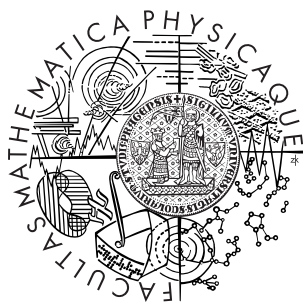


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Filip Dohnálek

Náhodné mozaiky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Kateřina Helisová, Ph.D.,
České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra matematiky

Studijní program: Obecná matematika

2010

Je mou milou povinností poděkovat RNDr. Kateřině Helisové, Ph.D., za odborné vedení při tvorbě práce, za cenné rady, trpělivost a čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále děkuji své přítelkyni a rozšířené rodině za jejich podporu v průběhu psaní bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 19. května 2010

Filip Dohnálek

Obsah

Úvod	5
Často používané symboly	6
1 Základní pojmy	7
1.1 Bodové procesy	7
1.1.1 Poissonův bodový proces	8
1.1.2 Kótované bodové procesy	9
1.2 Polytop	10
2 Náhodné mozaiky	11
2.1 Mozaika v \mathbb{R}^d	11
2.1.1 Normalita a regularita	12
2.2 Náhodná mozaika v \mathbb{R}^d	13
2.3 Matematické modely náhodných mozaik	14
2.3.1 Přímkový model	14
2.3.2 Voronoiův diagram	15
2.3.3 Zobecněná Voronoiova mozaika	15
2.3.4 Delaunayova triangulace	16
2.3.5 Johnson-Mehlova mozaika	17
2.3.6 Krakovaná mozaika	17
2.3.7 Pokročilejší konstrukce náhodné mozaiky	18
2.4 Obecné charakteristické znaky	18
2.4.1 Palmovo rozdělení	19
2.4.2 Vztahy středních hodnot	20
2.5 Croftonova mozaika	23
2.6 Dirichletova mozaika	25
Literatura	29

Název práce: Náhodné mozaiky

Autor: Filip Dohnálek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Kateřina Helisová, Ph.D.

e-mail vedoucího: helisova@math.feld.cvut.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme teorii náhodných mozaik a bodových procesů, z nichž mnohé náhodné mozaiky vycházejí. Definujeme v praxi užívaný Poissonův bodový proces. Popisujeme struktury základních modelů. Zájem je soustředěn především na přímkový model, Voronoiův diagram, Delaunayovu triangulaci, Johnson-Mehlovu mozaiku a přidružených modifikací. Dále se zabýváme typickými znaky náhodné mozaiky, které mezi sebou navzájem souvisí. Užitečný nástroj pro popis charakteristik poskytuje Palmovo rozdělení vycházející z teorie náhodné míry. V závěru jsou provedeny výpočty charakteristik a simulace Dirichletovy a Croftonovy mozaiky.

Klíčová slova: Bodový proces, Croftonova mozaika, Dirichletova mozaika, náhodná mozaika, Voronoiův diagram

Title: Random mosaics

Author: Filip Dohnálek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Kateřina Helisová, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: helisova@math.feld.cvut.cz

Abstract: In the present work we have concentrated on studying the theory of random mosaics and point processes from which many of the random mosaics ensue. We have defined the Poisson point process, which is commonly used. Structures of basic models are also described. Above all, attention is paid to the line model, the Voronoi diagram, Delaunay triangulation, Johnson-Mehl mosaic and its associated modifications. We have also dealt with interrelated typical attributes of a random mosaic. A useful tool for describing characteristic features can be found in Palm distribution based on the random measure theory. The conclusion of our work presents calculations of the characteristics and a simulation of Dirichlet and Crofton mosaic.

Keywords: Crofton tessellation, Dirichlet tessellation, point process, random mosaic, Voronoi diagram

Úvod

Nebývale expanzivní rozvoj technologií v poledních letech má vliv i na stochastickou geometrii. Rychlé zpracování dat umožňuje simulace modelů využívaných v astronomii, geografii, geologii, chemii, zoologii a jiných přírodovědných i společenských oborech. Náhodné mozaiky se uplatňují především v odvětvích, která řeší problém členění prostoru. Používají se při studiu organizace živých a neživých mikrostruktur, v rámci zkoumání vesmíru, v optimalizaci spádových oblastí atd. Díky tomu se studium náhodných mozaik těší vzrůstajícímu zájmu.

V Ottově slovníku naučném je pod heslem „mosaika“ uveden následující text: „*Slove obložení podlah nebo stěn barevnými kaménky nebo skleněnými hranůlky k docílení ornamentální nebo figurální ozdoby*“. V obecném slova smyslu se jedná o soubor geometrických tvarů vzájemně zapadajících do sebe. Této představě rozdělení prostoru se drží i samotná definice v [9], ze které budeme vycházet.

V 17. století R. Descartes rozvinul teorii přirozeného vývoje sluneční soustavy. Zastával totiž názor, že Země a planety se nacházejí v klidu a kosmická hmota vířivě rotuje kolem nich. Rozčlenil vesmír na konvexní oblasti mající ve svém středu nepohyblivou hvězdu. Ve své knize o filozofii poté vykresluje svoji představu do obrazce, který velice připomíná Dirichletovu mozaiku. Na přelomu 19. a 20. století zavedl Dirichlet následován Voronoiem první formální definici nestochastického typu. O několik let později přichází Delaunay s myšlenkou duality mezi Voronoiovou a Delaunayovou mozaikou. Ve 20. století vyšlo mnoho vědeckých prací, zabírajících se problematikou náhodné mozaiky. Od sedmdesátých let se pro simulaci využívá počítačová technika.

Cílem bakalářské práce je seznámit čtenáře se základními pojmy v oblasti náhodných mozaik. Práce je rozdělena do dvou kapitol. První kapitola se věnuje bodovým procesům, kótovaným bodovým procesům a polytopu. První část druhé kapitoly poskytuje definici náhodné mozaiky a základní modely náhodných mozaik. Druhá část se zabývá geometrickými vlastnostmi stationární náhodné mozaiky. Na závěr jsou získané výsledky aplikované na speciálních modelech náhodných mozaik.

Součástí práce jsou i výpočty a grafické výstupy, které byly zpracovány ve statistickém programu R.

Často používané symboly

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}_+	kladná číselná poloosa
\mathbb{R}^d	d -rozměrný Euklidův prostor
o	počátek v \mathbb{R}^d
$\ \cdot\ $	Euklidovská metrika
v_d	d -rozměrná Lebesgueova míra
\mathcal{B}^d	system borelovských množin
\mathcal{B}_0^d	system omezených borelovských množin
\mathcal{K}	system kompaktních množin
\mathcal{L}	prostor přímk v rovině
$\mathbf{1}_A$	indikátorová funkce množiny A
∂A	hranice množiny A
$\sigma(A)$	nejmenší sigma algebra obsahující množinu A
$\text{card}(A)$	počet prvků množiny A
$\text{int}(A)$	vnitřek množiny A
$\text{conv}(A)$	konvexní obal množiny A
$(\mathbb{M}, \mathfrak{M})$	měřitelný prostor systému mozaik
$(\mathbb{D}, \mathfrak{D})$	měřitelný prostor systému lokálně konečných množin
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	pravděpodobností prostor

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Bodové procesy

Obecně se bodové procesy zavádějí na libovolném separabilním lokálně kompaktním metrickém prostoru X (viz [11]). My se však spokojíme s d -rozměrným prostorem opatřeným euklidovskou metrikou. Koncept níže uvedený je převzat z [12] a [13].

Definice 1 *Definujme prostor lokálně konečných podmnožin předpisem*

$$\mathbb{D} := \{\varphi \subseteq \mathbb{R}^d : \text{card}(\varphi \cap B) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0^d\}$$

a vybavme ho σ -algebrou

$$\mathfrak{D} := \sigma(\{\varphi \in \mathbb{D} : \text{card}(\varphi \cap B) = m\} : m \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}_0^d).$$

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor. Pak bodovým procesem rozumíme měřitelné zobrazení

$$\Phi : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{D}, \mathfrak{D}). \quad (1.1)$$

Tvrzení 1 *Φ je bodový proces, právě když $\text{card}(\Phi \cap B)$ je náhodná veličina pro $\forall B \in \mathcal{B}_0^d$.*

Důkaz:

Zřejmé z definice bodového procesu a náhodné veličiny. \square

Bodový proces Φ prohlásíme za konečný, jestliže $\text{card}(\Phi \cap \mathbb{R}^d) < \infty$ skoro jistě. Rozdělení bodového procesu je indukovaná míra \mathbb{P}_Φ na \mathfrak{D} definována vztahem

$$\mathbb{P}_\Phi(D) := \mathbb{P}(\Phi \in D) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in D), \quad D \in \mathfrak{D}.$$

Definice 2 Řekneme, že bodový proces Φ je stacionární, pokud jeho rozdělení je invariantní vůči posunutím. To znamená, že $\Phi + y := \{x + y : x \in \Phi\}$ má stejné rozdělení jako Φ pro $\forall y \in \mathbb{R}^d$. Pakliže je bodový proces invariantní vůči rotacím kolem počátku v \mathbb{R}^d , mluvíme o izotropním bodovém procesu.

Definice 3 Mírou intenzity bodového procesu Φ rozumíme zobrazení

$$\Lambda(B) := \mathbb{E}(\text{card}(\Phi \cap B)) = \int \text{card}(\varphi \cap B) \mathbb{P}(d\varphi), \quad B \in \mathcal{B}^d. \quad (1.2)$$

Existuje-li navíc hustota g míry Λ vzhledem k Lebesgueově míře, potom g se nazývá funkce intenzity.

Tvrzení 2 Nechť Φ je stacionární bodový proces s lokálně konečnou mírou intenzity Λ . Nechť ν_d je d -rozměrná Lebesgueova míra. Pak

$$\Lambda(B) = \lambda \nu_d(B), \quad \text{pro } \forall B \in \mathcal{B}^d$$

pro nějaké $\lambda \geq 0$, jež nazveme intenzitou stacionárního bodového procesu a udává střední počet bodů v množině s jednotkovým objemem.

Důkaz:

Ze stacionarity bodového procesu plyne $\Lambda(B + x) = \Lambda(B)$ pro $\forall B \in \mathcal{B}^d$ a $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Zároveň Lebesgueova míra je až na násobek jediná lokálně konečná translačně invariantní míra na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$. Tedy existuje $\lambda \geq 0$ takové, že $\Lambda(B) = \lambda \nu_d(B)$ pro $\forall B \in \mathcal{B}^d$. \square

1.1.1 Poissonův bodový proces

Definice 4 Buď Λ lokálně konečná míra na \mathbb{R}^d taková, že $\Lambda\{x\} = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Bodový proces Φ splňující vlastnosti

1. náhodná veličina $\text{card}(\Phi \cap B)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\Lambda(B)$ pro $\forall B \in \mathcal{B}_0^d$,

2. jsou-li $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0^d$ po dvou disjunktní, potom $\text{card}(\Phi \cap B_1), \dots, \text{card}(\Phi \cap B_n)$ jsou nezávislé náhodné veličiny pro každé $n \in \mathbb{N}$,

nazveme Poissonovým bodovým procesem s mírou intenzity Λ .

Pokud navíc existuje konstantní funkce intenzity λ , mluvíme o homogenním Poissonově procesu s intenzitou λ .

1.1.2 Kótované bodové procesy

Technickým nástrojem pro generování růstových modelů náhodných mozaik popsaných v podkapitolách 2.3.5 a 2.3.6 bude kótovaný bodový proces. Tento proces získáme z bodového procesu, pakliže každému bodu přiřadíme určitou hodnotu neboli kótu.

Definice 5 *Nechť $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(K))$ je měřitelný prostor úplného separabilního metrického prostoru kót s příslušnou borelovskou σ -algebrou.*

Definujeme prostor lokálně konečných podmnožin $\mathbb{R}^d \times \mathbb{K}$ předpisem

$$\mathbb{D}_{\mathbb{K}} := \{\omega \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{K} : \text{card}(\omega \cap (B \times \mathbb{K})) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0^d\}$$

a vybavme ho σ -algebrou

$$\mathfrak{D}_{\mathbb{K}} := \sigma(\{\omega \in \mathbb{D}_{\mathbb{K}} : \text{card}(\omega \cap (B \times K)) = m\} : m \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}_0^d, K \in \mathcal{B}(K)).$$

Bud' $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor. Pak kótovaným bodovým procesem rozumíme měřitelné zobrazení

$$\Phi_{\mathbb{K}} : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{D}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{D}_{\mathbb{K}}). \quad (1.3)$$

Kótovaný bodový proces je náhodná lokálně konečná množina bodů v \mathbb{R}^d , kterým jsou přiděleny náhodné kóty z \mathbb{K} .

Definice 6 *Řekneme, že kótovaný bodový proces $\Phi_{\mathbb{K}}$ je stacionární, jestliže $\Phi_{\mathbb{K}} + y := \{(X + y, K) : (X, K) \in \Phi_{\mathbb{K}}\}$ má stejné rozdělení jako $\Phi_{\mathbb{K}}$ pro $\forall y \in \mathbb{R}^d$. Jestliže $\mathcal{O}\Phi_{\mathbb{K}} := \{(\mathcal{O}X, K) : (X, K) \in \Phi_{\mathbb{K}}\}$ a $\Phi_{\mathbb{K}}$ mají stejné rozdělení pro libovou rotaci \mathcal{O} kolem počátku, nazýváme $\Phi_{\mathbb{K}}$ izotropním kótovaným bodovým procesem.*

1.2 Polytop

Definice 7 *Mějme funkci $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Pro neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ definujeme konvexní obal množiny A předpisem*

$$\text{conv}(A) := \left\{ \sum_{a \in I} \lambda(a)a : \lambda(a) \geq 0 \ \forall a \in I, \sum_{a \in I} \lambda(a) = 1, I \subset A \text{ konečná} \right\}.$$

Pro jednoduchost se na $\text{conv}(A)$ nahlíží jako na nejmenší konvexní množinu obsahující A .

Definice 8 *Množinu $P \subset \mathbb{R}^d$ nazveme polytopem, jestliže existuje konečná množina $A \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $P = \text{conv}(A)$.*

Polytop je zároveň kompaktní a konvexní množinou. V následujícím textu d -polytopem rozumíme polytop dimenze d . Pro d -polytop s $d + 1$ vrcholy užíváme pojem d -simplex. Pro rozšiřující definice a vlastnosti polytopu odkazují na [15].

Kapitola 2

Náhodné mozaiky

2.1 Mozaika v \mathbb{R}^d

Definice 9 Uvažujme indexovou množinu $I \subset \mathbb{R}$. Množinu

$$M := \{B_i : B_i \subset \mathbb{R}^d, \dim(B_i) = d, i \in I\}$$

nazveme mozaikou, jestliže platí následující tři podmínky:

1. pokud $B_i, B_j \in M$ a $B_i \neq B_j$, pak $\text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j) = \emptyset$, $\forall i, j \in I$,
2. $\bigcup_{i \in I} B_i = \mathbb{R}^d$,
3. pokud $B \subset \mathbb{R}^d$ je omezená, pak $\text{card}(B_i \in M : B_i \cap B \neq \emptyset, i \in I) < \infty$.

Pro množinu $B_i \in M$ se užívá výraz buňka mozaiky M . Z první vlastnosti plyne, že vnitřky buněk jsou navzájem disjunktní. Dále požadujeme, aby buňky $\{B_i\}$ vyplnily celý prostor \mathbb{R}^d . Poslední podmínka poukazuje na lokální konečnost množiny M .

Předcházející definice pojmu mozaika je naprosto obecná. Nadále se omezíme pouze na mozaiky tvořené d -polytopy, i když některé uvedené výsledky mohou platit i pro nekonvexní verze. Buňky v tomto případě představují kompaktní a konvexní mnohostěny dimenze d . Složky hranice d -polytopu se podle své dimenze $s = 0, 1, \dots, d - 1$ nazývají s -fasetou¹. Bez újmy na obecnosti chápeme d -fasetou samotný d -polytop.

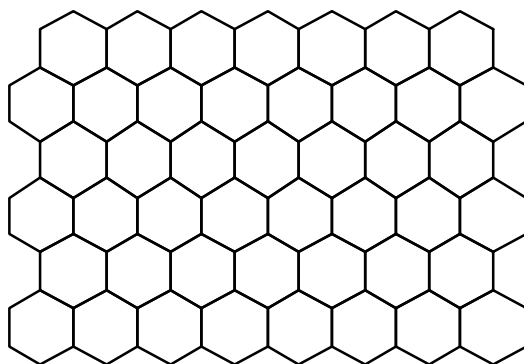
¹Pro 0, 1, 2-fasetu se vžil název vrchol, hrana a stěna. Pro pojem vrchol se občas v teorii náhodné mozaiky setkáme s výrazem uzel.

2.1.1 Normalita a regularita

Nejprve zavedeme pojem normality mozaiky M , poněvadž mozaika tohoto druhu se v reálném světě objevuje nejčastěji.

Definice 10 Řekneme, že mozaika M je normální, jestliže všechny s -fasety mozaiky M leží na hranici $d - s + 1$ buněk pro $\forall 0 \leq s \leq d - 1$.

Typický příklad představuje rovinný obrazec skládající se z pravidelných šestiúhelníků jako na obrázku 2.1.



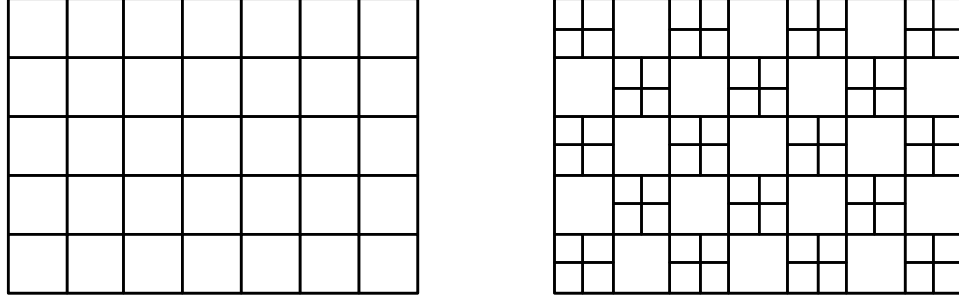
Obrázek 2.1: Včelí mozaika je příkladem normální a regulární rovinné mozaiky.

Neprázdný průnik konečně mnoha buněk obsahující bod $x \in \mathbb{R}^d$ označme $F(x) := \bigcap_{i:x \in B_i} B_i$. Dále definujme

$$\Theta_s(M) := \{F(x) : x \in \mathbb{R}^d, \dim(F(x)) = s\}, \quad s = 0, 1, \dots, d \quad (2.1)$$

množinu s -polytopů vzniklých z bodů $x \in \mathbb{R}^d$. Prvek spočetné množiny $F \in \Theta_s(M)$ nazveme s -fasetou mozaiky M pro $s = 0, 1, \dots, d$. Pokud navíc označíme $\theta_s(M)$ množinou s -faset buněk mozaiky M , můžeme u mozaik rozlišovat i takzvanou regularitu.

Definice 11 Řekneme, že mozaika M je regulární, jestliže dochází k rovnosti $\Theta_s(M) = \theta_s(M)$ pro $\forall s = 0, 1, \dots, d$.



Obrázek 2.2: Vlevo: Příklad nenormální a regulární rovinné mozaiky. Vpravo: Příklad nenormální a neregulární rovinné mozaiky.

2.2 Náhodná mozaika v \mathbb{R}^d

Nejdříve označme \mathbb{M} množinu všech mozaik a najděme příslušný měřitelný prostor následovně. Každá mozaika $M \in \mathbb{M}$ obsahuje svoji uzavřenou hraniční množinu $\partial(M) := \bigcup_i \partial B_i$, kde ∂B_i značí hranici buňky B_i . Například pro $d = 2$ se hraniční množina skládá výhradně z hran a vrcholů mnohoúhelníků určující mozaiku. Uvažujme systém kompaktních množin \mathcal{K} . Přírodním způsobem nyní definujme hledanou σ -algebru na množině \mathbb{M} předpisem

$$\mathfrak{M} := \sigma(\{M \in \mathbb{M} : \partial(M) \cap K \neq \emptyset\} : K \in \mathcal{K}).$$

Definice 12 *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $(\mathbb{M}, \mathfrak{M})$ značí uvedený měřitelný prostor. Pak náhodnou mozaikou rozumíme měřitelné zobrazení*

$$\Theta : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{M}, \mathfrak{M}). \quad (2.2)$$

Rozdělení náhodné mozaiky je indukovaná pravděpodobnostní míra \mathbb{P}_Θ na \mathfrak{M} dána předpisem

$$\mathbb{P}_\Theta(\mathcal{M}) := \mathbb{P}(\Theta \in \mathcal{M}) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \Theta(\omega) \in \mathcal{M}), \quad \mathcal{M} \in \mathfrak{M}.$$

Naprosto analogicky jako u bodových procesů i nyní zavedeme pojem stacionarity a izotropie.

Definice 13 *Náhodnou mozaiku Θ nazveme izotropní, respektive stacionární, jestliže její rozdělení je invariantní vůči rotacím kolem počátku v \mathbb{R}^d , respektive invariantní vůči posunutím v \mathbb{R}^d .*

2.3 Matematické modely náhodných mozaik

2.3.1 Přímkový model

Tento model vychází přímo z teorie přímkových procesů (viz [11]) a svým pojetím patří mezi ty jednodušší.

Bud' $L := [0, \pi) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ a uvažujme na L metriku

$$\rho((\alpha_1, z_1), (\alpha_2, z_2)) := \sqrt{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + (z_1 - z_2)^2}.$$

Definujme dále zobrazení p z L do prostoru \mathcal{L} všech přímek v \mathbb{R}^2 předpisem

$$p(\alpha, z) := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = z\}, \quad (\alpha, z) \in L.$$

Potom p je bijekce z L na \mathcal{L} . Přenesením metriky ρ tímto zobrazením dostaneme úplný separabilní metrický prostor \mathcal{L} . Přímkovým procesem v rovině pak rozumíme bodový proces Φ na prostoru \mathcal{L} . Položme

$$\Psi := \partial(\Phi) = \bigcup \{l \in \mathcal{L} : l \in \Phi\}. \quad (2.3)$$

Pak Ψ tvoří hraniční množinu náhodné mozaiky Θ . Vlastnosti Θ samozřejmě závisí na Φ . Speciálně pokud přímkový proces je stacionární, potom i náhodná mozaika je stacionární. Obdobným principem procesy nadrovin vymezují náhodnou mozaiku v \mathbb{R}^d .

Regularita a normalita

U této třídy mozaik na rozdíl od ostatních není problém určit základní nedeterministické znaky. Nechť $\dim(m_1 \cap \dots \cap m_k) = d - k$ platí pro libovolné nadroviny m_1, \dots, m_k , $1 \leq k \leq d$ generující mozaiku Θ . Pak Θ je regulární. Navíc každý vrchol z hraniční množiny leží přesně na hranici 2^d buněk pro $d > 1$. To znamená, že mozaika nesplňuje podmínky normality.

Croftonova mozaika

Nechť Φ je Poissonův stacionární a invariantní přímkový proces. Podle předcházejícího textu generuje mozaiku, která nese název Croftonova. Zaobírají se jí studie [4] a [7]. V podkapitole 2.5 uvedeme základní charakteristiky.

2.3.2 Voronoiův diagram

Nechť $\varphi = \{x_i\}$ je lokálně konečný systém bodů v \mathbb{R}^d s vlastností $\text{conv}(\varphi) = \mathbb{R}^d$. Pak každý bod v prostoru má svůj nejbližší bod z množiny φ . Pro $x_i \in \varphi$ uvažujme množinu bodů

$$B_i := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, \forall j \neq i\}.$$

Potom $V(\varphi) := \{B_i\}$ splňuje všechny podmínky definice mozaiky a nazveme jí Voronoiovým diagramem vzhledem k množině φ . Až na speciální případy mají buňky tvar d -polytopu. Někdy bývá zvykem mluvit o Dirichletově mozaice v případě $d = 2$. Pro body x_i se vžil název jádro buňky. Díky své struktuře nemůže být Voronoiův diagram nikdy neregulární.

Zde se projevuje spojitost bodových procesů a náhodné mozaiky. Nechť Φ je stacionární bodový proces s konečnou intenzitou ρ . Potom všechny předpoklady platí skoro jistě a $V(\Phi)$ je náhodná mozaika. Dokonce $V(\Phi)$ přejímá stacionaritu. V podkapitole 2.6 probereme v praxi důležitou třídu Dirichletových mozaik generovanou Poissonovým stacionárním bodovým procesem. Podotkneme jen, že s pravděpodobností 1 je též normální.

2.3.3 Zobecněná Voronoiova mozaika

Ačkoliv má Voronoiova mozaika rozmanité využití, mnoho praktických situací lze vyřešit až modifikací původního diagramu. V úvahu připadá několik variant, které lze navzájem kombinovat. Uvedeme základní tři možnosti.

Zobecněný diagram

Rozdíl mezi předcházející mozaikou spočívá v obecném pojetí množiny φ . Namísto množiny bodů uvažujme množinu těles φ . Nechť pro bod x_i nalezneme nejbližší prvek z φ . Pak vnitřku buňky v zobecněném Voronoiově diagramu přiřadíme množinu bodů mající společné nejbližší těleso z φ . Uplatnění nalezneme například v kybernetice. Pro pohyb robota v prostředí se vypočítává nejbezpečnější cesta. Obrazněji řečeno, snažíme se získat hraniční množinu zobecněného diagramu generovanou množinou překážek.

Silové pole

Nechť nejdříve každému bodu z φ přiřadíme váhu $w(x_i) \in \mathbb{R}$. Vzdálenost bodu $x \in \mathbb{R}^d$ od bodu x_i vyjádříme vhodnou mírou závislou na $\|x - x_i\|$ a

$w(x_i)$. Vzniklá mozaika založena na stejném principu jako Voronoiův diagram ale s nově vytvořenou metrikou nazýváme silové pole. Z geometrického hlediska má zajímavou strukturu následující mozaika blíže popsaná v [1].

Nechť $pow(x, x_i) := \|(x - x_i)\|^2 - w(x_i)$, kde $w(x_i) \geq 0$. Neprázdné buňky jsou pak d -polytopy a mají tvar

$$B_i := \{x \in \mathbb{R}^d : pow(x, x_i) \leq pow(x, x_j), \forall j \neq i\}.$$

Zobecněný diagram je v některých případech identický se silovým polem. Například zobecněný diagram generovaný koulemi se středem x_i a poloměrem $w(x_i) \geq 0$ představuje silové pole indukované metrikou $\|x - x_i\| - w(x_i)$.

Diagram _{n}

U Voronoiova diagramu jsme na vnitřek buňky nahlíželi jako na množinu bodů mající společný nejbližší bod z φ . Poslední modifikace se týká rozšíření počtu nejbližších bodů $\{x_i\}$. Definici zavedeme pouze v náznaku. Nechť $n \in \mathbb{N}$, kde $1 \leq n \leq \text{card}(\varphi) - 1$. Pak Diagramem $V_n(\varphi)$ rozumíme mozaiku na bázi Voronoiova diagramu, kde vnitřek buňky mozaiky tvoří body sdílející právě n nejbližších bodů z φ . $V_1(\varphi)$ se rovná Voronoiova diagramu. Obecně pro $n > 1$ nemusí buňka z $V_n(\varphi)$ obsahovat jádro z φ .

2.3.4 Delaunayova triangulace

Buď $\varphi = \{x_i\}$ lokálně konečný systém bodů z \mathbb{R}^d s vlastností $\text{conv}(\varphi) = \mathbb{R}^d$. Mozaiku $D(\varphi)$ nazveme Delaunayovou triangulací vzhledem k φ , jestliže se skládá výhradně z d -simplexu a vnitřky opsaných sfér každé buňky neobsahují bod z φ . Všimněme si, že mozaika není dána jednoznačně. Je však regulární a nenormální.

Ve speciálním případě se mezi Voronoiovým diagramem a Delaunayovou triangulací objevuje vzájemná dualita. Nechť Voronoiův diagram je normální. Potom konvexní obal jader buněk mající společný vrchol reprezentuje d -simplex Delaunayovy triangulace. Naopak jestliže opsaná sféra libovolné buňky Delaunayovy triangulace obsahuje právě $d + 1$ generujících bodů, pak uzly buněk Delaunayovy triangulace představují jádra buněk Voronoiova diagramu. Takový případ nastává skoro jistě například u mozaik vygenerovaných z Poissonova stacionárního bodového procesu.

2.3.5 Johnson-Mehlova mozaika

Mezi prvními, kdo tuto skupinu mozaiky popsal, byli Johnson a Mehl již v roce 1939. Svoji práci založili na popisu systému kovových krystalů. Dotsud má tento model největší užití právě v chemii. Nicméně uplatnění nachází i v jiných přírodovědných oborech. Především v odvětvích pracujících s časoprostorovou složkou. Na rozdíl od ostatních typů se Johnson-Mehlova mozaika dočkala obsáhlejšího zkoumání až v poslední době. Hlavní příčinu musíme spatřovat v složitější struktuře a obecnějším pojetí.

Představa je založena na mechanismu růstu buněk z bodových zárodků. Z historického hlediska se pro pojem buňka setkáme i s výrazem krystal. Zrod generujeme časoprostorovým procesem narození udávající polohu a okamžik vzniku jádra. Časová poloosa díky svému uspořádání splňuje požadavky kótovaného prostoru (podkapitola 1.1.2). Proces narození $\Phi_{\mathbb{R}_+}$ tedy definujeme pomocí kótovaného procesu na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ předpisem

$$\Phi_{\mathbb{R}_+} := \{a_i\}, \text{ kde } a_i = (x_i, t_i) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+.$$

Nechť v čase t_i začne sférický růst krystalu z bodu x_i s konstantní rychlostí $v > 0$. Předpokládejme navíc, že bod zrozený uvnitř jiné buňky okamžitě zaniká. Růst lokálně zastavíme, jakmile dojde k doteku sousedních krystalů. Pak vzniklá náhodná mozaika se nazývá Johnson-Mehlova. Hranice tvoří úseky hyperbolických křivek a buňky mají tvar

$$B_i := \{x \in \mathbb{R}^2 : t_i + \|x_i - x\|/v \leq t_j + \|x_j - x\|/v \ \forall j \neq i\}.$$

Pro obsah dynamického elementu patří mezi všestrannější modely. Například Voronoiovu mozaiku získáme tím, že všechna jádra vzniknou ve stejný čas. Obecněji však buňky nepředstavují konvexní d -polytopy. Nejčastěji studovaným objektem bývá model generovaný stacionárním Poissonovým procesem s intenzitou ρ . Pro rozsáhlejší informace odkazují na [10].

2.3.6 Krakovaná mozaika

Svůj název získala mozaika podle svého typického generování hran. Model totiž funguje na podobném principu jako výše uváděný Johnson-Mehlův. V předešlém případě jsme vycházeli z rozšiřování buňky. Nyní pracujeme s postupným růstem hran. Existuje několik variant a modifikací (viz [3]). Uvedme si tu nejjednodušší. Buď Φ kótovaným bodovým procesem na \mathbb{R}^2 ,

kde každý bod obsahuje informaci o svém směru. Necht' se dále body paprskovitě zvětšují na obě strany svého směru s konstantní rychlostí $v > 0$. Růst v jednotlivých směrech ukončíme v případě nárazu koncového bodu na jinou vzniklou hranu. Vzniklý obrazec připomíná roztráštěné sklo. Mozaika se na rozdíl od Johnson-Mehlova typu skládá již z konvexních a kompaktních mnohoúhelníků.

2.3.7 Pokročilejší konstrukce náhodné mozaiky

Komplikovanější mozaiky získáme kombinací výše uvedených metod nebo intervencí do jednoduchých modelů. Z hlediska složitosti se jedná o obtížné popsatelné konstrukce. Týká se to velkého počtu variant a práce s nimi není jednoduchá. Přesto nastíníme základní dvě myšlenky.

Překrývání

Necht' Θ_1 a Θ_2 jsou náhodné mozaiky s náhodnými hraničními množinami Ψ_1 a Ψ_2 . Pak sjednocení Ψ_1 a Ψ_2 tvoří hraniční množinu, která generuje novou náhodnou mozaiku. V odborném textu se můžeme setkat s anglickým slovem *superposition*. Speciálně v [2] autoři zkoumají vlastnosti *superpositions* založené na překrývání Voronoiova diagramu.

Vnoření

Každá buňka náhodné mozaiky Θ poskytuje plochu pro další dělení. Aplikací jiného již zmíněného procesu pro přerozdělení tohoto prostoru vytvoříme složitější strukturu. Jinak řečeno, rozštěpíme buňky náhodné mozaiky Θ do nového uspořádání. Obecnou definice a nosné vlastnosti mozaiky poskytuje článek [5].

2.4 Obecné charakteristické znaky

Opustíme prostor obecné dimenze d a budeme se pohybovat pouze v \mathbb{R}^2 . Dvourozměrná stacionární náhodná mozaika Θ s rozdělením \mathbb{P} poskytuje prostor pro popis dalších náhodných měr. Narazili jsme již při popisu přímkového modelu na náhodnou hraniční množinu Ψ . Jedná se o stacionární náhodnou uzavřenou množinu a její intenzitu označíme L_A . Uvažujme množiny indukované mozaikou Θ následovně:

- $\alpha_0(\Theta)$...množina uzlů mozaiky Θ ,

- $\alpha_1(\Theta)$... množina středů hran mozaiky Θ ,
- $\alpha_2(\Theta)$... množina těžišť buněk mozaiky Θ .

Potom $\alpha_0(\Theta)$, $\alpha_1(\Theta)$ a $\alpha_2(\Theta)$ jsou stacionárními bodovými procesy. Buď λ_k , $k = 0, 1, 2$ po řadě intenzitami pro procesy $\alpha_k(\Theta)$. Jejich tvary jsou dány vztahy

$$\lambda_k = \frac{\mathbb{E} \text{card}(\alpha_k(\Theta) \cap B)}{v_2(B)}, \quad \text{pro libovolnou } B \in \mathcal{B}_0^2. \quad (2.4)$$

Udávají střední počty výskytu daných bodů v množině s jednotkovým obsahem. V [9] autor článku dokazuje, že konečné výsledky nezáleží na výběru těžišť pro uvedené bodové procesy $\alpha_k(\Theta)$.

2.4.1 Palmovo rozdělení

Pro jednoduchost v následujícím textu implicitně předpokládejme hodnoty 0, 1, 2 pro parametr k , není-li uvedeno jinak.

Definice 14 *Palmovou mírou \mathbb{P}_k náhodné stacionární mozaiky Θ vzhledem k bodovému procesu $\alpha_k(\Theta)$ rozumíme míru na $(\mathbb{M}, \mathfrak{M})$ danou vztahem*

$$\mathbb{P}_k(Y) := \int \sum_{x \in \alpha_k(\theta) \cap [0,1]^2} \mathbf{1}_Y(\theta - x) \mathbb{P}(d\theta), \quad Y \in \mathfrak{M}. \quad (2.5)$$

Pro $Y \in \mathfrak{M}$ udává hodnota $\mathbb{P}_k(Y)$ střední počet bodů $y \in \alpha_k(\Theta)$ v jednotkovém čtverci s vlastností $\Theta - y \in Y$. Speciálně pro \mathbb{M} dostáváme

$$\mathbb{P}_k(\mathbb{M}) = \int \sum_{x \in \alpha_k(\theta) \cap [0,1]^2} \mathbf{1}_{\mathbb{M}}(\theta - x) \mathbb{P}(d\theta) = \mathbb{E} \text{card}(\alpha_k(\Theta) \cap [0, 1]^2) = \lambda_k.$$

Z předpokladů náhodné mozaiky plyne $0 < \lambda_k < \infty$. To vede k zavedení Palmova rozdělení předpisem $\mathbb{P}^k := \lambda_k^{-1} \mathbb{P}_k$. Všimněme si, že \mathbb{P}^k operuje jen na množině $\mathbb{M}_k := \{\theta \in \mathbb{M} : o \in \alpha_k(\theta)\}$. Rozdělení \mathbb{P}^k popisuje chování náhodné mozaiky Θ v případě, kdy počátek je bodem procesu $\alpha_k(\Theta)$.

Definice 15 *Střední hodnotou funkce $g(\Theta)$ za podmínky, že o je bod $\alpha_k(\Theta)$, definujeme předpisem*

$$\mathbb{E}_k g(\Theta) := \int_{\mathbb{M}_k} g(\theta) \mathbb{P}^k(d\theta), \quad (2.6)$$

kde $g : \mathbb{M}_k \rightarrow [0, \infty)$ je měřitelná.

Definice 16 *Typickou k -fasetou náhodné stacionární mozaiky Θ rozumíme náhodnou k -fasetu z Θ s rozdělením \mathbb{P}^k .*

2.4.2 Vztahy středních hodnot

Charakteristikami náhodné mozaiky rozumíme vhodné nezáporné měřitelné funkce na \mathbb{M} a bodu z bodového procesu $\alpha_k(\Theta)$.

Pokud $x \in \alpha_0(\Theta)$, definujeme

$$n_{02}(\Theta, x) := \text{card}(B_i \in \Theta : x \in B_i), \quad (2.7)$$

$$l_0(\Theta, x) := \sum_{F \in \Theta_1(\Theta)} \mathbf{1}_F(x) v_1(F). \quad (2.8)$$

Slovy řečeno (2.7) udává počet buněk obsahující bod x a (2.8) celkovou délku hran vycházejících z bodu x .

Pokud $x \in \alpha_1(\Theta)$, definujeme

$$l_1(\Theta, x) := v_1(F \in \Theta_1(\Theta) : x \in F) \quad (2.9)$$

a reprezentuje délku hrany procházející bodem x .

Pokud $x \in \alpha_2(\Theta)$, definujeme

$$n_{20}(\Theta, x) := \text{card}(F \in \Theta_0(\Theta) : x \in B_i \wedge F \in B_i, B_i \in \Theta), \quad (2.10)$$

$$l_2(\Theta, x) := v_1(\partial B_i : x \in B_i \in \Theta), \quad (2.11)$$

$$a_2(\Theta, x) := v_2(B_i : x \in B_i \in \Theta). \quad (2.12)$$

Pro buňku B_i obsahující bod x představuje (2.10) počet uzlů v B_i , (2.11) obvod B_i a (2.12) obsah B_i .

Každá z výše definovaných náhodných veličin má své rozdělení se střední hodnotou. Označme je postupně \bar{n}_{02} , \bar{l}_0 , \bar{l}_1 , \bar{n}_{20} , \bar{l}_2 a \bar{a}_2 . Vztahují se k odpovídající geometrické kvantitě. Například \bar{l}_1 se rovná průměrné délce typické hrany, \bar{n}_{20} je průměrný počet uzlů na hranici typické buňky. Speciálně pokud x fixujeme v počátku, dostáváme podle (2.6) následující rovnice

$$\bar{n}_{02} = \int_{\mathbb{M}_0} n_{02}(\theta, o) \mathbb{P}^0(d\theta), \quad (2.13)$$

$$\bar{n}_{20} = \int_{\mathbb{M}_2} n_{20}(\theta, o) \mathbb{P}^2(d\theta), \quad (2.14)$$

$$\bar{l}_k = \int_{\mathbb{M}_k} l_k(\theta, o) \mathbb{P}^k(d\theta), \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.15)$$

$$\bar{a}_2 = \int_{\mathbb{M}_2} a_2(\theta, o) \mathbb{P}^2(d\theta). \quad (2.16)$$

Lemma 1 *Nechť Θ je stacionární náhodná mozaika s Palmovým rozdělením \mathbb{P}^k , $k = 0, 1, 2$. Pak pro všechny nezáporné měřitelné funkce v na $(\mathbb{R}^2, \mathbb{M})$ platí*

$$\lambda_k \iint v(x, \theta) dx \mathbb{P}^k(d\theta) = \int \sum_{x \in \alpha_k(\theta)} v(x, \theta - x) \mathbb{P}(d\theta). \quad (2.17)$$

Důkaz: Modifikace věty 7.1(a) v [14]. □

Tvrzení 3 *Nechť $B_o(\Theta)$ je buňka náhodné stacionární mozaiky Θ , jejíž vnitřek obsahuje počátek. Pak*

$$\mathbb{E}f(\Theta) = \lambda_2 \mathbb{E}_2 \int_{B_o(\Theta)} f(\Theta - x) dx \quad (2.18)$$

pro každou nezápornou měřitelnou funkci f na \mathbb{M} .

Důkaz: Na základě vztahu (2.6) pravou stranu přepíšeme

$$\begin{aligned} \lambda_2 \mathbb{E}_2 \int_{B_o(\Theta)} f(\Theta - x) dx &= \lambda_2 \int_{\mathbb{M}_2} \int_{B_o(\theta)} f(\theta - x) dx \mathbb{P}^2(d\theta) \\ &= \lambda_2 \iint \mathbf{1}_{\mathbb{M}_2}(\theta) \mathbf{1}_{B_o(\theta)}(x) f(\theta - x) dx \mathbb{P}^2(d\theta) \\ &= \lambda_2 \iint \mathbf{1}_{\mathbb{M}_2}(\theta) \mathbf{1}_{B_o(\theta)}(-x) f(\theta + x) dx \mathbb{P}^2(d\theta). \end{aligned}$$

Definujme $v(x, \theta) := \mathbf{1}_{\mathbb{M}_2}(\theta) \mathbf{1}_{B_o(\theta)}(-x) f(\theta + x)$, pak podle předcházejícího lemmatu dostáváme

$$\lambda_2 \iint v(x, \theta) dx \mathbb{P}^2(d\theta) = \int \sum_{x \in \alpha_2(\theta)} v(x, \theta - x) \mathbb{P}(d\theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sum_{x \in \alpha_2(\theta)} \mathbf{1}_{\mathbb{M}_2}(\theta - x) \mathbf{1}_{B_o(\theta-x)}(-x) f(\theta) \mathbb{P}(d\theta) \\
&= \int f(\theta) \text{card}(x \in \alpha_2(\theta) : -x \wedge o \in \theta - x) \mathbb{P}(d\theta) \\
&= \int f(\theta) \mathbb{P}(d\theta) \\
&= \mathbb{E}f(\Theta). \quad \square
\end{aligned}$$

Speciálně pro $f(\Theta) := 1$ a podle (2.16) platí

$$1 = \mathbb{E}1 = \lambda_2 \mathbb{E}_2 \int_{B_0(\theta)} dx = \lambda_2 \mathbb{E}_2 v_2(B_0(\theta)) = \lambda_2 \int_{\mathbb{M}_2} a_2(\theta, o) \mathbb{P}^2(d\theta) = \lambda_2 \bar{a}_2.$$

Odtud získáme rovnici

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{\lambda_2}. \quad (2.19)$$

Pomocí Palmova rozdělení se dokazují i následující vztahy

$$\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0}, \quad \bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2}, \quad (2.20)$$

$$\bar{l}_0 = \frac{2L}{\lambda_0}, \quad \bar{l}_2 = \frac{2L}{\lambda_2}, \quad (2.21)$$

$$\bar{l}_1 = \frac{L}{(\lambda_0 + \lambda_2)} = \frac{L}{\lambda_1}. \quad (2.22)$$

Z uvedených rovnic jednoduchými úpravami odvodíme

$$\frac{1}{\bar{n}_{02}} + \frac{1}{\bar{n}_{20}} = \frac{1}{2}, \quad (2.23)$$

$$\bar{l}_0 = \bar{n}_{02} \bar{l}_1, \quad \bar{l}_2 = \bar{n}_{20} \bar{l}_1, \quad (2.24)$$

$$3 \leq \bar{n}_{02}, \quad \bar{n}_{20} \leq 6. \quad (2.25)$$

Jak je ukázáno v [6], lze vyjádřit všechny střední hodnoty jen pomocí parametrů λ_0 , λ_2 a L_A . Prokazuje se tu i vzájemná dualita mezi buňkami a uzly.

2.5 Croftonova mozaika

Nechť Ψ je Poissonův přímkový proces. Buď zároveň invariantní a stacionární. Označme intenzitu procesu L_A . Podle popisu v kapitole 2.3.1 Ψ tvoří náhodnou hraniční množinu náhodné mozaiky. Charakteristickými znaky Croftonovy mozaiky se zabývá studie [7]. Ukazuje se, že žádná trojice přímek se nepotká v jednom bodě skoro jistě, to jest uzel vznikne průnikem přesně dvou přímek. Tedy Croftonova mozaika je regulární a platí

$$\bar{n}_{02} = 4.$$

Důležitý parametr v Croftonově mozaice zaujímá $\rho := 2L_A/\pi$. Dle [7] představuje intenzitu bodového procesu průsečíku na fixované přímce z Ψ . Odtud plyne vztah

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{\rho}.$$

Dosazením do vzorců v 2.4.2 postupně dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}\bar{n}_{20} &= \frac{2\bar{n}_{02}}{\bar{n}_{02} - 2} = \frac{8}{2} = 4, \\ \bar{l}_0 &= \bar{l}_1 \bar{n}_{02} = \frac{4}{\rho}, \\ \bar{l}_2 &= \bar{l}_1 \bar{n}_{20} = \frac{4}{\rho}, \\ \lambda_0 &= \frac{2L_A}{\bar{l}_0} = \frac{2L_A \rho}{4} = \frac{2\pi \rho \rho}{8} = \frac{\pi \rho^2}{4}, \\ \lambda_1 &= \frac{L_A}{\bar{l}_1} = L_A \rho = \frac{\pi \rho^2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{2L_A}{\bar{l}_2} = \frac{2L_A}{\bar{l}_0} = \frac{\pi \rho^2}{4}, \\ \bar{a}_2 &= \frac{1}{\lambda_2} = \frac{4}{\pi \rho^2}.\end{aligned}$$

Pro typickou buňku Croftonovy mozaiky se užívá termín Croftonův polygon. V [14] nalezneme variační matici náhodného vektoru skládající se z plochy(A), obvodu(U) a počtu uzlů(N) Croftonova polygonu. Pro doplnění uvedeme, že většina hodnot byla získána pomocí numerického výpočtu Monte Carlo.

Na stránce 26 jsou uvedeny výpočty charakteristik a obrázek Croftonovy mozaiky s intenzitou $L_A = 4$.

$\lambda_0 = \pi\rho^2/4$	$\lambda_1 = \pi\rho^2/2$	$\lambda_2 = \pi\rho^2/4$
$\bar{n}_{02} = 4$	$\bar{l}_0 = 4\rho^{-1}$	
$\bar{l}_1 = 1\rho^{-1}$	$L_A = \pi\rho/2$	
$\bar{n}_{20} = 4$	$\bar{l}_2 = 4\rho^{-1}$	$\bar{a} = 4(\pi\rho^2)^{-1}$

Tabulka 2.1: Přehled charakteristik Croftonovy mozaiky v závislosti na intenzitě ρ .

$$\text{Var}(A, U, N) = \begin{pmatrix} 8/\rho^4 & 4\pi/\rho^3 & 2\pi/\rho^2 \\ 4\pi/\rho^3 & 2(\pi^2 + 4)/\rho^2 & (\pi^2 + 8)/\rho \\ 2\pi/\rho^2 & (\pi^2 + 8)/\rho & (\pi^2 + 24)/2 \end{pmatrix}$$

Tabulka 2.2: Variační matice typické buňky Croftonovy mozaiky s intenzitou ρ .

2.6 Dirichletova mozaika

O Dirichletově mozaice mluvíme v případě rovinné Voronoiovy mozaiky generované stacionárním Poissonovým bodovým procesem. Buď τ intenzita generujícího bodového procesu. Potom intenzita λ_2 je rovna intenzitě τ . V [8] jsou odvozeny střední hodnoty v závislosti na τ následně

$$\lambda_0 = 2\tau,$$

$$L_A = 2\sqrt{\tau}.$$

Všechny ostatní parametry vycházejí ze vztahů v kapitole 2.4.2. Mají následující tvary

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_2 = 2\tau + \tau = 3\tau,$$

$$\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0} = \frac{4\sqrt{\tau}}{2\tau} = \frac{2}{\sqrt{\tau}},$$

$$\bar{l}_1 = \frac{L_A}{\lambda_1} = \frac{2\sqrt{\tau}}{3\tau} = \frac{2}{3\sqrt{\tau}},$$

$$\bar{l}_2 = \frac{2L_A}{\lambda_2} = \frac{4\sqrt{\tau}}{\tau} = \frac{4}{\sqrt{\tau}},$$

$$\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0} = 2 + \frac{2\tau}{2\tau} = 3,$$

$$\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2} = 2 + \frac{4\tau}{\tau} = 6,$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\tau}.$$

Podobně jako u Croftonovy mozaiky se pro typickou buňku Dirichletovy mozaiky užívá pojem Dirichletův polygon. V tabulce 2.6 je uvedena variační matice náhodného vektoru plochy(A), obvodu(U) a počtu uzlů(N) Dirichletova polygonu.

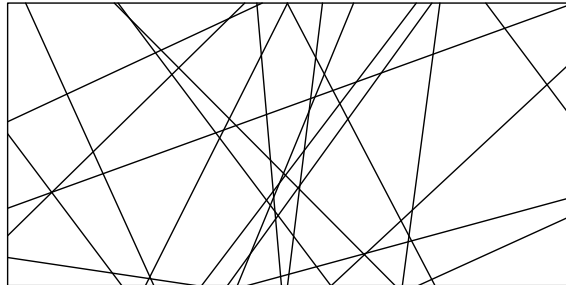
Na stránce 27 jsou vypočítány charakteristiky Dirichletovy mozaiky s intenzitou $\tau = 40$ a na stránce 28 nalezneme realizaci obrázků.

$\lambda_0 = 5,0929$	$\lambda_1 = 10,1859$	$\lambda_2 = 5,0929$
$\bar{n}_{02} = 4$	$\bar{l}_0 = 1,5708$	
$\bar{l}_1 = 0,3927$	$L_A = 4$	
$\bar{n}_{20} = 4$	$\bar{l}_2 = 1,5708$	$\bar{a} = 0,1963$

Tabulka 2.3: Přehled charakteristik Croftonovy mozaiky s intenzitou $L_A = 4$.

$$\text{Var}(A, U, N) = \begin{pmatrix} 0,1903 & 0,7610 & 0,9689 \\ 0,7610 & 4,2777 & 7,0174 \\ 0,9689 & 7,0174 & 16,9348 \end{pmatrix}$$

Tabulka 2.4: Variační matice typické buňky Croftonovy mozaiky s intenzitou $L_A = 4$.



Obrázek 2.3: Realizace Croftonovy mozaiky s intenzitou $L_A = 4$ ve výřezu okna s jednotkovým obsahem.

$\lambda_0 = 2\tau$	$\lambda_1 = 3\tau$	$\lambda_2 = \tau$
$\bar{n}_{02} = 3$	$\bar{l}_0 = 2\tau^{-1/2}$	
$\bar{l}_1 = 2\tau^{-1/2}/3$	$L_A = 2\tau^{1/2}$	
$\bar{n}_{20} = 6$	$\bar{l}_2 = 4\tau^{-1/2}$	$\bar{a} = \tau^{-1}$

Tabulka 2.5: Přehled charakteristik Dirichletovy mozaiky v závislosti na intenzitě τ .

$$\text{Var}(A, U, N) = \begin{pmatrix} 0,280/\tau & 0,953 & 0,568 \\ 0,953 & 0,947/\tau & 0,502 \\ 0,568 & 0,502 & 1,782 \end{pmatrix}$$

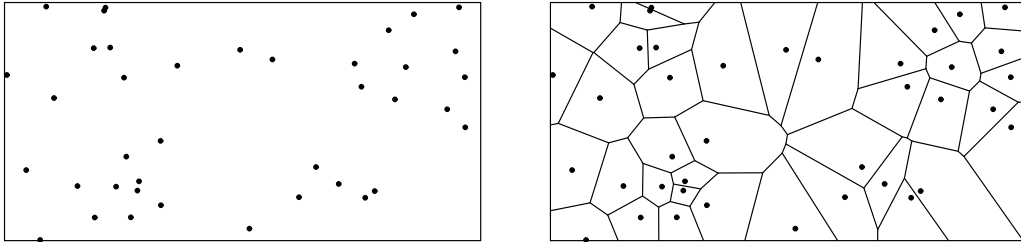
Tabulka 2.6: Variační matice typické buňky Dirichletovy mozaiky s intenzitou τ .

$\lambda_0 = 80$	$\lambda_1 = 120$	$\lambda_2 = 40$
$\bar{n}_{02} = 3$	$\bar{l}_0 = 0,3162$	
$\bar{l}_1 = 0,1054$	$L_A = 12,6491$	
$\bar{n}_{20} = 6$	$\bar{l}_2 = 0,6325$	$\bar{a} = 0,0250$

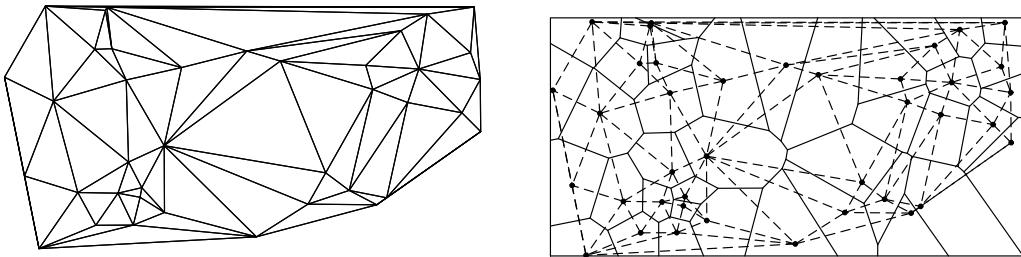
Tabulka 2.7: Přehled charakteristik Dirichletovy mozaiky s intenzitou $\tau = 40$.

$$\text{Var}(A, U, N) = \begin{pmatrix} 0,007 & 0,953 & 0,568 \\ 0,953 & 0,023 & 0,502 \\ 0,568 & 0,502 & 1,782 \end{pmatrix}$$

Tabulka 2.8: Variační matice typické buňky Dirichletovy mozaiky s intenzitou $\tau = 40$.



Obrázek 2.4: Vlevo: Realizace rovinného Poissonova stacionárního bodového procesu Φ s intenzitou $\tau = 40$ ve výřezu okna s jednotkovým obsahem. Vpravo: Dirichletova mozaika $V(\Phi)$ generovaná bodovým procesem Φ .



Obrázek 2.5: Vlevo: Duální Delaunayova triangulace $D(\Phi)$ k Dirichletově mozaice $V(\Phi)$. Vpravo: *Superposition* Dirichletovy mozaiky $V(\Phi)$ a duální Delaunayovy triangulace $D(\Phi)$.

Literatura

- [1] Aurenhammer F. (1987): Power diagrams: properties, algorithms and applications. *SIAM Journal on Computing* **16**, 78–96.
- [2] Baccelli F., Gloaguen C., Zuyev S. (2000): Superposition of planar Voronoi tessellations. *Communications in Statistics, Stochastic Models* **16**, 69–98.
- [3] Gray N.H., Anderson J.B., Devine J.D., Kwasnik J.M. (1976): Topological properties of random crack networks. *Mathematical Geology* **8**, 617–626.
- [4] Hug D., Schneider R. (2007): Typical cells in Poisson hyperplane tessellations. *Discrete and Computational Geometry* **38**, 305–319.
- [5] Maier R., Schmidt V. (2003): Stationary iterated tessellations. *Advances in Applied Probability* **35**, 337–353.
- [6] Mecke J. (1984): Parametric representation of mean values for stationary random mosaics. *Journal of Theoretical and Applied Statistics* **15**, 437–442.
- [7] Miles R.E. (1964): Random polygons determined by random lines in a plane. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **52**, 901–907.
- [8] Miles R.E. (1970): On the homogeneous planar Poisson point process. *Mathematical Biosciences* **6**, 85–127.
- [9] Møller J. (1989): Random tessellations in \mathbb{R}^d . *Advances in Applied Probability* **21**, 37–73.

- [10] Møller J. (1992): Random Johnson-Mehl tessellations. *Advances in Applied Probability* **24**, 814–844.
- [11] Rataj J. (2000): *Bodové procesy*. Karolinum, Praha.
- [12] Pawlas Z.: *Prostorové modelování, prostorová statistika 1*.
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/pawlas/2010/STP005/prostor.pdf>
- [13] Pawlas Z.: *Prostorové modelování, prostorová statistika 2*.
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/pawlas/2010/STP154/prostor2.pdf>
- [14] Stoyan D., Kendall W.S., Mecke J. (1986): *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [15] Ziegler G.M. (1995): *Lectures on polytopes (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer-Verlag, New York.