Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Erik Dzugas

Měření rizika dlouhověkosti v životním pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program: Matematika, finanční matematika

2010

Dovoľujem si na tomto mieste poďakovať RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D., za poskytnutie materiálov a cenných rád, za prejavenú trpezlivosť, ochotu a za vyjadrenie podpory pri tvorbe tejto bakalárskej práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28.5.2010 Erik Dzugas

Obsah

Název práce: Měření rizika dlouhověkosti v životním pojištění
Autor: Erik Dzugas
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
e-mail vedoucího: mazurova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V uvedenej práci sa zaoberáme rizikom dlhovekosti, ktoré vyplýva z nejasného vývoja a nepredvídateľného poklesu úmrtnosti vo vyššom veku. Jeho dopady, dôsledky a číselné charakteristiky sú zachytené z pohľadu poskytovateľa anuity. Téma tejto práce súvisí s obsahom prednášky Životné poistenie, preto môže byť vhodným doplnkom i pre študentov Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Karlovej, ktorí si chcú rozšíriť svoje vedomosti. Cieľom je vyčísliť riziko dlhovekosti a porovnať jeho výsledné hodnoty pre rôzne scenáre budúceho vývoja úmrtnosti. Všetky tieto matematické výpočty sú riešené v MS Excel. Pre lepšiu orientáciu sú ich výsledky zaznamenané v tabuľkách, ktoré tvoria dôležitú súčasť textu.

Klíčová slova: úmrtnosť, dlhovekosť, dĺžka života, poistenec

Title: Measuring longevity risk in life insurance
Author: Erik Dzugas
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: mazurova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we deal with the longevity risk which results from the uncertain evolution and unanticipated decrease of mortality at old ages. Its impacts, consequences and numerical characteristics are recorded from the annuity provider's perspective. The topic of this work is related to the content of the lecture Life Insurance, therefore it can be the suitable addition also for the students of the Faculty of Mathematics and Physics at Charles University who want to extend their knowledge. The aim is to quantify the longevity risk and to compare its final values for the various scenarios of the future evolution of mortality. All these mathematical calculations are solved in MS Excel. For better orientation, their results are reported in the tables, that form the important part of the text.

Keywords: mortality, longevity, lifetime, annuitant

Úvod

Táto práca umožňuje náhľad na aktuálne veľmi rozšírený problém finančnej a poistnej matematiky, ktorým je riziko dlhovekosti. Text je kombináciou teoretických poznatkov z pravdepodobnosti, poisťovníctva a matematického modelovania, získaných predovšetkým z literatúry [1] a [2], vhodne doplnený o potrebné matematické vzorce. Niektoré z nich sú odvodené priamo v texte, iné je možné vyhľadať v literatúre, na ktorú sa autor odvoláva.

Obidve kapitoly sú značne prepojené. Kapitola 1 je akousi motiváciou. Venuje sa riziku dlhovekosti, zamýšľa sa nad jeho príčinami a oboznamuje sa so základnými pojmami. Podrobné teoretické modely a prístupy, potrebné k odhadovaniu rizika, sú uvedené v literatúre [3], ktorá je zároveň zdrojom pre ďalšiu kapitolu.

Kapitola 2 predstavuje jadro problematiky. Má prevažne výpočtový charakter. Prináša žiadúce výsledky o sledovaných veličinách, ktorými sú hlavne súčasná hodnota budúceho plnenia, ale aj ročný súhrn platieb. Jednotlivé veličiny sú počítané pre autorom rôzne zvolené scenáre budúceho vývoja úmrtnosti.

Hlavný prínos tejto práce spočíva v doplnení niektorých vzorcov pre súčasnú hodnotu budúceho plnenia, v odvodení ďalších vzťahov pre ročný súhrn výplat a v ich následnej aplikácii na výpočet príslušných charakteristík týchto veličín. Autor navyše prináša svoj vlastný test o závislosti voľby váhového systému na správanie sa rizika dlhovekosti a skúma vývoj toku finančných prostriedkov poisťovne pri zmene predpokladanej úmrtnosti.

Nenáročnou modifikáciou parametrov v modeli, zmenou úrokovej miery alebo váhového systému v priloženom programe MS Excel je možné získať nové výsledky a závery.

Kapitola 1

Riziko dlhovekosti

Vo všeobecnosti je dobre známe, že charakter spoločnosti dnes vo veľkej miere závisí na demografickom vývoji. Ten je odrazom zmien, ktoré sa uskutočňujú v ekonomickej a sociálnej sfére. Zrejme najpozorovateľnejším ukazovateľom v posledných dekádach je prudko sa zvyšujúca priemerná dĺžka života, ktorá vedie k mnohým nejasnostiam ohľadom budúceho vývoja úmrtnosti.

Jeden z možných prípadov, ktorý môže nastať pri predpokladaní vývoja úmrtnosti, popisuje rozdiel medzi skutočnou priemernou dĺžkou života a očakávanou dĺžkou života v danej populácii. Z toho vyplýva, že intenzita úmrtnosti populácie v čase je systematicky nižšia alebo vyššia ako príslušné predpoklady. My sa budeme zaoberať prípadom nižšej úmrtnosti.

Vzhľadom k predpokladanej úmrtnosti rozoznávame rôzne druhy možných odchyliek:

(a) náhodné výkyvy jednotlivcov okolo očakávaných hodnôt,
(b) odchylky spôsobené nepresným úmrtnostným modelom (*riziko modelu*),
(c) odchylky spôsobené nevhodnou voľbou parametrov (*riziko parametru*),
(d) náhle skoky spôsobené nečakanými udalosťami, napríklad epidémie alebo prírodné katastrofy.

Ako bolo zmienené, odchylky od očakávaných hodnôt sú systematického pôvodu. Môžu byť výsledkom nesprávneho popisu príslušného úmrtnostného modelu alebo skresleného určenia zvolených parametrov. Oba tieto dôvody vyjadrujú pochybnosti a isté nejasnosti pri popisovaní budúcej úmrtnosti (*riziko neistoty*). Čo sa týka vyšších vekových kategórií, riziko nejasnosti a nestálosti zohráva oveľa väčšiu úlohu vplyvom nepredvídateľného poklesu úmrtnosti. V tomto prípade hovoríme o *riziku dlhovekosti*, na ktoré sa v tejto práci zameriame. Teda zhrnieme, že rizikom dlhovekosti rozumieme riziko nepredpokladaného a ťažko odhadovateľného poklesu intenzity úmrtnosti v strednom a neskorom veku.

Popíšeme model tak, ako ho budeme využívať v ďalšom texte pri meraní rizika dlhovekosti. Označme $\Gamma(x,t)$ projektovanú úmrtnostnú veličinu (môže ňou byť napríklad pravdepodobnosť úmrtia alebo intenzita úmrtnosti), kde x je vek jednotlivca dosiahnutý v kalendárnom roku t, teda $\tau = t - x$ je jeho rok narodenia. Zároveň nech $A(\tau)$ predstavuje daný predpoklad o úmrtnosti ľudí narodených v roku τ a $\alpha(\tau)$ nech je množina takých predpokladov. Tak výraz $\Gamma(x, t|A(\tau))$ popisuje projektovanú úmrtnostnú veličinu Γ, ktorá je podmienená špecifickou hypotézou $A(\tau)$. Množinu všetkých takých projekcií označíme $\{\Gamma(x, t|A(\tau)), A(\tau) \in \alpha(\tau)\}$. Principiálne množina $\alpha(\tau)$ môže byť diskrétna alebo spojitá. Pre jednoduchosť predpokladajme, že je diskrétna.

Výrazným posunom smerom dopredu je priradenie váhovej štruktúry pre množinu $\alpha(\tau)$. Vďaka tomu bude možné vypočítať aj nepodmienené hodnoty. Nech $\alpha(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), ..., A_m(\tau)\}$ je množina rôznych predpokladov úmrtnosti, tak potom označme ρ_h ako váhu pridelenú hypotéze $A_h(\tau)$ tak, že $0 \leq \rho_h \leq 1$ pre $h = 1, 2, ..., m$ a $\sum_{h=1}^{m} \rho_h = 1$. Potom množina $\{\rho_h\}_{h=1,2,...m}$ je pravdepodobnostným rozdelením na množine $\alpha(\tau)$.

Vyššie popísanú konštrukciu klasifikujeme ako *statickú*. Tento pojem indikuje, že množina $\alpha(\tau)$ je zvolená pevne. Neistota spočíva v tom, ktorá z hypotéz $A(\tau) \in \alpha(\tau)$ je lepšia pre popis celkovej úmrtnosti v uvažovanej skupine, pretože statický prístup neumožňuje žiadne zmeny vo voľbe odhadov v priebehu sledovaného časového intervalu.

Kapitola 2

Meranie rizika dlhovekosti

V tejto kapitole obrátime pozornosť na rozdelenie súčasnej hodnoty budúceho plnenia a ročného súhrnu výplat v statickej podobe. Skôr ako sa k tomu dostaneme, definujme základné pravdepodobnosti. *Pravdepodobnosť úmrtia q_x vo veku x* je pravdepodobnosť toho, že jedinec, ktorý je nažive vo veku x, zomrie pred dosiahnutím veku $x+1$. *Pravdepodobnosť prežitia p_x vo veku x* je pravdepodobnosť toho, že jedinec. ktorý je nažive vo veku x, sa dožije veku $x+1$, pričom platí nasledujúci vzťah:

$$p_x + q_x = 1. \tag{2.1}$$

2.1 Scenáre vývoja úmrtnosti

Pre vyjadrenie prevdepodobnosti úmrtia q_x boli zostavené viaceré úmrtnostné zákony. My naše úvahy postavíme na základe *Heligman-Pollardovho zákona,* pre ktorý platí:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1+GH^x}, \tag{2.2}$$

kde A, B, C, D, E, F, G, H sú kladné parametre. Prvý sčítanec predstavuje kojeneckú úmrtnosť, druhý úmrtnosť mladšieho až stredného veku, zatiaľ čo posledný sčítanec aproximuje úmrtnosť v neskorom veku. Teda

$$q_x(t) = \frac{G(\tau)(H(\tau))^x}{1+G(\tau)(H(\tau))^x} \tag{2.3}$$

je pravdepodobnosť úmrtia pre veľké x.

Model úmrtnosti založíme na náhodnej veličine T_0, ktorá predstavuje budúcu dĺžku života práve narodeného jedinca. Meriame ju v rokoch s tým, že na spojitej časovej osi môže nadobúdať i neceločíselné hodnoty. Analogicky, náhodná veličina T_x značí budúcu dĺžku života vo veku x za podmienky, že jedinec sa tohto veku x dožil. Podstata nášho modelu vyjadruje, že budúca dĺžka života u náhodne vybraného jedinca síce nie je známa, ale môžeme sa na ňu pozerať ako na náhodnú veličinu s odhadnuteľným pravdepodobnostným rozdelením. V praxi však poistenie osôb pracuje s celočíselnou dĺžkou života. Z toho dôvodu zavedieme náhodnú veličinu K_x, vyjadrujúcu *celočíselnú budúcu dĺžku života jedinca vo veku x.* Táto veličina nadobúda iba diskrétne hodnoty $k = 0, 1, 2, ...$ s nasledujúcimi pravdepodobnosťami

$$\begin{aligned} P(K_x = k) &= P(k \leq T_x < k+1) = F_x(k+1) - F_x(k) = \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x - {}_kp_x \cdot p_{x+k} = {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

kde

$$F_x(k) = P(T_x \leq k) \tag{2.5}$$

je distribučná funkcia náhodnej veličiny T_x a

$${}_kp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1} \tag{2.6}$$

je pravdepodobnosť toho, že jedinec, ktorý je naživе vo veku x, sa dožije veku $x + k$.

Veľmi dôležité sú globálne charakteristiky náhodnej veličiny K_x, a to predovšetkým jej stredná hodnota znamenajúca *strednú (očakávanú) dĺžku života vo veku x,* značíme e_x :

$$\begin{aligned} e_x = E(K_x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} P(K_x = j) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podobne pre rozptyl platí:

$$\begin{aligned} var(K_x) &= E(K_x^2) - (E(K_x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(K_x = k) - \\ &- \left(\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \right)^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Definujme teraz päť rôznych súborov parametrov tak, ako to je uvedené v tabuľke 1, ktorá znázorňuje strednú dĺžku života $E[K_{65}|A_h(\tau)], h = 1, 2, ..., 5$ a smerodajnú odchylku dĺžky života $\sqrt{var[K_{65}|A_h(\tau)]}, h = 1, 2, ..., 5$ jedinca vo veku 65 rokov, podmienenú danou množinou parametrov. Poznamenajme, že pre účely tejto práce bol stanovený maximálne dosiahnuteľný vek na hranicu 115 rokov.

Tabuľka 1. Parametre Heligman-Pollardovho zákona

	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
$G(\tau)$	$3,155 \cdot 10^{-7}$	$3,398 \cdot 10^{-6}$	$2,197 \cdot 10^{-6}$	$1,111 \cdot 10^{-6}$	$9,927 \cdot 10^{-5}$
$H(\tau)$	$1,1612$	$1,1245$	$1,1287$	$1,1355$	$1,0731$
$E[K_{65}\|A_h(\tau)]$	$19,687$	$21,029$	$22,003$	$23,357$	$25,127$
$\sqrt{var[K_{65}\|A_h(\tau)]}$	$7,431$	$8,779$	$8,774$	$8,701$	$10,909$

Ukazuje sa, že rôzne predpoklady implikujú odlišné úrovne *rektangularizácie* a *expanzie* pre funkciu prežitia, ktorú definujeme vzťahom $1-F_x$. Rektangularizáciou rozumieme tendenciu funkcie prežitia nadobúdať pravouhlý tvar. Je ovplyvnená smerodajnou odchylkou a platí, že úroveň rektangularizácie je tým väčšia, čím je smerodajná odchylka menšia. Expanzia úmrtnostnej krivky predstavuje posun veku, v ktorom dôjde k najväčšiemu počtu úmrtí. Je ovplyvnená strednou hodnotou, pričom čím je očakávaná dĺžka života väčšia, tým väčšia je aj expanzia krivky.

Prognózu $A_3(\tau)$ vyhlásime za najlepšie odhadovaný popis vývoja úmrtnosti pre danú skupinu ľudí, ktorí sa narodili v roku τ. Porovnaním výsledných hodnôt $E[K_{65}|A_h(\tau)]$ a $\sqrt{var[K_{65}|A_h(\tau)]}$ z tabuľky 1 pre rôzne zvolené parametre $G(\tau)$ a $H(\tau)$ vzhľadom k prognóze $A_3(\tau)$ dospejeme k záveru, že:

- $A_1(\tau)$ implikuje slabšiu expanziu spojenú so silnejšou rektangularizáciou,
- $A_2(\tau)$ implikuje zároveň slabšiu expanziu i rektangularizáciu,
- $A_4(\tau)$ implikuje naopak spoločne silnejšiu expanziu s rektangularizáciou,
- $A_5(\tau)$ implikuje silnejšiu expanziu, ale slabšiu rektangularizáciu.

2.2 Podmienené charakteristiky a ich výpočet

V nasledujúcej časti budeme predpokladať, že všetci poistenci sú vo veku x_0 v čase uzavretia poistnej zmluvy t_0. Aby sme tento zápis zjednodušili, tak čas t bude označovaný ako čas, ktorý uplynul od uzavretia poistnej zmluvy, je to teda jej doba trvania. Poznamenáme, že príslušný kalendárny rok v čase t je $t_0 + t$. Doby života všetkých poistencov sú navzájom nezávislé a stejne rozdelené. Pri posudzovaní rizika dlhovekosti si nebudeme všímať neistotu na finančných trhoch, a dokonca nebudeme brať do úvahy ani daňové, či iné povinné odvody.

Jeden z princípov, na ktorom sú založené poistno-matematické výpočty v životnom poistení, vychádza z požiadavky, aby príjmy a výdaje boli v rovnováhe. Tento *princíp ekvivalencie* je iba teoretickým východiskom a v praxi nemusí byť obvykle zachovaný. V reálnej situácii životného poistenia však skutočné príjmy väčšinou presiahnu skutočné výdaje. Pri výpočtoch poisťovňa zohľadňuje časové rozloženie príjmov a výdajov. Za týmto účelom sa volí postup finančnej matematiky, pri ktorom sa finančné toky diskontujú do ich počiatočnej hodnoty k okamihu uzavretia poistenia s použitím diskontného faktora

$$v = \frac{1}{1+i}, \tag{2.9}$$

kde i je zvolená *poistno-technická úroková miera.* Je to teda úroková miera, ktorú využívajú poisťovne pre konštrukciu sadzieb svojich poistných produktov. Pretože počiatočná hodnota so znižovaním (resp. zvyšovaním) úrokovej miery rastie (resp. klesá), tak platí nasledujúci záver: ak poisťovňa zníži (resp. zvýši) svoju poistno-technickú úrokovú mieru, tak jej poistné sadzby vzrastú (resp. poklesnú). My pri našich výpočtoch budeme pracovať s úrokovou mierou $i = 2,5\%$.

V prípade poistenia doživotného dôchodku vypláca poisťovňa dohodnutú sumu na konci poistného roku, ak osoba poistená v čase t_0 stále žije. Klient teda kupuje okamžite splatnú doživotnú rentu. Presnejšie sa v tomto prípade jedná o *polehotný doživotný príjem.*

Nech N_t je náhodný počet poistencov v čase t, kde $t = 0, 1, 2, ...$, pričom N_0 je dopredu stanovené číslo (nazveme ho počiatočná veľkosť portfólia). Okamžitá veľkosť portfólia je sledovaná náhodná veličina, ktorú označíme n_t, teda platí: $N_0 = n_0$. Veličiny, vzťahujúce sa k jednému poistencovi z počiatočného portfólia N_0, sú označené horným indexom (j), $j = 1, 2, ..., n_0$. Preto existujúce portfólio v čase t je definované ako

$$\Pi_t = \left\{ j | T_{x_0}^{(j)} > t \right\}. \tag{2.10}$$

Veličiny, ktoré súvisia s celým portfóliom, sú značené horným indexom (Π).

Ročný súhrn platieb v portfóliu je pre $t = 1, 2, ...$ definovaný vzťahom

$$B_t^{(\Pi)} = \sum_{j:j \in \Pi_t} b^{(j)}, \tag{2.11}$$

kde $b^{(j)}$ je ročná platba pre poistenca j.

Súčasnú hodnotu budúceho plnenia v čase t, $t = 0, 1, 2, ...$, definujme najprv pre jedného poistenca ako

$$Y_t^{(j)} = b^{(j)} a_{\overline{K_{x_0+t}^{(j)}}|}, \tag{2.12}$$

kde

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^n = \frac{1 - v^n}{i} \tag{2.13}$$

je súčasná hodnota polehotného príjmu s n jednotkovými platbami. Súčasnú hodnotu budúceho plnenia pre celé portfólio získame sčítaním súčasných hodnôt jednotlivých poistencov. Teda platí:

$$Y_t^{(\Pi)} = \sum_{j:j \in \Pi_t} Y_t^{(j)}. \tag{2.14}$$

Budeme sa zaujímať o vyšetrenie strednej hodnoty, rozptylu a koeficientu variácie pre veličiny $Y_t^{(\Pi)}$ a $B_t^{(\Pi)}$. Všeobecne budeme posudzovať dopady rizika dlhovekosti vzhľadom na veľkosť portfólia. Pretože uvažujeme homogénne portfólio, tak čo sa ročných výplat týka, položme $b^{(j)} = b$ pre všetky j. Za tejto podmienky tak platí vzťah

$$B_t^{(\Pi)} = bN_t, \tag{2.15}$$

zatiaľ čo súčasná hodnota budúceho plnenia pre portfólio môže byť vyjadrená ako

$$Y_t^{(\Pi)} = \sum_{h=t+1}^{\omega - x_0} B_h^{(\Pi)} v^{(h-t)} = \sum_{h=t+1}^{\omega - x_0} bN_h v^{(h-t)}, \tag{2.16}$$

kde ω je maximálny dosiahnuteľný vek (v našom prípade nastavený na hranicu 115 rokov) a v je diskontný faktor odpovedajúci príslušnej poistno-technickej úrokovej miere i. Homogenitou portfólia rozumieme skutočnosť, že náhodné veličiny $T_{x_0}^{(j)}$ sú navzájom nezávislé a stejne rozdelené. V tomto prípade $Y_t^{(1)}$ v homogénnom portfóliu znamená súčasnú hodnotu budúceho plnenia pre jedného poistenca v čase t.

Uvažujme scenáre vývoja úmrtnosti z tabuľky 1. Všetky výsledky budú preto podmienené daným predpokladom budúceho vývoja. Pre očakávanú súčasnú hodnotu budúceho plnenia, podmienenú zvoleným scenárom platí:

$$E[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau), n_t] = n_t \cdot E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)], \tag{2.17}$$

kde $h = 1, ..., 5$ a n_t je veľkosť existujúceho portfólia v čase t. Výpočet $E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]$ prevedieme nasledujúcim spôsobom. Označíme

$$a_{\overline{K_{x_0+t}|}} = \sum_{k=1}^{\infty} I_{(K_{x_0+t} \geq k)} \cdot v^k, \tag{2.18}$$

kde indikátor I_B javu B nadobúda hodnoty 1 (resp. 0), ak jav B nastane (resp. nenastane). V našich výpočtoch budeme uvažovať výšku každej ročnej anuity $b = 1$, a preto $E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)] = a_x$, kde

$$a_x = E\left(a_{\overline{K_{x_0+t}|}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \cdot v^k. \tag{2.19}$$

V nasledujúcich tabuľkách budeme vždy uvažovať vek poistenca v čase uzatvorenia poistenj zmluvy $x_0 = 65$, úrokovú mieru $i = 2,5\%$ p.a., výšku každej ročnej anuity $b = 1$. Z toho plynie, že $B_t^{(\Pi)} = N_t$.

Tabuľka 2. Očakávaná súčasná hodnota budúceho plnenia v čase t, podmienená daným scenárom: $E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]$

čas t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	14,974	15,625	16,202	16,991	17,472
5	12,215	13,119	13,676	14,446	15,520
10	9,456	10,622	11,132	11,844	13,569
15	6,861	8,243	8,680	9,294	11,659
20	4,614	6,098	6,442	6,927	9,833
30	1,631	2,857	3,013	3,225	6,576
40	0,440	1,105	1,146	1,192	3,946

Z tabuľky vyplýva, že poradie predpokladov $A_1(\tau), ..., A_5(\tau)$ implikuje rastúcu očakávanú súčasnú hodnotu budúceho plnenia v uvažovanom čase t pre jedného poistenca. Získavame prehľad o tom, akú sumu musí mať poisťovňa k dispozícii, aby bola schopná plniť svoje budúce záväzky.

Prejdeme k rozptylu. Pretože predpokladáme nezávislosť dôb života jednotlivých poistencov, tak podmienený rozptyl súčasnej hodnoty budúceho plnenia v čase t vyjadríme ako

$$var[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau), n_t] = n_t \cdot var[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)], \tag{2.20}$$

$h = 1, ..., 5$. Keďže naďalej uvažujeme $b = 1$, tak pri výpočte $var[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]$ položíme

$$Z = Y_t^{(1)} = a_{\overline{K_{x_0+t}}|}, \tag{2.21}$$

potom získavame

$$varZ = EZ^2 - (EZ)^2, \tag{2.22}$$

kde

$$\begin{aligned} EZ^2 = E\left(\left(\frac{1 - v^{K_{x_0+t}}}{i}\right)^2\right) = E\left(\frac{1 - 2v^{K_{x_0+t}} + (v^{K_{x_0+t}})^2}{i^2}\right) = \\ = \frac{1}{i^2}\left(1 - 2E(v^{K_{x_0+t}}) + E((v^{K_{x_0+t}})^2)\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Rovnakou úvahou dostaneme, že

$$EZ = \frac{1}{i}\left(1 - E(v^{K_{x_0+t}})\right). \tag{2.24}$$

Pre úplnosť napíšeme nasledujúce vzťahy:

$$E(v^{K_{x_0+t}}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_{k|}q_{x_0+t} \tag{2.25}$$

a

$$E((v^{K_{x_0+t}})^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (v^k)^2 \cdot {}_{k|}q_{x_0+t}, \tag{2.26}$$

kde ${}_{s|}q_x$ je pravdepodobnosť toho, že jedinec, ktorý je naživе vo veku x, zomrie vo veku $x + s$, pričom platí:

$${}_{s|}q_x = {}_sp_x \cdot q_{x+s}. \tag{2.27}$$

V tabuľke 3 budeme prezentovať rozptyl súčasnej hodnoty budúceho plnenia na jedného poistenca. Význam rozptylu spočíva v stanovení *rizika poistenia.* Poistenie je tým riskantnejšie, čím väčšia je smerodajná odchylka ($\sqrt{var}$) sledovanej náhodnej veličiny.

Tabuľka 3. Rozptyl súčasnej hodnoty budúceho plnenia v čase t, podmienený daným scenárom: $var[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]$

čas t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	$22,779$	$29,835$	$28,825$	$27,039$	$52,816$
5	$22,196$	$28,694$	$28,268$	$27,263$	$52,386$
10	$19,516$	$25,603$	$25,737$	$25,552$	$50,930$
15	$15,080$	$20,912$	$21,436$	$21,893$	$48,940$
20	$10,010$	$15,456$	$16,144$	$16,870$	$47,346$
30	$2,780$	$6,166$	$6,535$	$7,005$	$53,513$
40	$0,543$	$1,856$	$1,946$	$2,037$	$122,342$

Koeficient variácie (CV) vo všeobecnosti umožňuje vyšetriť vplyv veľkosti portfólia na celkovú rizikovosť. Definujeme ho podielom smerodajnej odchylky a strednej hodnoty. Teda výraz

$$CV[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau),n_t] = \frac{\sqrt{var[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau),n_t]}}{E[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau),n_t]} = \frac{1}{\sqrt{n_t}}\frac{\sqrt{var[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]}}{E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]} \tag{2.28}$$

naznačuje, že s rastúcim n_t rizikovosť klesá. Z (2.28) plynie, že

$$\lim_{n_t \nearrow \infty} CV[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau),n_t] = 0. \tag{2.29}$$

Tento vzťah reprezentuje výsledok, že čím je portfólio väčšie, tým je menej rizikové, pretože s vysokou pravdepodobnosťou sa budú skutočné sledované hodnoty blížiť k očakávaným. Číslo $CV[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau),n_t]$ sa nazýva *rizikový index.* V nasledujúcej tabuľke uvažujeme prognózu vývoja úmrtnosti $A_3(\tau)$.

Tabuľka 4. Koeficient variácie súčasnej hodnoty budúceho plnenia v čase t, podmienený odhadom $A_3(\tau)$, pri počiatočnej veľkosti portfólia $n_0 : CV[Y_t^{(\Pi)}|A_3(\tau),n_t]$

čas t	$n_0 = 1$	$n_0 = 500$	$n_0 = 20000$	...	$n_0 \nearrow \infty$
0	$33,13\%$	$1,48\%$	$0,23\%$	...	0%
5	$39,60\%$	$1,77\%$	$0,28\%$	...	0%
10	$48,01\%$	$2,14\%$	$0,33\%$	...	0%
15	$59,77\%$	$2,67\%$	$0,42\%$	...	0%
20	$78,14\%$	$3,49\%$	$0,55\%$	...	0%
30	$185,43\%$	$8,29\%$	$1,31\%$	...	0%
40	$1385,22\%$	$61,94\%$	$9,79\%$	...	0%

Tak, ako bolo vyššie uvedené , koeficient variácie v ľubovoľnom čase rapídne klesá so zvyšujúcim sa počtom poistencov v systéme. Okrem toho sme zistili, že pre daný počiatočný stav portfólia variačný koeficient postupom času stúpa. Príčinou je starnutie poistencov a následný pokles zostatkovej veľkosti portfólia. Pre úplnosť uvedieme, že aktuálnu veľkosť portfólia n_t v čase t sme vypočítali ako $n_t = E[N_t|A_3(\tau)]$.

Opustíme teraz súčasnú hodnotu budúceho plnenia a prejdeme k rozdeleniu ročného súhrnu platieb $B_t^{(\Pi)}$. Vďaka nezávislosti dôb života a homogenite uvažovaného portfólia má náhodná veličina N_t binomické rozdelenie s parametrami n_0 a ${}_tp_x$. Pri uvažovanej ročnej splátke $b = 1$ platí, že $B_t^{(\Pi)} = N_t$. Teda

$$B_t^{(\Pi)} \sim Bi(n_0, {}_tp_x), \tag{2.30}$$

kde n_0 je počiatočný stav portfólia a ${}_tp_x$ je pravdepodobnosť prežitia do uvažovaného času t. Z teórie pravdepodobnosti vieme, že náhodná veličina X s binomickým rozdelením a parametrami n, p má strednú hodnotu $EX = np$ a rozptyl $varX = np(1-p)$. Preto pre momenty ročného súhrnu výplat platia nasledujúce vzťahy:

$$E[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)] = n_0 \cdot {}_tp_x, \tag{2.31}$$

$$var[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)] = n_0 \cdot {}_tp_x \cdot (1 - {}_tp_x), \tag{2.32}$$

navyše koeficient variácie vypočítame ako

$$CV[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)] = \frac{\sqrt{var[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)]}}{E[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)]} = \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\sqrt{1 - {}_tp_x}}{\sqrt{{}_tp_x}}. \tag{2.33}$$

Tabuľky 5,6,7 udávajú strednú hodnotu, rozptyl a koeficient variácie ročného súhrnu platieb. Pripomenieme, že výška každej platby $b^{(j)} = 1$ pre všetky j. Získané postrehy sú podobné tým, ktoré sme rozobrali pre príslušné charakteristiky súčasnej hodnoty budúceho plnenia.

Tabuľka 5. Očakávaná hodnota súhrnu ročných platieb v čase t, podmienená daným scenárom: $E[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)]$ pri počiatočnom stave portfólia $n_0 = 1000$

čas t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
5	964,76	956,46	963,67	972,33	945,51
10	894,67	883,15	900,70	922,31	873,22
15	764,01	765,90	796,39	835,19	780,08
20	550,69	594,56	637,11	693,68	664,91
30	75,97	175,26	209,35	261,34	385,90
40	0,09	5,41	7,72	11,95	132,15

Tabuľka 6. Rozptyl súhrnu ročných platieb v čase t, podmienený daným scenárom: $var[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)]$ pri počiatočnom stave portfólia $n_0 = 1000$

čas t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
5	$33,99$	$41,63$	$35,00$	$26,89$	$51,51$
10	$94,23$	$103,18$	$89,43$	$71,65$	$110,70$
15	$180,29$	$179,29$	$162,14$	$137,64$	$171,55$
20	$247,43$	$241,05$	$231,19$	$212,48$	$222,80$
30	$70,20$	$144,54$	$165,52$	$193,04$	$236,98$
40	$0,09$	$5,38$	$7,66$	$11,81$	$114,69$

Tabuľka 7. Koeficient variácie súhrnu ročných platieb v čase t, podmienený odhadom $A_3(\tau)$, pri počiatočnej veľkosti portfólia $n_0 : CV[B_t^{(\Pi)}|A_3(\tau)]$

čas t	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 20000$
5	$1,94\%$	$0,61\%$	$0,13\%$
10	$3,32\%$	$1,05\%$	$0,23\%$
15	$5,05\%$	$1,59\%$	$0,35\%$
20	$7,54\%$	$2,38\%$	$0,53\%$
30	$19,43\%$	$6,14\%$	$1,37\%$
40	$113,35\%$	$35,84\%$	$8,01\%$

Poznamenáme ešte, že hodnoty z tabuľky 5 určujú očakávaný (nezaokrúhlený) počet stále žijúcich ľudí v čase t pri počiatočnej veľkosti portfólia n_0.

2.3 Nepodmienené charakteristiky a ich výpočet

Výpočet nepodmienených hodnôt spočíva v priradení pravdepodobnostného rozdelenia $\{\rho_h\}_{h=1,2,...m}$ pre množinu $\alpha(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), ..., A_m(\tau)\}$, kde $0 \leq \rho_h \leq 1$ pre $h = 1, 2, ..., m$ a $\sum_{h=1}^m \rho_h = 1$. Neznámy úmrtnostný trend, o ktorom predpokladáme, že leží v $\alpha(\tau)$, označíme ako $\widetilde{A}(\tau)$.

Pre nepodmienenú súčasnú hodnotu budúceho plnenia platí nasledujúce odvodenie, pričom index ρ indikuje použitie daného pravdepodobnostného rozdelenia $\{\rho_h\}_{h=1,2,...m}$:

$$\begin{aligned} E[Y_t^{(\Pi)}|n_t] = E_\rho[E[Y_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau), n_t]] = n_t E_\rho[E[Y_t^{(1)}|\widetilde{A}(\tau)]] = \\ = n_t \sum_{h=1}^{m} E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]\rho_h = n_t E[Y_t^{(1)}], \end{aligned} \tag{2.34}$$

kde $E[Y_t^{(1)}] = \sum_{h=1}^{m} E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]\rho_h$.

V nasledujúcich výpočtoch o nepodmienených náhodných veličinách berieme do úvahy rovnaké vstupy ako v prípade podmienených veličín, to znamená: $x_0 = 65$, $i = 2,5\%$ p.a., $b^{(j)} = 1$. Množine $\alpha(\tau)$ priradíme váhy tak, ako to je uvedené v tabuľke 8. Podľa predpokladov najlepšia hypotéza vývoja úmrtnosti $A_3(\tau)$ má pridelenú najväčšiu váhu. Zvyšok rozdelíme rovnomerne medzi ostávajúce prognózy.

Tabuľka 8. Pravdepodobnostné rozdelenie množiny $\alpha(\tau)$

predpoklad	váha ρ_h
$A_1(\tau)$	$0,125$
$A_2(\tau)$	$0,125$
$A_3(\tau)$	$0,5$
$A_4(\tau)$	$0,125$
$A_5(\tau)$	$0,125$

Tabuľka 9. Nepodmienená očakávaná súčasná hodnota budúceho plnenia v čase t

čas t	$E[Y_t^{(1)}]$
0	$16,233$
5	$13,750$
10	$11,252$
15	$8,847$
20	$6,655$
30	$3,292$
40	$1,408$

Porovnaním nepodmienenej súčasnej hodnoty budúceho plnenia z tabuľky 9 s podmienenou súčasnou hodnotou z tabuľky 2 získame informáciu o tom, že nepodmienená súčasná hodnota sa až do času $t = 20$ riadi odhadom $A_3(\tau)$, ktorému sme priradili najväčšiu váhu. Zlom nastáva pre $t > 20$. Táto zmena je spôsobená neporovnateľne väčšou očakávanou súčasnou hodnotou budúceho plnenia, podmienenou odhadom $A_5(\tau)$, oproti ostatným odhadom.

Pri počítaní nepodmieneného rozptylu $Y_t^{(\Pi)}$ vychádzame z platného vzťahu

$$varY = Evar(Y|Z) + varE(Y|Z). \tag{2.35}$$

Teda platí:

$$
\begin{aligned}
var[Y_t^{(\Pi)}|n_t] &= E_\rho[var[Y_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau), n_t]] + var_\rho[E[Y_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau), n_t]] = \\
&= n_t E_\rho[var[Y_t^{(1)}|\widetilde{A}(\tau)]] + n_t^2 var_\rho[E[Y_t^{(1)}|\widetilde{A}(\tau)]] = \\
= n_t \sum_{h=1}^{m} var[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]\rho_h &+ n_t^2 \sum_{h=1}^{m} \left(E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)] - E[Y_t^{(1)}]\right)^2 \rho_h.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Prvý člen výrazu odzrkadľuje odchylky okolo očakávanej hodnoty, zatiaľ čo druhý člen odráža systematické odchylky od očakávanej hodnoty.

Nepodmienený koeficient variácie (CV) má nasledujúce vyjadrenie:

$$
\begin{aligned}
CV[Y_t^{(\Pi)}|n_t] &= \frac{\sqrt{var[Y_t^{(\Pi)}]}}{E[Y_t^{(\Pi)}]} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{n_t}\frac{E_\rho[var[Y_t^{(1)}|\widetilde{A}(\tau)]]}{E^2[Y_t^{(1)}]} + \frac{var_\rho[E[Y_t^{(1)}|\widetilde{A}(\tau)]]}{E^2[Y_t^{(1)}]}}.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Prvý člen pod odmocninou poukazuje na náhodné výkyvy, ktorých vplyv je zachytený veľkosťou portfólia (*diverzifikovateľné riziko.*) Závislosť na danom portfóliu je rovnaká ako tá, ktorú sme získali pre podmienený koeficient variácie. Druhý člen, ktorý už nie je ovplyvnený veľkosťou portfólia, predstavuje *systematické riziko.* Z (2.37) dostávame nasledujúci vzťah:

$$
\lim_{n_t \nearrow \infty} CV[Y_t^{(\Pi)}|n_t] = \sqrt{\frac{var_\rho[E[Y_t^{(1)}|\widetilde{A}(\tau)]]}{E^2[Y_t^{(1)}]}}.
\tag{2.38}
$$

Tabuľka 10 poukazuje na nepodmienený rozptyl $Y_t^{(\Pi)}$, ktorý je rozdelený na jeho komponenty. Všimneme si, že zvyšovaním počiatočného stavu portfólia n_0, hodnota rozptylu výrazne stúpa, obzvlášť jeho systematická zložka, ktorá má vzhľadom k diverzifikovateľnej zložke v ľubovoľnom čase t pri väčšom stave portfólia n_0 oveľa väčšiu dôležitosť. Pre porovnanie nepodmieneného rozptylu s podmieneným uvedieme aj prípad, keď $n_0 = 1$.

Tabuľka 10. Nepodmienený rozptyl súčasnej hodnoty budúceho plnenia v čase t a jeho komponenty

čas t	rozptyl $\frac{var[Y_t^{(\Pi)}\|n_t]}{n_t}$	diverzifikovateľná zložka $\frac{E_\rho[var[Y_t^{(\Pi)}\|\widetilde{A}(\tau),n_t]]}{var[Y_t^{(\Pi)}\|n_t]}$	systematická zložka $\frac{var_\rho[E[Y_t^{(\Pi)}\|\widetilde{A}(\tau),n_t]]}{var[Y_t^{(\Pi)}\|n_t]}$
		$n_0 = 1$	
0	$31,479$	$98,38\%$	$1,62\%$
5	$31,219$	$97,53\%$	$2,47\%$
10	$29,122$	$96,38\%$	$3,62\%$
15	$25,328$	$95,03\%$	$4,97\%$
20	$20,452$	$94,27\%$	$5,73\%$
30	$12,331$	$96,91\%$	$3,09\%$
40	$16,854$	$99,79\%$	$0,21\%$
		$n_0 = 100$	
0	$81,824$	$37,85\%$	$62,15\%$
5	$107,302$	$28,37\%$	$71,63\%$
10	$133,455$	$21,03\%$	$78,97\%$
15	$149,802$	$16,06\%$	$83,94\%$
20	$136,355$	$14,14\%$	$85,86\%$
30	$50,039$	$23,88\%$	$76,12\%$
40	$20,229$	$83,14\%$	$16,86\%$
		$n_0 = 1000$	
0	$539,504$	$5,74\%$	$94,26\%$
5	$798,962$	$3,81\%$	$96,19\%$
10	$1081,939$	$2,59\%$	$97,41\%$
15	$1281,384$	$1,87\%$	$98,13\%$
20	$1190,010$	$1,62\%$	$98,38\%$
30	$392,844$	$3,04\%$	$96,96\%$
40	$50,908$	$33,04\%$	$66,96\%$
		$n_0 = 10000$	
0	$5116,308$	$0,60\%$	$99,40\%$
5	$7715,563$	$0,39\%$	$99,61\%$
10	$10566,773$	$0,26\%$	$99,74\%$
15	$12597,205$	$0,19\%$	$99,81\%$
20	$11726,561$	$0,16\%$	$99,84\%$
30	$3820,891$	$0,31\%$	$99,69\%$
40	$357,698$	$4,70\%$	$95,30\%$

Správanie sa nepodmieneného koeficientu variácie vzhľadom k portfóliu je ilustrované v tabuľke 11. Keď to porovnáme s podmieneným variačným koeficientom z tabuľky 4, zistíme, že nepodmienený rizikový index klesá pomalšie so zväčšujúcim sa stavom portfólia ako podmienený. Navyše si všimneme kladnú hodnotu limity pre $n_0 \nearrow \infty$.

Tabuľka 11. Nepodmienený koeficient variácie súčasnej hodnoty budúceho plnenia v čase t pri počiatočnej veľkosti portfólia n_0 : $CV[Y_t^{(\Pi)}|n_t]$

čas t	$n_0 = 1$	$n_0 = 500$	$n_0 = 20000$	...	$n_0 \nearrow \infty$
0	34,561%	4,652%	4,399%	...	4,392%
5	41,438%	6,754%	6,507%	...	6,501%
10	50,637%	9,886%	9,639%	...	9,632%
15	63,485%	14,412%	14,151%	...	14,144%
20	85,515%	20,793%	20,467%	...	20,459%
30	228,999%	41,490%	40,278%	...	40,246%
40	1558,129%	98,771%	70,931%	...	70,072%

Pre strednú hodnotu, rozptyl a koeficient variácie ročného súhrnu platieb $B_t^{(\Pi)}$ platia analogické odvodenia a závery ako pre príslušné charakteristiky súčasnej hodnoty budúceho plnenia $Y_t^{(\Pi)}$. Teda

$$E[B_t^{(\Pi)}] = \sum_{h=1}^{m} E[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)]\rho_h, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} var[B_t^{(\Pi)}] = E_\rho[var[B_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau)]] + var_\rho[E[B_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau)]] = \\ = \sum_{h=1}^{m} var[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)]\rho_h + \sum_{h=1}^{m} \Big(E[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)] - E[B_t^{(\Pi)}]\Big)^2 \rho_h, \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} CV[B_t^{(\Pi)}] = \frac{\sqrt{var[B_t^{(\Pi)}]}}{E[B_t^{(\Pi)}]} = \\ = \sqrt{\frac{E_\rho[var[B_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau)]]}{E^2[B_t^{(\Pi)}]} + \frac{var_\rho[E[B_t^{(\Pi)}|\widetilde{A}(\tau)]]}{E^2[B_t^{(\Pi)}]}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Tabuľka 12. Nepodmienená očakávaná hodnota súhrnu ročných platieb $E[B_t^{(\Pi)}]$ pri počiatočnom stave portfólia $n_0 = 1000$ v čase t

čas t	$E[B_t^{(\Pi)}]$
5	$961,717$
10	$897,018$
15	$791,342$
20	$631,535$
30	$216,983$
40	$22,560$

Tabuľka 13. Nepodmienený rozptyl ročného súhrnu platieb v čase t a jeho komponenty

čas t	rozptyl $var[B_t^{(\Pi)}]$	diverzifikovateľná zložka $\frac{E_\rho[var[B_t^{(\Pi)}\|\widetilde{A}(\tau)]]}{var[B_t^{(\Pi)}]}$	systematická zložka $\frac{var_\rho[E[B_t^{(\Pi)}\|\widetilde{A}(\tau)]]}{var[B_t^{(\Pi)}]}$
		$n_0 = 100$	
5	$4,209$	$87,30\%$	$12,70\%$
10	$11,041$	$83,49\%$	$16,51\%$
15	$20,898$	$78,79\%$	$21,21\%$
20	$39,360$	$58,70\%$	$41,30\%$
30	$81,784$	$19,97\%$	$80,03\%$
40	$19,285$	$10,53\%$	$89,47\%$
		$n_0 = 1000$	
5	$90,184$	$40,75\%$	$59,25\%$
10	$274,446$	$33,58\%$	$66,42\%$
15	$607,884$	$27,08\%$	$72,92\%$
20	$1856,474$	$12,44\%$	$87,56\%$
30	$6708,232$	$2,43\%$	$97,57\%$
40	$1745,634$	$1,16\%$	$98,84\%$
		$n_0 = 20000$	
5	$22107,818$	$3,32\%$	$96,68\%$
10	$74748,354$	$2,46\%$	$97,54\%$
15	$180580,453$	$1,82\%$	$98,18\%$
20	$654785,240$	$0,70\%$	$99,30\%$
30	$2621218,199$	$0,12\%$	$99,88\%$
40	$690529,825$	$0,05\%$	$99,95\%$

Tabuľka 14. Nepodmienený koeficient variácie súhrnu ročných platieb v čase t: $CV[B_t^{(\Pi)}]$

čas t	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 20000$
5	$2,13\%$	$0,98\%$	$0,77\%$
10	$3,70\%$	$1,84\%$	$1,52\%$
15	$5,77\%$	$3,11\%$	$2,68\%$
20	$9,93\%$	$6,82\%$	$6,40\%$
30	$41,67\%$	$37,74\%$	$37,30\%$
40	$194,66\%$	$185,19\%$	$184,17\%$

Na záver tejto podkapitoly sa krátko budeme venovať problému zvolenia správnych váh ρ_h pre predpoklady $A_h(\tau)$. Nanešťastie, údaje potrebné na odhady týchto váh sú prístupné len veľmi zriedkavo, a preto sa pri voľbe vyžadujú vlastné rozhodnutia. Predsa len ale existujú numerické testy, ktoré naznačujú, že voľba váh neovplyvňuje až takým závažným spôsobom získané výsledky a pozorovania.

Tabuľka 15. Rôzne pravdepodobnostné rozdelenia množiny $\alpha(\tau)$

	systém			
váha	(a)	(b)	(c)	(d)
ρ_1	0	$0,125$	$0,05$	$0,2$
ρ_2	0	$0,125$	$0,05$	$0,2$
ρ_3	1	$0,5$	$0,8$	$0,2$
ρ_4	0	$0,125$	$0,05$	$0,2$
ρ_5	0	$0,125$	$0,05$	$0,2$

V nasledujúcej tabuľke porovnáme koeficient variácie pre súčasnú hodnotu budúceho plnenia v čase t na základe rôznych váhových systémov (a), (b), (c), (d). Pri použití systému (a) sme získali koeficient variácie z tabuľky 4, podmienený prognózou $A_3(\tau)$. Výsledkom aplikácie systému (b) je nepodmienený koeficient variácie, ktorý sme vypočítali v tabuľke 11. Systém (c) je podobný so systémom (b), ale s tým rozdielom, že najvyššia váha priradená prognóze $A_3(\tau)$ bola ešte o niečo navýšená. Systém (d) pozostáva z rovnomerného rozdelenia váh medzi všetky prognózy.

Z tabuľky je vidieť, že pomer medzi hodnotami nepodmieneného koeficientu variácie CV (systémy b - d) s podmieneným CV (systém a) je podstatne väčší ako pomery medzi jednotlivými nepodmienenými hodnotami. Preto môžeme usúdiť, že voľba váh nezohráva rozhodujúcu úlohu pri posudzovaní rizika dlhovekosti.

Tabuľka 16. Koeficienty variácie súčasnej hodnoty budúceho plnenia v čase t pri počiatočnej veľkosti portfólia $n_0 = 500$ a pri použití rôznych váhových systémov

	$CV[Y_t^{(\mathrm{II})}]$			
čas t	systém (a)	systém(b)	systém(c)	systém(d)
0	$1,48\%$	$4,65\%$	$3,16\%$	$5,76\%$
5	$1,77\%$	$6,75\%$	$4,50\%$	$8,38\%$
10	$2,14\%$	$9,88\%$	$6,52\%$	$12,27\%$
15	$2,67\%$	$14,41\%$	$9,49\%$	$17,82\%$
20	$3,49\%$	$20,79\%$	$13,76\%$	$25,49\%$
30	$8,29\%$	$41,49\%$	$28,64\%$	$48,99\%$
40	$61,94\%$	$98,77\%$	$74,01\%$	$109,93\%$

2.4 Poistné rezervy

Povinnosťou poisťovne je vytvárať rezervy finančných prostriedkov. Preto má termín *poistné rezervy* svoj význam. Ekvivalentne sa používajú pojmy *technické rezervy* alebo *poistno-technické rezervy.* Ich tvorba a použitie je presne stanovené legislatívou daného štátu. Poistné rezervy predstavujú hodnoty záväzkov poisťovne, teda čiastku, ktorú musí poisťovňa nahromadiť z poistného a z úrokov, aby bola schopná plniť svoje budúce záväzky.

Pri tvorbe rezervy poistného budeme uvažovať predpoklad vývoja úmrtnosti $A_3(\tau)$. Pre rezervu poistného životného poistenia v čase t, značíme V_t, platí:

$$V_t = E[Y_t^{(1)}|A_3(\tau)], \tag{2.42}$$

kde $E[Y_t^{(1)}|A_3(\tau)]$ je očakávaná súčasná hodnota budúceho plnenia, podmienená scenárom $A_3(\tau)$. Počet poistencov v čase t je náhodná veličina N_t. Preto celkovú rezervu poistného životného poistenia určíme ako súčin $V_t \cdot N_t$ a jej strednú hodnotu ako $V_t \cdot E[N_t]$.

Skutočný vývoj úmrtnosti sa však nemusí riadiť tak, ako sme predpokladali. Preto budeme sledovať stav finančných prostriedkov v poisťovni v čase t, značíme Z_t, pri úmrtnostnom vývoji $A_h(\tau), h = 1, 2, 4, 5$. Predpokladáme výšku ročnej platby $b^{(j)} = 1$ pre všetky j a úrokovú mieru $i = 2,5\%$ p.a. Pre počiatočný stav fondu Z_0 platí nasledujúci vzťah:

$$Z_0 = n_0 \cdot S, \tag{2.43}$$

kde n_0 je uvažovaný počiatočný počet poistencov a $S = E[Y_0^{(1)}|A_3(\tau)]$ je výška jednorázového poistného. Navyše, pre časy $t \geq 1$ získavame nasledujúce rekurentné odvodenie:

$$Z_t = Z_{t-1} \cdot (1+i) - N_t \tag{2.44}$$

a zároveň

$$E[Z_t] = E[Z_{t-1}] \cdot (1+i) - E[N_t], \tag{2.45}$$

kde $E[N_t] = E[B_t^{(\Pi)}|A_h(\tau)], h = 1, 2, 4, 5$ je podmienená očakávaná hodnota ročného súhrnu platieb v čase t.

Tabuľka 17. Očakávaná výška poistných rezerv pri predpokladanom vývoji úmrtnosti $A_3(\tau)$ a počiatočnom stave portfólia $n_0 = 1000$

čas t	$V_t \cdot E[N_t]$
5	13179, 15
10	10026, 59
15	6912, 66
20	4104, 26
30	630, 77
40	8, 84

Tabuľka 18. Stredná hodnota skutočného stavu finančných prostriedkov pri danom vývoji úmrtnosti a počiatočnom stave portfólia $n_0 = 1000$

čas t	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	16202	16202	16202	16202
5	13173, 53	13199, 85	13153, 48	13236, 93
10	10031, 25	10118, 72	9913, 94	10222, 35
15	7020, 13	7148, 28	6619, 45	7255, 25
20	4552, 55	4570, 03	3511, 93	4456, 33
28	2744, 41	2000, 57	0	650, 90
30	2698, 47	1709, 29	0	0
40	3295, 65	1552, 97	0	0
50	4218, 66	1980, 28	0	0

Výsledky v tabuľke 18 plynú zo vzťahu (2.45), pričom platí, že záporné hodnoty sme nahradili nulou. Z tabuľky môžeme usúdiť, že ak poisťovňa predpokladá vývoj úmrtnosti $A_3(\tau)$, ale úmrtnosť sa v skutočnosti riadi prognózami $A_1(\tau)$ alebo $A_2(\tau)$, tak poisťovňa kumuluje zisk, pretože počet žijúcich klientov, ktorým má byť vyplatená platba $b = 1$, je menší ako v pôvodnom predpoklade $A_3(\tau)$, a navyše pre veľké t je získaný úrok vyšší ako ročný súhrn platieb. Naopak, pri vývoji $A_4(\tau)$ alebo $A_5(\tau)$ sa realizuje strata, lebo počet žijúcich poistencov je väčší ako sa predpokladalo, a tak poisťovňa nemá dostatok voľných finančných prostriedkov, aby pokryla svoje záväzky. V takom prípade si musí požičať alebo využiť iné svoje rezervy. Pri vývoji $A_4(\tau)$ je čas, v ktorom poisťovňa vyprázdni fond svojich disponibilných prostriedkov, $t = 28$ a pri vývoji $A_5(\tau)$ to nastáva v čase $t = 30$.

Literatúra

[1] Cipra T.: *Pojistná matematika teorie a praxe*, Ekopress, Praha, 1999.

[2] Cipra T.: *Pojistná matematika v praxi*, HZ, Praha, 1994.

[3] Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A.: *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, Oxford University Press, Oxford, 2009.