Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radka Matušková

Úrokový cap - aplikace na hypotéky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Čerbáková, Ph.D., ČSOB, a.s.

Studijní program: Matematika

2009

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Janě Čerbákové, Ph.D. za pomoc při psaní bakalářské práce, za poskytnutou literaturu a za cenné rady z oblasti programování v programu Excel.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 6.8.2009 Radka Matušková

Obsah

Název práce: Úrokový cap - aplikace na hypotéky
Autor: Radka Matušková
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Čerbáková, Ph.D.
e-mail vedoucího: jana.cerbakova@centrum.cz

Abstrakt: V předložené práci se věnujeme dvěma finančním produktům, a to hypotéčnímu úvěru a úrokovému capu, zejména pak aplikaci úrokového capu na hypotéku. Nejprve se zabýváme každým produktem samostatně, abychom porozuměli všem termínům používaných v aplikaci, kde jsme pro výpočet ocenění capu zvolili alternativní přístup. Tento přístup je založen na výpočtu střední hodnoty z diskrétního rozdělení scénářů, které obsahují možnou budoucí úrokovou míru a zároveň pravděpodobnost, že tato míra v budoucnu opravdu nastane.

Klíčová slova: Úrokový cap, hypotéka, Blackův model

Title: Interest rate cap - application on mortgages
Author: Radka Matušková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Jana Čerbáková, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: jana.cerbakova@centrum.cz

Abstract: In this work we deal with two financial products- mortgage loan and interest rate cap, especially the application of interest rate cap to mortgage. At first, we concentrate on each product separately to understand all terms, which we use in the application, where we used alternate model for calculatin of value of cap. This model is based on the calculation of the median whervalue from discrete values of scripts, which contain at once future interest rate and probability, that this rate will really occur.

Keywords: Interest rate cap, mortgage, Black's model

Kapitola 1

Úvod

Název této bakalářské práce (Úrokový cap s uplatněním na hypotéku) se skládá ze dvou pojmů z oblasti finanční matematiky. Oba tyto pojmy mají své vlastní definice, které nejprve objasníme každý samostatně.

Profesor Tomáš Cipra v [1] definuje hypotéční úvěr neboli hypotéku takto:

> „Hypoteční úvěr je úvěr na pořízení nemovitosti krytý touto nemovitostí jako zástavou (banka jako věřitel získá na používanou nemovitost tzv. zástavní právo, na jehož základě může případně v mimosoudní dražbě nemovitost prodat). Finanční prostředky na hypoteční úvěry získávají banky prodejem dlouhodobých dluhopisů nazývaných hypoteční zástavní listy, které jsou kryty příslušnou zastavenou nemovitostí.“

Hypotéka je dnes také využívána za účelem rekonstrukce nemovitosti nebo pronájmu bydlení, nemusí se jednat pouze o koupi.

Úrokový cap je jedna opce nebo i řada opcí na koupi dohody o budoucí úrokové míře. Kupující capu je většinou osoba, která se zároveň chystá splácet úvěr, u kterého se během splácení může měnit výše úrokové sazby. Touto dohodou si zajistí, že v budoucnosti obdrží částky úměrné rozdílu mezi budoucí úrokovou mírou a ve smlouvě zapsanou realizační úrokovou mírou, pokud bude tento rozdíl kladný. Za tuto možnost platí opční prémii, tzv. cap, ve formě jednorázové platby na začátku platnosti kontraktu. To omezuje dopad neočekávaného růstu úrokových sazeb, proto je používán jako efektivní nástroj k řízení úrokového rizika. Tento produkt je běžně obchodovatelný na vyspělých trzích a ve státech Evropské unie se uvažuje o jeho povinném zavedení ze zákona právě u hypoték.

Kapitola 2

Hypotéka

Hypotéka je tedy speciální druh úvěru, při kterém je možné vypůjčit si vyšší částku než například u spotřebitelského úvěru na delší časový horizont, až 40 let. Dluh je obvykle splácen pravidelnými měsíčními splátkami určitého typu, které se od sebe liší druhem výpočtu. Ve většině případů se používá splácení anuitní, kde se výše splátky v čase při shodně vysoké úrokové míře nemění. Dále se používá splácení degresivní, při kterém je umožněno soustředit finanční zatížení na počáteční období splácení úvěru a ke konci naopak splátky co nejvíce snížit. Progresivní splácení, které je využíváno hlavně mladými lidmi na počátku profesní kariéry, umožňuje v počátečním období nižší splátku než anuitní, která se postupně zvyšuje. Věřitelem je v dnešní době v případě hypotéky obvykle banka a úvěr bývá zprostředkován i hypotéčními makléři nebo finančními poradci.

Od května roku 2004 podle zákona neexistuje povinnost určovat účel, ke kterému se hypotéka užívá. Tato změna neznamenala vymizení klasické, tzv. účelové hypotéky, kde jsou peníze poskytovány pouze na bydlení, nýbrž došlo k zavedení tzv. americké hypotéky na český trh. Jedná se o druh hypotéky, u kterého banku nezajímá, na co půjčené peníze budou použity. Americká hypotéka se tak ukazuje jako výhodnější ve srovnání se spotřebitelským úvěrem, ale za to je možné očekávat vyšší úrokovou sazbu, než pokud se přistoupí na klasickou variantu hypotéky. Také banka bude ochotná půjčit menší část odhadní ceny nemovitosti, kterou je ručeno.

Kromě celkové výše úvěru a délky splácení je velmi důležitým faktorem při rozhodování o hypotečním úvěru také doba fixace úrokové sazby. Je to doba, po kterou je výše úrokové sazby neměnná a banka ji nesmí měnit. Délka fixace se stanovuje při podpisu úvěrové smlouvy. Nejčastěji je možné se setkat s fixací na 1, 3, 5, 10 nebo 15 let.

- Kratší doba fixace od jednoho roku do pěti let má zpravidla nižší úrokové sazby.
- Delší doba fixace na 5 a více let umožňuje dlužníkovi lépe naplánovat své finanční výdaje na delší dobu. Na druhou stranu jsou ale delší fixace úročeny vyšší sazbou.

Pokud není úroková sazba fixována na celou dobu splacení, je v některých státech (např. Belgie) rozšířeno využití finančního produktu hypotéky s úrokovým capem, který zaručí maximální výši úrokové sazby při nové dohodě s bankou o výši sazby po uplynutí doby fixace.

2.1 Anuitní splácení

Jak už bylo řečeno, při anuitním splácení je výše splátky konstantní až na poslední neúplnou splátku. Mění se ale poměr mezi složkami, ze kterých se splátka skládá, což jsou úrok z dluhu a úmor dluhu. Úrok je odměna věřiteli za dočasné poskytnutí financí druhé osobě. Tato složka vždy splatí úrok ze zbývající dlužné částky a tedy se v průběhu splácení snižuje. Úmor dluhu, jak je nazývána splacená část dluhu, postupně snižuje dlužnou částku a postupem času se zvyšuje. Splácení dluhu se pak řídí tzv. umořovacím plánem, který je v [1] definován jako:

> „Umořovací plán je důležitý dokument (z hlediska dlužníka i věřitele) obvykle obsahující pro jednotlivá období:
>
> - výši splátky;
> - výši úmoru dluhu;
> - výši úroku z dluhu;
> - stav dluhu po odečtení úmoru (tj. zbývající dlužnou částku);
>
> a umožňující mimo jiné:
>
> - provedení přepočtu při realizaci různých změn (například pro dlužníka může být vhodné v určité fázi umořování dluhu splatit se souhlasem věřitele jednorázově zbývající dlužnou částku, v průběhu umořování dluhu je možné akceptovat

změnu úrokových měr, věřitel může zbývající dlužnou částku prodat apod.);

- výpočet daňových odvodů (v řadě daňových systémů včetně České republiky se při umořování dluhu složka na splácení úroku z dluhu u dlužníka odčítá od základu pro výpočet daně z jeho příjmů, zatímco u věřitele se naopak započítává jako jeho zdanitelný příjem, čímž se zamezuje dvojímu zdanění)."

Pro dluh dané výše při neměnných splátkách a určené úrokové sazbě umořovací plán vychází ze dvou variant- buď je pevná doba splácení a musí se dopočítat výše splátky, nebo se určí pevná výše splátky (obvykle je to číslo typu 5 000Kč měsíčně) a od této sumy se pak odvíjí doba splácení. U hypoték je obvyklá první varianta.

2.1.1 Odvození vzorce pro výpočet výše splátky

Nechť máme danou dobu splácení T, úrokovou sazbu i [1] fixní po celou dobu splácení, výši úvěru N. Označme si P_t jako výši dluhu v čase t. Chceme odvodit výši splátky c, pokud dlužník splácí měsíčně při měsíčním úročení.
V čase 0 je stav dluhu:

$$P_0 = N.$$

V čase 1 je stav dluhu:

$P_1 = P_0 + P_0 \cdot i - c$ stav dluhu v čase 0 + úrok z dluhu v čase 0 - splátka.

Upravíme na:

$$P_1 = P_0(1 + i) - c. \tag{2.1}$$

V čase 2 je stav dluhu:

$P_2 = P_1 + P_1 \cdot i - c$ stav dluhu v čase 1 + úrok z dluhu v čase 1 - splátka.

Upravíme a dosadíme z (2.1):

$$P_2 = (P_0(1 + i) - c)(1 + i) - c,$$

[1] Je-li T vyjádřeno v letech, pak sazba i musí být vyjádřena p.a., reprezentuje-li T počet měsíců, dosazujeme sazbu p.m., apod.

tedy

$$P_2 = P_0(1+i)^2 - c(1+i) - c. \tag{2.2}$$

V čase 3 je stav dluhu:

$P_3 = P_2 + P_2 \cdot i - c$ stav dluhu v čase 2 + úrok z dluhu v čase 2 - splátka.

Upravíme a dosadíme z (2.2):

$$P_3 = (P_0(1+i)^2 - c(1+i) - c)(1+i) - c,$$

tedy

$$P_3 = P_0(1+i)^3 - c(1+i)^2 - c(1+i) - c. \tag{2.3}$$

$\vdots$
$\vdots$

V čase T je stav dluhu:

$$P_T = P_{T-1} + P_{T-1} \cdot i - c,$$

$$P_T = P_0(1+i)^T - c(1+i)^{T-1} - c(1+i)^{T-2} \ldots - c,$$

$$P_T = P_0(1+i)^T - c((1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} \ldots + 1),$$

$$P_T = P_0(1+i)^T - c \cdot (S), \tag{2.4}$$

kde

$S = (1+i)^{T-1} + (1+i)^{T-2} \ldots + 1$ je gemometrická řada o T členech.

Součet geometrické řady o n členech pro $n < \infty$ je roven:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q \neq 1.$$

Dostáváme, že

$$S = \frac{(1+i)^T - 1}{i}. \tag{2.5}$$

Pokud z rovnice (2.5) dosadíme výsledek zpět do rovnice (2.4) dostáváme:

$$P_T = P_0(1+i)^T - c \cdot \Big(\frac{(1+i)^T - 1}{i}\Big). \tag{2.6}$$

Protože víme, že $P_T = 0$, neboli dluh je splacen, můžeme z rovnice (2.6) vyjádřit c pomocí již známých veličin:

$$c = \frac{P_0(1+i)^T}{\frac{(1+i)^T - 1}{i}},$$

vydělením čitatele i jmenovatele členem $(1+i)^T$ dostáváme konečný výsledek pro výši jedné anuitní splátky:

$$c = \frac{i \cdot P_0}{1 - (1+i)^{-T}}. \tag{2.7}$$

Splátku pak můžeme rozdělit na úmor dluhu a úrok z dluhu a to tak, že spočítáme velikost úroku a zbytek do velikosti splátky už je úmor. Velikost úroku $r(t)$ v čase $t < T$ je roven:

$$r(t) = P_{t-1} \cdot i.$$

Po té, co vypočteme výši splátky c za předpoladu $P_T = 0$, můžeme již spočítat stav dluhu P_t v libovolném $t < T$:

$$P_t = P_0(1+i)^t - c \cdot \left(\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right) \tag{2.8}$$

Pro výpočet výše anuitní splátky u hypotéčního úvěru, kde je doba fixace (např. 5 let) úrokové sazby kratší než celková doba splácení (např. 30 let), se používá podobného principu. Nejprve se za daných podmínek vypočítá výše splátky, jakoby klient splácel po celou dobu (30 let) s neměnnou úrokovou sazbou. Takto spočtenou výši splátky pak klient splácí první fixační období (5 let). Po uplynutí této doby (5 let) se spočte výše dluhu v tomto okamžiku a určí se nová úroková sazba. Pak se opět vypočte nová výše splátky, jakoby klient opět splácel se stejnou úrokovou mírou až do konce doby splácení (25 let). Tímto způsobem se pokračuje až do poslední změny úrokové sazby.

2.1.2 Příklad

Klient si půjčil od banky 500 000 Kč. Splácel měsíčně po dobu 20 let s měsíčním úročením s roční nominální úrokovou mírou 6,5% p.a. Po 70. splátce se klient rozhodl splatit jednorázově 100 000 Kč a zbytek dluhu mu byl povolen splácet opět měsíčně po dobu 10 let s měsíčním úročením s roční nominální úrokovou mírou 7,5% p.a. Jaké byly výše splátek?
Ze zadání dostáváme:

$N = P_0 = 500\,000$ Kč

$T = 20$ let $= 240$ měsíců

$i = 0{,}065$ p.a.

splátky měsíční s měsíčním úročením

$c_1 = ?$ ... splátka naplánovaná pro měsíční splácení po dobu 20 let

Použitím vzorce (2.7) dostáváme

$$c_1 = \frac{i \cdot P_0}{1-(1+i)^{-T}} = \frac{\frac{0{,}065}{12} \cdot 500\,000}{1-(1+\frac{0{,}065}{12})^{-240}} = 3\,728.$$

Stav dluhu po 70 splátkách:

$$P_{70} = P_0(1+i)^{70} - c_1 \cdot \left(\frac{(1+i)^{70}-1}{i}\right) =$$

$$= 500\,000(1+\frac{0{,}065}{12})^{70} - 3\,728 \cdot \left(\frac{(1+\frac{0{,}065}{12})^{70}-1}{\frac{0{,}065}{12}}\right) \doteq 413\,488.$$

To dokládá skutečnost, že na počátku umořování dluhu velkou část splátky pokrývá pouze úrok z dluhu.
Po odečtení jednorázové splátky dostaneme:

$\widetilde{P_0} = 313\,488$ Kč ... novou výši nesplacené jistiny

$\widetilde{T} = 10$ let $= 120$ měsíců ... novou dobu splácení

$\widetilde{i} = 0{,}075$ p.a. ... novou úrokovou sazbu

splátky měsíční s měsíčním úročením

$c_2 = ?$ ... splátka naplánovaná pro měsíční splácení po dobu 10 let

$$c_2 = \frac{\widetilde{i} \cdot \widetilde{P_0}}{1-(1+\widetilde{i})^{-\widetilde{T}}} = \frac{\frac{0{,}075}{12} \cdot 313\,488}{1-(1+\frac{0{,}075}{12})^{-120}} = 3\,722.$$

První splátka byla vypočtena na 3 728 Kč. Druhá splátka, po částečném splacení dluhu, byla vyčíslena na 3 722 Kč. Celý proces umořování dluhu je znázorněn umořovacím plánem v tabulce 2.1.

Čas	Splátka (v Kč)	Úrok (v Kč)	Úmor (v Kč)	Stav dluhu (v Kč)
0	-	-	-	500 000
1	3 728	2 708	1 020	498 980
2	3 728	2 703	1 025	497 955
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
70	3 728	2 248	1 480	413 488
-	100 000	-	100 000	313 488
71	3 722	1 960	1 762	311 726
72	3 722	1 948	1 774	309 952
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
188	3 722	69	3 653	7 227
189	3 722	45	3 677	3 550
190	3 572	22	3 550	0

Tabulka 2.1: Umořovací plán.

Kapitola 3

Úrokový cap

K ocenění capu je nejčastěji používán Blackův model, který je odvozen od Black-Scholesova modelu pro oceňování opcí. Cena capu (ve vzorcích značena jako CAP) placená kupcem kontraktu jeho prodejci je ovlivněna mnoha faktory, nejpodstatnější z nich jsou:

- vztah mezi realizační sazbou kontraktu a variabilní referenční sazbou;
- splatnost kontraktu (cena roste s délkou splatnosti, prodávající žádá vyšší kompenzaci za podstoupení nejistoty na delší časové období);
- všeobecné ekonomické podmínky, např. tvar úrokové křivky, volatilita úrokových sazeb.

3.1 Potřebné definice

V následující kapitole uvedeme definice, které budeme dále v textu využívat.

Definice 1 *:*
Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$, kde $\Omega \neq \emptyset$; její střední hodnota $\mathbb{E}X$ je definovaná jako integrál z X vzhledem k míře P, tj.

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X dP \Big(= \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) \Big).$$

Definice 2 *:*
Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$, kde $\Omega \neq \emptyset$. Nechť X má diskrétní rozdělení $\{x_n, p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, pak

$$\mathbb{E}X = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n p_n,$$

pokud jedna ze stran rovnosti existuje.

Definice 3 *:*
Nechť μ a ν jsou σ-konečné míry na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, kde $\Omega \neq \emptyset$, μ je absolutně spojitá vzhledem k ν. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce h taková, že

$$\mu(A) = \int_A h d\nu, \qquad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Tato funkce se nazývá Radon-Nykodýmova derivace a je určena jednoznačně až na množinu ν-míry 0 .

Definice 4 *:*
Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je stochastický proces s diskrétním časem. Řekneme, že tento proces je martingalem, pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:
$\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$,
$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) = X_n$,
tj. podmíněná střední hodnota příštího pozorování, pokud známe celou minulost, je rovna poslednímu pozorování.

Definice 5 *:*
Wienerův proces $\{W_t, t \in \mathbb{R}\}$, někdy nazýván Brownův pohyb, je stochastický proces spojitého času, pro který platí:
$W_0 = 0$,
W_t *je téměř jistě spojitý* ($W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$) [1],
W_t *má nezávislé ortogonální přírůstky, tj.*

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s) \text{ pro } 0 \leq s < t < \infty.$$

[1] $N(\mu, \sigma^2)$ značí normální rozdělení s očekávanou střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, $\sigma > 0$.

3.1.1 Forwardová sazba

V [1] je forwardová sazba definovaná takto:

> „Forwardová úroková míra je úroková míra platná v nějakém budoucím termínu. Jestliže je sjednána na určitou dobu v rámci nějaké finanční transakce (tzv. forwardový kontrakt), platí po sjednanou dobu od sjednaného budoucího okamžiku.“

Forwardová sazba se v případě jednoduchého úročení, které se používá zejména v období do 1 roku, dá spočítat ze vztahu se spotovými úrokovými sazbami jako:

$$(1 + S(0,n)\frac{n}{360})(1 + F(0,n,k)\frac{k-n}{360}) = (1 + S(0,k)\frac{k}{360}),$$

kde

> $S(0,n)$ značí spotovou (tj. okamžitou) úrokovou míru s maturitou délky n v čase 0 (úroková míra při okamžité půjčce na dobu n);
>
> $F(0,n,k)$ označuje forwardovou úrokovou míru s maturitou délky $k-n$ v čase 0.

Podobně vypadá formule pro forwardovou sazbu v případě složeného úročení:

$$(1 + S(0,n))^n (1 + F(0,n,k))^{k-n} = (1 + S(0,k))^k.$$

Příklad:

Ví se, že úroková míra u úvěru na jeden rok je $S(0,1) = 10\%$ p.a. a úroková míra u dvouletého úvěru je $S(0,2) = 13\%$ p.a. Na základě těchto údajů odhadněte forwardovou sazbu od roku 1 do roku 2.

Vzhledem k dvouletému časovému horizontu použijeme formuli pro složené úročení a ze vztahu mezi forwardovými a spotovými úrokovými mírami pro $n = 1$ a $k = 1$ dostáváme:

$$(1 + S(0,1))(1 + F(0,1,2)) = (1 + S(0,2))^2$$

a po dosazení zjišťujeme, že

$$F(0,1,2) = 16{,}08\% \text{ p.a.}$$

Forwardovou sazbu jsme odhadli na 16,08% p.a.

3.2 Ocenění úrokového capu

Při uzavření úrokového capu prodávající vyplácí kupujícímu ve sjednaných časových okamžicích nenulovou částku v případě, kdy referenční sazba (tj. nejčastěji aktuální tržní sazba nebo sazba odvozená od tržních sazeb proti jejímž pohybům se kupující zajišťuje) přesáhne smluvenou maximální sazbu E, tzv. realizační sazbu. V takovém případě kupující obdrží při použití jednoduchého úročení (neboť v praxi jsou nejčastěji voleny měsíční frekvence výplat) v okamžiku T_j částku ve výši

$$C_{T_j} = N \cdot \delta \cdot [R(T_{j-1}, \delta) - E]^+,$$

kde N reprezentuje nominální objem, na který se úrokový cap sjednává, δ vyjadřuje konstantní délku období mezi jednotlivými výplatami a $R(T_{j-1}, \delta)$ značí aktuální hodnotu referenční sazby stanovenou v čase T_{j-1}, tj. v čase $(j-1)$-ní výplaty. Vyplacená částka je úměrná rozdílu naběhlých úroků z budoucí hodnoty referenční sazby a realizační sazby. Rozdílové platby se většinou stanoví na konci úrokových období.

Nechť je smlouva uzavřena v čase t, nabývá platnosti v čase T_0 a v časech $T_1 \ldots T_{n-1}$ dochází k výplatám a aktualizuje se hodnota aktuální referenční sazby, v čase T_n je ukončení kontraktu a poslední výplata. Pro všechna $j = 1, \ldots, n$, předpokládáme konstantní $T_j - T_{j-1} = \delta$. Při známých hodnotách referenční sazby v okamžiku každé výplaty bychom ocenili úrokový cap jako současnou hodnotu ke dni uzavření kontraktu všech realizovaných peněžních toků, tj.

$$CAP^B(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{T_j} \cdot B(t, T_j) = \sum_{j=1}^{n} N \cdot [\delta \cdot (R(T_{j-1}, \delta) - E)]^+ \cdot B(t, T_j), \quad (3.1)$$

kde

$B(t, T_j)$ je diskontí faktor v čase t na období T_j.

Celý kontrakt pak má následující scénář:

t	–	T_0	–	T_1	–	T_2	–	–	–	...	–	–	–	T_n
-	–	–	–	C_1	–	C_2	–	–	–	...	–	–	–	C_n

V čase t, kdy se uzavírá smlouva, ale neznáme proměnné v oceňování capu představující hodnoty referenční sazby $R(T_{j-1}, \delta)$. Budeme na ně pohlížet jako na náhodné veličiny. Hodnotu capu pak můžeme stanovit jako očekávanou současnou hodnotu jednotlivých finančních toků, tj.:

$$CAP^B(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{n} C_{T_j} \cdot B(t, T_j)\Big]. \tag{3.2}$$

3.3 Blackův model

V Blackově modelu pracujeme s předpokladem, že budoucí hodnoty tržních sazeb můžeme aproximovat sérií forwardových sazeb v čase uzavření kontraktu a že na tyto forwardové sazby můžeme nahlížet jako na náhodný proces, jehož chování je odvozeno od Wienerova procesu. Cena úrokového capu v čase t dána Blackovým modelem, viz [3], je rovna

$$CAP^B(t) = \sum_{j=1}^{n} N \cdot \delta \cdot B(t, T_j) \cdot [F(t, T_{j-1}, T_j)\Phi(d_j) - E\Phi(d_j - \sigma_j\sqrt{T_{j-1} - t})], \tag{3.3}$$

kde

Φ je kumulativní distribuční funkce standardního normalního rozdělení;

$F(t, T_{j-1}, T_j)$ je forwardová sazba stanovena v čase t na období od data T_{j-1} do T_j. Poznamenejme, že $F(T_{j-1}, T_{j-1}, Tj) = R(T_{j-1}, \delta)$.

d_j je dáno vzorcem:

$$d_j = \frac{\ln\left(\frac{F(t,T_{j-1},T_j)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma_j^2(T_{j-1} - t)}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1} - t}};$$

σ_j je nestálost základního faktoru $F(t, T_{j-1}, Tj)$, nebo-li směrodatná odchylka, či také volatilita capu.

Dle knihy [2] původní Blackův model používá složené úročení se spojitým připisováním úroků. Vzhledem k tomu, že ve veličině d_j používáme forwardovou úrokovou míru, veličina d_j ani její posunutí nezávisejí na použitém způsobu úročení. To samé platí i pro hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení těchto veličin. V takovém případě způsob úročení ovlivňuje pouze diskontování celého výrazu, tj. hodnotu $B(t, T_j)$. V praxi se pak využívá při diskontování na období do jednoho roku jednoduché úročení a nad jeden rok úročení složené.

Při použití složeného úročení dostáváme

$$CAP^B(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{N \cdot \delta \cdot [F(t, T_{j-1}, T_j)\Phi(d_j) - E\Phi(d_j - \sigma_j \sqrt{T_{j-1} - t})]}{(1 + S(t, T_j))^{T_j - t}}$$

a pro jednoduché uročení obdržíme vztah

$$CAP^B(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{N \cdot \delta \cdot [F(t, T_{j-1}, T_j)\Phi(d_j) - E\Phi(d_j - \sigma_j \sqrt{T_{j-1} - t})]}{(1 + S(t, T_j) \cdot (T_j - t))},$$

kde

$S(t, T_j)$ je spotová úroková míra v čase t s maturitou $T_j - t$.

3.3.1 Odvození Blackova modelu

Nechť v čase T_j je vyplaceno cash flow tvaru:

$$C_{T_j} = N \cdot \delta \cdot [F(T_{j-1}, T_{j-1}, Tj) - E]^+.$$

Nechť $\mathbb{Q}$ reprezentuje rizikově neutralní pravděpodobnostní míru, pak diskontované cash flows jsou martingaly (viz [3]: kapitola 12, Appendix 2). Odtud pak dostáváme očekávanou střední hodnotu j-tého cash flow v čase t při použití spojitého úročení ve tvaru

$$\mathbb{E}[C_{T_j}] \cdot B(t, T_j) = N \cdot \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^{T_j} r(s)\,\mathrm{d}s} C_{T_j}].$$

Nechť nová pravděpodobnostní míra $\mathbb{Q}_{T_j}$ je definována jako Radon-Nikodýmova derivace vzhledem ke $\mathbb{Q}$, tj.:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{T_j}^t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}^t} = \frac{1}{B(t, T_j)} e^{-\int_t^{T_j} r(s)\,\mathrm{d}s},$$

pak dostáváme (viz [3]: kapitola 12, Appendix 2):

$$\mathbb{E}[C_{T_j}] = N \cdot B(t, T_j) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T_j}}[C_{T_j}]. \tag{3.4}$$

Nyní ukážeme, že $F(t, T_{j-1}, T_j)$ je martingal při $\mathbb{Q}_{T_j}$.
Za předpokladu neexistence arbitráže je ekvivalentní přijetí částky 1 Kč v čase T_j nebo částky 1 Kč $+\delta \cdot F(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j)$ v čase T_{j-1} či částky $B(t, T_{j-1})$ Kč v čase t. A proto dostáváme:

$$B(t, T_{j-1}) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^{T_j} r(s)\,\mathrm{d}s}[1 + \delta \cdot F(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j)]\Big]$$

nebo

$$\frac{B(t, T_{j-1})}{B(t, T_j)} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T_j}}\Big[1 + \delta \cdot F(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j)\Big]$$

či

$$1 + \delta \cdot F(t, T_{j-1}, T_j) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T_j}}\Big[1 + \delta \cdot F(T_{j-1}, T_{j-1}, T_j)\Big].$$

$F(t, T_{j-1}, T_j)$ je tedy martingal při $\mathbb{Q}_{T_j}$. Budeme-li nadále předpokládat, že se forwardové sazby při míře $\mathbb{Q}_{T_j}$ řídí následovně

$$\mathrm{d}F(t, T_{j-1}, T_j) = \sigma_j F(t, T_{j-1}, T_j)\mathrm{d}W_{T_j}(t), \tag{3.5}$$

kde

W_{T_j} je standardní Brownův pohyb při $\mathbb{Q}_{T_j}$,

lze odvodit s využitím standardních technik a rovnic (3.4), (3.5) oceňující formuli pro j-tý $CAP^B(t)$. Sčítáním přes všechna j dosáhneme výsledné ceny capu

$$CAP^B(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[C^{T_j}] \cdot B(t, T_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} N \cdot \delta \cdot B(t, T_j) \cdot [F(t, T_{j-1}, T_j)\Phi(d_j) - E\Phi(d_j - \sigma_j\sqrt{T_{j-1} - t})].$$

Detailní odvození lze nalézt např. v [3].

3.3.2 Příklady

Nyní ukážeme jak Blackův model funguje na příkladech:

Příklad 1

Uvažujme firmu, která si bere dvouletý úvěr, jenž nabývá platnosti v den dohody 1.4.2009, ve výši 1 000 000 Kč s roční fixací úrokové sazby ve výši 4,50% p.a. do 31.3.2010. Dále uzavírá s bankou kontrakt úrokový cap, který jí bude garantovat maximální výši nově domlouvané sazby pro příští fixační období od 1.4.2010 do splatnosti úvěru dne 31.3.2011 ve výši 4,70% p.a. Během trvání úvěru firma nesplácí jistinu, ta bude vyrovnána až při maturitě. Naběhlé úroky jsou spláceny jednou ročně, a to vždy ke konci platnosti fixace úrokové sazby. Jakou částku by firma zaplatila za domluvený kontrakt úrokového capu?

Ze zadání tedy dostáváme tyto veličiny:

$N = 1\,000\,000$ Kč ...... výše úvěru

$E = 4{,}70\%$ p.a. ...... maximální výše úrokové sazby (realizační sazba)

$t = 1.4.2009$ ...... uzavření capu

$T_0 = 31.3.2010$ ...... konec fixace úrokové sazby [2]

$T_1 = 31.3.2011$ ...... ukončení kontraktu (vyrovnání dluhu)

Přijmeme- li, že volatilita capu $\sigma_1 = 0{,}15$, diskontní faktor v čase t je roven 0,8654 a že forwardová sazba je rovna 4,68% p.a., můžeme začít počítat:

1. Výpočet d_1:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t,T_0,T_1)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(T_0 - t)}{\sigma_1\sqrt{T_0 - t}} = \frac{\ln\left(\frac{0{,}0468}{0{,}0470}\right) + \frac{1}{2}\cdot 0{,}15^2 \cdot 1}{0{,}15 \cdot \sqrt{1}} = 0{,}04657;$$

2. Dosazení do Blackova modelu dostáváme:

$$CAP^B(t) = N \cdot \delta \cdot B(t,T_1) \cdot [F(t,T_0,T_1)\Phi(d_1) - E\Phi(d_1 - \sigma_1\sqrt{T_0 - t})] =$$

$$= 1\,000\,000 \cdot 1 \cdot 0{,}8654 \cdot [0{,}0468 \cdot \Phi(0{,}04657) - 0{,}0470 \cdot \Phi(0{,}04657 - 0{,}15 \cdot \sqrt{1})] =$$

$$= 2\,997{,}92.$$

Užitím Blackova modelu bychom ocenili daný cap částkou 2 997,92 Kč.

[2] Díky shodnému datu uzavření kontraktu a počátku capu je čas T_0 označen až jako konec 1. fixačního období.

Příklad 2

Uvažujme firmu, která si bere úvěr na 12 let, jenž nabývá platnosti v den dohody 1.9.2009 a končí dnem splatnosti 31.8.2021, ve výši 1 000 000 Kč s roční fixací úrokové sazby ve výši 4,50% p.a. Dále uzavírá s bankou kontrakt úrokový cap, který ji při každé změně úrokové sazby bude garantovat maximální výši nově domlouvané sazby pro příští fixační období vždy od 1. dne měsíce září daného roku do posledního dne měsíce srpna roku příštího ve výši 4,70% p.a. Během trvání úvěru firma nesplácí jistinu, ta bude vyrovnána až při maturitě. Naběhlé úroky jsou spláceny jednou ročně, a to vždy ke konci platnosti fixace úrokové sazby. Jakou částku by firma zaplatila za domluvený kontrakt úrokového capu?
Ze zadání tedy dostáváme tyto veličiny:

$N = 1\,000\,000$ Kč ...... výše úvěru

$E = 4{,}70\%$ p.a. ...... maximální výše úrokové sazby (realizační sazba)

$t = 1.9.2009$ ...... uzavření capu

$T_0 = 31.8.2010$ ...... konec 1. období fixace úrokové sazby [3]

$T_1 = 31.8.2011$ ...... konec 2. období fixace úrokové sazby

$\vdots$

$T_{11} = 31.8.2021$ ...... ukončení kontraktu (vyrovnání dluhu)

Přijmeme- li, že volatilita capu je pro všechna j stejná $\sigma_j = 0{,}15$ a že hodnoty diskontního faktoru a forwardových sazeb budou jako v tabulce 3.1, můžeme začít počítat:

1. Výpočteme d_j dle vzorce:

$$d_j = \frac{\ln\left(\frac{F(t,T_{j-1},T_j)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma_j^2(T_{j-1}-t)}{\sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t}} = \frac{\ln\left(\frac{F(t,T_{j-1},T_j)}{0{,}0470}\right) + \frac{1}{2}\cdot 0{,}15^2(j)}{0{,}15\cdot\sqrt{j}}$$

   a tyto hodnoty si zapíšeme opět do tabulky 3.1.

[3] Díky shodnému datu uzavření kontraktu a počátku capu je čas T_0 označen až jako konec 1. fixačního období.

j	$B(t,T_j)$	$F(t,T_{j-1},T_j)$	d_j
1	0,9902	4,530% p.a.	-0,170
2	0,9888	4,556% p.a.	-0,041
3	0,9681	4,597% p.a.	0,045
4	0,9476	4,619% p.a.	0,092
5	0,8969	4,637% p.a.	0,127
6	0,8765	4,644% p.a.	0,151
7	0,8658	4,651% p.a.	0,172
8	0,8453	4,668% p.a.	0,196
9	0,8145	4,684% p.a.	0,217
10	0,7839	4,697% p.a.	0,236
11	0,7532	4,709% p.a.	0,253

Tabulka 3.1:

2. Dosadíme do Blackova modelu:

$$CAP^B(t) = \sum_{j=1}^{11} N\cdot\delta\cdot B(t,T_j)\cdot[F(t,T_{j-1},T_j)\Phi(d_j) - E\Phi(d_j - \sigma_j\sqrt{T_{j-1}-t})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{11} 1\,000\,000\cdot 1\cdot B(t,T_j)[F(t,T_{j-1},T_j)\Phi(d_j) - 0{,}047\Phi(d_j - 0{,}15\sqrt{j})] =$$

$$= 58\,773 \text{ Kč}.$$

Zjistili jsme, že tento úrokový cap bychom ocenili na 58 773 Kč.

3.4 Alternativní přístup

Vraťme se nyní ke vztahu (3.2), kde vyjadřujeme cenu úrokového capu jako očekávanou současnou hodnotu ke dni t ze všech realizovaných cash flows, tj.

$$CAP(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{n} C_{T_j}\cdot B(t,T_j)\Big].$$

Nechť máme k dispozici pro každou realizaci referenční sazby $R(T_{j-1},\delta)$ S_j scénářů $R_{^js}(T_{j-1},\delta)$ každý s pravděpodobností realizace $p_{^js}$, $^js = 1,\ldots,S_j$,

$j = 1, \ldots, n$. Máme mnoho způsobů, jak takovéto scénáře budoucích forwardových sazeb získat, například využitím modelů ke konstrukci výnosových křivek jako jsou Vašíčkův model, Hull-Whitův model či Cox-Ingersoll-Rossův model. Další alternativou je využití expertních scénářů. Pak očekávaná hodnota cash flow C_{T_j} (částka, kterou obdrží držitel capu v čase T_j) je rovna

$$\mathbb{E}[C_{T_j}] = \sum_{{}^j s=1}^{S_j} C_{T_j}^{{}^j s} p_{{}^j s} = \sum_{{}^j s=1}^{S_j} N \cdot \delta \cdot [R_{{}^j s}(T_{j-1}, \delta) - E]^+ \cdot p_{{}^j s}.$$

Tedy očekávaná cena capu bude střední hodnota ze všech diskontovaných cash flows při daném diskrétním rozdělení

$$CAP(t) = \sum_{j=1}^{n} B(t, T_j) \sum_{{}^j s=1}^{S_j} C_{T_j}^{{}^j s} p_{{}^j s}.$$

3.4.1 Příklad 1

Nový přístup si ukážeme na konkrétním jednoduchém příkladě[4]:

Uvažujme stejný příklad jako je příklad 1 v části Blackův model. Tedy mějme firmu, která si bere dvouletý úvěr, jenž nabyvá platnosti v den dohody 1.04.2009, ve výši 1 000 000 Kč s roční fixací úrokové sazby ve výši 4,50% p.a. do 31.03.2010. Dále uzavírá s bankou kontrakt úrokový cap, který ji bude garantovat maximální výši nově domlouvané sazby pro příští fixační období od 1.04.2010 do splatnosti úvěru dne 1.04.2011 ve výši 4,70% p.a. Během trvání úvěru firma nesplácí jistinu, ta bude vyrovnána až při maturitě. Naběhlé úroky jsou spláceny jednou ročně a to vždy ke konci platnosti fixace úrokové sazby. Jakou částku zaplatí firma za kontrakt úrokový cap? Ze zadání tedy potřebujeme tyto veličiny:

$N = 1\,000\,000$ Kč ...... výše úvěru

$E = 4{,}70\%$ p.a. ...... maximální výše úrokové sazby (realizační sazba)

$\delta = 1$ rok ...... délka období mezi změnami úrokových sazeb

$n = 1$ ...... počet změn úrokové sazby

[4]Vzhledem k pouze jedné změně úrokové sazby ($j = 1$) u proměnné ${}^j s$ budeme index j vynechávat

$t = 1.04.2009$ ...... datum dohody kontraktu

Uvažujme nyní těchto 10 scénářů:

Úroková míra $R_1(T_0, 1) = 4{,}65\%$ p.a. s pravděpodobností $p_1 = 12\%$;

Úroková míra $R_2(T_0, 1) = 4{,}73\%$ p.a. s pravděpodobností $p_2 = 3\%$;

Úroková míra $R_3(T_0, 1) = 4{,}58\%$ p.a. s pravděpodobností $p_3 = 7\%$;

Úroková míra $R_4(T_0, 1) = 4{,}69\%$ p.a. s pravděpodobností $p_4 = 4\%$;

Úroková míra $R_5(T_0, 1) = 4{,}81\%$ p.a. s pravděpodobností $p_5 = 15\%$;

Úroková míra $R_6(T_0, 1) = 4{,}75\%$ p.a. s pravděpodobností $p_6 = 8\%$;

Úroková míra $R_7(T_0, 1) = 4{,}72\%$ p.a. s pravděpodobností $p_7 = 9\%$;

Úroková míra $R_8(T_0, 1) = 4{,}67\%$ p.a. s pravděpodobností $p_8 = 19\%$;

Úroková míra $R_9(T_0, 1) = 4{,}59\%$ p.a. s pravděpodobností $p_9 = 10\%$;

Úroková míra $R_{10}(T_0, 1) = 4{,}78\%$ p.a. s pravděpodobností $p_{10} = 13\%$;

Přijmeme-li, že diskontní faktor $B(t, T_j) = 0{,}9879$, můžeme začít počítat $C^s_{T_1}$ jako

$$C^s_{T_1} = N \cdot \delta \cdot [R_s(T_0, 1) - E]^+ = 1\,000\,000 \cdot 1 \cdot [R_s(T_0, 1) - 0{,}047]^+.$$

A nakonec spočteme hodnotu capu jako

$$CAP(t) = \sum_{j=1}^{1} 0{,}9879 \sum_{s=1}^{10} C^s_{T_1} p_s = 332.$$

Pokud bychom užili alternativní přístup, kontrakt úrokový cap bychom ocenili na 332 Kč.

3.4.2 Vašíčkův model

V této práci budeme dále používat scénáře, které dostaneme z Vašíčkova modelu, viz [4]. Tento model je pojmenován po jeho tvůrci, Oldřichu Vašíčkovi, který jej poprvé publikoval v roce 1977 v časopise Journal of financial economics. Je založen na Wienerově spojitém náhodném procesu. Tento model je daný stochastickou diferenciální rovnicí tvaru:

$$di(t) = a(b - i(t))dt + \sigma dW_t,$$

kde

> $i(t)$ je krátkodobá úroková sazba v čase t;
>
> a je zvolená konstanta nabývající hodnot [0,1]. Udává jak rychle $i(t)$ směřuje k rovnovážné úrovni;
>
> b je zvolená konstanta, která nabývá realných hodnot. Představuje rovnovážnou úroveň, ke které se krátkodobá úroková míra $i(t)$ přibližuje;
>
> σ je zvolená nezáporná konstanta, která představuje konstantní volatilitu úrokové míry;

Výhodou Vašíčkova modelu je jeho invertibilita a také tvárnost. Má však i nevýhodu, a to v podobě možnosti záporné úrokové míry.

Vašíčkův model nám dá pouze odhady budoucích úrokových měr, my však potřebujeme v novém modelu ještě vědět, s jakou pravděpodobností bude skutečná budoucí uroková míra těchto hodnot nabývat. Pro jednoduchost budeme volit rovnoměrné rozdělení, tedy:

$$p_s = \frac{1}{S_j} \qquad j = 1, \ldots, n.$$

3.4.3 Příklad 2

Uvažujme firmu, která si bere úvěr na 8 let, jenž nabývá platnosti v den dohody 1.9.2009 a končí dnem splatnosti 31.8.2017, ve výši 1 000 000 Kč s roční fixací úrokové sazby ve výši 4,50% p.a. Dále uzavírá s bankou kontrakt úrokový cap, který ji při každé změně úrokové sazby bude garantovat maximální výši nově domlouvané sazby pro příští fixační období vždy od 1. dne měsíce září daného roku do posledního dne měsíce srpna roku příštího

ve výši 4,70% p.a. Během trvání úvěru firma nesplácí jistinu, ta bude vyrovnána až při maturitě. Naběhlé úroky jsou spláceny jednou ročně, a to vždy ke konci platnosti fixace úrokové sazby. Jakou částku by firma zaplatila za domluvený kontrakt úrokového capu?
Ze zadání tedy potřebujeme tyto veličiny:

$N = 1\,000\,000$ Kč ...... výše úvěru

$E = 4{,}70\%$ p.a. ...... maximální výše úrokové sazby (realizační sazba)

$\delta = 1$ rok ...... délka období mezi změnami úrokových sazeb

$n = 7$ ...... počet změn úrokové sazby

$t = 1.9.2009$ ...... datum dohody kontraktu

Z Vašíčkova modelu jsme dostali úrokové sazby $R_{j_s}(T_{j-1}, 1)$, které jsou zapsány v tabulce 3.2, stejně jako diskontní faktory pro dané období.
Použitím vzorců

$$C_{T_j}^{j_s} = N \cdot 1 \cdot [R_{j_s}(T_{j-1}, 1) - E]^+.$$

$$CAP(t) = \sum_{j=1}^{7} B(t, T_j) \sum_{j_s=1}^{10} C_{T_j}^{j_s} p_{j_s}.$$

jsme dostali výslednou cenu pro ocenění capu, a to 135 356 Kč .

	1	2	3	4	5	6	7
B(t,T_j)	0,9683	0,9147	0,8792	0,8375	0,8127	0,7962	0,7504
1	0,068	0,071	0,078	0,053	0,030	0,062	-0,034
2	0,069	-0,025	-0,032	-0,041	-0,065	0,031	0,068
3	0,114	0,205	0,211	0,209	0,218	0,154	0,112
4	0,065	0,052	0,094	0,085	0,125	0,089	0,114
5	-0,026	0,032	0,129	0,100	0,102	0,082	0,046
6	-0,025	0,022	-0,039	-0,012	-0,038	0,023	-0,047
7	0,052	0,008	0,028	-0,007	0,004	0,050	0,055
8	0,012	-0,051	-0,038	-0,036	-0,058	-0,044	-0,137
9	0,045	0,076	0,072	0,055	0,038	0,018	0,049
10	0,015	0,019	-0,085	-0,052	-0,055	-0,088	-0,105

Tabulka 3.2: 10 scénářů pro 7 změn úrokovacích sazeb, diskontní faktory

Kapitola 4

Aplikace úrokového capu na hypotéky

Doteď jsme mluvili o úrokovém capu a hypotéce jako o dvou samostatných pojmech. Nyní chceme tyto dva deriváty finančního trhu spojit dohromady, neboli ukázat možnost, jak na hypotéku aplikovat kontrakt úrokového capu a dosáhnout tak pro dlužníka lepší kontroly úrokového rizika za dostatečnou odměnu pro banku. Úrokový cap jsme již používali v příkladech, kde byla jistina splatná až při maturitě, což u hypotéčního úvěru nelze. Navíc u hypoték pracujeme s fixní referenční sazbou platnou po celé období fixace (tedy po dobu několika úrokových plateb).

Uvažujme hypotéku o výši N s k_n měsíčními anuitními splátkami (k_n-tá splátka je realizovaná při maturitě), s fixní úrokovou sazbou i_0 platnou od času T_0, kdy dochází k jednorázovému čerpání úvěru. Od následujícího kalendářního měsíce, tj. od okamžiku T_1 platí klient bance při pravidelných měsíčních splátkách částku ve výši c_0 až do doby první změny úrokové sazby v čase T_{k_1}, kdy je realizovaná poslední splátka při sazbě i_0. Od následujícího měsíce do konce dalšího fixačního období (tj. od T_{k_1+1} do T_{k_2}) platí klient splátky ve výši c_1 odvozené od sazby i_1, která je stanovena až v okamžiku T_{k_1}, atd. až do splatnosti úvěru. Dále uvažujme kontrakt úrokový cap dohodnutý v čase $t < T_0$, stejně jako hypotéční úvěr, kterým se klient zabezpečuje proti růstu úrokových sazeb v budoucnu a dohodne si s bankou, že maximální výše sazeb $i_1, \dots, i_{n-1}$ nepřesáhne předem domluvenou realizační sazbu E. Našim úkolem je ocenit takovýto produkt.

Rekapitulujme, v časech $T_{k_1} \dots T_{k_{n-1}}$ se mění úrokové sazby z důvodu ukončení fixace a následné dohody o nové výši sazby i_r, $r = 1 \dots, n-1$, které platí vždy od času T_{k_r+1} do času $T_{k_{r+1}}$, v čase T_{k_n} je ukončení kontraktu a zároveň konec umořování hypotéčního úvěru. Jako δ označíme konstantní délku období mezi jednotlivými splátkami. Celý kontrakt pak má scénář jako na obrázku 4.1.

$$t - T_0 - T_1 - \ldots - T_{k_1} - T_{k_1+1} - \ldots - T_{k_2} - T_{k_2+1} - \ldots\ldots - T_{k_n}$$

$$-i_0 - i_0 - \ldots - i_0 \quad - i_1 \quad - \ldots - i_1 \quad - i_2 \quad - \ldots\ldots - i_{n-1}$$

$$- \quad - \quad - \ldots - \qquad -C_{k_1+1} - \ldots - C_{k_2} - C_{k_2+1} - \ldots\ldots - C_{k_n}$$

$$-P_0 - P_1 - \ldots - P_{k_1} - P_{k_1+1} - \ldots - P_{k_2} - P_{k_2+1} - \ldots\ldots - P_{k_n}$$

$$- \quad - c_0 - \ldots - c_0 \quad - c_1 \quad - \ldots - c_1 \quad - c_2 \quad - \ldots\ldots - c_{n-1}$$

Obrázek 4.1: Scénář úrokového capu

Vzhledem k anuitnímu splácení použijeme pro v čase proměnlivou výši nesplaceného dluhu vztah (2.8). Pro ocenění úrokového capu nás budou zajímat splátky od času T_{k_1+1}. K tomu potřebujeme stanovit výši nesplaceného dluhu P_{k_1} po poslední splátce při sazbě i_0 provedenou v čase T_{k_1}. Poznamenejme, že $P_0 = N$ a $P_{k_n} = 0$. Ze vztahu (2.8) dostáváme

$$P_{k_1} = P_0(1+i_0)^{k_1} - c_0 \cdot \left(\frac{(1+i_0)^{k_1} - 1}{i_0}\right),$$

kde

$$c_0 = \frac{i_0 \cdot P_0}{1 - (1+i_0)^{-k_n}}.$$

Dále pak

$$P_j = P_{k_1}(1+i_1)^{j-k_1} - c_1 \cdot \left(\frac{(1+i_1)^{j-k_1} - 1}{i_1}\right) \qquad j = k_1+1, \ldots, k_2$$

kde

$$c_1 = \frac{i_1 \cdot P_{k_1}}{1 - (1+i_1)^{-k_n+k_1}},$$

atd.

Tedy v čase T_{k_1} je stanovena nová úroková sazba i_1, která platí pro cash flows C_{k_1+1} až C_{k_2}. Tyto cash flows mají hodnoty

$$C_{k_1+1} = P_{k_1} \cdot \delta \cdot [i_1 - E]^+;$$

$$C_{k_1+2} = P_{k_1+1} \cdot \delta \cdot [i_1 - E]^+;$$

atd.
Pak součet všech cash flows, pro které platí úroková sazba i_1 se dá vyjádřit jako

$$\sum_{j=k_1+1}^{k_2} P_{j-1} \cdot \delta \cdot [i_1 - E]^+.$$

V čase T_{k_2} je stanovena nová úroková sazba i_2, která platí pro cash flows C_{k_2+1} až C_{k_3}. Tyto cash flows pak mají hodnoty

$$C_{k_2+1} = P_{k_2} \cdot \delta \cdot [i_2 - E]^+;$$

$$C_{k_2+2} = P_{k_2+1} \cdot \delta \cdot [i_2 - E]^+;$$

atd.
A opět můžeme vyjádřit součet všech cash flows, pro které platí úrokova sazba i_2 jako

$$\sum_{j=k_2+1}^{k_3} P_{j-1} \cdot \delta \cdot [i_2 - E]^+.$$

Takto můžeme pokračovat až do času T_{k_n}. Pak součet všech cash flows, které budou vyplaceny během trvání kontraktu, se dá vyjádřit takto:

$$\sum_{r=1}^{n-1} \delta \cdot [i_r - E]^+ \cdot \sum_{j=k_r+1}^{k_{r+1}} P_{j-1}.$$

Kdybychom tedy na začátku kontraktu znali hodnoty úrokových sazeb i_r, $r = 1 \ldots, n-1$, úrokový cap bychom ocenili jako

$$CAP(t) = \sum_{r=1}^{n-1} \delta \cdot [i_r - E]^+ \cdot \sum_{j=k_r+1}^{k_{r+1}} P_{j-1} \cdot B(t, T_j).$$

4.1 Aplikace alternativního přístupu

Uvažujme situaci, která je popsána v předchozím odstavci. Dále uvažujme, že pro každou úrokovou sazbu $i_1, \ldots, i_{n-1}$ máme k dispozici $S_r, r = 1, \ldots, n-1$, scénářů $({}^r s_1, {}^r s_2, \ldots, {}^r s_{S_r})$ každý s pravděpodobností $p_{{}^r s_r}, r = 1, \ldots, n-1$.

Uvažujme nyní pro jednoduchost kontrakt, kde se mění úroková sazba pouze jednou, a to v čase T_{k_1}. V tomto okamžiku je hodnota výše nesplacené jistiny pro všechny scénáře stejná P_{k_1} a hodnota cash flows C_{k_1+1} nezávisí na volbě scénáře, ale od času T_{k_1+1} do času T_{k_2} už výše nesplacené jistiny $P_{k_1+1}, \ldots, P_{k_2}$ zavisí na zvoleném scénáři. Kontrakt úrokový cap bychom pak ocenili jako očekávánou střední hodnotu ze všech cash flows od času T_{k_1+1}, tj.

$$CAP(t) = C_{k_1+1} \cdot B(t, T_{k_1+1}) + \sum_{l=1}^{S_1} p_{{}^1 s_l} \cdot \sum_{j=k_1+2}^{k_2} C_j^{{}^1 s_l} \cdot B(t, T_j) =$$

$$= \delta \cdot [i_0 - E]^+ \cdot P_{k_1} \cdot B(t, T_{k_1+1}) + \sum_{l=1}^{S_1} p_{{}^1 s_l} \cdot \sum_{j=k_1+2}^{k_2} \delta \cdot [i_1^{{}^1 s_l} - E]^+ \cdot P_{j-1}^{{}^1 s_l} \cdot B(t, T_j).$$

Nyní můžeme uvažovat o dvou změnách úrokových sazeb, a to v časech T_{k_1} a T_{k_2}. Pro první změnu úrokové sazby pak máme k dispozici scénáře $({}^1 s_1, {}^1 s_2, \ldots, {}^1 s_{S_1})$ s pravděpodobností $(p_{{}^1 s_1}, p_{{}^1 s_2}, \ldots, p_{{}^1 s_{S_1}})$ a cash flow $C_j^{{}^1 s_1}, \ldots, C_j^{{}^1 s_{S_1}}$, $j = k_1 + 1, \ldots, k_2$. Pro druhou změnu úrokové sazby máme zas k dispozici scénáře $({}^2 s_1, {}^2 s_2, \ldots, {}^2 s_{S_2})$ s pravděpodobností, že nastanou $(p_{{}^2 s_1}, p_{{}^2 s_2}, \ldots, p_{{}^2 s_{S_2}})$ a cash flow $C_j^{{}^2 s_1}, \ldots, C_j^{{}^2 s_{S_2}}$, $j = k_2 + 1, \ldots, k_3$. Kontrakt úrokový cap pak oceníme jako

$$CAP(t) = C_{k_1+1} \cdot B(t, T_{k_1+1}) + \sum_{l=1}^{S_1} p_{{}^1 s_l} \cdot \Bigg[\sum_{j=k_1+2}^{k_2} C_j^{{}^1 s_l} \cdot B(t, T_j) + C_{k_2+1}^{{}^1 s_l} \cdot B(t, T_{k_2+1}) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{S_2} p_{{}^2 s_v} \cdot \sum_{m=k_2+2}^{k_3} C_m^{{}^2 s_v} \cdot B(t, T_m) \Bigg].$$

Pokusme se nyní do vzorce pro ocenění capu přidat třetí změnu úrokové sazby, pro kterou máme scénáře $({}^3 s_1, {}^3 s_2, \ldots, {}^3 s_{S_3})$ s pravděpodobností

$(p_{^3s_1}, p_{^3s_2}, \ldots, p_{^3s_{S_3}})$ a cash flow $C_j^{^3s_1}, \ldots, C_j^{^3s_{S_3}}$, $j = k_3+1, \ldots, k_4$. Pak formule pro ocenění úrkového capu bude mít tvar

$$CAP(t) = C_{k_1+1} \cdot B(t, T_{k_1+1}) + \sum_{l=1}^{S_1} p_{^1s_l} \cdot \Bigg[\sum_{j=k_1+2}^{k_2} C_j^{^1s_l} \cdot B(t, T_j) + C_{k_2+1}^{^1s_l} \cdot B(t, T_{k_2+1}) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{S_2} p_{^2s_v} \cdot \Bigg[\sum_{m=k_2+2}^{k_3} C_m^{^2s_v} \cdot B(t, T_m) + C_{k_3+1}^{^2s_m} \cdot B(t, T_{k_3+1}) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{S_3} p_{^3s_u} \cdot \sum_{o=k_3+2}^{k_4} C_o^{^3s_u} \cdot B(t, T_o) \Bigg] \Bigg].$$

A takto bychom mohli pokračovat dále.

4.1.1 Příklad

Uvažujme osobu, která si v bance sjedná hypotéku. Tento úvěr je domluven dne 1.9.2009 a platnosti nabývá v ten samý den. Hypotéka je sjednána ve výši 2 000 000 Kč na dobu 10 let (tedy kontrakt je ukončen dne 31.8.2019) s 5 letou dobou fixace úrokové sazby (nová úroková sazba platí od 1.9.2014 příslušného roku). V prvním období je úroková sazba rovna 5,19% p.a. Dále uvažujme, že ta samá osoba uzavírá kontrakt úrokový cap, který se bude aplikovat na jím už dohodnutou hypotéku. Tedy po uplynutí poloviny doby splácení se bude měnit úroková sazba a úrokový cap mu zajistí, že tato sazba nepřekročí hodnotu 6,5% p.a. Kolik klient zaplatí bance za kontrakt úrokový cap?
Ze zadání potřebujeme tyto veličiny:

$N = 2\,000\,000$ Kč ...... výše hypotéky

$E = 6{,}5\%$ p.a. ...... maximální výše úrokové sazby (referenční sazba)

$i_0 = 5{,}19\%$ p.a. ...... 1. fixní úroková míra

$\delta = 1/12$ roku ...... konstantní čas mezi jednotlivými splátkami

$T_0 = 1.9.2009$ ...... začátek kontraktu

$T_{k_1} = 31.8.2014$ ...... změna úrokové sazby

$T_{k_2} = 31.8.2019$ ...... ukončení kontraktu (vyrovnání dluhu)

Dále uvažujme 3 možné scénáře úrokové sazby i_1:

Úroková míra ${}^1s_1 = 6{,}65\%$ p.a. s pravděpodobností ${}^1p_{{}^1s_1} = 67\%$;

Úroková míra ${}^1s_2 = 4{,}73\%$ p.a. s pravděpodobností ${}^1p_{{}^1s_2} = 10\%$;

Úroková míra ${}^1s_3 = 7{,}58\%$ p.a. s pravděpodobností ${}^1p_{{}^1s_3} = 23\%$;

Dále potřebujeme znát diskontní faktory od času T_{k_1} do T_{k_2}, což je přes 60 hodnot. Abychom nemuseli tyto hodnoty složitě vypisovat jsou uloženy na přiloženém Cd. Vzhledem k tomu, že se úroková sazba mění pouze jednou pro ocenění úrokového capu použijeme formuli

$$CAP(t) = \delta \cdot [i_0 - E]^+ \cdot P_{k_1} \cdot B(t, T_{k_1+1}) + \sum_{l=1}^{S_1} p_{{}^1s_l} \cdot \sum_{j=k_1+2}^{k_2} \delta \cdot [i_1^{{}^1s_l} - E]^+ \cdot P_{j-1}^{{}^1s_l} \cdot B(t, T_j).$$

Po dosazení do vzorce jsme zjistili, že úrokový cap by v tomto případě byl oceněn na 21 500 Kč.

Kapitola 5

Závěr

V práci jsme se věnovali hypotéčním úvěrům, konkrétně druhům hypoték, době fixace, možnosti splácení a zejména anuitnímu splácení. U anuitního splácení jsme v práci odvodili výpočet výše splátky při dané úrokové sazbě a známé době splácení. Pak jsme se zabývali úrokovým capem. Pro výpočet ceny capu jsme nejprve využili Blackova modelu a po té jsme navrhli alternativní přístup založen na diskrétním rozdělení. Nakonec jsme se pokusili o spojení těchto dvou finančních produktů dohromady, o aplikaci úrokoveho capu na hypotéky, a to užitím alternativního přístupu. To vše je doplněno konkrétními příklady pro lepší pochopení a ilustraci. K práci je přiložen soubor z programu Excel, kde jsme naprogramovali algoritmy pro počítání ceny capu v případě alternativního přístupu na hypotéku s jednou změnou úrokové sazby. Celá práce by se dala ještě doplnit např. o rozšíření algoritmu na výpočet fixních sazeb pro další období u hypoték. V práci uvažujeme pouze cap s jednotnou realizační sazbou po celé období splácení, to by se nechalo snadno doplnit o cap s proměnlivou realizační úrokovou mírou.

Literatura

[1] Cipra T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou* ,HZ Praha, spol. s r.o., Praha, 1995.

[2] Jílek J.: *Finanční a komoditní deriváty v praxi*, Grada Publishing, a.s., Praha, 2005

[3] Martellini L., Priaulet P., Priaulet S.: *Fixed-income securities*, Paperback, 2003

[4] Novák P., Rusnáková V.: *Konstrukce scénářů výnosových křivek (seminární prace)*,Praha, 2009