálně, každou přímku neprocházející středem zobrazí na kružnici procházející středem, a naopak. Kružnice neprocházející středem zobrazí na kružnice neprocházející středem a přímky procházející středem zachová.

Jaké další transformace, které jsou zkoumaného tvaru, ještě existují? Pomůže nám následující rozklad: nechť nejprve $c \neq 0$. Transformaci $M(z) = (az+b)/(cz+d)$ napíšeme jako $M = m_5 \circ m_4 \circ m_3 \circ m_2 \circ m_1$, kde

$$\begin{aligned}
m_1(z) &= z + \frac{d}{c} \quad \text{je posunutí o } \frac{d}{c}, \\
m_2(z) &= \overline{z} \quad \text{je souměrnost podle reálné osy}, \\
m_3(z) &= \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{je kruhová inverze podle jednotkové kružnice}, \\
m_4(z) &= -\frac{ad-bc}{c^2} z \quad \text{je stejnolehlost se středem v 0 složená s rotací} \\
m_5(z) &= z + \frac{a}{c} \quad \text{je posunutí o } \frac{a}{c}.
\end{aligned}$$

Kdyby ovšem platilo $ad - bc = 0$, zobrazení m_4 by byla konstantní nula, a transformace M by všechny body zobrazila na bod a/c. Omezíme se proto na případ, kdy $ad - bc \neq 0$.

Pokud $c = 0$, pak máme $M = (z \to z + b/d) \circ (z \to a/d \cdot z)$; $d \neq 0$, protože jinak by platilo $ad - bc = 0$.

Obdrželi jsme zajímavý výsledek: Každá zkoumaná transformace s dodatečnou podmínkou, že $ad - bc \neq 0$, je složením podobností a kruhových inverzí. Takovéto transformace se nazývají *přímé Möbiovy transformace*. Uveďme nyní základní definici.

1.1.2 Definice: *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a platí $ad - bc \neq 0$. Regulární matici $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ přiřadíme zobrazení*

$$Mg(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{a} \quad Ng(z) = Mg(\overline{z}) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d},$$

která jsou definovaná na $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ pro $c \neq 0$ a na celém $\mathbb{C}$ pro $c = 0$. Zobrazení Mg nazveme přímou a Ng nepřímou Möbiovou transformací.

Zřejmě platí $Ng = Mg \circ (z \to \overline{z})$. Máme tedy rozklad také každé nepřímé Möbiovy transformace na složení podobností a kruhových inverzí: vezmeme rozklad příslušné přímé transformace se stejnými koeficienty, a provedeme složení s osovou souměrností podle reálné osy.

Vraťme se k výše uvedenému rozkladu Möbiových transformací na jednodušší transformace. Všechny tyto jednodušší transformace je možné získat jako složení transformací ještě elementárnějších: osových souměrností a kruhových inverzí. Posunutí o $x \in \mathbb{C}$ (tj. transformace $z \to z + x$) je složení dvou osových souměrností podle os kolmých na přímku $0x$, které jsou od sebe vzdáleny $|x|/2$. Stejnolehlost se středem $s \in \mathbb{C}$ a koeficientem $r \in \mathbb{R}$ je složení dvou kruhových inverzí podle kružnic se společným středem s a poloměry r_1, r_2, které splňují $r_2^2/r_1^2 = r$. Rotace okolo středu s o úhel φ je složením dvou osových souměrností podle os, které prochází bodem s a svírají úhel $\varphi/2$. (Při skládání záleží na pořadí.)

Podíváme-li se opět na výše uvedený rozklad Möbiových transformací, zjistíme, že platí následující tvrzení.

1.1.3 Tvrzení: *Každou přímou Möbiovu transformaci lze napsat jako složení sudého počtu osových souměrností a kruhových inverzí. Každou nepřímou Möbiovu transformaci lze napsat jako složení lichého počtu osových souměrností a kruhových inverzí.*

Naším cílem bude ukázat také opak: že konečným skládáním osových souměrností a kruhových inverzí vzniknou Möbiovy transformace. Prvním krokem je následující tvrzení, které ukazuje příklady nepřímých Möbiových transformací.

1.1.4 Tvrzení: *Každá kruhová inverze a každá osová souměrnost jsou nepřímé Möbiovy transformace.*

Důkaz: Kruhová inverze podle kružnice K o středu s a poloměru r lze napsat jako

$$\mathcal{I}_K(z) = s + \frac{r^2}{|z-s|^2}\cdot(z-s) = \mathcal{I}_K(z) = \frac{s\overline{z} + (r^2 - |s|^2)}{\overline{z}-\overline{s}} = N\begin{pmatrix} s & r^2-|s|^2 \\ 1 & -\overline{s}\end{pmatrix}(z),$$

a příslušná matice je regulární: $s(-\overline{s}) - (r^2 - |s|^2) = -r^2 \neq 0$.

Osově souměrný obraz bodu $z \in \mathbb{C}$ podle přímky $P = \{ta;\, t \in \mathbb{R}\}$ pro $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ můžeme napsat jako dvakrát otočení o (orientovaný) úhel mezi z a a. Tento úhel je $a \cdot |z|/z$ a příslušná transformace má tvar

$$\mathcal{I}_P(z) = z \cdot a\frac{|z|}{z}\cdot a\frac{|z|}{z} = \frac{a^2|z|^2}{z} = a^2\overline{z}.$$

Pro obecnou přímku $Q = \{ta + b;\, t \in \mathbb{R}\}$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, provedeme napřed posunutí o $-b$, pak osovou souměrnost podle přímky P a nakonec posunutí o b:

$$\mathcal{I}_Q(z) = a^2\overline{z-b} + b = a^2\overline{z} - a^2\overline{b} + b = N\begin{pmatrix} a^2 & -a^2\overline{b}+b \\ 0 & 1\end{pmatrix}(z).$$

Podmínka regularity platí: $a^2 \neq 0$. □

Nyní dokážeme jedno pomocné tvrzení, na kterém je vidět příhodnost maticového zápisu Möbiových transformací.

1.1.5 Tvrzení: *Složení dvou přímých Möbiových transformací je opět přímá Möbiova transformace. Skládání přímých Möbiových transformací odpovídá násobení příslušných matic.*

Důkaz: Nechť $Mg_1(z) = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1)$, $Mg_2 = (a_2z + b_2)/(c_2z + d_2)$. Platí:

$$Mg_2(Mg_1(z)) = \frac{a_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + b_2}{c_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + d_2} = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + a_2b_1 + b_2d_1}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + c_2b_1 + d_2d_1} = M(g_2g_1)(z)$$

Přitom výsledná matice g_2g_1 je regulární, neboť je součinem regulárních matic. □

Následující tvrzení objasňuje, proč se používá termín *přímá* a *nepřímá* Möbiova transformace. Při skládání totiž přímá transformace „přímost“ zachová, zatímco nepřímá ji změní.

1.1.6 Tvrzení: *Nechť g_1, g_2 jsou regulární komplexní matice. Pak $Mg_2 \circ Mg_1$ a $Ng_2 \circ Ng_1$ jsou přímé Möbiovy transformace a $Mg_2 \circ Ng_1$ a $Ng_2 \circ Mg_1$ jsou nepřímé Möbiovy transformace.*

Důkaz: První část – že $Mg_2 \circ Mg_1$ je přímá Möbiova transformace – jsme dokázali již v tvrzení 1.1.5. Při důkazu zbývajících částí vyjdeme z jednoduchého vztahu, který spojuje přímé a nepřímé Möbiovy transformace: $Ng = Mg \circ (z \to \overline{z})$.

Pro složení dvou nepřímých transformací platí $Ng_2(Ng_1(z)) = Mg_2(\overline{Mg_1(\overline{z})})$. Přitom $\overline{Mg_1(\overline{z})} = Mh(z)$, kde h je matice, jejíž prvky jsou komplexně sdružené k odpovídajícím prvkům matice g_1. Protože matice g_1 je regulární, musí být i h regulární. Takže jsme získali složení dvou přímých Möbiových transformací, o kterém již víme, že je přímou Möbiovou transformací.

Pro složení přímé a nepřímé transformace platí:

$$Mg_2(Ng_1(z)) = Mg_2(Mg_1(\overline{z})) = Mg_2g_1(\overline{z}) = Ng_2g_1(z)$$
$$Ng_2(Mg_1(z)) = Mg_2(\overline{Mg_1(z)}) = Mg_2(Mh(\overline{z})) = Ng_2h(z)$$

□

Teď už tedy víme, že složení libovolného počtu osových souměrností a kruhových inverzí je Möbiovou transformací. Přitom složení sudého, resp. lichého počtu osových souměrností a kruhových inverzí je přímou, resp. nepřímou Möbiovou transformací. Na druhou stranu jsme v tvrzení 1.1.3 ukázali, že osové souměrnosti a kruhové inverze již vygenerují, pomocí operace skládání, všechny Möbiovy transformace.

1.1.7 Tvrzení: *Möbiovy transformace s operací skládání tvoří grupu. Přímé Möbiovy transformace jsou její podgrupou.*

Důkaz: Uzavřenost Möbiových transformací vzhledem ke skládání jsme již dokázali v tvrzení 1.1.6. Jednotkovým prvkem je identická transformace. Napíšeme-li danou Möbiovu transformaci jako složení osových souměrností a kruhových inverzí, pak obrácením pořadí skládání získáme Möbiovu transformaci k ní inverzní, neboť každá osová souměrnost i kruhová inverze je sama k sobě inverzní. Množina Möbiových transformací s operací skládání tedy splňuje axiomy grupy.

Přímé Möbiovy transformace jsou podmnožinou grupy Möbiových transformací, která je uzavřená vzhledem ke skládání a obsahuje jednotkový prvek. Tvoří tedy podgrupu grupy všech Möbiových transformací. □

Zbývá nám rozřešit poslední otázku. Jsou přímé Möbiovy transformace vlastní podgrupou všech Möbiových transformací, nebo nepřímé transformace již nic nového nepřináší, a zaváděli jsme je zbytečně? Ukažme, že souměrnost podle reálné osy není přímou Möbiovou transformací. Pro spor předpokládejme, že existuje přímá Möbiova transformace $M(z) = (az + b)/(cz + d)$ taková, že $M(z) = \overline{z}$. Dosadíme-li za z reálné číslo R, dostaneme kvadratickou rovnici $cR^2 + (d - a)R - b = 0$. Tato rovnice má platit pro všechna reálná čísla R, tedy nutně $c = b = 0$ a $a = d$. Neboli dostaneme, že transformace M je tvaru $M(z) = z$, což je spor s tím, že $M(z) = \overline{z}$.

Ve skutečnosti dokonce žádná Möbiova transformace nemůže být zároveň přímá i nepřímá. Ukážeme to opět sporem. Mějme přímou Möbiovu transformaci $\mathcal{I}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{I}_k$ a nepřímou $\mathcal{J}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{J}_l$, zapsané jako složení osových souměrností a kruhových inverzí (k je sudé a l je liché). Pro spor předpokládejme, že se rovnají. Pak ale můžeme psát:

$$(z \to \overline{z}) \circ \mathcal{I}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{I}_k = (z \to \overline{z}) \circ \mathcal{J}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{J}_l \text{ a } (z \to \overline{z}) = (z \to \overline{z}) \circ \mathcal{J}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{J}_l \circ \mathcal{I}_k \circ \ldots \circ \mathcal{I}_1$$

Na pravé straně máme složení sudého počtu osových souměrností a kruhových inverzí – ale to jsme napsali souměrnost podle reálné osy jako přímou Möbiovu transformaci, což nelze.

1.2 Transformace Riemannovy sféry

V tomto oddílu stručně připomeneme pojem Riemannovy sféry, což je jeden ze základních pojmů komplexní analýzy. Následně rozšíříme Möbiovy transformace z $\mathbb{C}$ na celou Riemannovu sféru. Geometrie roviny určitým způsobem odpovídá geometrii povrchu (trojrozměrné) koule. Zobrazením, které tuto korespondenci zprostředkovává, je stereografická projekce. Představme si komplexní rovinu vnořenou do prostoru $\mathbb{R}^3$ jako rovinu $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$.

1.2.1 Definice: *Označme $S = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$ jednotkovou sféru se středem v počátku a $N = (0, 0, 1) \in S$ její „severní pól“. Stereografická projekce je zobrazení $\varpi : \mathbb{C} \to S \setminus \{N\}$, které každému bodu x roviny $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$ (kterou ztotožňujeme s $\mathbb{C}$) přiřadí průsečík přímky xN a množiny $S \setminus \{N\}$.*

Jak dokážeme v oddílu 2.1, stereografická projekce je homeomorfismem $\mathbb{C}$ na $S \setminus \{N\}$.

1.2.2 Definice: *Označme $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kde ∞ je nový abstraktní symbol. Zaveďme tato rozšíření aritmetických operací:*

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty + z = \infty - z = z - \infty &= \infty \quad \textit{pro } z \in \mathbb{C} \\ z \cdot \infty = \infty \cdot z = \frac{z}{0} &= \infty \quad \textit{pro } z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \\ \frac{\infty}{z} = \infty \quad \textit{a} \quad \frac{z}{\infty} &= 0 \quad \textit{pro } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Dále dodefinujme stereografickou projekci $\varpi(\infty) = N$. Je-li K kružnice se středem $s \in \mathbb{C}$, dodefinujme kruhovou inverzi $\mathcal{I}_K(s) = \infty$, $\mathcal{I}_K(\infty) = s$.

Na $\widehat{\mathbb{C}}$ definujeme topologii tak, že k souboru otevřených množin v $\mathbb{C}$ přidáme ještě množiny G tvaru $G = X \cup \{\infty\}$, kde $X \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C} \setminus X$ je kompaktní. $\widehat{\mathbb{C}}$ se nazývá rozšířená komplexní rovina, nebo též Riemannova sféra.

Z geometrického hlediska tedy máme pouze jedno nekonečno, které je společným průsečíkem všech přímek. Podívejme se nyní na základní kameny Möbiových transformací – osové souměrnosti a kruhové inverze – po jejich zobrazení na Riemannovu sféru. Přímky v $\widehat{\mathbb{C}}$ se zobrazí na kružnice, které procházejí severním pólem N. Kružnice v $\widehat{\mathbb{C}}$ se zobrazí na kružnice, které neprochází bodem N. Po zobrazení na Riemannovu sféru tedy zmizí rozdíly mezi kružnicemi a přímkami – přímku v $\widehat{\mathbb{C}}$ lze (intuitivně) považovat za kružnici, která prochází nekonečnem.

Nyní máme Möbiovy transformace definované na celé Riemannově sféře $\widehat{\mathbb{C}}$. Při transformaci $M(z) = (az + b)/(cz + d)$ je a/c obrazem a $-d/c$ vzorem bodu ∞. Transformace $M_1(z) = (dz - b)/(-cz + a)$ je inverzní k M, což ukazuje, že přímé Möbiovy transformace jsou bijekce $\widehat{\mathbb{C}}$ na $\widehat{\mathbb{C}}$. Ke stejnému závěru se snadno dojde pro nepřímé Möbiovy transformace.

Möbiovu transformaci M Riemannovy sféry $\widehat{\mathbb{C}}$ si můžeme představit jako transformaci dvojrozměrné sféry $S \in \mathbb{R}^3$, získanou složením $\varpi \circ M \circ \varpi^{-1}$ se stereografickou projekcí. Pro lepší představu uveďme několik příkladů:

1.2.3 Příklad: Rotace okolo počátku o úhel φ, tedy transformace $M(z) = e^{i\varphi} z$, odpovídá rotaci sféry S okolo třetí souřadnicové osy („severo-jižní“) o úhel φ.

1.2.4 Příklad: Kruhová inverze podle jednotkové kružnice se středem v počátku, tedy nepřímá Möbiova transformace $N(z) = 1/\overline{z}$, odpovídá souměrnosti sféry S podle roviny $\mathbb{C}$, tj. roviny obsahující první dvě souřadnicové osy.

1.2.5 Příklad: Jestliže je ∞ pevným bodem přímé Möbiovy transformace $M(z) = (az + b)/(cz + d)$, máme $\infty = M(\infty) = a/c$, tedy $c = 0$. Transformace M má tedy tvar $M(z) = (az + b)/c = (a/c)z + b$ a jde o složení stejnolehlosti a posunutí. Vidíme, že přímé Möbiovy transformace, které fixují bod ∞, jsou právě přímé podobnosti. Analogicky nepřímé Möbiovy transformace, fixující bod ∞, jsou právě nepřímé podobnosti.

2. Vícerozměrné Möbiovy transformace

2.1 Stereografická projekce a rozšířený euklidovský prostor

Cílem této kapitoly je motivovat přidání „nekonečna“ k euklidovskému prostoru $\mathbb{R}^n$ a zavést toto rozšíření $\widehat{\mathbb{R}}^n$ podobným způsobem, jakým se zavádí rozšířená komplexní rovina $\widehat{\mathbb{C}}$ v komplexní analýze (stručné shrnutí jsme provedli v oddílu 1.2). Zaveďme nejprve stereografickou projekci, zcela analogicky dvourozměrnému případu.

2.1.1 Definice: *Označme $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ n-rozměrnou jednotkovou sféru se středem v počátku a $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ její „severní pól“. Stereografická projekce je zobrazení $\varpi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$, které každému bodu $x \in \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_{n+1} = 0\}$ (tuto nadrovinu ztotožníme s $\mathbb{R}^n$) přiřadí průsečík přímky xN a množiny $S^n \setminus \{N\}$.*

2.1.2 Tvrzení: *Pro $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^n$ platí*

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= \frac{2}{|x|^2 + 1} \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{|x|^2 - 1}{2} \right), \\ \varpi^{-1}(z) &= \frac{1}{1 - z_{n+1}} (z_1, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

a zobrazení ϖ je homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ na $S^n \setminus \{N\}$.

Důkaz: Nejprve dokažme vztah pro ϖ^{-1}. Uvažujme rovinu ρ určenou body 0, N a z. Tato rovina obsahuje přímku Nz a tedy podle definice i bod $\varpi^{-1}(z)$. Označme $y = (0, \ldots, 0, z_{n+1})$ patu kolmice z bodu z na přímku $0N$. Trojúhelníky $0N\varpi^{-1}(z)$ a yNz jsou podobné, protože mají společný úhel při vrcholu N a úhly $\varpi^{-1}(z)0N$ a zyN jsou pravé. Tudíž pro délky jejich stran platí:

$$\frac{\|\varpi^{-1}(z) - 0\|}{\|N - 0\|} = \frac{\|z - y\|}{\|N - y\|}, \quad \text{tj.} \quad \|\varpi^{-1}(z)\| = \frac{\|(z_1, \ldots, z_n)\|}{1 - z_{n+1}}$$

Teď již stačí jen dokázat, že $\varpi^{-1}(z)$ má stejný směr jako $(z_1, \ldots, z_n)$. To je však zřejmé, protože kolmým průmětem úsečky $N\varpi^{-1}(z)$ do roviny $\{(x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} = 0)\}$ je úsečka $0\varpi^{-1}(z)$ a bod z leží na úsečce $N\varpi^{-1}(z)$, takže bod $(z_1, \ldots, z_n)$ leží na úsečce $0\varpi^{-1}(z)$.

K důkazu vztahu pro ϖ stačí ukázat, že složením s ϖ^{-1} vznikne identita:

$$\varpi^{-1} \left(\frac{2}{|x|^2 + 1} \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{|x|^2 - 1}{2} \right) \right) = \frac{1}{1 - \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}} \cdot \frac{2}{|x|^2 + 1} \cdot (x_1, \ldots, x_n) = x$$

Je zřejmé, že ϖ a ϖ^{-1} jsou bijekce mezi $\mathbb{R}^n$ a $S^n \setminus \{N\}$. Protože jsou spojité, ϖ je homeomorfismus. $\square$

2.1.3 Tvrzení: *Pro každou posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ bodů z $\mathbb{R}^n$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varpi(x_n) = N.$$

Důkaz: Plyne přímo ze vzorců pro ϖ a ϖ^{-1} z tvrzení 2.1.2. □

Intuitivně vidíme, že bodu N sféry S^n, který při stereografické projekci nemá vzor, by měl odpovídat „bod v nekonečnu“ prostoru $\mathbb{R}^n$.

2.1.4 Definice: *Označme $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, kde ∞ je nový abstraktní symbol. Na $\widehat{\mathbb{R}}^n$ definujeme topologii tak, že k souboru otevřených množin v $\mathbb{R}^n$ přidáme ještě množiny G tvaru $G = X \cup \{\infty\}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n \setminus X$ je kompaktní.*

Rozšíříme aritmetické operace z $\mathbb{R}^n$ na $\widehat{\mathbb{R}}^n$ následovně:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}: \quad x + \infty = \infty + x = \infty, \quad c \cdot \infty^{-1} = 0$$

Díky zavedené topologii na $\widehat{\mathbb{R}}^n$ mají dobrý smysl pojmy limita a spojitost funkce na $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Topologický prostor $\widehat{\mathbb{R}}^n$ je tzv. jednobodovou kompaktifikací $\mathbb{R}^n$.

2.1.5 Definice: *Rozšíříme stereografickou projekci na celé $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Dodefinujme $\varpi(\infty) = N$.*

Nyní je ϖ homeomorfismus $\widehat{\mathbb{R}}^n$ na S^n. Více o stereografické projekci ve 4 dimenzích lze nalézt v článku [4].

2.2 Sférická inverze a souměrnost podle nadroviny

Zavedeme vícerozměrné obdoby osové souměrnosti a kruhové inverze, které jsou „stavebními kameny“ Möbiových transformací ve dvou dimenzích.

Zobecněním kruhové inverze je sférická inverze. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$. Označme $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - x\|^2 < r^2\}$ otevřenou kouli a $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - x\|^2 = r^2\}$ sféru se středem x a poloměrem r.

2.2.1 Definice: *Nechť $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$ a $S = S_r(x)$. Sférická inverze podle sféry S je zobrazení $\mathcal{I}_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ definované vztahy:*

$$\mathcal{I}_S(y) = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } y = x \\ x, & \text{pokud } y = \infty \\ x + \dfrac{r^2}{\|y - x\|^2} \cdot (y - x), & \text{jinak} \end{cases}$$

Tedy bodu $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ je přiřazen bod $\mathcal{I}_S(y)$, který leží na polopřímce xy a pro jeho vzdálenost od středu x platí $\|\mathcal{I}_S(y) - x\| \cdot \|y - x\| = r^2$.

2.2.2 Tvrzení: *Nechť $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$ a $S = S_r(x)$. Potom platí:*

(i) *$\mathcal{I}_S$ je identita na S.*

(ii) *$\mathcal{I}_S \circ \mathcal{I}_S$ je identita na $\widehat{\mathbb{R}}^n$, $\mathcal{I}_S$ je bijekce $\widehat{\mathbb{R}}^n$ na $\widehat{\mathbb{R}}^n$.*

(iii) *$\mathcal{I}_S(B_r(x)) = \widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{B_r(x)}$, $\mathcal{I}_S\left(\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{B_r(x)}\right) = B_r(x)$*

Důkaz: (i) Nechť $y \in S$. Potom je $\|y - x\| = r$ a $\mathcal{I}_S(y) = x + (y - x) = y$.

(ii) Pro $y \notin \{x, \infty\}$ máme $\|\mathcal{I}_S(\mathcal{I}_S(y)) - x\| = r^2/\|\mathcal{I}_S(y) - x\| = \|y - x\|$. Body y a $\mathcal{I}_S(\mathcal{I}_S(y))$ leží na polopřímce xy a mají od bodu x stejnou vzdálenost; jsou tedy totožné. Zřejmě $\mathcal{I}_S(\mathcal{I}_S(x)) = x$, $\mathcal{I}_S(\mathcal{I}_S(\infty)) = \infty$. Protože k zobrazení $\mathcal{I}_S$ existuje inverzní zobrazení na celém $\widehat{\mathbb{R}}^n$, jde o bijekci $\widehat{\mathbb{R}}^n$ na $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

(iii) Je-li $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$, je $\|y - x\| < r$ a $\|\mathcal{I}_S(y) - x\| > r$, tj. $\mathcal{I}_S(y) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(x)}$. Pro každé $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(x)}$, existuje $z \in B_r(x) \setminus \{x\}$ takové, že $y = \mathcal{I}_S(z)$ – stačí volit $z = \mathcal{I}_S(y)$. Pak totiž platí $\|z - x\| = \|\mathcal{I}_S(y) - x\| < r$, tedy $z \in B_r(x) \setminus \{x\}$, a podle bodu (ii) je $\mathcal{I}_S(z) = \mathcal{I}_S(\mathcal{I}_S(y)) = y$. Protože navíc $\mathcal{I}_S(x) = \infty$, máme $\mathcal{I}_S(B_r(x)) = \widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{B_r(x)}$. Podle bodu (ii) je zobrazení $\mathcal{I}_S$ inverzní samo k sobě. Proto platí i opak: $\mathcal{I}_S\left(\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{B_r(x)}\right) = \mathcal{I}_S(\mathcal{I}_S(B_r(x))) = B_r(x)$. □

2.2.3 Tvrzení: *Sférická inverze je spojitá na celém $\widehat{\mathbb{R}}^n$.*

Důkaz: Mějme sférickou inverzi $\mathcal{I}_S$ podle sféry $S = S_r(x)$ o středu x a poloměru r. Spojitost ve všech bodech $\widehat{\mathbb{R}}^n$ kromě 0 a ∞ je zřejmá přímo ze vzorce pro $\mathcal{I}_S$.

Dokážeme, že pro každou posloupnost $\{y_n\}_1^\infty$ bodů z $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{x, \infty\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_S(y_n) = x \quad \text{právě tehdy, když} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

Tím dokážeme nejen spojitost v bodě ∞, ale i v bodě x: pokud bychom měli posloupnost $\{z_n\}_1^\infty$, $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ bodů z $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{x, \infty\}$, můžeme ji zapsat jako $z_n = \mathcal{I}_S(y_n)$ pro nějakou posloupnost $\{y_n\}_1^\infty$ bodů z $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{x, \infty\}$ a výše uvedený vztah nám dá $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_S(z_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Použijeme jednoduchou podmínku konvergence posloupnosti k nekonečnu: pro posloupnost $\{z_n\}_1^\infty$ bodů z $\widehat{\mathbb{R}}^n$ platí $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = \infty$. Z trojúhelníkové nerovnosti máme $\|y_n - x\| \leq \|x\| + \|y_n\|$ a $\|y_n\| \leq \|x\| + \|y_n - x\|$. Protože $\|x\| > 0$, platí $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \infty$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \infty$. To je ekvivalentní s $\lim_{n\to\infty} r^2/\|y_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{I}_S(y_n) - x\| = 0$, což je ekvivalentní s $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_S(y_n) = x$. □

Definice sférické inverze je přirozená pro všechny body $\mathbb{R}^n$ kromě středu příslušné sféry. Předchozí tvrzení nám ale napovídá, že naše definice sférické inverze pro střed sféry byla rozumná.

Vícerozměrným zobecněním osové souměrnosti je souměrnost podle nadroviny, kterou definujeme na celém rozšířeném prostoru $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

2.2.4 Definice: *Nadrovinou v $\widehat{\mathbb{R}}^n$ rozumíme množinu tvaru*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x - a, w\rangle = 0\} \cup \{\infty\},$$

kde $w \in \mathbb{R}^n$ je nenulový normálový vektor a $a \in \mathbb{R}^n$ je jeden z bodů, kterými nadrovina P prochází.

2.2.5 Definice: *Nechť P je nadrovina v $\widehat{\mathbb{R}}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $p \in P$ je pata kolmice spuštěné z bodu x k nadrovině P. Obraz bodu $x \in \mathbb{R}^n$ v souměrnosti podle nadroviny P je bod $\mathcal{I}_P(x)$, který leží na opačné polopřímce k polopřímce px a jehož vzdálenost od P je stejná jako vzdálenost x od P. Navíc $\mathcal{I}_P(\infty) = \infty$.*

Pokud nadrovinu zadáme normálovým vektorem, jednoduše odvodíme následující vzoreček:

2.2.6 Tvrzení: *Nechť P je nadrovina s normálovým vektorem $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, která prochází bodem $a \in \mathbb{R}^n$. Potom pro $x \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\mathcal{I}_P(x) = x - 2 \cdot \frac{\langle x - a, w\rangle}{\|w\|^2} \cdot w.$$

Důkaz: Bod $x - \langle x - a, w\rangle w/\|w\|^2$ je patou kolmice spuštěné z bodu x na nadrovinu P. Stačí tedy jít tímto směrem ještě jednou tak daleko. □

2.3 Transformace rozšířeného euklidovského prostoru

Möbiovy transformace v $\widehat{\mathbb{C}}$ vzniknou složením kruhových inverzí a osových souměrností. Möbiovy transformace rozšířeného euklidovského prostoru $\widehat{\mathbb{R}}^n$ definujeme podobným způsobem, pouze použijeme vícerozměrné obdoby těchto zobrazení, sférickou inverzi a souměrnost podle nadroviny.

Podobně jako v dvourozměrném případě je i zde určitý sjednocující prvek mezi sférami a nadrovinami v $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Při vícerozměrné stereografické projekci se nadroviny v $\widehat{\mathbb{R}}^n$ zobrazí na $(n-1)$-rozměrné sféry v S^n, procházející severním pólem N; sféry v $\widehat{\mathbb{R}}^n$ se zobrazí na $(n-1)$-rozměrné sféry v S^n, které se bodu N vyhýbají. Přitom volba bodu N v S^n se nezdá být zásadní – stejně dobře by fungovala modifikovaná stereografická projekce, při které by v roli bodu N vystupoval bod $(0,\dots,0,-1)$, „jižní pól" (nebo jiný bod $S^n \setminus \mathbb{R}^n$). Lze tedy nadrovinu v $\widehat{\mathbb{R}}^n$ intuitivně považovat za sféru, která prochází bodem ∞. S tím je také v souladu definice obrazu bodu ∞ v souměrnosti podle nadroviny. Pak totiž plně platí, že souměrnost podle nadroviny i sférická inverze jsou identická zobrazení na příslušné nadrovině, resp. sféře. Navíc obě zobrazení navzájem vyměňují komponenty souvislosti prostoru $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus P$, kde P je příslušná nadrovina nebo sféra. Více podrobností je možno nalézt v knize [6], kap. 3 (pro dvojrozměrný případ).

2.3.1 Definice: *Transformaci rozšířeného euklidovského prostoru $\widehat{\mathbb{R}}^n$, která je složením konečného počtu souměrností podle nadrovin a sférických inverzí, nazveme Möbiovou transformací. Složení sudého, resp. lichého počtu zobecněných sférických inverzí nazveme přímou, resp. nepřímou Möbiovou transformací.*

V prvé řadě poznamenejme, že tato definice ve speciálním případě transformací $\widehat{\mathbb{C}}$ souhlasí s definicí 1.1.2 (ekvivalence těchto pojmů byla ukázána v kapitole 1).

2.3.2 Tvrzení: *Möbiovy transformace $\widehat{\mathbb{R}}^n$ s operací skládání tvoří grupu a přímé Möbiovy transformace jsou její podgrupa.*

Důkaz: Jednotkovým prvkem je identická transformace, kterou lze získat například složením dvou stejných sférických inverzí. Každá souměrnost podle nadroviny i sférická inverze je inverzní transformací sama k sobě. Složení $\mathcal{I}_1 \circ \dots \circ \mathcal{I}_k$ zobecněných sférických inverzí má inverzní transformaci $\mathcal{I}_k^{-1} \circ \dots \circ \mathcal{I}_1^{-1}$. Tedy jsou splněny axiomy grupy. Množina přímých Möbiových transformací je zřejmě uzavřená vzhledem k operaci skládání a obsahuje jednotkový prvek – identickou transformaci. Proto tvoří podgrupu grupy všech Möbiových transformací. □

Ve zbytku oddílu pouze stručně uvedeme některé další zajímavé vlastnosti Möbiových transformací rozšířeného vícerozměrného euklidovského prostoru, s odkazem na literaturu.

Mezi přímými a nepřímými Möbiovými transformacemi je ještě hlubší souvislost, kterou zde stručně nastíníme. Více podrobností lze nalézt v [3] nebo [8]. Nejprve přiblížíme několik pojmů z teorie konformních zobrazení. Pokud máme dvě diferencovatelné křivky v $\mathbb{R}^n$ protínající se v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, budeme jejich úhlem v bodě a rozumět menší z úhlů, který svírají jejich příslušné tečny v bodě a. (Úhel dvou křivek v bodě ∞ lze též definovat, viz [6], str. 144.) Řekneme, že diferencovatelné zobrazení $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ zachovává, resp. převrací orientaci, pokud má v každém bodě kladný, resp. záporný determinant Jacobiho matice. A konečně, diferencovatelné zobrazení $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ je konformní, resp. antikonformní, pokud v každém bodě zachovává úhly každých dvou křivek a navíc zachovává, resp. převrací orientaci. V dvojrozměrném případě je zobrazení konformní, pokud zachovává *orientované* úhly. Příklady konformních zobrazení jsou například rotace, posunutí a stereografická projekce (viz [8], kap. 3.2), příklady antikonformních zobrazení jsou souměrnost podle nadroviny a sférická inverze (viz [3], kap. 5.1).

Zřejmě složením dvou konformních nebo dvou antikonformních zobrazení vznikne konformní zobrazení, a složením konformního zobrazení s antikonformním zobrazením vznikne antikonformní zobrazení – plyne to z toho, že příslušné Jacobiho matice, a tedy i jejich determinanty, se při skládání zobrazení násobí.

Vztah k Möbiovým transformacím je už nasnadě. Přímé Möbiovy transformace vzniknou složením sudého počtu jistých antikonformních zobrazení, tedy jsou konformní; naopak nepřímé Möbiovy transformace jsou antikonformní.

Pozoruhodným faktem je, že v dimenzi 3 nebo větší jsou Möbiovy transformace jediná diferencovatelná zobrazení, která zachovávají úhly; viz [3], str. 83, a [7], str. 245. Pro dimenzi 3 a zobrazení třídy C^3 to dokázal Liouville v roce 1850.

Další zajímavou charakterizací Möbiových transformací je Möbiova věta, viz [3], kap. 5.3. Ta říká, že spojitá bijekce otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$ na sebe, která zobrazuje části nadrovin a sfér na části nadrovin nebo sfér, je restrikcí některé Möbiovy transformace.

3. Aritmetizace geometrie ve více dimenzích

Cílem je zavést další strukturu na euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, kterou bude možné využít k popisu jeho geometrie. V prostoru $\mathbb{R}^2$ lze geometrii s výhodou popisovat pomocí komutativního tělesa komplexních čísel. Jak je dobře známo, na euklidovských prostorech vyšší dimenze již však není možné zavést strukturu komutativního tělesa. V prostoru $\mathbb{R}^4$ určitou aritmetizaci poskytují kvaterniony, které již ale postrádají komutativitu.

V následujícím oddílu zavedeme Cliffordův součin vektorů z $\mathbb{R}^n$, který bude ve speciálních případech násobením komplexních čísel nebo kvaternionů.

3.1 Cliffordova algebra

Pojem Cliffordovy algebry lze studovat obecně, a to nad vektorovým prostorem s danou kvadratickou formou (tzv. kvadratickým prostorem). Více informací o těchto obecnějších Cliffordových algebrách lze najít například v knize [5]. Pro naše účely postačuje pojem Cliffordovy algebry nad euklidovským prostorem.

Mějme tedy euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s kanonickou bází $\{e_i\}$, euklidovským skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a normou $\|\cdot\|$, tj. pro $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ je

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{a} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Zavedeme nad tímto prostorem Cliffordovu algebru. Cliffordova algebra je příkladem asociativní algebry, jejíž definici připomeňme:

3.1.1 Definice: *Asociativní algebra $\mathcal{A}$ nad tělesem T je vektorový prostor A nad tělesem T spolu s operací násobení $\cdot : A \times A \to A$, která splňuje následující podmínky:*

(i) $\exists 1 \in \mathcal{A}\ \forall \alpha \in \mathcal{A}:\ 1\alpha = \alpha 1 = \alpha$

(ii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}:\ \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ *(asociativita)*

(iii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}, \forall c \in T:\ \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma;\quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha;$
$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$ *(distributivita)*

Uvažujme vektorový prostor $\mathcal{C}_n$ dimenze 2^n nad tělesem $\mathbb{R}$, jehož nosnou množinou bude množina všech formálních sum

$$\left\{ \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I; \quad \alpha_I \in \mathbb{R} \right\},$$

kde $e_I = \{e_i; i \in I\}$. Bází tohoto vektorového prostoru je $\{e_I; I \subset \{1, \ldots, n\}\}$. Operace sčítání a násobení prvkem tělesa se definují po složkách. Označme $1 = e_\emptyset$ a pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ pišme $e_i = e_{\{i\}}$.

Definujeme Cliffordův součin prvků $\mathcal{C}_n$, čímž na $\mathcal{C}_n$ zavedeme strukturu asociativní algebry. Skutečně, na $\mathcal{C}_n$ lze jediným způsobem zavést násobení tak, že $\mathcal{C}_n$ je asociativní algebra a navíc jsou splněny následující podmínky:

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j: \quad e_i e_j = -e_j e_i; \quad e_i^2 = -1 \tag{1}$$

$$\forall I = \{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\},\ i_1 < \dots < i_k: \quad e_I = e_{i_1} \cdots e_{i_k} \tag{2}$$

3.1.2 Definice: *Asociativní algebru s nosnou množinou $\mathcal{C}_n$, která splňuje podmínky (1) a (2), nazveme Cliffordovou algebrou nad euklidovským prostorem $\mathbb{R}^n$.*

Prvkům Cliffordovy algebry C_n budeme též říkat Cliffordova čísla.

Vztahy (1), (2) a požadavkem asociativity je určeno násobení prvků báze. Když počítáme součin $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ bázových vektorů, můžeme je uspořádat podle indexu. Ze vztahů (1) plyne, že činitele se sudým počtem výskytů ve výrazu vypadnou; za každou vypadlou dvojici změníme znaménko. Také musíme změnit znaménko za každou změnu pořadí násobení. To nám dává návod, jak násobení prakticky provádět. Ve speciálním případě stačí činitele pouze napsat za sebe:

$$\text{Je-li } I, J \subset \{1,\dots,n\},\ I \cap J = \emptyset \ \text{ a } \ \forall i \in I, j \in J : i < j, \ \text{ pak } \ e_I e_J = e_{I \cup J}.$$

Následující vzorec pro součin $e_I e_J$ lze získat jeho rozepsáním na součin jednotlivých e_i, uspořádáním činitelů podle indexu a spočítáním správného znaménka.

$$e_I e_J = e_{(I\cup J)\setminus(I\cap J)} \cdot (-1)^{|I\cap J|} \cdot \prod_{i\in I, j\in J} \sigma_{i,j}, \text{ kde } \quad \sigma_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i \leq j \\ -1, & \text{pokud } i > j \end{cases} \tag{3}$$

Na celý prostor $\mathcal{C}_n$ je Cliffordův součin jednoznačně rozšířen požadavkem distributivity vzhledem ke sčítání. Nechť pro $I \subset \{1,\dots,n\}$ je $\alpha_I, \beta_I \in \mathbb{R}$. Příslušný vzorec pak tedy vypadá takto:

$$\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I e_I \cdot \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \beta_I e_I = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I \beta_J e_I e_J \tag{4}$$

Pro korektnost definice Cliffordovy algebry nám zbývá ukázat, že vzorce (3) a (4) opravdu splňují všechny požadované podmínky, tedy podmínky (1) a (2) a vlastnosti (i) – (iii) z definice asociativní algebry. Ověření podmínek (1) a (2) je triviální. Dokažme tedy, že $\mathcal{C}_n$ s Cliffordovým součinem tvoří asociativní algebru.

Kvůli přehlednějšímu zápisu použijeme pro důkaz asociativity pojem *symetrické diference*.

3.1.3 Definice: *Nechť I, J jsou množiny. Definujme jejich symetrickou diferenci $I \triangle J$ vztahem $I \triangle J = (I \cup J) \setminus (I \cap J)$.*

Symetrická diference je zřejmě komutativní operací.

3.1.4 Tvrzení: *Symetrická diference je asociativní operací.*

Důkaz: Nechť I, J, K jsou množiny. Platí

$$(I \triangle J) \triangle K = (I \setminus (J \cup K)) \cup (J \setminus (I \cup K)) \cup (K \setminus (I \cup J)) \cup I \cap J \cap K$$

Tedy množina $(I \triangle J) \triangle K$ obsahuje právě prvky, které jsou obsaženy v lichém počtu množin I, J, K, což je vyjádření nezávislé na uzávorkování; platí tedy

$$(I \triangle J) \triangle K = I \triangle (J \triangle K). \qquad \square$$

3.1.5 Tvrzení: *Vektorový prostor $\mathcal{C}_n$ spolu s Cliffordovým součinem definovaným vzorci (3) a (4) tvoří asociativní algebru.*

Důkaz: (i) Dosazením se snadno ověří, že $1 = e_\emptyset$ je jednotkovým prvkem.

(ii) Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}_n$ a $\alpha = \sum \alpha_I e_I$, $\beta = \sum \beta_I e_I$, $\gamma = \sum \gamma_I e_I$. Podle vzorce (4) je

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= \left(\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I \cdot \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \beta_I e_I \right) \cdot \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \gamma_I e_I = \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I \beta_J e_I e_J \cdot \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \gamma_I e_I = \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{K\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I \beta_J \gamma_K (e_I e_J) e_K.\end{aligned}$$

Tedy stačí dokázat, že pro libovolné indexy $I, J, K \subset \{1, \ldots, n\}$ platí $(e_I e_J)e_K = e_I(e_J e_K)$. Podle vzorce (3) je

$$\begin{aligned}(e_I e_J)e_K &= (-1)^{|I\cap J|} \cdot \prod_{i\in I, j\in J} \sigma_{i,j} \cdot e_{I\triangle J} \cdot e_K = \\ &= (-1)^{|I\cap J| + |(I\triangle J)\cap K|} \prod_{i\in I, j\in J} \sigma_{i,j} \cdot \prod_{l\in I\triangle J, k\in K} \sigma_{l,k} \cdot e_{I\triangle J\triangle K}.\end{aligned}$$

Exponent u -1 můžeme napsat jako $|I \cap J| + |(I \triangle J) \cap K| = |I \cap J| + |J \cap K| + |I \cap K| - 2|I \cap J \cap K|$. Pro znaménka platí

$$\prod_{l\in I\triangle J, k\in K} \sigma_{l,k} = \prod_{i\in I, k\in K} \sigma_{i,k} \cdot \prod_{j\in J, k\in K} \sigma_{j,k},$$

protože každé $\sigma_{i,k}$ v prvním součinu na pravé straně, které nově přibylo, přibylo ještě jednou jako $\sigma_{j,k}$ v druhém součinu, a pro všechna i, j platí $\sigma_{i,j}^2 = 1$. Součin $(e_I e_J)e_K$ jsme tedy vyjádřili ve tvaru nezávislém na uzávorkování.

(iii) Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}_n$ jsou jako v (ii), $c \in \mathbb{R}$. Podle předpokladů platí

$$\begin{aligned}\alpha(\beta + \gamma) &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I e_I \cdot \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} (\beta_I + \gamma_I)\, e_I = \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} \alpha_I (\beta_J + \gamma_J)\, e_I e_J = \\ &= \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}} (\alpha_I \beta_J e_I e_J + \alpha_I \gamma_J e_I e_J) = \alpha\beta + \alpha\gamma.\end{aligned}$$

Stejnými úpravami plyne též platnost vztahu $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$. Pro důkaz vztahu $(c\alpha)\beta = \alpha(c\beta) = c(\alpha\beta)$ stačí vytknout c před obě sumy v součinu $\alpha\beta$. □

Podívejme se na dva speciální případy.

3.1.6 Příklad: Vyjdeme-li z prostoru $\mathbb{R}^1$ a jeho báze $\{e_1\}$, příslušná Cliffordova algebra bude mít bázi $\{1, e_1\}$, přičemž $e_1^2 = -1$ – tedy jsme získali komplexní čísla.

3.1.7 Příklad: Vyjdeme-li z prostoru $\mathbb{R}^2$ a jeho báze $\{e_1, e_2\}$, získáme Cliffordovu algebru s bází $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$. Označme $i = e_1$, $j = e_2$, $k = e_1e_2$. Snadno se ověří, že potom platí vztahy:

$$\begin{gathered} ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j, \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \end{gathered}$$

To jsou právě vztahy, kterými se definují kvaterniony – další příklad Cliffordovy algebry. Kvaterniony jsou čísla tvaru $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, kde $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, s operacemi sčítání a násobení. Sčítání je definováno po složkách. Násobení je asociativní, distributivní vzhledem ke sčítání a splňuje výše uvedené vztahy pro součiny kvaternionů i, j, k. Není však komutativní.

3.2 Euklidovský prostor jako součást Cliffordovy algebry

Pro studium prostoru $\mathbb{R}^n$ použijeme Cliffordovu algebru $\mathcal{C}_{n-1}$. Přitom prostor $\mathbb{R}^n$ ztotožníme s podprostorem prostoru $\mathcal{C}_{n-1}$ generovaným prvky $1, e_1, \dots, e_{n-1}$. Můžeme tedy mluvit o Cliffordově součinu vektorů z $\mathbb{R}^n$, přestože tento součin nemusí být vždy prvkem $\mathbb{R}^n$. Dále ztotožníme $\mathbb{R}$ s podprostorem dimenze 1 prostoru $\mathcal{C}_n$, generovaným prvkem 1.

Speciálně tedy, při studiu geometrie roviny vyjdeme z Cliffordovy algebry $\mathcal{C}_1$, což jsou komplexní čísla (e_1 odpovídá imaginární jednotce i). Rovinu budeme studovat jako podprostor prostoru $\mathcal{C}_1$, generovaný prvky $1, e_1$, což je celá algebra $\mathcal{C}_1$. Při studiu $\mathbb{R}^3$ použijeme $\mathcal{C}_2$, což je nekomutativní těleso kvaternionů (viz příklad 3.1.7). Geometrický význam budou mít však pouze kvaterniony tvaru $x_0 + x_1 i + x_2 j$.

Prvkům prostoru $\mathbb{R}^n$ budeme, po vzoru Ahlforse [1], říkat vektory. V této kapitole ukážeme některé vlastnosti prostoru $\mathbb{R}^n$ jakožto podprostoru $\mathcal{C}_{n-1}$, které budou později potřeba.

Zavedeme tři operace, podobné komplexní konjugaci.

3.2.1 Definice: *Nechť $a = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \alpha_I e_I \in \mathcal{C}_n$. Označme:*

$$a' = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \alpha_I e_I$$

$$a^* = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|(|I|-1)/2} \alpha_I e_I$$

$$\overline{a} = (a')^* = (a^*)' = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|(|I|+1)/2} \alpha_I e_I$$

První konjugaci můžeme pro prvek báze napsat jako $(e_{i_1} \cdots e_{i_k})' = (-e_{i_1}) \cdots (-e_{i_k})$. Pro druhou konjugaci speciálně platí $(e_{i_1} \cdots e_{i_k})^* = e_{i_k} \cdots e_{i_1}$, tj. obrací se pořadí násobení.

3.2.2 Poznámka: Pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^* = x$, $x' = \overline{x}$. Speciálně pro $x \in \mathbb{C}$ je $\overline{x}$ komplexně sdružený prvek k x, takže značení není ve sporu.

3.2.3 Tvrzení: *Pro všechna $a, b \in \mathcal{C}_n$ platí:*

(i) $(a+b)' = a' + b'$, $(ab)' = a'b'$

(ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$

(iii) $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$

Důkaz: Operace $(\cdot)'$, $(\cdot)^*$ a $\overline{(\cdot)}$ pouze změní znaménko koeficientů u některých bázových prvků $\mathcal{C}_n$ (nezávisle na tom, na který prvek $\mathcal{C}_n$ danou operaci aplikujeme). Jelikož sčítání funguje po složkách, zřejmě platí všechna tři tvrzení se součtem.

Tvrzení o součinu stačí dokázat pro bázové prvky $a = e_I$, $b = e_J$. Součin $e_I e_J$ je až na znaménko roven e_K, kde $K = I \cup J \setminus (I \cap J)$; mohutnost indexu K je rovna

$|I| + |J| - 2|I \cap J|$, takže $|K| \equiv |I| + |J| \pmod 2$. Platí tedy

$$(e_I e_J)' = (-1)^{|K|} e_I e_J = (-1)^{|I|+|J|} e_I e_J = e_I' e_J'.$$

Když dokážeme tvrzení se součinem z bodu (ii), budeme hotovi i s bodem (iii), protože potom $\overline{ab} = \left[(ab)'\right]^* = (a'b')^* = (b')^*(a')^* = \overline{b}\,\overline{a}$. Nechť tedy $I, J \in \{1, \dots, n\}$, $K = (I \cup J) \setminus (I \cap J)$. Platí $|K| = |I| + |J| - 2|I \cap J|$ a máme

$$(e_I e_J)^* = (-1)^{|K|(|K|-1)/2} e_I e_J$$
$$e_J^* e_I^* = (-1)^{[|J|(|J|-1)+|I|(|I|-1)]/2} e_J e_I$$

Nyní potřebujeme vztah mezi $e_I e_J$ a $e_J e_I$; tyto dva výrazy se zřejmě liší pouze ve znaménku. Napíšeme si je jako součin $e_I e_J = e_{i_1} \cdots e_{i_{|I|}} e_{j_1} \cdots e_{j_{|J|}}$. Vidíme, že stačí pouze zjistit znaménko permutace, která přeuspořádá činitele v rozepsaném součinu $e_I e_J$ na $e_J e_I$. Tuto permutaci lze složit například pomocí $|I||J| - |I \cap J|$ transpozic, takže platí

$$e_I e_J = (-1)^{|I||J|-|I \cap J|} e_J e_I.$$

Máme tedy

$$e_J^* e_I^* = (-1)^{[|J|(|J|-1)+|I|(|I|-1)+2|I||J|-2|I \cap J|]/2} e_I e_J.$$

Upravujme exponent u -1: $[|J|(|J|-1) + |I|(|I|-1) + 2|I||J| - 2|I \cap J|]/2 =$

$$\begin{aligned}
&= [(|I| + |J|)(|I| + |J| - 1) - 2|I \cap J|]/2 = \\
&= [(|K| + 2|I \cap J|)(|K| + 2|I \cap J| - 1) - 2|I \cap J|]/2 \\
&= |K|(|K| - 1)/2 + 2\left(|K||I \cap J| + |I \cap J|^2 - |I \cap J|\right) \equiv |K|(|K| - 1)/2 \pmod 2
\end{aligned}$$

Tedy $(e_I e_J)^* = e_J^* e_I^*$, čímž je důkaz hotov. □

3.2.4 Tvrzení: *Pro invertibilní prvek $x \in \mathcal{C}_n$ platí:*

$$(x')^{-1} = (x^{-1})', \ (x^*)^{-1} = (x^{-1})^*, \ \overline{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$$

Důkaz: Použijeme tvrzení 3.2.3. Platí:

$$x'(x^{-1})' = (xx^{-1})' = 1' = 1, \quad x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = 1^* = 1, \quad \overline{x}\overline{x^{-1}} = \overline{x^{-1}x} = \overline{1} = 1$$

□

3.2.5 Tvrzení: *Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pak platí:*

(i) $x\overline{x} = \|x\|^2$

(ii) $x\overline{y} + y\overline{x} = 2\langle x, y \rangle$

Důkaz: (i) Nechť $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$. Potom $\overline{x} = x' = x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$ a platí následující úpravy:

$$\begin{aligned}
x\overline{x} &= x_0^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i\right)^2 = x_0^2 - \sum_{i,j=1; i<j}^{n-1} (x_i x_j e_i e_j + x_j x_i e_j e_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i e_i)^2 = \\
&= x_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \|x\|^2
\end{aligned}$$

(ii) Podle (i) platí $(x+y)\overline{x+y} = \|x+y\|^2$. Podle tvrzení 3.2.3 je $(x+y)\overline{x+y} = (x+y)(\overline{x}+\overline{y}) = x\overline{x} + y\overline{y} + x\overline{y} + y\overline{x}$, což je podle (i) rovno $\|x\|^2 + \|y\|^2 + x\overline{y} + y\overline{x}$. Celkem tedy máme $x\overline{y} + y\overline{x} = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x, y\rangle$. □

3.2.6 Definice: *Pro* $a = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} a_I e_I \in \mathcal{C}_n$ *definujme absolutní hodnotu* $|a|$ *vztahem* $|a|^2 = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} a_I^2$, $|a| \geq 0$.

3.2.7 Poznámka: Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je $|x| = \|x\|$.

3.2.8 Tvrzení: *Je-li* n *sudé,* $x \in \mathcal{C}_n$ *a pro všechna* $y \in \mathcal{C}_n$ *je* $xy = yx$*, potom* $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Nechť $I \subset \{1, \dots, n\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak

$$e_i e_I = \begin{cases} -e_I' e_i, & \text{pokud } i \in I \\ e_I' e_i, & \text{pokud } i \notin I \end{cases}$$

Nechť $x = e_I$. Má-li I sudou velikost, je $e_I' = e_I$ a podle druhého řádku je I prázdná (tím pádem $x \in \mathbb{R}$). Má-li I lichou velikost, je $e_I' = -e_I$ a podle prvního řádku je $I = \{1, \dots, n\}$, což je spor s tím, že n je sudé.

Pro obecné $x = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \alpha_I e_I$ rozepsáním a použitím jednoznačnosti koeficientů u jednotlivých e_I plyne, že pro všechna $y \in \mathcal{C}_n$ a všechny indexy I s nenulovým α_I platí $ye_I = e_I y$; tedy $x \in \mathbb{R}$. □

3.2.9 Tvrzení: *Množina* $\Gamma_n = \{x_1 \cdots x_k;\ x_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ *všech součinů nenulových vektorů z* $\mathbb{R}^n$ *spolu s operací součinu tvoří grupu.*

Důkaz: Ke každému nenulovému vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ existuje inverzní vektor $x^{-1} = |x|^{-2}\overline{x}$. Součin vektorů $x_1 \cdots x_k$ z $\mathbb{R}^n$ je invertibilní: jeho inverzí je $x_k^{-1} \cdots x_1^{-1}$. Jednotkovým prvkem je 1, protože je neutrální vzhledem k součinu na celém $\mathcal{C}_{n-1}$. □

3.2.10 Definice: *Množinu* $\{x_1 \cdots x_k;\ x_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ *spolu s operací Cliffordova součinu nazveme Cliffordovou grupou a označíme ji* Γ_n.

3.2.11 Tvrzení: *Nechť* $a, b \in \Gamma_n$*. Potom platí:*

(i) $|a|^2 = a\overline{a} = a'a^* = a^*a'$

(ii) $|ab| = |a||b|$

Důkaz: (i) Buď $a = x_1 \cdots x_k$, kde $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Potom $a\overline{a} = x_1 \cdots x_k \overline{x}_k \cdots \overline{x}_1$, což je podle tvrzení 3.2.5 (i) a poznámky 3.2.7 rovno $|x_k|^2 \cdots |x_1|^2 \in \mathbb{R}$. V součinu $a\overline{a}$ je koeficient u 1 roven $\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} a_I^2$ (kde $a = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} a_I e_I$), a tudíž $a\overline{a} = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} a_I^2 = |a|^2$. Podle tvrzení 3.2.3 a poznámky 3.2.2 platí vztahy $a' = x_1' \cdots x_k' = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_k$ a $a^* = x_k^* \cdots x_1^* = x_k \cdots x_1$; odtud

$$\begin{aligned} a'a^* &= \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_k x_k \cdots x_1 = |x_1|^2 \cdots |x_k|^2 = a\overline{a}, \\ a^*a' &= x_k \cdots x_1 \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_k = |x_k|^2 \cdots |x_1|^2 = a\overline{a}. \end{aligned}$$

(ii) Podle (i) platí $|ab|^2 = ab \cdot \overline{ab} = ab\overline{b}\overline{a} = |a|^2|b|^2$. □

3.2.12 Tvrzení: *Nechť* $a \in \Gamma_n$, $x \in \mathbb{R}^n$*. Potom* $axa^* \in \mathbb{R}^n$, $ax(a')^{-1} \in \mathbb{R}^n$ *a zobrazení* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = ax(a')^{-1}$ *je bijektivní izometrie euklidovského prostoru* $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Podle tvrzení 3.2.5 (ii) platí $x\overline{y} + y\overline{x} = 2\langle x, y\rangle$. Po vynásobení obou stran zprava y a použitím tvrzení 3.2.11 dostaneme $y\overline{x}y = 2\langle x, y\rangle y - |y|^2 x \in \mathbb{R}^n$. Toto platí pro všechny vektory x, y, tedy i pro $\overline{x}$ a y^*, což nám dá $y^*xy^* \in \mathbb{R}^n$.

Protože $y^* = y$, máme $yxy^* \in \mathbb{R}^n$. Protože $a \in \Gamma_n$, můžeme a vyjádřit jako součin vektorů; nechť tedy $a = x_1 \cdots x_k$. Pak $a^* = x_k^* \cdots x_1^*$ a $axa^* = x_1 \cdots x_k x x_k^* \cdots x_1^*$. Vícenásobným použitím předchozího výsledku postupně dostaneme, že $x_k x x_k^* \in \mathbb{R}^n$, $x_{k-1}(x_k x x_k^*) x_{k-1}^* \in \mathbb{R}^n, \ldots, axa^* \in \mathbb{R}^n$.

Podle tvrzení 3.2.11 (i) je $(a')^{-1} = a^*/|a|^2$, a tedy $ax(a')^{-1} = axa^*/|a|^2$, což je zřejmě vektor. Zobrazení $f(x) = ax(a')^{-1}$ je izometrie, protože $|a'| = |a|$ a podle 3.2.11 (ii) je $|ax(a')^{-1}| = |a||x||a|^{-1} = |x|$. Protože na celém $\mathbb{R}^n$ existuje inverzní funkce $f^{-1}(x) = (a^{-1})x\left((a^{-1})'\right)^{-1} = (a^{-1})xa'$, je f bijekce. □

3.2.13 Tvrzení: *Nechť $a, b \in \Gamma_n$. Potom prvky ab^{-1}, b^*a, a^*b, $a^{-1}b$, ab^*, $ba^* \in \Gamma_n$ jsou buď všechny v $\mathbb{R}^n$, nebo žádný z nich není v $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz: Když $ab^{-1} \in \mathbb{R}^n$, potom podle tvrzení 3.2.12 $b^*(ab^{-1})b = b^*a \in \mathbb{R}^n$. Napíšeme-li b^*a jako součin vektorů, můžeme napsat $a^*b = (b^*a)^*$ jako součin těch samých vektorů v opačném pořadí. Pro každé dva prvky $v, w \in \mathcal{C}_{n-1}$ se koeficienty vw a wv u jednotlivých e_I liší nejvýše znaménkem (ověří se to snadno roznásobením). $vw \in \mathbb{R}^n$ právě, když jsou pro $|I| > 1$ koeficienty vw u e_I nulové. To je právě tehdy, když jsou tyto koeficienty nulové pro prvek wv, což znamená právě $wv \in \mathbb{R}^n$. Tudíž z $b^*a \in \mathbb{R}^n$ plyne i $a^*b \in \mathbb{R}^n$.

Když $a^*b \in \mathbb{R}^n$, potom podle tvrzení 3.2.12 $(b^*)^{-1}(a^*b)b^{-1} = (b^*)^{-1}a^* \in \mathbb{R}^n$. Prvek $ab^{-1} = ((b^*)^{-1}a^*)^*$ je součin stejných vektorů jako $(b^*)^{-1}a^*$, v opačném pořadí. Stejně jako výše tedy získáme $ab^{-1} \in \mathbb{R}^n$. Dohromady tedy máme $ab^{-1} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow b^*a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow a^*b \in \mathbb{R}^n$. Aplikací již dokázaných implikací na zaměněné proměnné a a b dostaneme $a^{-1}b \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow b^{*-1}a^{-1} = (ab^*)^{-1} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow ab^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow ba^* \in \mathbb{R}^n$.

Pokud teď dokážeme například ekvivalenci $a^*b \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow ba^* \in \mathbb{R}^n$, budeme už mít všechno. To jde ale udělat stejně, jako výše; ba^* je součin stejných vektorů jako a^*b, jen v jiném pořadí. □

3.3 Popis geometrických transformací

V tomto oddílu si připravíme algebraické vyjádření některých geometrických transformací, přičemž využijeme Cliffordových čísel. Konkrétně se podíváme, jak popsat rotace a sférickou inverzi.

Nejprve se vraťme k definici rozšířeného euklidovského prostoru $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (definice 2.1.4). Rozšířili jsme tehdy aritmetické operace vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, aby v některých případech zahrnovaly i nekonečno. Rozšíříme i Cliffordův součin, analogicky rozšiřování násobení komplexních čísel v případě Riemannovy sféry $\widehat{\mathbb{C}}$.

3.3.1 Definice: *Rozšiřme Cliffordův součin na $\widehat{\mathbb{R}}^n$ následovně:*

$$\forall x \in \widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\}: \quad x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, \quad x \cdot 0^{-1} = \infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad x \cdot \infty^{-1} = 0$$

Dále dodefinujme $\infty^* = \infty' = \overline{\infty} = \infty$.

Definice konjugací bodu ∞ je přirozená, pokud si uvědomíme, jak jednotlivé tři konjugace vypadají geometricky na $\mathbb{R}^n$. První konjugace, $x \to x'$, je složením $n-1$ souměrností podle nadrovin kolmých na souřadnicové osy. Pokud uvažujeme rozšíření těchto souměrností na celé $\widehat{\mathbb{R}}^n$, je ∞ pevným bodem operace $'$, která je jejich složením. Druhá konjugace, $x \to x^*$, je na $\mathbb{R}^n$ identita. Je tedy přirozené ji definovat jako identitu na celém $\widehat{\mathbb{R}}^n$. A konečně třetí konjugace, $x \to \overline{x}$, je na $\mathbb{R}^n$ shodná s první konjugací.

Připomeňme algebraické vyjádření souměrnosti podle nadroviny, které jsme odvodili v tvrzení 2.2.6. Obraz bodu $z \in \mathbb{R}^n$ v souměrnosti podle nadroviny P, určené normálovým vektorem w a bodem a, lze vyjádřit takto:

$$\mathcal{I}_P(z) = z - 2 \cdot \frac{\langle z - a, w \rangle}{\|w\|^2} \cdot w.$$

Pomocí tohoto vzorce odvodíme algebraický popis rotací. Považujme ∞ za pevný bod rotace okolo počátku. (Po zobrazení stereografickou projekcí bude takové rotaci $\widehat{\mathbb{R}}^n$ odpovídat rotace n-rozměrné sféry okolo „severo–jižní“ osy. Bodu ∞ odpovídá „severní pól“, který zůstane při takové rotaci fixovaný.)

3.3.2 Tvrzení: *Nechť $a \in \Gamma_n$. Zobrazení $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$, $f(x) = axa'^{-1}$ je rotace okolo počátku, tj. existuje matice $\rho(a) \in \mathrm{SO}_n$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je $\rho(a)x = f(x)$ a navíc $f(\infty) = \infty$. Na druhou stranu, pro každou rotaci $\rho \in \mathrm{SO}_n$ existuje $a \in \Gamma_n$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je $\rho x = axa'^{-1}$.*

Důkaz: Zkoumejme nejprve $\rho(y)$ pro $y \in V^n$. Z tvrzení 3.2.5 máme pro $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\rho(y)x' = yx'y'^{-1} &= 2\langle x, y\rangle y'^{-1} - x\overline{y}y'^{-1} = \quad (\text{protože } x' = \overline{x}) \\
&= \frac{2}{|y|^2}\langle x, y\rangle y - x = \quad (\text{protože } yy' = |y|^2,\ y'^{-1} = y/|y|^2) \\
&= -\left(x - 2 \cdot \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \cdot y\right) = -\mathcal{I}_Y(x),
\end{aligned}$$

kde Y je nadrovina procházející počátkem, určená normálovým vektorem y. Pro body $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ je zobrazení $x \to -x'$ souměrností podle nadroviny procházející počátkem, kolmé na vektor 1. (Toto zobrazení totiž právě mění znaménko u první souřadnice bodu x.) Označme tuto nadrovinu J. Platí tedy $-x' = \mathcal{I}_J(x)$ a

$$\rho(y)x = \mathcal{I}_Y(\mathcal{I}_J(x)).$$

Zobrazení $x \to \rho(y)x$ je složení dvou souměrností podle nadrovin procházejících počátkem, tedy rotací.

Pro $a, b \in \Gamma_n$ platí $\rho(ab)x = abx(ab)'^{-1} = abxb'^{-1}a'^{-1} = \rho(a)\rho(b)x$. Napišme a jako součin vektorů: $a = v_1 \cdots v_k$. Protože $\rho(v_1), \dots, \rho(v_k) \in \mathrm{SO}_n$, platí $\rho(a) = \rho(v_1) \cdots \rho(v_k) \in \mathrm{SO}_n$. Zobrazení $x \to axa'^{-1}$ zachová nekonečno, protože $a \neq 0$.

Dokažme druhou implikaci. Každou rotaci $\rho \in \mathrm{SO}_n$ je možné napsat jako složení sudého počtu souměrností podle nadrovin, které procházejí počátkem. Výše jsme ukázali, že souměrnosti podle nadrovin, které procházejí počátkem a jsou kolmé na směr y, lze psát ve tvaru $x \to -\rho(y)x'$. Složením dvou takových dostaneme rotaci v požadovaném tvaru:

$$-\rho(y_2)\left(-\rho(y_1)x'\right)' = -y_2\left(-y_1x'y_1'^{-1}\right)' y_2'^{-1} = y_2y_1'xy_1^{-1}y_2'^{-1} = (y_2y_1')\,x\,(y_2y_1')'^{\,-1}$$

Nekonečno je opět pevným bodem, protože $y_1, y_2 \neq 0$.

□

3.3.3 Tvrzení: *Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \overline{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$ je sférická inverze podle jednotkové sféry se středem v počátku.*

Důkaz: Nechť $x \in \mathbb{R}^n$. Protože $x\overline{x} = |x|^2$, je $x^{-1} = \overline{x}/|x|^2$ a $f(x) = \overline{x}^{-1} = x/|x|^2$. Zřejmě body x a $f(x)$ oba leží na polopřímce $0x$. Součin jejich vzdáleností od počátku je roven jedné, tedy jsou navzájem svými obrazy při sférické inverzi podle jednotkové sféry se středem v počátku. □

4. Popis Möbiových transformací pomocí Cliffordovy algebry

Připomeňme, že Möbiovy transformace vzniknou složením konečného počtu souměrností podle nadrovin a sférických inverzí v $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (viz definici 2.3.1). Möbiova transformace je přímá, resp. nepřímá, jde-li o složení sudého, resp. lichého počtu těchto zobrazení. V kapitole 1 jsme ukázali, jak lze jednoduše popisovat Möbiovy transformace ve dvou dimenzích pomocí komplexních čísel. Nyní tento popis zobecníme podle Ahlforsova článku [1] do více dimenzí, přičemž v roli komplexních čísel budou vystupovat Cliffordova čísla příslušné dimenze.

Vedeni analogií s dvourozměrným případem, budeme zkoumat transformace tvaru

$$x \to (ax+b)(cx+d)^{-1}, \quad x \in \widehat{\mathbb{R}}^n, \quad a,b,c,d \in \Gamma_n \cup \{0\}.$$

Stejně jako v kapitole 1 budeme tuto transformaci značit Mg, kde

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je matice jejích koeficientů. Odvodíme určité podmínky kladené na tyto koeficienty, které budou nakonec ekvivalentní tomu, že příslušná transformace je Möbiovou transformací. Nalezneme maticovou grupu, která bude odpovídat právě Möbiově grupě.

Často budeme používat fakt, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^* = x$ (viz poznámka 3.2.2).

4.1 Matice Cliffordových čísel

V tomto oddílu se budeme věnovat určitým pojmům a tvrzením, která zužitkujeme ve zbytku kapitoly. Pro začátek si uvědomíme, že skládání transformací odpovídá násobení příslušných matic:

4.1.1 Tvrzení: *Mějme dvě matice s prvky z $\Gamma_n \cup \{0\}$,*

$$g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Potom pro $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ platí $Mg_2(Mg_1(x)) = M(g_2g_1)(x)$ (na příslušných definičních oborech transformací $Mg_1, Mg_2, M(g_2g_1)$).

Důkaz: Upravujme:

$$\begin{aligned} Mg_2(Mg_1(x)) &= [a_2(a_1x+b_1)(c_1x+d_1)^{-1}+b_2]\,[c_2(a_1x+b_1)(c_1x+d_1)^{-1}+d_2]^{-1} = \\ &= [(a_2a_1+b_2c_1)x+a_2b_1+b_2d_1]\,[(c_2a_1+d_2c_1)x+c_2b_1+d_2d_1]^{-1} = \\ &= M(g_2g_1)(x) \end{aligned}$$

□

4.1.2 Definice: *Nechť*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je matice s prvky z množiny $\Gamma_n \cup \{0\}$. *Definujme její pseudodeterminant* $\Delta(g)$ *vztahem* $\Delta(g) = ad^* - bc^*$.

4.1.3 Definice: $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ *je množina všech matic* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *takových, že platí:*

(i) $a, b, c, d \in \Gamma_n \cup \{0\}$

(ii) $\Delta(g) = ad^* - bc^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(iii) $ab^*,\ cd^*,\ c^*a,\ d^*b \in \mathbb{R}^n$

4.1.4 Tvrzení: *Je-li*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n),$$

pak $\Delta(g) = d^*a - b^*c$.

Důkaz: Nechť nejprve $d \neq 0$. Dokážeme, že $\Delta(g)|d|^2 = (d^*a - b^*c)|d|^2$, z čehož již vyplývá dokazovaný závěr. Platí

$$|d|^2 = (|d|^2)^* = \left(d\overline{d}\right)^* = \overline{d}^* d^* = (d'^*)^* d^* = d'd^*,$$

a také $\Delta(g) \in \mathbb{R}$, proto můžeme psát:

$$\Delta(g)|d|^2 = d^*(ad^* - bc^*)d' = d^*ad^*d' - d^*bc^*d' = d^*a|d|^2 - d^*bc^*d'$$

Protože $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$, je $d^*b, cd^* \in \mathbb{R}^n$ a podle tvrzení 3.2.13 je též $dc^* \in \mathbb{R}^n$. Platí tedy $d^*b = b^*d$ a $dc^* = cd^*$ a můžeme takto pokračovat ve výpočtu:

$$d^*a|d|^2 - d^*bc^*d' = d^*a|d|^2 - b^*dc^*d' = d^*a|d|^2 - b^*cd^*d' = (d^*a - b^*c)|d|^2$$

Pro $b \neq 0$ můžeme postupovat obdobně:

$$\Delta(g)|b|^2 = \overline{b}(ad^* - bc^*)b = \overline{b}ad^*b - |b|^2c^*b$$

Protože $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$, je $d^*b, ab^* \in \mathbb{R}^n$ a proto $d^*b = b^*d$, $ab^* = ba^*$. Můžeme tedy pokračovat následovně:

$$\overline{b}ad^*b - |b|^2c^*b = \overline{b}ab^*d - |b|^2c^*b = \overline{b}ba^*d - |b|^2c^*b = (a^*d - c^*b)|b|^2$$

Výraz $\Delta(g)|b|^2$ je reálným číslem, a proto je roven své hvězdičkové konjugaci:

$$\Delta(g)|b|^2 = [(a^*d - c^*b)]^*|b|^2 = (d^*a - b^*c)|b|^2$$

Nemůže být zároveň d i b nulové, protože by byla porušena podmínka nenulovosti pseudodeterminantu z definice $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$. □

4.1.5 Tvrzení: *Nechť*

$$g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

a $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$. *Nechť jsou navíc pseudodeterminanty matic* g_1, g_2 *reálná čísla. Pak* $\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)$.

Důkaz: Platí:

$$\begin{aligned}\Delta(g_1g_2) &= (a_1a_2+b_1c_2)(c_1b_2+d_1d_2)^* - (a_1b_2+b_1d_2)(c_1a_2+d_1c_2)^* = \\ &= (a_1a_2+b_1c_2)(b_2^*c_1^*+d_2^*d_1^*) - (a_1b_2+b_1d_2)(a_2^*c_1^*+c_2^*d_1^*)\end{aligned}$$

Z platnosti bodu (iii) z definice $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ pro g_2 máme $a_2b_2^*, c_2d_2^* \in \mathbb{R}^n$, a tedy $a_2b_2^* = b_2a_2^*$, $c_2d_2^* = d_2c_2^*$; využijeme toho po menší úpravě zkoumaného výrazu:

$$\begin{aligned}\Delta(g_1g_2) &= a_1\left[(a_2b_2^*-b_2a_2^*)c_1^* + (a_2d_2^*-b_2c_2^*)d_1^*\right] + \\ &\quad + b_2\left[(c_2d_2^*-d_2c_2^*)d_1^* + (c_2b_2^*-d_2a_2^*)c_1^*\right] = \\ &= a_1\Delta(g_2)d_1^* - b_1\Delta(g_2)c_1^* = (a_1d_1^*-b_1c_1^*)\Delta(g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)\end{aligned}$$

□

4.2 Matice bijektivních transformací

V tomto oddílu popíšeme podmínky, kladené na koeficienty transformace Mg, za kterých bude daná transformace bijektivní (což každá Möbiova transformace zajisté je). Dokážeme také, že množina $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ s operací maticového součinu tvoří grupu.

Vedeni článkem [1] necháme transformace Mg působit také na body z $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

4.2.1 Tvrzení: *Matice*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

s prvky z $\Gamma_n \cup \{0\}$ *přísluší identické transformaci* $Mg : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ a $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, *právě když je nenulovým reálným násobkem jednotkové matice.*

Důkaz: „$\Leftarrow$“: Platí triviálně.

„$\Rightarrow$“: Podle předpokladů pro všechna $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ platí $ax+b = x(cx+d)$. Pro $x=0$ dostáváme $b=0$. Pro $x=\infty$ dostáváme $c=0$: výraz rozšíříme x^{-1} zprava i zleva, dostaneme $x^{-1}a = c+dx^{-1}$. Protože $x^{-1}=0$, je $c=0$. Pro $x=1$ dostáváme $a=d$. Tedy pro všechna $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ platí $ax = xa$. Podle tvrzení 3.2.8 je $a \in \mathbb{R}$ pro sudá n. Pro lichá n to plyne stejně, rozšíříme-li g na $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$. Pokud $a=d=0$, pak zřejmě Mg není identická transformace. □

Nyní dokážeme jednu ze dvou hlavních vět této práce.

4.2.2 Věta: *Matice*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

s prvky z množiny $\Gamma_n \cup \{0\}$ *je maticí bijektivní transformace* $Mg : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ *a* $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ *právě tehdy, když* $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$.

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Pro každé $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ musí být $Mg(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, takže speciálně platí $Mg(0) = bd^{-1} \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, $Mg(\infty) = ac^{-1} \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. Pokud $Mg(0) = bd^{-1} = \infty$, pak je $d=0$ a $d^*b \in \mathbb{R}^n$. V opačném případě můžeme použít tvrzení 3.2.13, a opět máme $d^*b \in \mathbb{R}^n$. Pokud $Mg(\infty)=\infty$, pak $c=0$ a $c^*a \in \mathbb{R}^n$. V opačném případě máme, opět pomocí tvrzení 3.2.13, že $c^*a \in \mathbb{R}^n$.

Uvažujme $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ a označme $y = Mg(x)$. Platí $y = (ax+b)(cx+d)^{-1}$, což přepišme jako $y(cx+d) = ax+b$. Protože $x = x^*$, $y = y^*$, získáme aplikací operace * na obě strany rovnosti vztah $(xc^* + d^*)y = xa^* + b^*$. Po úpravě máme $x(a^* - c^*y) = d^*y - b^*$, což lze napsat jako

$$x = Mg_1(y), \quad \text{kde} \quad g_1 = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Podle předpokladu je transformace Mg bijektivní; tedy i Mg_1 je bijektivní a je inverzní transformací k Mg. Stejně jako pro transformaci Mg máme $Mg_1(0) = -b^*(a^*)^{-1} = -a^{-1}b \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ a $Mg_1(\infty) = -d^*(c^*)^{-1} = -c^{-1}d \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. To implikuje $ab^*, cd^* \in \mathbb{R}^n$: buď je $a^{-1}b = \infty$ a tedy $a = 0$ a $ab^* \in \mathbb{R}^n$, nebo $a^{-1}b \in \mathbb{R}^n$, použijeme tvrzení 3.2.13 a opět $ab^* \in \mathbb{R}^n$. Stejně tak buď $c^{-1}d = \infty$ a tedy $c = 0$ a $cd^* \in \mathbb{R}^n$, nebo $c^{-1}d \in \mathbb{R}^n$ a použijeme tvrzení 3.2.13 a opět $cd^* \in \mathbb{R}^n$. Tím jsme dokázali platnost bodu (iii) z definice $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$.

Jelikož transformace Mg a Mg_1 jsou navzájem inverzní, je transformace $Mg \circ Mg_1 = M(gg_1)$ identická. Jí příslušná matice má tvar

$$gg_1 = \begin{pmatrix} ad^* - bc^* & ba^* - ab^* \\ cd^* - dc^* & da^* - cb^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^* - bc^* & 0 \\ 0 & da^* - cb^* \end{pmatrix},$$

protože $ab^*, cd^* \in \mathbb{R}^n$ (to jsme dokázali výše) a $ab^* = (ab^*)^* = ba^*$, $cd^* = (cd^*)^* = dc^*$. Podle tvrzení 4.2.1 je matice gg_1 nenulovým reálným násobkem jednotkové matice, a proto je

$$ad^* - bc^* = \Delta(g) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tím je dokázán bod (ii). Platnost bodu (i) je v předpokladech věty.

„$\Leftarrow$“: Nejprve ukážeme, že pro všechny $x \in \mathbb{R}^n$ má výraz $(ax + b)(cx + d)^{-1}$ smysl. Rozlišíme dva případy. Pokud $c = 0$, pak $cx + d$ je invertibilní. Pokud je navíc $cx + d = 0$ a zároveň $ax + b = 0$, je $d = 0$, $d^* = 0$, $c^* = 0$ a $ad^* - bc^* = 0$, což je spor s bodem (ii).

Pokud $c \neq 0$, můžeme psát $cx + d = c(x + c^{-1}d)$. Z bodu (iii) je $cd^* \in \mathbb{R}^n$ a podle tvrzení 3.2.13 je $c^{-1}d \in \mathbb{R}^n$. Tedy $x + c^{-1}d \in \mathbb{R}^n$ a $c(x + c^{-1}d) \in \Gamma_n \cup \{0\}$ je invertibilní. Pokud je navíc $ax + b = 0$ a $cx + d = 0$, můžeme vyjádřit $x = -c^{-1}d = -(c^{-1}d)^* = -d^*c^{*-1}$ a dosadit:

$$ax + b = -ad^*c^{*-1} + b = 0, \quad ad^*c^{*-1} = b, \quad ad^* = bc^*,$$

což je spor s bodem (ii).

Nyní dokážeme, že pro všechna $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ je $Mg(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. Pro $x = \infty$ je $Mg(x) = ac^{-1}$. Pokud $c = 0$, pak $ac^{-1} = \infty \in \widehat{\mathbb{R}}^n$; jinak z bodu (iii) máme $c^*a \in \mathbb{R}^n$ a podle tvrzení 3.2.13 je $ac^{-1} \in \mathbb{R}^n$. Teď tedy chceme už dokázat jen to, že pro $x \in \mathbb{R}^n$ je $Mg(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$.

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Postupně upravujme:

$$\Delta(g)(x - y) = (d^*a - b^*c)x - [(d^*a - b^*c)y]^* = (d^*a - b^*c)x - y(a^*d - c^*b)$$

V první rovnosti jsme využili tvrzení 4.1.4 a fakt, že $\Delta(g)y \in \mathbb{R}^n$. Protože podle (iii) je $c^*a, d^*b \in \mathbb{R}^n$, platí $c^*a = (c^*a)^* = a^*c$ a podobně $d^*b = b^*d$. Upravujme dále:

$$\begin{aligned} \Delta(g)(x - y) &= y(c^*a - a^*c)x + (d^*a - b^*c)x - y(a^*d - c^*b) + d^*b - b^*d = \\ &= (yc^* + d)(ax + b) - (ya^* + b^*)(cx + d) \end{aligned}$$

Výše jsme ukázali, že $cx + d$ a $yc^* + d^* = (cy + d)^*$ jsou invertibilní. Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} (ax + b)(cx + d)^{-1} - (yc^* + d^*)^{-1}(ya^* + b^*) &= \Delta(g)(yc^* + d^*)^{-1}(x - y)(cx + d)^{-1} \\ Mg(x) - (Mg(y))^* &= \Delta(g)(yc^* + d^*)^{-1}(x - y)(cx + d)^{-1} \end{aligned}$$

Po dosazení y za x do posledního vztahu získáme $(Mg(y))^* = Mg(y)$, takže můžeme psát

$$Mg(x) - Mg(y) = \Delta(g)(yc^* + d^*)^{-1}(x - y)(cx + d)^{-1}$$

Speciálně pro $y = 0$ platí $Mg(x) - Mg(0) = \Delta(g)d^{*-1}x(cx + d)^{-1}$. Součin invertibilních prvků je invertibilní, a proto můžeme psát:

$$(Mg(x) - Mg(0))^{-1} = \Delta(g)^{-1}(cx + d)x^{-1}d^* = \Delta(g)^{-1}\left(cd^* + dx^{-1}d^*\right)$$

Podle (iii) a tvrzení 3.2.12 platí $cd^* + dx^{-1}d^* \in \mathbb{R}^n$. Proto i $(Mg(x) - Mg(0))^{-1} \in \mathbb{R}^n$ a $Mg(x) - Mg(0) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. Protože $Mg(0) = bd^{-1} \in \mathbb{R}^n$ (podle (iii) a tvrzení 3.2.13), $Mg(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$.

Stejným způsobem dostaneme, že pro $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ je $Mg(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Zbývá dokázat, že zobrazení Mg je bijektivní. Najdeme tedy k němu inverzní zobrazení. Označme

$$g_1 = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Platí $g_1 \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$: bod (i) je zřejmě splněn, bod (ii) platí podle tvrzení 4.1.4, bod (iii) platí podle tvrzení 3.2.13. Podle toho, co jsme již dokázali, platí: pro všechna $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ je $Mg_1(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ a pro všechna $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ je $Mg_1(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$. Chceme ukázat, že zobrazení Mg a Mg_1 jsou navzájem inverzní.

Složenému zobrazení $Mg_1 \circ Mg$ podle tvrzení 4.1.1 odpovídá matice

$$gg_1 = \begin{pmatrix} ad^* - bc^* & ba^* - ab^* \\ cd^* - dc^* & da^* - cb^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^* - bc^* & 0 \\ 0 & da^* - cb^* \end{pmatrix},$$

protože podle bodu (iii) je $ab^*, cd^* \in \mathbb{R}^n$ a tedy $ab^* = (ab^*)^* = ba^*$, $cd^* = (cd^*)^* = dc^*$. Protože $\Delta(g) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, je $ad^* - bc^* = (ad^* - bc^*)^* = da^* - cb^*$ a matice gg_1 je nenulovým reálným násobkem jednotkové matice. Podle tvrzení 4.2.1 je zobrazení $M(gg_1)$ identita, a tedy zobrazení Mg a Mg_1 jsou navzájem inverzní. □

4.2.3 Tvrzení: *Množina* $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ *spolu s operací maticového součinu tvoří grupu.*

Důkaz: Násobení matic je asociativní, jednotkovým prvkem je jednotková matice. Matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$$

má inverzi

$$(ad^* - bc^*)^{-1}\begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n).$$

Tato inverzní matice je zřejmě v $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$: bod (i) je triviálně splněn, bod (ii) platí podle tvrzení 4.1.4, bod (iii) platí podle tvrzení 3.2.13.

Zbývá ukázat, že součin

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

matic z $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ je také v $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$.

Pokud jsou a_1 a c_2 nenulové, můžeme psát $a_1a_2 + b_1c_2 = a_1(a_2c_2^{-1} + a_1^{-1}b_1)c_2$, což je v $\Gamma_n \cup \{0\}$ kvůli podmínce (iii) ($a_2c_2^{-1}$ a $a_1^{-1}b_1$ jsou podle tvrzení 3.2.13 v $\widehat{\mathbb{R}}^n$). Pro

$a_1 = 0$ nebo $c_2 = 0$ je tentýž závěr triviální. Stejným způsobem se ověří, že všechny prvky výsledné matice jsou v $\Gamma_n \cup \{0\}$.

Nyní můžeme použít větu 4.2.2: výsledná matice má prvky v $\Gamma_n \cup \{0\}$, a indukuje bijektivní zobrazení $\widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ a $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ (složení dvou bijekcí je bijekce). Podle věty 4.2.2 je tedy výsledná matice též v $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$. □

4.3 Matice Möbiových transformací

V tomto oddílu ukážeme, že matice z $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ odpovídají právě přímým Möbiovým transformacím $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

4.3.1 Věta: *Transformace M na $\widehat{\mathbb{R}}^n$ je přímá Möbiova transformace, právě když je tvaru Mg pro nějakou matici $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$, tj. když je tvaru $M(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$, kde*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n).$$

Grupa přímých Möbiových transformací $\widehat{\mathbb{R}}^n$ je generována maticemi tvaru

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $a \in \Gamma_n, b \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz: Nechť

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n).$$

Nejprve předpokládejme, že $c \neq 0$. Potom máme $bc^* = ad^* - 1$, odkud plyne $b = ad^*c^{*-1} - c^{*-1} = ac^{-1}d - c^{*-1}$. Poslední rovnost vyplývá z toho, že $c^{-1}d$ je vektor, a tedy $c^{-1}d = (c^{-1}d)^* = d^*c^{-1*}$. Máme tedy:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^{*-1} \\ c & d \end{pmatrix}$$

Roznásobením se ověří, že platí následující rozklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c^{*-1} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^{*-1} & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Napsali jsme tedy g jako složení čtyřech zobrazení, která jsou ve tvaru avizovaném ve znění.

Pro $c = 0$, $a \neq 0$ platí $d = a^{*-1}$ a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Případ $a = c = 0$ nastat nemůže, protože jinak by $\Delta(g) = 0$ a $g \notin \mathrm{GL}(\Gamma_n)$. Takže každé $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$ lze napsat jako složení zobrazení daných tří typů.

Tyto tři typy zobrazení jsou přímými Möbiovými transformacemi: první lze napsat jako $x \to axa^* = |a|^2 axa'^{-1}$, což je podle tvrzení 3.3.2 složením rotace (dané maticí $\rho(a) \in \mathrm{SO}_n$) a stejnolehlosti s koeficientem $|a|^2$ a středem v počátku. Druhý typ je posunutí o vektor b. Třetí je sférická inverze podle jednotkové sféry následovaná reflexí podle nadroviny kolmé k vektoru 1.

Zbývá ukázat, že každou přímou Möbiovu transformaci lze napsat jako Mg pro nějakou matici $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$. Stačí, když takto napíšeme složení libovolných dvou sférických inverzí, protože ty už generují celou grupu přímých Möbiových transformací. Mějme tedy dvě sférické inverze $\mathcal{I}_S$, $\mathcal{I}_T$ podle sfér o středech s, t a poloměrech r_S, r_T. Podle definice 2.2.1 je

$$\mathcal{I}_S(x) = s + \frac{r_S^2}{\|x-s\|^2} \cdot (x-s) = r_S^2 \overline{(x-s)}^{\,-1} + s,$$

protože $\overline{x-s} = |x-s|^2/(x-s)$. Pro složení dvou transformací platí:

$$\mathcal{I}_T \circ \mathcal{I}_S = [\mathcal{I}_T \circ (y \to -\overline{y})] \circ [(y \to -\overline{y}) \circ \mathcal{I}_S]$$

Ukážeme, že transformace $\mathcal{I}_T \circ (y \to -\overline{y})$ a $(y \to -\overline{y}) \circ \mathcal{I}_S$ jsou indukované pomocí prvků $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$, a tím pádem i jejich složení $\mathcal{I}_T \circ \mathcal{I}_S$ je indukované prvkem $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$, neboť $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$ je grupa. Upravujme tedy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_T \circ (y \to -\overline{y})(x) &= \mathcal{I}_T(-\overline{x}) = r_T^2 \overline{(-\overline{x}-t)}^{\,-1} + t = r_T^2 \left(-x-\overline{t}\right)^{-1} + t = \\
&= M \begin{pmatrix} t & |t|^2 - r_T^2 \\ 1 & \overline{t} \end{pmatrix}(x)
\end{aligned}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} t & |t|^2 - r_T^2 \\ 1 & \overline{t} \end{pmatrix} = |s|^2 - |s|^2 + r_T^2 = r_T^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$t\,(|t|^2 - r_T^2)\,,\ (|t|^2 - r_T^2)\,\overline{t},\ 1 \cdot \overline{t},\ 1 \cdot t \in \mathbb{R}^n$$

Tedy matice příslušná zobrazení $\mathcal{I}_T \circ (y \to -\overline{y})$ je z $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$. Obdobně ověříme totéž u druhé transformace:

$$(y \to -\overline{y}) \circ \mathcal{I}_S(x) = -\overline{\mathcal{I}}_S(x) = -r_S^2\,(x-s)^{-1} - \overline{s} = M \begin{pmatrix} -\overline{s} & -|s|^2 - r_S^2 \\ 1 & -\overline{s} \end{pmatrix}(x)$$

$$\Delta \begin{pmatrix} -\overline{s} & -|s|^2 - r_S^2 \\ 1 & -\overline{s} \end{pmatrix} = |s|^2 + |s|^2 + r_S^2 = 2|s|^2 + r^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$-\overline{s}\,(-|s|^2 - r_S^2)\,, (-|s|^2 - r_S^2)\,(-\overline{s}), 1 \cdot (-\overline{s}) \in \mathbb{R}^n$$

□

4.3.2 Poznámka: Každou přímou Möbiovy transformaci tedy můžeme popsat maticí z $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$. Nicméně více těchto matic indukuje stejnou transformaci: například pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g \in \Gamma_n$ je $Mg = M(ag)$. Stačí tedy uvažovat pouze matice z $\mathrm{GL}(\Gamma_n)$, které mají jednotkový pseudodeterminant, a stále budeme moci popsat všechny přímé Möbiovy transformace.

Nyní již snadno popíšeme i nepřímé Möbiovy transformace.

4.3.3 Definice: *Nechť $a, b, c, d \in \Gamma_n \cup \{0\}$ jsou prvky matice*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n).$$

Označme Ng zobrazení $\widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$, definované předpisem

$$Ng(x) = (a\overline{x} + b)(c\overline{x} + d)^{-1}.$$

4.3.4 Tvrzení: *Nepřímé Möbiovy transformace $\widehat{\mathbb{R}}^n$ jsou právě zobrazení tvaru Ng pro nějakou matici $g \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$.*

Důkaz: Nepřímá Möbiova transformace N je složením lichého počtu sférických inverzí a souměrností podle nadrovin. Mějme nějakou nadrovinu P. Platí $N = N \circ \mathcal{I}_P \circ \mathcal{I}_P = M \circ \mathcal{I}_P$, kde $M = N \circ \mathcal{I}_P$ je některá přímá Möbiova transformace. Volme za P nadrovinu procházející počátkem, kolmou na vektor 1. Potom pro $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ je $\mathcal{I}_P = (x \to -x') = (x \to -\overline{x})$, a tedy $N(x) = M(-\overline{x})$. Na druhou stranu, pro libovolnou přímou Möbiovu transformaci M je $M \circ (x \to -\overline{x})$ nepřímá Möbiova transformace.

Stačí si už jen uvědomit, že pro

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n) \quad \text{je též} \quad h = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\Gamma_n)$$

a $Mg(-\overline{x}) = Nh(x)$. □

4.4 Příklady Möbiových transformací

S některými příklady Möbiových transformací jsme se setkali již v oddílu 3.3 a kapitole 4. Přehledně je zde shrňme:

- $M(x) = axa'^{-1} = axa^*, a \in \Gamma_n, |a| = 1$ je rotace okolo počátku
- $N(x) = -yx'y'^{-1} = y\overline{xy}^{-1}, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je souměrnost podle nadroviny kolmé na vektor y
- $M(x) = ax, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem a
- $M(x) = x + b, b \in \mathbb{R}^n$ je posunutí o vektor b
- $N(x) = \overline{x}^{-1}$ je sférická inverze podle jednotkové sféry se středem v počátku
- $N(x) = (s\overline{x} + r^2 - |s|^2)(\overline{x} - \overline{s})^{-1}, s \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+$ je sférická inverze podle sféry o středu s a poloměru r

Snadno získáme také vzorec pro rotaci okolo libovolného bodu $s \in \mathbb{R}^n$ – stačí napřed provést posunutí o vektor $-s$, pak příslušnou rotaci okolo počátku a nakonec posunutí o vektor s. Stejně se vyřeší souměrnost podle nadroviny neprocházející počátkem a stejnolehlost se středem jiným než počátkem.

4.4.1 Tvrzení: *Nechť $B_1, B_2 \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ jsou uzavřené koule. Pak existuje přímá a nepřímá Möbiova transformace, která zobrazuje B_1 na B_2, a přímá a nepřímá Möbiova transformace, která zobrazuje B_1 na množinu $\overline{\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus B_2}$.*

Důkaz: Kouli B_1 na kouli B_2 lze zobrazit pomocí zobrazení M, které je složením stejnolehlosti a posunutí, tedy složením dvou přímých Möbiových transformací. Pokud toto zobrazení M složíme se souměrností podle nadroviny procházející středem koule B_2, získáme nepřímou Möbiovu transformaci N zobrazující B_1 na B_2.

Přímou, resp. nepřímou Möbiovu transformaci, zobrazující B_1 na $\overline{\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus B_2}$, získáme složením zobrazení M, resp. N se sférickou inverzí podle sféry, ohraničující kouli B_2. □

4.4.2 Tvrzení: *Zobrazení $M(x) = -(x+3)(x+1)^{-1}$, $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ je přímou Möbiovou transformací. Zobrazuje jednotkovou kouli $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ na poloprostor $H^n = \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : x_0 \geq 0\} \cup \{\infty\}$.*

Důkaz: Zobrazení M získáme jako složení $m_4 \circ m_3 \circ m_2 \circ m_1$ jednodušších přímých Möbiových transformací. Nejprve provedeme stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $1/2$: $m_1(x) = x/2$. Tím se nám B^n zobrazila na $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1/2\}$. Dále provedeme posunutí o $1/2$ ve směru reálné osy: $m_2(x) = x + 1/2$. Nyní tedy máme původní B^n zobrazenou na $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - 1/2\| \leq 1/2\}$. Třetím zobrazením bude sférická inverze podle jednotkové sféry se středem v počátku, následovaná souměrností podle nadroviny kolmé na první souřadnicovou osu: $m_3(x) = -x^{-1}$. Tím máme původní kouli B^n zobrazenou na poloprostor $\{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : x_0 \geq 0\} \cup \{\infty\}$ a stačí provést posunutí o -1 ve směru reálné osy: $m_4(x) = x - 1$. Složením těchto dílčích zobrazení získáme:

$$
\begin{aligned}
(m_4 \circ m_3 \circ m_2 \circ m_1)(x) &= -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^{-1} - 1 = -2(x+1)^{-1} - 1 = \\
&= (-2 - x + 1)(x+1)^{-1} = -(x+3)(x+1)^{-1}
\end{aligned}
$$

□

Nyní můžeme ještě trochu rozšířit tvrzení 4.4.1.

4.4.3 Tvrzení: *Nechť A_1, A_2 jsou uzavřené koule nebo uzavřené poloprostory v $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Pak existuje přímá a nepřímá Möbiova transformace, zobrazující A_1 na A_2 a přímá a nepřímá Möbiova transformace zobrazující A_1 na $\overline{\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus A_2}$.*

Důkaz: Díky tvrzení 4.4.1 nám stačí pouze dokázat tvrzení pro případ, kdy A_1 nebo A_2 je poloprostor. Pokud je A_1 i A_2 poloprostor, je platnost tvrzení zřejmá – přímá Möbiova transformace M_1 zobrazující A_1 na A_2 je složením rotace a posunutí; příslušná nepřímá transformace N_1 navíc provede souměrnost podle nadroviny kolmé k hranici nadroviny A_2; Přímá, resp. nepřímá Möbiova transformace, zobrazující A_1 na $\overline{\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus A_2}$, vznikne složením M_1, resp. M_2, se souměrností podle hraniční nadroviny poloprostoru A_2.

Pokud A_1 je koule, pak podle tvrzení 4.4.2 existuje Möbiova transformace, která zobrazuje A_1 na jednotkovou kouli se středem v počátku. Tu podle tvrzení 4.4.1 lze přímou Möbiovou transformací zobrazit na poloprostor $\{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \widehat{\mathbb{R}}^n : x_0 \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Ten lze podle předchozího odstavce zobrazit přímou i nepřímou Möbiovou transformací na A_2.

Pokud A_2 je koule, postupujeme stejně. Uzavřený poloprostor A_1 zobrazíme přímou Möbiovou transformací inverzní k té z tvrzení 4.4.2 na jednotkovou kouli, a následně podle tvrzení 4.4.1 přímou nebo nepřímou Möbiovou transformací na kouli A_2. □

Zajímavým příkladem Möbiovy je dokonce i stereografická projekce:

4.4.4 Tvrzení: *Stereografická projekce $\varpi : \widehat{\mathbb{R}}^n \to S^n$ je restrikcí sférické inverze podle sféry T se středem $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ a poloměrem $\sqrt{2}$, tedy Möbiovy transformace $P : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, $P(x) = (e_n \overline{x} + 1)(\overline{x} + e_n)^{-1}$, na množinu $\widehat{\mathbb{R}}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n = 0\} \cup \{\infty\}$.*

Důkaz: Označme $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ sféru z definice stereografické projekce a $N = e_n$ její „severní pól". Z definice sférické inverze je zřejmé, že obraz $P(x)$ bodu $x \in \mathbb{R}^n$ leží na polopřímce Nx. Pokud dokážeme, že navíc $x \in S$, budeme mít hotovo. Sféra S má totiž pouze dva průsečíky s polopřímkou Nx, a z nich průsečík N je vyloučen (je obrazem i vzorem nekonečna).

Nadrovina $\widehat{\mathbb{R}}^n$ v prostoru $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ se při sférické inverzi P zobrazí na sféru procházející středem N sféry T. Body na sféře T jsou pevné body sférické inverze P. Speciálně body sféry $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ dimenze $n-1$ jsou pevné body sférické inverze P. Nadrovina $\widehat{\mathbb{R}}^n$ se tedy zobrazí na sféru procházející bodem N a také všemi body $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Takže už nutně platí $P(\widehat{\mathbb{R}}^n) = S$ (speciálně $P(\infty) = N$). $\square$

Seznam literatury

[1] Ahlfors, L. V.: *Möbius trasformations and Clifford numbers*, In: Differential geometry and complex analysis (ed. by I. Chavel and H. Farkas), Springer-Verlag, Berlin, 1985, 65-73.

[2] Artin, E.: *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, 1957

[3] Blair, D. E.: *Inversion Theory and Conformal Mapping*, Student Mathematical Library, Vol. 9, AMS, 2000

[4] Gormley, P. G.: *Stereographic projection and the linear fractional group of transformations of quaternions*, Proc. Roy. Irish Acad. **51** (1947), 67-85

[5] Lam, T. Y.: *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, 1973

[6] Needham, T.: *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 1997

[7] Lounesto, P.: *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001

[8] Marková, L.: *Konformní zobrazení nejen v rovině*, bakalářská práce MFF UK, Praha, 2008