Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Thomayer

Asymptoticky optimální testy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Matúš Maciak, M.Sc.

Studijní program: Matematika, obecná matematika

2009

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu bakalářské práce Mgr. Matúšovi Maciakovi, M.Sc. za jeho trpělivost při konzultacích, odborné vedení a poskytnuté materiály, které vedly k sepsání této práce. Dále bych chtěl poděkovat svým třem kolegům, a to Lukáši Bandasovi, Jaroslavu Dufkovi a Zuzaně Marchalínové, kteří mi pomohli s korekcí textu a podíleli se na kontrole celé práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze, 3. srpna 2009 Jiří Thomayer

Název práce: Asymptoticky optimální testy
Autor: Jiří Thomayer
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Matúš Maciak, M.Sc.
e-mail vedoucího: maciak@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci studujeme asymptoticky optimální testy (test podílu věrohodnosti, Waldův test a skórový test) a porovnáváme jejich vlastnosti. K tomu si popíšeme základy z obecného testování hypotéz, věrohodnostní funkci, maximálně věrohodný odhad a uvedeme zobecnění pro testy s rušivými parametry. Ukážeme rozdíly při výpočtu jednotlivých statistik a odvodíme jejich asymptotické rozdělení za platnosti nulové hypotézy. Dále se zabýváme lineární transformací parametrického prostoru a jejího využití při testování složené hypotézy. Na příkladu simulujeme asymptotické přibližování skutečné hladiny testu k předem zvolené hladině testu α. Nakonec uvádíme příklady s využitím získaných znalostí z této práce.

Klíčová slova: Waldův test, skórový test, test podílu věrohodnosti, asymptotické testy, věrohodnostní funkce;

Title: Asymptotically optimal tests
Author: Jiří Thomayer
Department: Department of Propability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Matúš Maciak, M.Sc.
Supervisor's e-mail address: maciak@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study asymptotically optimal tests (the likelihood ratio test, the Wald test and the score test) and compare their properties. We describe principles of general hypothesis testing, likelihood function, maximum likelihood estimation and mention a generalization for tests with nuisance paremeters. We show differences in calculation of particular statistics and their asymptotical distribution under the null hypothesis. Next we are concerned with a linear transformation of a parameter space and its applications in a composite hypothesis testing. Finally we simulate an asymptotical behaviour to a pre-defined test level α. At the end we give some examples to show how to use knowledges gained from this work.

Keywords: Wald test, score test, likelihood ratio test, asymptotical tests, likelihood function;

Obsah

Úvod

Hlavním cílem této práce je studování asymptoticky optimálních testů. Zaměříme se především na test podílu věrohodnosti, Waldův test a skórový test. Popíšeme principy, na základě kterých testové statistiky těchto testů fungují, a zmíníme jejich základní vlastnosti. Odvodíme též jejich asymtotické rozdělení za platnosti nulové hypotézy.

V první kapitole stručně popíšeme teorii obecného testování hypotéz a zmíníme některé definice a pojmy, jako je například metoda maximální věrohodnosti pro odhad neznámého parametru. Dále uvedeme některé poznatky o Fisherově informační matici a její souvislosti s regulárním systémem hustot.

V druhé kapitole se zaměříme na asymptotické testy pro jednoduchou hypotézu. V jednotlivých podkapitolách uvedeme test podílu věrohodnosti, Waldův test a skórový test. Nejprve se zaměříme na jednorozměrný parametr, a poté si testové statistiky rozšíříme i na případ vícerozměrného parametru. Zmíníme nejen jejich základní tvary, ale také některé důležité modifikace.

Ve třetí kapitole se budeme věnovat rozšířením testů na testování složené hypotézy. K tomu zavedeme testy s rušivými parametry, a také test na lineární transformaci testovaného parametru.

V poslední, čtvrté kapitole, si předvedeme využití lineární transformace parametru při testování složené hypotézy. Dále uvedeme příklady na sestavení testových statistik, na testování hypotéz jednorozměrného parametru, vícerozměrného parametru a na test s rušivými parametry. Asymptotické chování těchto tří testů demonstrujeme pomocí přibližování jejich skutečné hladiny k předem zvolené hladině testu α.

Kapitola 1

Teorie testování hypotéz

1.1 Testování hypotéz

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$ je neznámý parametr hustoty. O parametru $\boldsymbol{\theta}$ je známo, že leží v množině Θ, které se říká *parametrický prostor*. Obecně uvažujeme, že $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Předpokládejme, že Θ má alespoň dva různé body. Vezměme $\Theta_0 \subsetneq \Theta$ a řekněme, že chceme zjistit, jestli ve skutečnosti parametr $\boldsymbol{\theta}$ leží v Θ_0 či nikoli. Jelikož toto nevíme (pouze se domníváme), zavádíme takzvanou *nulovou hypotézu* H_0, která tvrdí, že $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$. Zbývající možnost, že $\boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0$, nazýváme *alternativní hypotéza* a značíme ji H_1. Test nulové hypotézy H_0 proti alternativě H_1 zapisujeme

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \setminus \Theta_0.$$ [1]

K rozhodnutí, zda zamítnout či nezamítnout naší domněnku (H_0), potřebujeme takzvaný *kritický obor* $W \in \mathcal{B}^n$, kde $\mathcal{B}^n$ je Borelovská σ-algebra v $\mathbb{R}^n$. Označme $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, pak o platnosti nulové hypotézy rozhodujeme na základně kritického oboru tak, že pokud

- $\mathbf{X} \in W \Rightarrow$ zamítáme nulovou hypotézu H_0.
- $\mathbf{X} \notin W \Rightarrow$ nezamítáme H_0.

Při volbě kritického oboru mohou nastat chyby dvojího druhu. V prvním zvolíme kritický obor W tak, že sice zamítneme hypotézu H_0, ale ve skutečnosti

[1] Obecně můžeme testovat nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, kde $\Theta_0, \Theta_1 \in \Theta$ takové, že $\Theta_0 \cup \Theta_1 \neq \Theta$ a zároveň $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Zavedení tohoto testu je zcela analogické zavedení testu popsaného v textu.

H_0 platí. Této chybě se říká *chyba I. druhu*. Druhým případem, kdy může nastat chyba, je, pokud hypotézu H_0 nezamítneme, ale H_0 neplatí. Tato chyba se nazývá *chybou II. druhu*. Možné výsledky testu jsou znázorněny v následující tabulce:

	H_0 zamítneme	H_0 nezamítneme
H_0 platí	chyba I. druhu	OK
H_0 neplatí	OK	chyba II. druhu

Kritický obor nám tedy jednoznačně definuje test, ale jak volit kritický obor W? Stejně tak jako v běžném životě, pokud má nějaký jev v určitém pokusu malou pravděpodobnost, chováme se k němu, jako by vůbec nemohl nastat. Proto W hledáme tak, aby pravděpodobnost, že H_0 zamítneme, ale H_0 platí, (chyba I. druhu) nepřekročila určitou malou mez. Takovou mez značíme α. V praxi se nejčastěji volí $\alpha = 0,05,\ 0,01$ nebo $0,1$. Matematicky ale nic nebrání volit α libovolně z $(0,1)$. Tedy z toho, co jsme si řekli, W hledáme tak, aby bylo splněno

$$\mathrm{P}(\mathbf{X} \in W|\text{ platí } H_0) \overset{ozn.}{=} \mathrm{P}_0(\mathbf{X} \in W) \overset{ozn.}{=} \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}(\mathbf{X} \in W) \leq \alpha.$$

Číslo $\alpha_0 = \sup \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}(\mathbf{X} \in W)$ se nazývá *hladina testu*. Je zřejmé, že pro X se spojitým rozdělením lze najít W tak, že $\alpha = \alpha_0$. U diskrétního rozdělení je ale většinou hladina testu α_0 menší než námi zvolené α. Druhým logickým požadavkem je, aby zároveň chyba II. druhu byla omezená. K jedné takové volbě vede Neymann-Pearsonovo lemma[2]. Obecně pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ s pevným rozsahem není možné zkonstruovat takový test, který má chybu I. druhu nejvýšše rovnu hladině α a zároveň chybu II. druhu nejvýšše rovnu předem stanovené hladině β.

V praxi se často nehledá $W \in \mathcal{B}^n$ tak, jak je definováno výše, ale hledáme kritický obor $W \subseteq \mathbb{R}$ pro funkci $S(\mathbf{X})$ náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ tak, že pokud $S(\mathbf{X}) \in W$, pak zamítáme H_0. $S(\mathbf{X})$ se nazývá *testová statistika* a volíme ji tak, aby bylo známo její rozdělení, které nezávisí na neznámém parametru $\boldsymbol{\theta}$. Pokud je těžké sestrojit takovou testovou statistiku, sestrojíme takovou, abychom znali její rozdělení, které nezávisí na neznámém parametru $\boldsymbol{\theta}$, alespoň za platnosti nulové hypotézy. Kritický obor W pak hledáme stejně jako výše, tj. zvolíme α a požadujeme, aby

$$\mathrm{P}_0(S(\mathbf{X}) \in W) \leq \alpha.$$

Hladinu testu spočítáme analogicky ze vztahu $\alpha_0 = \sup \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}(S(\mathbf{X}) \in W)$.

[2]Neymann-Pearsonovo lemma lze nalézt v knize [4] na straně 126.

1.2 Fisherova informační matice

O Fisherově informační matici se zmiňujeme proto, že je potřeba k zavedení Waldova testu a skórového testu. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ je náhodný vektor, který má sdruženou hustotu $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Potom matice $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}) = (I_{ij}(\boldsymbol{\theta}))_{i,j=1}^k$, kde

$$I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{E}\left[\frac{\partial \log g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right],$$

se nazývá *Fisherova informační matice* parametru $\boldsymbol{\theta}$ obsažena v náhodném vektoru $\mathbf{X}$. Pro náhodnou veličinu ($n = 1$) stručně označujeme $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) := \mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta})$. Pokud speciálně θ je jednorozměrný parametr ($k = 1$), nedostaneme matici, ale pouze číslo, kterému říkáme *Fisherova míra informace.*

Předpokládejme navíc regularitu systému hustot[3] $\{g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$. Z toho mimo jiné plyne, že pro Fisherovu informační matici existuje inverze, protože náhodný vektor s regulárním systémem hustot má pozitivně definitní Fisherovu informační matici pro všechny $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

Označme si $g''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$, $i, j = 1, \ldots, k$ a $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) > 0\}$. Předpokládejme, že pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, pro všechna $i, j = 1, \ldots, k$ a skoro všechna $\mathbf{x} \in M$ existuje $g''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ a platí, že

$$\int_M g''_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0,\ i, j = 1, \ldots, k,\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta,$$

pak prvky Fisherovy informační matice můžeme počítat vztahem[4]

$$I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \log g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right],\ i, j = 1, \ldots, k. \tag{1.1}$$

Pokud $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, potom sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ je $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \boldsymbol{\theta})$. Víme, že každý člen X_i náhodného vektoru $\mathbf{X}$ má stejné rozdělení, proto je Fisherova informační matice $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ stejná pro všechny $X_i,\ i = 1, \ldots, n$. Navíc souvisí s Fisherovou informační maticí $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})$ náhodného vektoru $\mathbf{X}$ vztahem[5]

$$\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}) = n\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{\theta} \in \Theta. \tag{1.2}$$

[3] Definice regularity je uvedena v knize [1] na straně 120.
[4] Důkaz vzorce (1.1) pro jednorozměrný parametr θ lze nalézt v [1] na stránce 115.
[5] Důkaz vzorce (1.2) pro jednorozměrný parametr θ lze nalézt v [1] na stránce 116.

1.3 Metoda maximální věrohodnosti

S testováním hypotéz je spojený problém odhadnutí testujícího (tedy neznámého) parametru $\boldsymbol{\theta}$ na základě náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Jednou z nejznámějších a nejpoužívanějších metod na odhadování neznámého parametru je metoda maximální věrohodnosti, která je založena na tzv. věrohodnostní funkci. Označme $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$, potom $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta})$ je sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Funkce $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ udává pravděpodobnost nabytí hodnoty $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ v závislosti na $\boldsymbol{\theta}$. Tedy pro pevný náhodný vektor $\mathbf{X}$ je L funkce pouze proměnné $\boldsymbol{\theta}$, kterou značíme $L(\boldsymbol{\theta}) \equiv L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ a nazýváme *věrohodnostní funkcí*. Potom *maximálně věrohodný odhad* parametru $\boldsymbol{\theta}$ je definován jako takové $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$, které maximalizuje věrohodnostní funkci $L(\boldsymbol{\theta})$ na základě náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$, tedy

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}) = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \boldsymbol{\theta}),$$

z čehož plyne, že $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ je funkce náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$. Řešení takové rovnice se většinou provádí zlogaritmováním funkce $L(\boldsymbol{\theta})$, abychom součin převedli na součet. Zavedeme tedy funkci $l(\boldsymbol{\theta}) \equiv l(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \log L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$, kterou nazýváme *logaritmickou věrohodnostní funkcí*. Dosazením zjistíme, že

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i, \boldsymbol{\theta}).$$

Najdeme-li takové $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, které maximalizuje $l(\boldsymbol{\theta})$, potom také maximalizuje $L(\boldsymbol{\theta})$, protože log je rostoucí funkce. Hledání maxima se obvykle provádí tak, že zderivujeme funkci $l(\boldsymbol{\theta})$ podle $\boldsymbol{\theta}$ a následně ji položíme rovnu 0. Dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} l(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_1} log f(X_i, \boldsymbol{\theta}) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_2} log f(X_i, \boldsymbol{\theta}) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_k} log f(X_i, \boldsymbol{\theta}) = 0 \end{cases}.$$

Tuto soustavu nazýváme *věrohodnostní soustavou rovnic* a vektorovou funkci $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} l(\boldsymbol{\theta})$ proměnné $\boldsymbol{\theta}$ nazýváme *skórovou funkcí* a značíme ji $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$. Speciálně pro $k = 1$ dostáváme

$$U(\theta) = l'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(X_i, \theta)}{f(X_i, \theta)} = 0.$$

Označme si $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x, \boldsymbol{\theta}) > 0\}$, $l_i'(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(x,\boldsymbol{\theta})}{\theta_i}$ a předpokládejme:

I) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$.

II) Nechť Θ obsahuje neprázdný otevřený interval ω takový, že skutečná hodnota parametru $\boldsymbol{\theta}_0$ leží v ω.

III) Nechť systém hustot $\{f(x, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ je regulární.

IV) Nechť $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta$. Pak $f(x, \boldsymbol{\theta}_1) = f(x, \boldsymbol{\theta}_2)$ s.v. $\Leftrightarrow \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$.

Za předpokladů I) až IV) a existence parciálních derivací $l_i'(x, \boldsymbol{\theta})$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ skoro všude na M,$i = 1, \ldots, k$, existuje kořen $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ věrohodnostní soustavy rovnic, který je konzistentním odhadem[6] parametru $\boldsymbol{\theta}_0$.

Nyní uvažujme jednorozměrný parametr θ a předpokládejme navíc, že

- pro všechna $\theta \in \omega$ a skoro všechna $x \in M$ existuje $f'''(x, \theta) = \frac{\partial^3 f(x,\theta)}{\partial \theta^3}$,
- pro všechna $\theta \in \omega$ je $\int_M f''(x, \theta)\, \mathrm{d}x = 0$, kde $f''(x, \theta) = \frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial \theta^2}$,
- existuje nezáporná měřitelná funkce $H(x)$ taková, že

$$\mathrm{E}_{\theta_0} H(X_1) = \int_M H(x) f(x, \theta_0)\, \mathrm{d}x < \infty,$$

- existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro všechna $\theta \in \omega$ taková, že $|\theta - \theta_0| < \epsilon$, a skoro všechna $x \in M$ platí, že

$$\left| \frac{\partial^3 \log f(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq H(x),$$

[6] Říkáme, že $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ je konzistentním odhadem parametru $\boldsymbol{\theta}_0$, jestliže pro všechna $\epsilon > 0$ je $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0\| > \epsilon) = 0$.

pak lze dokázat[7], že platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} l'(\theta_0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}\left(0, I(\theta_0)\right) \tag{1.3}$$

a zároveň

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{I(\theta_0)}\right). \tag{1.4}$$

Toto tvrzení si uvádíme proto, že se využívá při dokazování rozdělení testových statistik asymptoticky optimálních testů.

Jestliže $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ je vícerozměrný parametr, potom za předpokladů I) až IV), existence parciálních derivací $l'_i(x, \boldsymbol{\theta})$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \omega$ skoro všude na M,$i = 1, \dots, k$, a dodatečných předpokladů obdobných jako v předchozím tvrzení na vektor $\boldsymbol{\theta}$ lze dokázat analogické tvrzení pro asymptotické rozdělení skórové funkce $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ a maximálně věrohodného odhadu $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}_k\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)\right)$$

a

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}_k\left(\mathbf{0}, [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\right),$$

kde $\mathrm{N}_k(\mu, \Sigma)$ značí k-rozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)^T$ a varianční maticí Σ. V našem případě, jelikož uvažujeme regulární systém hustot, jsou varianční matice $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}$ a $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)$ pozitivně definitní. Skórová funkce $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ podle definice má tvar

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} l(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}.$$

[7] Důkaz proveden v knize [1] na straně 151.

Kapitola 2

Asymptotické testy pro jednoduchou hypotézu

V sekci 1.1 jsme uvedli, jak se testování hypotéz provádí. Jelikož se budeme zabývat asymptotickými testy, je potřeba ještě uvést, že asymptotické chování se zde projevuje tak, že skutečná hladina testu se se zvyšujícím počtem pozorování blíží k předem zvolené hladině testu α. Tedy pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, a test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0$ platí, že

$$\sup \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0}(S(\mathbf{X}) \in W) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha,$$

kde $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ je náhodný vektor sestávající z náhodného výběru, $S(\mathbf{X})$ je testová statistika a W je zvolený kritický obor pro hladinu α.

V této kapitole si uvedeme tři nejznámější asymptotické testy, kterými jsou test podílu věrohodnosti, Waldův test a skórový test. Nevýhoda všech asymptotických testů je, že potřebujeme dostatečně velký rozsah náhodného výběru. Na druhou stranu všechny tyto testy mají za platnosti nulové hypotézy stejné asymptotické vlastnosti a mají χ^2 rozdělení o příslušném stupni volnosti. Rozdíl v jednotlivých testech přeci jenom je. A to v tom, co ke kterému testu je potřeba spočítat. Test podílu věrohodnosti vyžaduje výpočet maximálně věrohodného odhadu jak za nulové hypotézy, tak za alternativy, zato Waldův test jen za alternativy a nakonec skórový test jen odhad za nulové hypotézy. Pokud je některý z odhadů (za nulové hypotézy nebo alternativy) těžké spočítat, okamžitě tím odpadá použití testu podílu věrohodnosti, ale naštěstí nám ještě dva zbývají. Na druhou stranu, pokud je lehké spočítat oba odhady, můžeme si vybrat kterýkoli test.

2.1 Jednorozměrný případ

Nejprve se budeme zabývat jednorozměrným neznámým parametrem. Předpokládejme, že máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ s hustotou $f(x, \theta)$, kde $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, a testujme jednoduchou hypotézu $H_0 : \theta = \theta_0$ proti oboustranné alternativě $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Označme $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

2.1.1 Test podílu věrohodnosti

Test podílu věrohodnosti vychází ze zobecnění Neymann-Pearsonova lemmatu na náš test hypotézy H_0 proti H_1. Kritický obor W^* z Neymann-Pearsonova lemmatu nahradíme kritickým oborem

$$W^{**} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p_\theta(\mathbf{x})}{p_{\theta_0}(\mathbf{x})} \geq c^{**} \right\},$$

kde $p_\theta(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \theta)$ je sdružená hustota vektoru $\mathbf{X}$. Z W^{**} dostaneme testovou statistiku

$$L^{**} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p_\theta(\mathbf{X})}{p_{\theta_0}(\mathbf{X})} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)}{L(\theta_0)}.$$

Dále víme, že

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L(\hat{\theta}_n),$$

kde $\hat{\theta}_n$ je maximálně věrohodný odhad parametru θ. Po dosazení dostaneme

$$L^{**} = \frac{L(\hat{\theta}_n)}{L(\theta_0)}.$$

Po zlogaritmování a přenásobení číslem 2 dostaneme testovou statistiku testu podílu věrohodnosti

$$L = 2 \log L^{**} = 2[l(\hat{\theta}_n) - l(\theta_0)],$$

kde $l(\theta)$ je logaritmická věrohodnostní funkce.

2.1.2 Waldův test

K sestrojení Waldovy testové statistiky využijeme některých vlastností testu podílu věrohodnosti. Je patrné, že velikost testové statistiky podílu věrohodnosti L je závislá na vzdálenosti $\hat{\theta}_n - \theta_0$ a na zakřivení logaritmické věrohodnostní funkce l v bodě $\hat{\theta}_n$. Zakřivení funkce $l(\theta)$ v bodě θ si označíme jako $Z(\theta)$ a je definováno jako $Z(\theta) = \left|\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2}\right|$. Jelikož funkce l je konkávní, pak pro danou vzdálenost $\hat{\theta}_n - \theta_0$ větší zakřivení funkce l v bodě $\hat{\theta}_n$ implikuje větší hodnotu L (viz. obrázek 2.1). Na tomto pravidle je založen Waldův test. Tedy narozdíl od testu podílu věrohodnosti není založen na rozdílu funkčních hodnot funkce l, ale na kvadrátu rozdílu mezi $\hat{\theta}_n$ a θ_0. Na základě toho, co jsme si řekli o zakřivení funkce l, musí být kvadratický rozdíl $(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2$ vyvážen právě zakřivením $Z(\hat{\theta}_n)$ v bodě $\hat{\theta}_n$, protože dva různé náhodné výběry se stejným rozdělením mohou vést ke stejné hodnotě $(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2$, ale ne ke stejnému kritickému oboru. Tedy Waldův test je založen na testové statistice

$$W' = (\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 Z(\hat{\theta}_n).$$

Většinou se ale setkáváme s jiným tvarem Waldovy statistiky, a to

$$W = (\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 I_n(\hat{\theta}_n),$$

kde $I_n(\theta)$ je Fisherova míra informace parametru θ obsažena v náhodném vektoru $\mathbf{X}$. V podstatě $I_n(\hat{\theta}_n)$ je střední zakřivení funkce l v bodě $\hat{\theta}_n$. Obě statistiky W' a W jsou si asymptoticky rovny, protože $Z(\hat{\theta}_n)$ je konzistentním odhadem $I_n(\hat{\theta}_n)$.

2.1.3 Skórový test

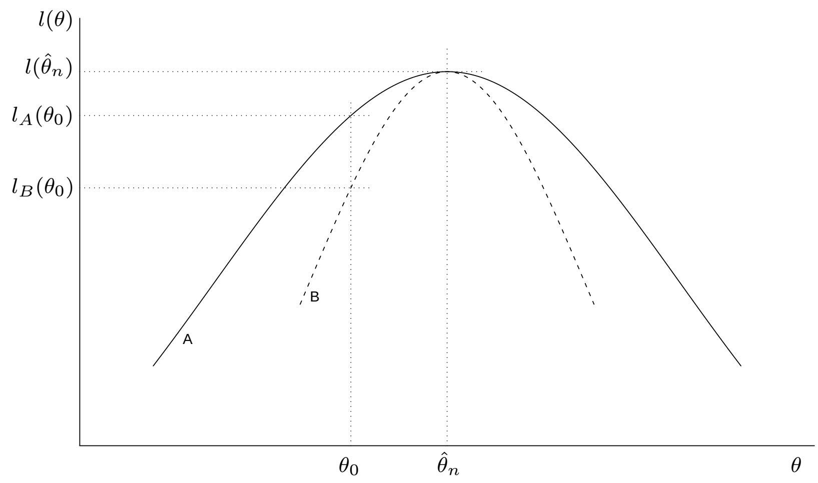
Skórový test je založen na kvadrátu rozdílu směrnic (zešikmení) funkce l v bodech θ_0 a $\hat{\theta}_n$. Směrnice v bodě θ není nic jiného než $l'(\theta)$ a z definice maximálně věrohodného odhadu plyne, že $l'(\hat{\theta}_n) = 0$. Tedy kvadrát rozdílu mezi $l'(\theta_0)$ a $l'(\hat{\theta}_n)$ je $[l'(\theta_0)]^2$. Stejně jako v případě Waldovy statistiky i zde můžeme pro dva různé náhodné výběry se stejným rozdělením získat stejnou hodnotu $[l'(\theta_0)]^2$, tedy zase budeme vyvažovat tento kvadrát rozdílu zakřivením funkce l, tentokrát v bodě θ_0. V tomto případě ale platí, že čím větší je zakřivení funkce l v bodě θ_0, tím je hodnota θ_0 blíže hodnotě $\hat{\theta}_n$ (viz. obrázek 2.2). Budeme proto $[l'(\theta_0)]^2$ vyvažovat převrácenou hodnotou zakřivení. Tedy skórový test je založen na testové statistice

$$S' = \frac{[l'(\theta_0)]^2}{Z(\theta_0)},$$

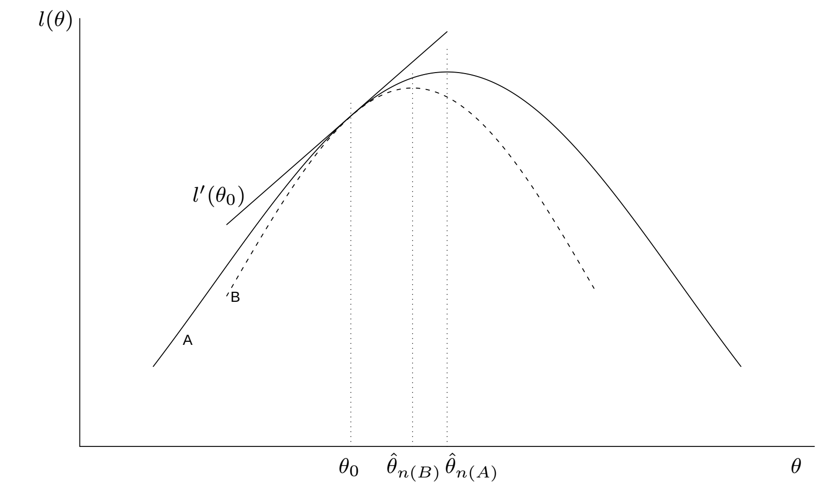
ale stejně jako v případě Waldovy statistiky se častěji setkáváme s testovou statistikou

$$S = \frac{[l'(\theta_0)]^2}{I_n(\theta_0)}.$$

Protože $Z(\theta_0)$ je konzistentním odhadem $I_n(\theta_0)$, jsou si testové statistiky S' a S asymptoticky rovny.



Obrázek 2.1: Vliv zakřivení log. věrohodnostní funkce $l(\theta)$ na testovou statistiku Waldova testu



Obrázek 2.2: Vliv zakřivení log. věrohodnostní funkce $l(\theta)$ na testovou statistiku skórového testu

2.1.4 Rozdělení testových statistik

V této části si dokážeme rozdělení testových statistik testu podílu věrohodnosti, Waldova testu a skórového testu pro případ jednorozměrného parametru.

Věta. Nechť platí předpoklady I) až IV), nechť $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x,\theta) > 0\}$ a nechť dále platí, že

- Fisherova míra informace $I(\theta)$ je spojitá v bodě θ_0,
- pro všechna $\theta \in \omega$ a skoro všechna $x \in M$ existuje $f'''(x,\theta) = \frac{\partial^3 f(x,\theta)}{\partial \theta^3}$,
- pro všechna $\theta \in \omega$ je $\int_M f''(x,\theta)\,\mathrm{d}x = 0$, kde $f''(x,\theta) = \frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial \theta^2}$,
- existuje nezáporná měřitelná funkce $H(x)$ taková, že

$$\mathrm{E}_{\theta_0} H(X_1) = \int_M H(x) f(x,\theta_0)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

- existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro všechna $\theta \in \omega$ taková, že $|\theta - \theta_0| < \epsilon$, a skoro všechna $x \in M$ platí, že

$$\left| \frac{\partial^3 \log f(x,\theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq H(x).$$

Potom za platnosti nulové hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ mají testové statistiky L, W, S a W', S' asymptoticky χ^2_1 rozdělení (chí-kvadrát rozdělení o jednom stupni volnosti).

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro testové statistiky L, W a S, protože pak jednoduše pomocí Sluckého věty[1] dostaneme tvrzení i pro W' a S'.

Skórový test

Víme, že $I_n(\theta) = nI(\theta)$. Dále ze vzorce (1.3) a vlastnosti normálního rozdělení dostáváme, že

$$\frac{l'(\theta_0)}{\sqrt{nI(\theta_0)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}\,(0,1)\,.$$

[1] Sluckého věta je uvedena pod názvem Cramérova-Sluckého věta v knize [1] na straně 333.

Náhodná veličina $X \sim \chi^2_1$ je definována jako $X := Y^2$, kde $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$. Z toho tedy dostáváme, že

$$S = \frac{[l'(\theta_0)]^2}{I_n(\theta_0)} = \frac{[l'(\theta_0)]^2}{nI(\theta_0)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \chi^2_1.$$

Waldův test

Protože $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_0$ a funkce $I(\theta)$ je spojitá a nenulová v bodě θ_0, dostáváme, že $\frac{I(\hat{\theta}_n)}{I(\theta_0)} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$ (z věty o spojité transformaci). Ze vzorce (1.4) a opět z vlastnosti normálního rozdělení dostáváme, že

$$\sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1).$$

Z toho plyne

$$nI(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \chi^2_1.$$

A tedy s použitím Sluckého věty dostáváme

$$W = (\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 I_n(\hat{\theta}_n) = nI(\hat{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 = \underbrace{nI(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2}_{\xrightarrow{\mathrm{d}}\chi^2_1} \underbrace{\frac{I(\hat{\theta}_n)}{I(\theta_0)}}_{\xrightarrow{\mathrm{P}}1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \chi^2_1.$$

Test podílu věrohodnosti

Z Taylorova rozvoje funkce l v bodě θ_0 kolem bodu $\hat{\theta}_n$ dostáváme

$$l(\theta_0) = l(\hat{\theta}_n) + (\theta_0 - \hat{\theta}_n)l'(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{2}(\theta_0 - \hat{\theta}_n)^2 l''(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{6}(\theta_0 - \hat{\theta}_n)^3 l'''(\theta^*_n),$$

kde θ^*_n leží mezi θ_0 a $\hat{\theta}_n$. Víme, že $\hat{\theta}_n$ je maximálně věrohodný odhad θ_0, tedy $l'(\hat{\theta}_n) = 0$. Úpravou Taylorova rozvoje dostaneme

$$2[l(\hat{\theta}_n) - l(\theta_0)] = -(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 l''(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{3}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^3 l'''(\theta^*_n). \tag{2.1}$$

Nyní uděláme Taylorův rozvoj funkce l'' v bodě θ_0 kolem bodu $\hat{\theta}_n$ a dostaneme

$$l''(\theta_0) = l''(\hat{\theta}_n) + (\theta_0 - \hat{\theta}_n)l'''(\theta^{**}_n),$$

kde θ^{**}_n leží mezi θ_0 a $\hat{\theta}_n$. Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{1}{n}l''(\theta_0) - \frac{1}{n}l''(\hat{\theta}_n) = -(\hat{\theta}_n - \theta_0)\frac{1}{n}l'''(\theta^{**}_n).$$

Z předpokladů plyne, že výraz $\frac{1}{n}l'''(\theta^{**}_n)$ je omezený v pravděpodobnosti, protože

$$\left|\frac{1}{n}l'''(\theta^{**}_n)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^3 \log f(X_i, \theta^{**}_n)}{\partial\theta^3}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(X_i) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}_{\theta_0} H(X_1) < \infty.$$

Z omezenosti v pravděpodobnosti výrazu $\frac{1}{n}l'''(\theta_n^{**})$ a z toho, že $\hat{\theta}_n - \theta_0 \xrightarrow{\text{P}} 0$ plyne, že

$$\frac{1}{n}l''(\theta_0) - \frac{1}{n}l''(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

S využitím vzorce (1.1) a slabého zákona velkých čísel dostáváme

$$-\frac{1}{n}l''(\theta_0) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \log f(X_i,\theta_0)}{\partial\theta^2} \xrightarrow{\text{P}} I(\theta_0).$$

Tedy z posledních dvou vzorců plyne

$$-\frac{1}{n}l''(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{\text{P}} I(\theta_0). \tag{2.2}$$

Poslední člen Taylorova rozvoje (2.1) se dá zapsat jako

$$\frac{1}{3}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^3 l'''(\theta_n^*) = \frac{1}{3}(\hat{\theta}_n - \theta_0)[\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)]^2\frac{1}{n}l'''(\theta_n^*).$$

Víme, že výraz $\frac{1}{n}l'''(\theta_n^*)$ je omezený v pravděpodobnosti. Vzorec (1.4) nám dává konvergenci v distribuci

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\text{d}} \text{N}\left(0, \frac{1}{I(\theta_0)}\right).$$

Jestliže něco konverguje v distribuci, pak je to omezené v pravděpodobnosti[2]. Z toho plyne, že jak $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, tak $n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2$ jsou omezené v pravděpodobnosti. Dále víme, že $\hat{\theta}_n - \theta_0 \xrightarrow{\text{P}} 0$ a tedy

$$\frac{1}{3}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^3 l'''(\theta_n^*) \xrightarrow{\text{P}} 0. \tag{2.3}$$

Ze vzorců (1.4), (2.2) a pomocí Sluckého věty dostáváme

$$-(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 l''(\hat{\theta}_n) = [\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)]^2\left[-\frac{1}{n}l''(\hat{\theta}_n)\right] \xrightarrow{\text{d}} \chi_1^2.$$

A nakonec ještě jednou s použitím Sluckého věty dostaneme

$$L = 2[l(\hat{\theta}_n) - l(\theta_0)] = \underbrace{-(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 l''(\hat{\theta}_n)}_{\xrightarrow{\text{d}}\chi_1^2} + \underbrace{\frac{1}{3}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^3 l'''(\theta_n^*)}_{\xrightarrow{\text{P}}0} \xrightarrow{\text{d}} \chi_1^2.$$

Tím jsme dokázali konvergenci testových statistik ve všech třech případech k rozdělení χ_1^2.

[2]Najdeme v [1] na straně 150 .

2.2 Modifikace testových statistik a kritický obor

Využitím vztahu $I_n(\theta) = nI(\theta)$, který jsme zmínili na straně 8, se můžeme setkat ještě s jinými tvary testových statistik[3] W a S. Tedy, pokud nadále předpokládáme, že $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr, není potřeba počítat Fisherovu míru informace pro celý náhodný vektor $(X_1, \ldots, X_n)^T$, ale postačí ji spočítat jen pro jednu náhodnou veličinu X_i.

Z provedeného důkazu je také patrné, že testové statistiky $\sqrt{W}$ a $\sqrt{S}$ mají asymptoticky normální rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Výhoda ve využití těchto odmocněných statistik je ta, že se nimi dají otestovat i jednostranné alternativy, tj. test nulové hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta > \theta_0$ (popř. $H_1^* : \theta < \theta_0$).

Podíváme se ještě na kritický obor pro testové statistiky testu podílu věrohodnoti, Waldova testu a skórového testu. Testujeme hypotézu $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Jelikož všechny statistiky mají za platnosti nulové hypotézy asymptoticky χ_1^2 rozdělení, zamítáme hypotézu H_0 na hladině α jestliže platí

$$\mathrm{P}_0(T \in W) \leq \alpha,$$

kde T je nějaká z našich testových statistik a W je kritický obor. Z toho tedy plyne, že $T \geq 0$ a logicky z definice těchto testových statistik budeme nulovou hypotézu H_0 zamítat pro velké hodnoty T. Budeme tedy hledat konstantu $c \in \mathbb{R}$ takovou, aby platilo $\mathrm{P}_0(T \geq c) = \alpha$:

$$\mathrm{P}_0(T \geq c) = 1 - \mathrm{P}_0(T < c) = 1 - \mathrm{F}_T(c) = \alpha \Rightarrow c = \mathrm{F}_T^{-1}(1-\alpha),$$

kde $\mathrm{F}_T(t)$ je distribuční funkce náhodné veličiny s rozdělením χ_1^2 a $\mathrm{F}_T^{-1}(x)$ je kvantilová funkce χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti (značíme $\chi_1^2(x)$). Tedy $c = \chi_1^2(1-\alpha)$ je $1-\alpha$ kvantil rozdělení χ_1^2 a nulovou hypotézu zamítáme, pokud platí, že $T \geq \chi_1^2(1-\alpha)$.

[3]Jiné tvary testových statistik W a S jsou $W^* = n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 I(\hat{\theta}_n)$ a $S^* = \frac{[l'(\theta_0)]^2}{nI(\theta_0)}$.

2.3 Vícerozměrný případ

V této části si rozšíříme testové statistiky S,W a L na případ vícerozměrného parametru $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T$. Nechť tedy $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, a testujme nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$. Pak

- test podílu věrohodnosti je založen na testové statistice

$$\mathbf{L} = 2[l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - l(\boldsymbol{\theta}_0)].$$

- Waldův test je založen na testové statistice

$$\mathbf{W} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{I}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0).$$

- skórový test je založen na testové statistice[4]

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{I}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ je maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $\boldsymbol{\theta}$, $l(\boldsymbol{\theta})$ je logaritmická věrohodnostní funkce, $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice a $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ je skórová funkce. Za platnosti předpokladů obdobných těm, které jsou zmíněné v sekci 2.1.4 pro vícerozměrný parametr $\boldsymbol{\theta}$ a za platnosti nulové hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ lze dokázat, že testové statistiky $\mathbf{L}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{W}^*$ a $\mathbf{S}^*$ mají asymptoticky χ^2_k rozdělení (chí-kvadrát o k stupních volnosti), kde k je počet prvků vektoru $\boldsymbol{\theta}$ (neboli dimenze parametrického prostoru Θ).

K odvození rozdělení testových statistik vyžadujeme regularitu systému hustot $\{f(x, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$, což nám mimo jiné dává existenci inverze Fisherovy matice, která je nezbytná pro výpočet testové statistiky S. V praxi se ale může stát, že zrovna podmínka pozitivní definitnosti Fisherovy matice nebude splněna. V části 3.2 si ukážeme, jak postupovat v takovém případě.

[4]Stejně jako v případě jednorozměrného parametru se můžeme setkat i se vzorci testových statistik, které neobsahují Fisherovu informační matici celého vektoru, ale pouze jedné náhodné veličiny (protože platí vztah $I_n(\boldsymbol{\theta}) = nI(\boldsymbol{\theta})$). Dosazením dosteneme, že $\mathbf{W}^* = n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$ a $\mathbf{S}^* = \frac{1}{n}\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_0)$.

Kapitola 3

Důležité modifikace asymptotických testů

3.1 Testy s rušivými parametry

V praktických aplikacích je nepravděpodobné, že bychom potřebovali testovat rovnost všech složek neznámého parametru $\boldsymbol{\theta}$, ale pouze nějaké podskupiny (podvektoru) parametru $\boldsymbol{\theta}$. Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Chceme test pouze na nějakou podskupinu vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Nechť bez újmy na obecnosti je to prvních p složek vektoru $\boldsymbol{\theta}$, kde $1 \leq p < k$. Vektor $\boldsymbol{\theta}$ si rozdělíme jako $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^T, \boldsymbol{\beta}^T)^T$, kde $\boldsymbol{\gamma}$ je p-rozměrný vektor parametrů, $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ a $\boldsymbol{\beta}$ je q-rozměrný vektor parametrů, $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$, $\Gamma \cup \mathcal{B} = \Theta$, a testujme hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\gamma} \neq \boldsymbol{\gamma}_0$ pro vektor $\boldsymbol{\gamma}$ bez bližšího určení zbývajících složek $\boldsymbol{\beta}$. Parametru $\boldsymbol{\gamma}$ budeme říkat *cílový parametr* a parametru $\boldsymbol{\beta}$ *rušivý parametr*.
Označme

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\gamma\gamma})}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\gamma\beta})}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\beta\gamma})}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\beta\beta})}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ je skórová funkce a $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice. Definujme $\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})$ vztahem

$$\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\gamma\gamma})}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\gamma\beta})}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{I}^{-1}_{n(\boldsymbol{\beta\beta})}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\beta\gamma})}(\boldsymbol{\theta}).$$

Nechť $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(1)} = (\hat{\boldsymbol{\gamma}}^T_{n(1)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T_{n(1)})^T$ je maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ za alternativy H_1 ($\boldsymbol{\theta} \in \Theta$) a $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)} = (\boldsymbol{\gamma}^T_0, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T_{n(0)})^T$ je maximálně věrohodný odhad $\boldsymbol{\theta}$ za nulové hypotézy ($\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0$ a $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$). Za těchto předpokladů potom definujme testové statistiky

- $\hat{\mathbf{L}} = 2[l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(1)}) - l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})]$ (test podílu věrohodnosti).
- $\hat{\mathbf{W}} = (\hat{\gamma}_{n(1)} - \boldsymbol{\gamma}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(1)})(\hat{\gamma}_{n(1)} - \boldsymbol{\gamma}_0)$ (Waldův test).
- $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})^T \boldsymbol{\Sigma}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})^{-1} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})$ (skórový test).

Výpočet testové statistiky $\hat{\mathbf{S}}$ vyžaduje existenci inverze k $\boldsymbol{\Sigma}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})$ a výpočet maximálně věrohodného odhadu za nulové hypotézy. Na druhou stranu $\hat{\mathbf{W}}$ nevyžaduje výpočet maximálně věrohodného odhadu za nulové hypotézy, ale za alternativy. V případě $\hat{\mathbf{L}}$ potřebujeme maximálně věrohodný odhad jak za nulové hypotézy, tak za alternativy.

Pokud stejně jako v předešlé kapitole jsou splněny předpoklady z části 2.1.4 pro vícerozměrný parametr $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^T, \boldsymbol{\beta}^T)^T$, kde $\boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\gamma}_0^T, \boldsymbol{\beta}_0^T)^T$ je skutečná hodnota parametru $\boldsymbol{\theta}$, potom za platnosti nulové hypotézy ($H_0 : \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0$) mají testové statistiky $\hat{\mathbf{L}}$,$\hat{\mathbf{W}}$ a $\hat{\mathbf{S}}$ asymptoticky χ^2_p rozdělení[1] (chí-kvadrát o p stupních volnosti), kde p je počet prvků testovaného vektoru $\boldsymbol{\gamma}$.

Ze vztahu $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}) = n\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ plyne, že $\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta}) = n\boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\theta})$. $\boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\theta})$ budeme značit jako $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})$ a dosazením do $\hat{\mathbf{W}}$ a $\hat{\mathbf{S}}$ dostaneme jiné tvary testových statistik[2]. Tedy zase není nutné počítat Fisherovu informační matici pro celý náhodný vektor, ale postačí jen pro jednu náhodnou veličinu. Typicky se setkáme s testem s rušivými parametry, pokud chceme test na střední hodnotu z náhodného výběru s rozdělením $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 je neznámé, tj. test $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu \neq \mu_0$ při neznámém σ^2.

[1] Důkaz je zpracován v knize [1] na straně 184

[2] Jiné tvary testových statistik $\hat{\mathbf{W}}$ a $\hat{\mathbf{S}}$ jsou $\hat{\mathbf{W}}^* = n(\hat{\gamma}_{n(1)} - \gamma_0)^T \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(1)})(\hat{\gamma}_{n(1)} - \gamma_0)$ a $\hat{\mathbf{S}}^* = \frac{1}{n}\mathbf{U}_{\boldsymbol{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})^T \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})^{-1} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n(0)})$.

3.2 Lineární transformace parametrického prostoru

Další používanou modifikací asymptotických testů je například lineární transformace parametrického prostoru. Lineární transformací parametrického prostoru se zabýváme hned z několika důvodů. O jednom jsme se již zmínili, a to je problém neexistence inverzní matice k matici $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ (popř. $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})$). Další je, že většinu složitých početních úkonů můžeme provést pouze jednou, což značně zmenšuje pravděpodobnost chyby ale také šetří čas.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Předpokládejme, že máme lineární transformaci parametru $\boldsymbol{\theta} = B\boldsymbol{\phi} + c$, kde B je matice konstant typu $k \times p$, která nemusí mít plnou hodnost, a c je k-rozměrný vektor konstant. Označme $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})$, kde $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ je skórová funkce a $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice vektoru $\boldsymbol{\theta}$ obsažena v náhodném vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Pak

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}} = B^T \mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} \tag{3.1}$$

a

$$\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi})} = B^T \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})} B. \tag{3.2}$$

Vzorec (3.1) se snadno ověří z

$$\underbrace{u_{j\boldsymbol{\phi}}}_{j\text{-tý člen } \mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}}} = \frac{\partial l}{\partial \phi_j} = \sum_i \frac{\partial l}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \phi_j} = \sum_i \frac{\partial l}{\partial \theta_i} b_{ij} = \underbrace{\sum_i b_{ji}^T u_{i\boldsymbol{\theta}}}_{j\text{-tý člen } B^T\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}}}.$$

A druhý vzorec (3.2) dostaneme z

$$\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi})} = E[\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}}^T] = E[B^T \mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}}^T B] = B^T E[\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}}^T] B = B^T \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})} B.$$

Pokud se tedy stane, že $\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})}$ nemá plnou hodnost a potřebujeme spočítat její inverzi, použijeme transformaci na $\boldsymbol{\phi}$ s vhodnou volbou B tak, aby $\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi})}$ měla plnou hodnost.

Nyní si uvedeme jednu z nejčastějších aplikací lineární transformace. Uvažujme test na jednoduchou hypotézu $H_0 : A_1\boldsymbol{\theta} = 0$ proti $H_1 : A_1\boldsymbol{\theta} \neq 0$, kde A_1 je matice typu $p \times k$ $(p < k)$ a je ortogonální.

Nejprve doplníme A_1 o matici A_2 tak, aby

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

byla čtvercová typu $k \times k$ a ortogonální. Položme $\boldsymbol{\phi} = A\boldsymbol{\theta}$ a rozdělme $\boldsymbol{\phi}$ jako

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\boldsymbol{\theta} \\ A_2\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}.$$

Převedli jsme tedy problém na testování hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\phi}_1 = 0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\phi}_1 \neq 0$ s rušivým parametrem $\boldsymbol{\phi}_2$. Protože pro ortogonální matice platí rovnost $A^T = A^{-1}$, dostáváme lineární transformaci $\boldsymbol{\theta} = A^T\boldsymbol{\phi}$. Z lemmatu potom plyne, že

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}} = A\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} A_1\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} \\ A_2\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1} \\ \mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_2} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi})} = A\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})}A^T = \begin{pmatrix} A_1\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})}A_1^T & A_1\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})}A_2^T \\ A_2\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})}A_1^T & A_2\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\theta})}A_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1)} & \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2)} \\ \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1)} & \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2)} \end{pmatrix}.$$

Maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy je $(0^T, \hat{\boldsymbol{\phi}}_{2(0)}^T)^T$,. Maximálně věrohodný odhad za alternativy je (ze Zehnaova principu invariance pro maximálně věrohodné odhady) $\hat{\boldsymbol{\phi}} = A\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\phi}}_1^T, \hat{\boldsymbol{\phi}}_2^T)^T$. Tedy skórový test závisí na testové statistice

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1}^T(\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1)} - \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2)}\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2)}^{-1}\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1)})^{-1}\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1}$$

nebo

$$\hat{\mathbf{S}}^* = \frac{1}{n}\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1}^T(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1} - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2}^{-1}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1})^{-1}\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1}$$

v bodě $(0^T, \hat{\boldsymbol{\phi}}_{2(0)}^T)$, Waldův test na

$$\hat{\mathbf{W}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^T(\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1)} - \mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2)}\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2)}^{-1}\mathbf{I}_{n(\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1)})\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

nebo

$$\hat{\mathbf{W}}^* = n\hat{\boldsymbol{\phi}}_1^T(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1} - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2}^{-1}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1})\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

v bodě $\hat{\boldsymbol{\phi}}^T$ a test podílu věrohodnosti na

$$\hat{\mathbf{L}} = 2[l(\hat{\boldsymbol{\phi}}) - l((0^T, \hat{\boldsymbol{\phi}}_2^T)^T)].$$

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nemusí být nutně stejně rozdělené pro všechny X_i. Pokud $f_l(x, \boldsymbol{\theta}_l)$ je hustota náhodného výběru $X_1, \ldots, X_l$, $l < n$, a $f_m(x, \boldsymbol{\theta}_m)$ je hustota náhodného výběru $X_{l+1}, \ldots, X_n$, pak hustota náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_n)^T$ je $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) := \prod_{i=1}^{l} f_l(x_i, \boldsymbol{\theta}_l) \prod_{j=l+1}^{n} f_m(x_j, \boldsymbol{\theta}_m)$, kde $\boldsymbol{\theta}^T = (\boldsymbol{\theta}_l^T, \boldsymbol{\theta}_m^T)$. Asymptotické rozdělení testových statistik S, W, L, S', W', $\mathbf{S}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{L}$ a $\hat{\mathbf{S}}$, $\hat{\mathbf{W}}$, $\hat{\mathbf{L}}$ je χ_k^2, pokud $n \to \infty$ a $l \to \infty$, kde k je počet prvků vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Toto ale neplatí pro testové statistiky S^*, W^*, $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{W}^*$, $\hat{\mathbf{S}}^*$ a $\hat{\mathbf{W}}^*$, protože v tomto případě neplatí vztah $\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta}) = n\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$.

Kapitola 4

Příklady a simulace asymptotického chování testů

Pro lepší ilustraci asymptotického chování těchto testů si ještě na závěr uvedeme některé příklady a simulaci jejich asymptotického chování. Využijeme k tomu statistický program R.

4.1 Příklady

Rozhodli jsme se porovnat bohatství[1] národa A s bohatstvím národa B[2]. Anketní lístek vyplnilo nezávisle na sobě 1 200 lidí z národa A a 1 000 lidí z národa B. Výsledky ankety jsou uvedeny v následující tabulce:

Národ	Minimum	1. kvartil	Průměr	3. kvartil	Maximum	Rozptyl
A	−92 100	4 919	20 010	35 090	129 000	50 010
B	−64 410	8 292	19 980	31 690	103 000	30 030

Předpokládejme, že bohatství jednotlivých národů spolu nesouvisí. Naměřené hodnoty označme jako $X_1, \ldots, X_n$ ($n = 1\,200$) pro národ A a $Y_1, \ldots, Y_m$ ($m = 1\,000$) pro národ B. Předpokládejme, že bohatství má normální rozdělení, tedy $X_i \sim \mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ a $Y_j \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Pro snažší orientaci si označme $\boldsymbol{\theta} = (\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2)^T$. Sdružená hustota obou výběrů díky vzájemné nezávislosti je

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}^n} \exp\left\{-\frac{\sum_i (x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_4}^m} \exp\left\{-\frac{\sum_j (y_j - \theta_3)^2}{2\theta_4}\right\}.$$

[1]Bohatství znamená rozdíl mezi celkovými příjmy a výdajy za měsíc.
[2]Příklad byl nasimulován v programu R.

Z toho

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2}(\log 2\pi + \log\theta_2) - \frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{2\theta_2} - \frac{m}{2}(\log 2\pi + \log\theta_4) - \frac{\sum_j (Y_j - \theta_3)^2}{2\theta_4}.$$

Protože $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, dostáváme

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}}^T = \left(\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2}, -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}, \frac{m(\bar{Y}_m - \theta_3)}{\theta_4}, -\frac{m}{2\theta_4} + \frac{\sum_j (Y_j - \theta_3)^2}{2\theta_4^2} \right).$$

Nyní ještě spočtěme $\mathbf{I}_{n,m(\boldsymbol{\theta})} (\stackrel{ozn.}{=} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}})$.

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{E}\left[\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}\right] = -\operatorname{E}\left[\frac{\partial \mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right],$$

což je matice 4×4. Spočteme první dva řádky matice $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}$.

$$1.\ \text{řádek} : -\operatorname{E}\left(-\frac{n}{\theta_2}, -\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2^2}, 0, 0\right) = \left(\frac{n}{\theta_2}, 0, 0, 0\right),$$

protože $\operatorname{E}(\bar{X}_n - \theta_1) = 0$.

$$2.\ \text{řádek} : -\operatorname{E}\left(-\frac{\sum_i (X_i - \theta_1)}{\theta_2^2}, \frac{m}{2\theta_2^2} - \frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{\theta_2^3}, 0, 0\right) = \left(0, \frac{n}{2\theta_2^2}, 0, 0\right),$$

protože $\operatorname{E}\sum_i (X_i - \theta_1) = 0$ a $\operatorname{E}\sum_i (X_i - \theta_1)^2 = n\theta_2$. Třetí a čtvrtý řádek se počítá obdobně jako první a druhý, dostáváme tedy

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{diag}\left(\frac{n}{\theta_2}, \frac{n}{2\theta_2^2}, \frac{m}{\theta_4}, \frac{m}{2\theta_4^2}\right).$$

Označme $S_n^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}{n}$ a $S_m^2 = \frac{\sum_j (Y_j - \bar{Y}_m)^2}{m}$. Víme, že S_n^2 je konzistetní odhad parametru θ_2 a S_m^2 je konzistentní odhad parametru θ_4.

Případ 1 (**Rovnost bohatství**). V našem případě budeme rovností bohatství rozumět stejné rozdělení bohatství národa A a B. Budeme tedy testovat hypotézu $H_0 : \theta_1 = \theta_3$, $\theta_2 = \theta_4$ proti H_1 : neplatí H_0. Podle aplikace lineární transformace uvedené na straně 23 položíme

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{\phi}_i = A_i \boldsymbol{\theta}, i = 1, 2.$$

Tím jsme problém převedli na test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\phi}_1 = 0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\phi}_1 \neq 0$ s rušivým parametrem $\boldsymbol{\phi}_2$. Označme si $S_X \overset{ozn.}{=} \frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{\theta_2^2}$ a $S_Y \overset{ozn.}{=} \frac{\sum_j (Y_j - \theta_3)^2}{\theta_4^2}$. Víme, že $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_i} = A_i \mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}}$ a $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_j} \overset{ozn.}{=} \mathbf{I}_{n,m(\boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_j)} = A_i \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}} A_j^T$. Proto

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1}^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2} - \frac{m(\bar{Y}_m - \theta_3)}{\theta_4} \right], \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[S_X - \frac{n}{\theta_2} - S_Y + \frac{m}{\theta_4} \right] \right),$$

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_2}^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2} + \frac{m(\bar{Y}_m - \theta_3)}{\theta_4} \right], \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[S_X - \frac{n}{\theta_2} + S_Y - \frac{m}{\theta_4} \right] \right),$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_1} = \operatorname{diag} \left(\frac{n}{2\theta_2} + \frac{m}{2\theta_4}, \frac{n}{4\theta_2^2} + \frac{m}{4\theta_4^2} \right),$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_2} = \operatorname{diag} \left(\frac{n}{2\theta_2} - \frac{m}{2\theta_4}, \frac{n}{4\theta_2^2} - \frac{m}{4\theta_4^2} \right),$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\phi}_1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_2},$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\phi}_2}^{-1} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_1}^{-1} = \operatorname{diag} \left(\frac{2\theta_2\theta_4}{n\theta_4 + m\theta_2}, \frac{4\theta_2^2\theta_4^2}{n\theta_4^2 + m\theta_2^2} \right)$$

a

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_1} - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_2} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\phi}_2}^{-1} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\phi}_1})^{-1} = \operatorname{diag} \left(\frac{n\theta_4 + m\theta_2}{2nm}, \frac{n\theta_4^2 + m\theta_2^2}{nm} \right).$$

Pro skórovou statistiku bude potřeba zjistit maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy (tj. kdy $\theta_1 = \theta_3$ a $\theta_2 = \theta_4$). Ten zjišťujeme tak, že položíme vektor $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_2} = 0$, dosadíme $\theta_1 = \theta_3$ a $\theta_2 = \theta_4$. Dostaneme

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_3 = \frac{n\bar{X}_n + m\bar{Y}_m}{n + m}$$

a

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_4 = \frac{\sum_i (X_i - \hat{\theta}_1)^2 + \sum_j (Y_j - \hat{\theta}_1)^2}{n + m}.$$

Po dosazení výsledků z ankety dostáváme

Parametr	$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_4$
Hodnota	$2,000$	$4,093$

.

Nyní si ještě vyjádříme členy $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_1}$ a $(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1} - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}^{-1}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1})^{-1}$ v bodě $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)^T$, čímž dostaneme

$$\mathbf{U}^T_{\boldsymbol{\phi}_1} = \left(\frac{\sqrt{2}nm(\bar{X}_n - \bar{Y}_m)}{(n+m)\hat{\theta}_2}, \frac{nm(\frac{\sum_i (X_i - \hat{\theta}_1)^2}{n} - \frac{\sum_j (Y_j - \hat{\theta}_1)^2}{m})}{\sqrt{2}(n+m)\hat{\theta}_2^2} \right),$$

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1} - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}^{-1}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_1})^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{(n+m)\hat{\theta}_2}{2nm}, \frac{(m+n)\hat{\theta}_2^2}{nm} \right).$$

Pro Waldovu statistiku potřebujeme zjistit maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ za alternativy (plného modelu), což uděláme tak, že položíme $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\theta}} = 0$. Tím zjistíme, že $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{X}_n, S_n^2, \bar{Y}_m, S_m^2)^T$. Dále si vyjádříme bod $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, který souvisí z $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ vztahem $\hat{\boldsymbol{\phi}} = A\hat{\boldsymbol{\theta}}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení dostaneme

Parametr	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_3$	$\hat{\phi}_4$
Hodnota	$0,002$	$1,413$	$2,827$	$5,660$

Nakonec dosazením výsledků do vzorců testových statistik dostáváme

Statistika	$\hat{\mathbf{S}}$	$\hat{\mathbf{W}}$	$\hat{\mathbf{L}}$
Hodnota	64 985	66 837	69 127

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině $\alpha = 0,05$, pokud jejich hodnota překročí hodnotu $\chi^2_2(0,95)$, což nastane, protože $\chi^2_2(0,95) \doteq 5,991$. Tedy rozdělení bohatství národa A a B jsou různá.

Případ 2 (Rovnost průměrného bohatství). V předchozím případě jsme zjistili, že bohatství národa A a B není stejné. Zkusme ale zjitit, jestli nemají alespoň stejné průměrné bohatství. Otestujme tedy hypotézu H_0 : $\theta_1 = \theta_3$ proti $H_1 : \theta_1 \neq \theta_3$ s rušivými parametry θ_2 a θ_4 (opět na hladině $\alpha = 0,05$). Postupujme obdobně jako v minulém případě.
Položíme

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostaneme

$$\mathbf{U}_{\phi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2} - \frac{m(\bar{Y}_m - \theta_3)}{\theta_4} \right),$$

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2} + \frac{m(\bar{Y}_m - \theta_3)}{\theta_4} \right) \\ -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} \\ -\frac{m}{2\theta_4} + \frac{\sum_j (Y_j - \theta_3)^2}{2\theta_4^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_{\phi_1\phi_1} = \left(\frac{n\theta_4 + n\theta_2}{2\theta_2\theta_4} \right),$$

$$\mathbf{I}_{\phi_1\boldsymbol{\phi}_2} = \left(\frac{n\theta_4 - n\theta_2}{2\theta_2\theta_4}, 0, 0 \right),$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\phi_1} = \mathbf{I}^T_{\phi_1\boldsymbol{\phi}_2},$$

$$\mathbf{I}^{-1}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2} = \operatorname{diag}\left(\frac{2\theta_2\theta_4}{n\theta_4 + m\theta_2}, \frac{2\theta_2^2}{n}, \frac{2\theta_4^2}{m} \right)$$

a

$$\mathbf{I}_{\phi_1\phi_1} - \mathbf{I}_{\phi_1\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}^{-1}_{\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{\phi}_2}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\phi}_2\phi_1} = \frac{2nm}{n\theta_4 + m\theta_2}.$$

Při hledání maximálně věrohodného odhadu parametru $\boldsymbol{\phi}_2$ za nulové hypotézy ($\theta_1 = \theta_3$) hledáme řešení soustavy rovnic $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\phi}_2} = 0$. Úpravou dostaneme

$$\theta_2 = \frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{n},$$

$$\theta_4 = \frac{\sum_j (Y_j - \theta_1)^2}{m},$$

$$\frac{n(\bar{X}_n - \theta_1)}{\theta_2} + \frac{m(\bar{Y}_m - \theta_1)}{\theta_4} = 0,$$

což vede na kubickou rovnici, ze které je těžké získat explicitní řešení. Většinou se řeší numericky takzvanou *Welchovou aproximací*[3]. Jelikož ke skórovému testu potřebujeme řešení této rovnice, je jeho (a tedy i testu podílu věrohodnosti) použití v tomto případě obtížné. Zkusme tedy najít alespoň

[3]Welchova aproximace je popsána v knize [2].

maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \boldsymbol{\phi}_2^T)^T$ za alternativy. Víme, že $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{X}_n, S_n^2, \bar{Y}_m, S_m^2)^T$ a

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = A\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{X}_n - \bar{Y}_m), \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{X}_n + \bar{Y}_m), S_n^2, S_m^2\right)^T.$$

Dosazením získaných dat zjistíme

Parametr	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_3$	$\hat{\phi}_4$
Hodnota	$0,002$	$2,827$	$5,001$	$3,003$

Waldovu statistiku statistiku spočítáme vzhahem

$$\hat{\mathbf{W}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^T(\mathbf{I}_{\phi_1\phi_1} - \mathbf{I}_{\phi_1\phi_2}\mathbf{I}_{\phi_2\phi_2}^{-1}\mathbf{I}_{\phi_2\phi_1})\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

v bodě $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Z tabulky

Stastika	Hodnota	Hladina α	Příslušný kvantil	Zamítnáme H_0?
$\hat{\mathbf{W}}$	$1,034$	$0,05$	$3,841$	NE

je patrné, že nulovou hypotézu nezamítáme, a tedy národy mají přibližně stejný průměrný příjem.

Porovnejme předchozí dva příklady. První nám dává, že výběry nejsou stejné (zamítáme, že by se střední hodnoty a rozpyly obou výběrů rovnali zároveň), ale druhý příklad ukazuje na to, že by střední hodnoty mohli být stejné (nezamítli jsme nulovou hypotézu na rovnost středních hodnot). Z toho je patrné, že v prvním příkladě zamítáme kvůli rozptylům. Většinou se příklad na testování rovnosti středních hodnot a roztylů zároveň nepoužívá, protože, jak jsme se i přesvědčili, při zamítnutí nulové hypotézy nevíme, zda je to způsobeno rozdílem mezi středními hodnotami, rozdílem mezi roztyly nebo dokonce rozdílem jak středních hodnot, tak roztylů. Podíváme-li se na statistiky z prvního případu, zjistíme, že jsou mezi nimi velké rozdíly. Můžeme si proto položit otázku, jak „rychle“ (tj. pro jak velký rozsah) jednotlivé statistiky konvegrují k námi zvolené hladině α.

4.2 Simulace

Na jednoduchém příkladě si ukážeme, jakým způsobem funguje asymptotické přibližování skutečné hladiny testu k předem zvolené hladině α v případě tří uvažovaných testů. Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z Poissonova rozdělení s intenzitou λ, na kterých poté budeme testovat jejich asymptotické chování. Testujeme hypotézu $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Tvar věrohodnostní funkce, logaritmické věrohodnostní funkce a její derivaci znázorňuje následující tabulka:

$L(\mathbf{X},\lambda)$	$l(\lambda)$	$l'(\lambda)$
$\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}X_i}}{X_1!\dots X_n!}$	$-n\lambda+\sum X_i\log\lambda-\log(X_1!\dots X_n!)$	$\frac{\sum X_i}{\lambda}-n$

Maximálně věrohodný odhad $\hat{\lambda}_n$ najdeme jako řešení věrohodnostní rovnice $l'(\hat{\lambda}_n)=0$. Dále budeme potřebovat Fisherovu míru informace $I_n(\lambda)$, kterou spočítáme ze vztahu $I_n(\lambda)=-\operatorname{E}l''(\lambda)$. Jednoduchými úpravami dostáváme:

$\hat{\lambda}_n$	$l''(\lambda)$	$I_n(\lambda)$
$\bar{X}_n$	$-\frac{\sum X_i}{\lambda^2}$	$\frac{n}{\lambda}$

Ze slabého zákona velkých čísel víme, že $\hat{\lambda}_n$ je konzistentním odhadem parametru λ. Nyní už sestavíme testové statistiky L,W a S:

L	W	S
$2n[\bar{X}_n(\log\bar{X}_n-\log\lambda_0)-(\bar{X}_n-\lambda_0)]$	$\frac{n(\bar{X}_n-\lambda_0)^2}{\bar{X}_n}$	$\frac{n(\bar{X}_n-\lambda_0)^2}{\lambda_0}$

Přesto, že všechny tři statistiky jsou na první pohled jiné, za platnosti nulové hypotézy H_0 mají asymptoticky všechny stejné rozdělení χ^2_1.

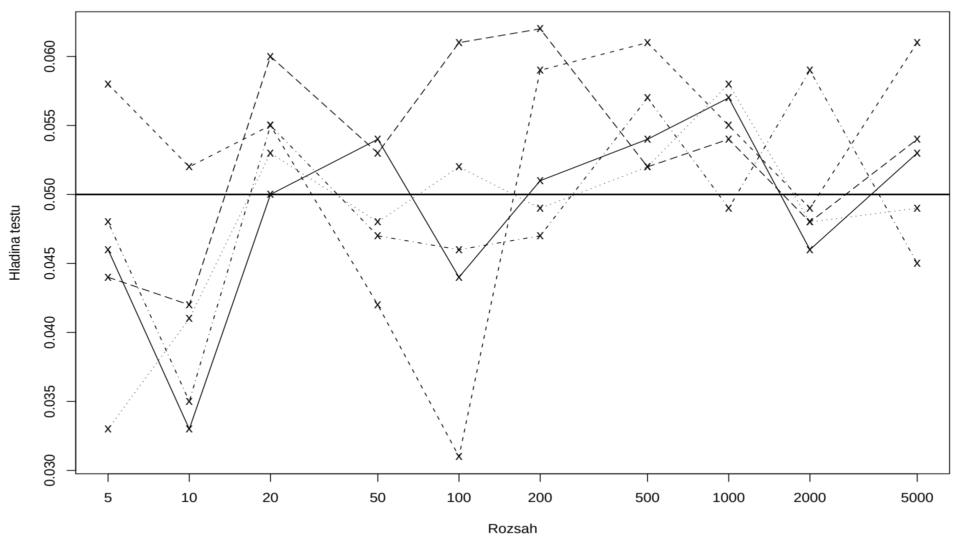
Když už známe tvary jednotlivých statistik, pokusíme se nasimulovat jejich konvergenci pro vzrůstající rozsah n náhodného výběru $X_1,\dots,X_n$ k hladinám $\alpha=0,01,\ 0,05$ a $0,1$. Mějme 10 náhodných výběrů o rozsazích $n=5,10,20,50,100,200,\ 500,1\,000,2\,000$ a $5\,000$ z Poissonova rozdělení s intenzitou $\lambda=5$. Jelikož sledujeme chování hladiny testu, která se počítá ze vztahu

$$\alpha_0=\mathrm{P}(\text{zamítneme hypotézu } H_0|\text{ hypotéza } H_0 \text{ ve skutečnosti platí}),$$

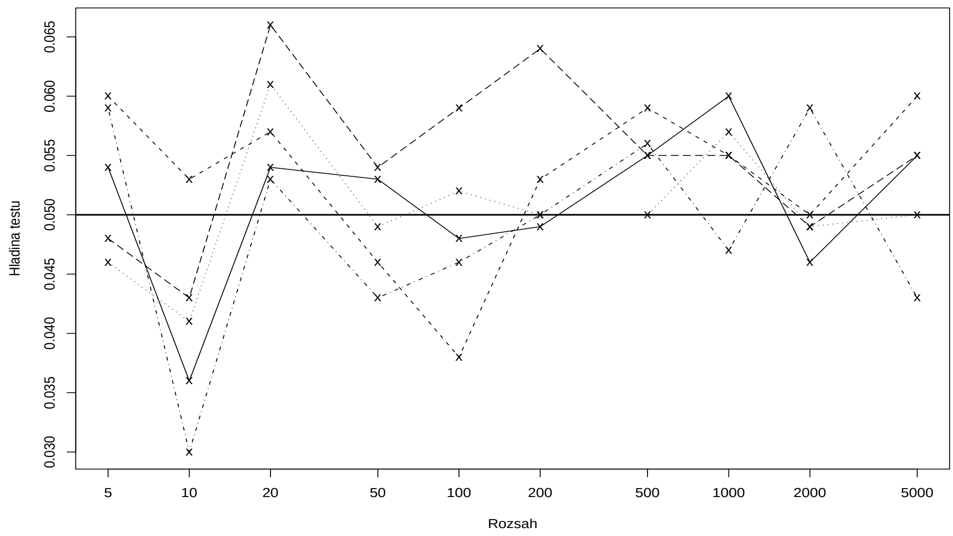
sestrojíme test na hypotézu $H_0:\lambda=5$ proti $H_1:\lambda\neq 5$. Nulovou hypotézu H_0 zamítáme, pokud testové statistiky L, W a S překročí hodnotu $\chi^2_1(1-\alpha)$. Sestrojíme si tabulku pro znázornění chování hladiny testu jednotlivých statistik pro různý rozsah výběru (tabulka 4.1). Z tabulky vyplývá, že hladina testu pro každou statistiku je pro malé n jiná. Se vzrůstajícím n se ale hladiny k sobě blíží a od $n=200$ jsou skoro stejné. Navíc se hladiny všech testů opravdu blíží určeným hladinám α, což potvrzuje, že pro velká n mají statistiky přibližně rozdělení χ^2_1. Někdy dokonce hladiny testů byli pod námi zvolenou hladinou α, což je sice dobré, ale bohužel to není pravidlem, nýbrž výjimkou, která je způsobena náhodou při volbě náhodného výběru. Na obrázcích 4.4, 4.5 a 4.6 je graficky znázorněné přibližování skutečných hladin testů jednotlivých testových statistik ke zvoleným hladinám $\alpha=0,01,\ 0,5$ a $0,1$.

Hladina		0,01			0,05			0,1		
Test. stat.		L	W	S	L	W	S	L	W	S
Rozsah výběru	5	0,013	0,012	0,024	0,046	0,060	0,053	0,112	0,089	0,130
		(0,003)	*(0,003)*	*(0,007)*	*(0,009)*	*(0,012)*	*(0,006)*	*(0,007)*	*(0,001)*	*(0,006)*
	10	0,009	0,009	0,014	0,041	0,049	0,041	0,090	0,104	0,100
		(0,001)	*(0,001)*	*(0,003)*	*(0,007)*	*(0,004)*	*(0,009)*	*(0,006)*	*(0,006)*	*(0,009)*
	20	0,011	0,011	0,015	0,055	0,055	0,059	0,111	0,100	0,100
		(0,003)	*(0,003)*	*(0,003)*	*(0,004)*	*(0,003)*	*(0,005)*	*(0,011)*	*(0,013)*	*(0,010)*
	50	0,012	0,012	0,012	0,049	0,053	0,049	0,103	0,097	0,102
		(0,002)	*(0,003)*	*(0,003)*	*(0,005)*	*(0,005)*	*(0,005)*	*(0,008)*	*(0,010)*	*(0,008)*
	100	0,012	0,012	0,011	0,047	0,050	0,049	0,094	0,100	0,096
		(0,001)	*(0,001)*	*(0,002)*	*(0,011)*	*(0,011)*	*(0,008)*	*(0,010)*	*(0,010)*	*(0,010)*
	200	0,010	0,010	0,010	0,054	0,055	0,053	0,100	0,096	0,098
		(0,001)	*(0,002)*	*(0,001)*	*(0,007)*	*(0,007)*	*(0,006)*	*(0,009)*	*(0,008)*	*(0,008)*
	500	0,010	0,010	0,010	0,055	0,056	0,055	0,100	0,098	0,100
		(0,003)	*(0,004)*	*(0,003)*	*(0,004)*	*(0,003)*	*(0,003)*	*(0,011)*	*(0,012)*	*(0,012)*
	1000	0,010	0,010	0,011	0,055	0,055	0,055	0,096	0,096	0,096
		(0,002)	*(0,002)*	*(0,004)*	*(0,004)*	*(0,004)*	*(0,005)*	*(0,008)*	*(0,008)*	*(0,009)*
	2000	0,011	0,011	0,011	0,052	0,053	0,053	0,100	0,100	0,100
		(0,002)	*(0,002)*	*(0,002)*	*(0,006)*	*(0,006)*	*(0,006)*	*(0,010)*	*(0,010)*	*(0,010)*
	5000	0,010	0,010	0,010	0,050	0,050	0,050	0,100	0,100	0,099
		(0,004)	*(0,004)*	*(0,004)*	*(0,005)*	*(0,005)*	*(0,005)*	*(0,008)*	*(0,008)*	*(0,009)*

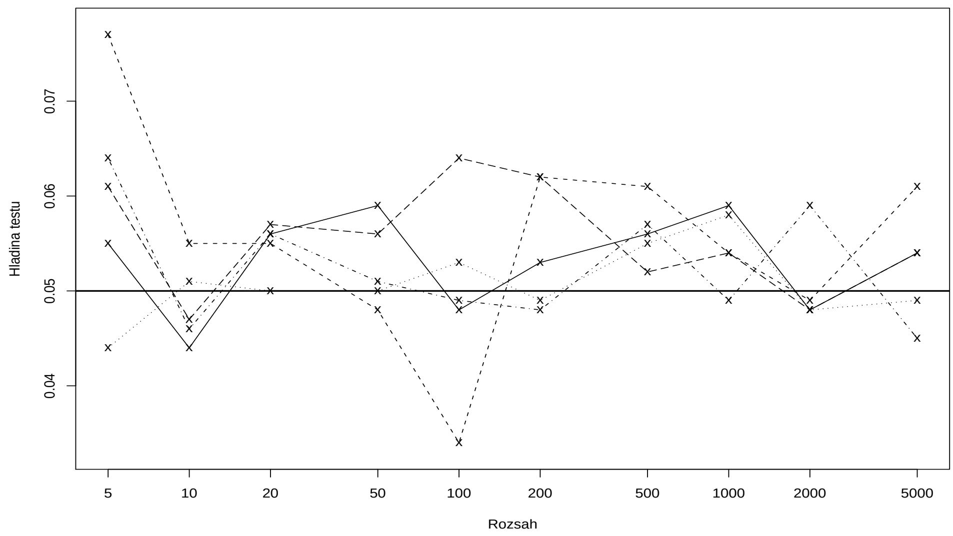
Tabulka 4.1: Znázornění přibližování hladiny testů ke třem zvoleným hladinám



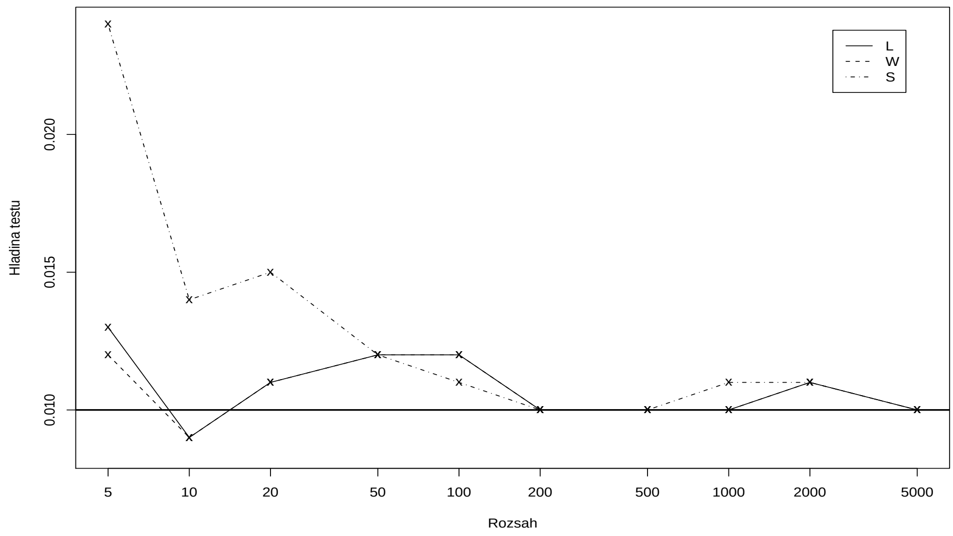
Obrázek 4.1: Grafické znázornění simulovaných hodnot hladin testu podílu věrohodnosti pro každý daný rozsah výběru na hladině $\alpha = 0,05$



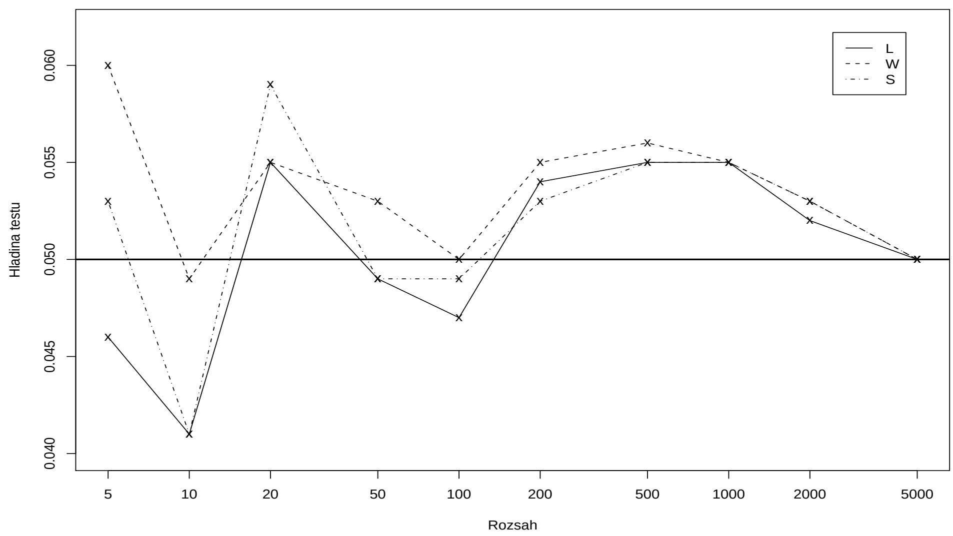
Obrázek 4.2: Grafické znázornění simulovaných hodnot hladin Waldova testu pro každý daný rozsah výběru na hladině $\alpha = 0,05$



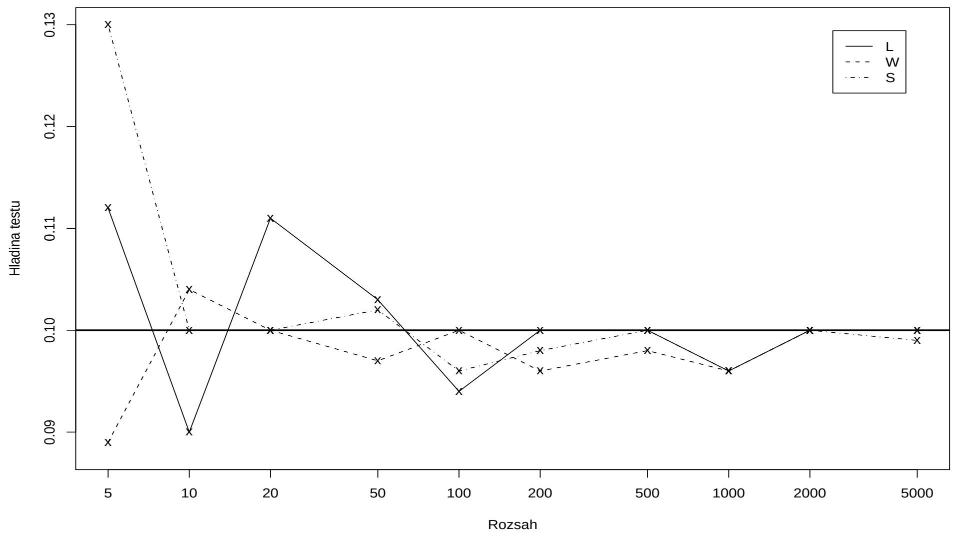
Obrázek 4.3: Grafické znázornění simulovaných hodnot hladin skórového testu pro každý daný rozsah výběru na hladině $\alpha = 0,05$



Obrázek 4.4: Grafické znázornění přibližování hladin testu podílu věrohodnosti (L), Waldova testu (W) a skórového testu (S) k hladině $\alpha = 0,01$



Obrázek 4.5: Grafické znázornění přibližování hladin testu podílu věrohodnosti (L), Waldova testu (W) a skórového testu (S) k hladině $\alpha = 0,05$



Obrázek 4.6: Grafické znázornění přibližování hladin testu podílu věrohodnosti (L), Waldova testu (W) a skórového testu (S) k hladině $\alpha = 0,1$

Závěr

Cílem práce bylo zavést a porovnat některé asymptoticky optimální testy. Zaměřili jsme se na tři, které mají stejné asymptotické rozdělení za platnosti nulové hypotézy. Jejich asymptotické chování jsme si předvedli na simulaci, z které vyplynulo, že se skutečné hladiny jednotlivých testů opravdu přibližují k předem určené hladině. Také jsme zavedli test pro lineární transformaci testovaného parametru, který jsme využili při řešení příkladů.

Literatura

[1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, MATFYZPRESS, 2005.

[2] Best, D. J. a Rayner, J. C. W.: *Welch's approximate solution for the Behrens-Fisher problem*, Technometrics, 29 (1987) 205-210.

[3] Buse, A.: *The Likelihood Ratio, Wald, and Lagrange Multiplier Tests: An Expository Note*, The American Statistician, Vol. 36, No. 3, (1982) Part 1

[4] Dupač, V. a Hušková, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, 2005.

[5] Rayner, J. C. W.: *The Asymptotically Optimal Tests*, The Statistician, Vol. 46, No. 3, (1997) 337-346.